

# 分数の計算とトランプの数学\*

飯高 茂

(学習院大学理学部教授)

## 1 シャフリング

トランプで遊ぶときにはよく切ることが大切です。トランプのカードを2つに分けて、それを交互に混ぜ合わせて切ることをシャフリングといいます。高度なシャフリング技の持ち主は多くの尊敬を集めることができますね。さてシャフリングをした結果、カードはどんな風に並ぶのでしょうか。それを次に考えてみます。

簡単のために、10枚のトランプでシャフリングをしてみます。

最初は（便宜上、Aのカードを1とした）

12345678910

です。さてこれを2つにわけて

12345 678910

とし、右側から始めて交互に並べると、次のようになります。

61728 394105

確かに、順番が見事に乱れていることがわかります。

これを繰り返すとどうなるでしょう。実は、ここに面白い数学が隠れているのです。

最初はもっとやさしい分数の計算をしてみます。皆さんも計算してくださいね

---

\*藤岡市おもしろ数学教室(2007年10月24日鬼岩中学校校体育館,出席者全校生徒200名ほどおよび教員その他)

## 2 分数の計算

問題 分数  $\frac{1}{7}$  を縦書きの計算で小数に展開してください

「誰でもできると思うけど、君やってくれる？ やって下さいね. ありがとう。」

$$\begin{array}{r} 0 . 1 4 2 8 5 7 \\ 7 \overline{) 1 0} \\ \underline{7} \\ 3 0 \\ \underline{2 8} \\ 2 0 \\ \underline{1 4} \\ 6 0 \\ \underline{5 6} \\ 4 0 \\ \underline{3 5} \\ 5 0 \\ \underline{4 9} \\ 1 \end{array}$$

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857 \dots = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

こういう分数の計算は、日本の生徒さんの得意とするところなのです。日本のように分数の計算をきちんと教える国は現代の世界では珍しい部類に入ります。多くの国での学校教育で計算は電卓に頼っています。だから、小数の計算しかできないのです。君たちは何の苦もなくこういう分数の計算ができることを誇りに思っているのです。

この種の機械的計算には十分なれていますね。次に帯分数で計算をやり直してみましよう。

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} \text{ (帯分数に直して、分子を10倍してつぎに)}$$

$$\frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7} \text{ (同じようにして続ける)}$$

$$\frac{20}{7} = 2 + \frac{6}{7}$$

$$\frac{60}{7} = 8 + \frac{4}{7}$$

$$\frac{40}{7} = 5 + \frac{5}{7}$$

$$\frac{50}{7} = 7 + \frac{1}{7} \text{ (分子に1が出た。これからは繰り返し)}$$

かくしてできた数列 {1 4 2 8 5 7} を **商の列**、数列 {3 2 6 4 5 1} を **あまりの列**、**周期は6** といいます。

商の列としてできた数 {1 4 2 8 5 7} はとても面白い性質をもっています。6個の数からできているので、2分してできた1 4 2と8 5 7とを足してみましよう。(表1)

表 1:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 4 \quad 2 \\ +) \quad 8 \quad 5 \quad 7 \\ \hline 9 \quad 9 \quad 9 \end{array}$$

さらに3分してできた1 4と2 8と5 7とを足してみましよう。(表2)  
こうして何度も9が出てきました。

ついでにあまりの列も足してみよう。(表3)

ボーイングの飛行機 B-777 が出てきました。不思議ですね。

問題 分数  $\frac{1}{11}$  を縦書きの計算で小数に展開してください

問題 分数  $\frac{1}{13}$  を縦書きの計算で小数に展開してください

表 2:

$$\begin{array}{r} 1\ 4 \\ 2\ 8 \\ +) 5\ 7 \\ \hline 9\ 9 \end{array}$$

表 3:

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 6 \\ +) 4\ 5\ 1 \\ \hline 7\ 7\ 7 \end{array}$$

問題 分数  $\frac{1}{17}$  を縦書きの計算で小数に展開してください

### 3 6進法で計算

さて  $\frac{1}{11}$  の計算は易しいのですが、10進ではなく6進法で計算してください。実はかなり面倒です。

やってみましょうね。誰かやってみてください。やり方は帯分数に直したあと、分子を10倍ではなく、6倍してするのです（結局、講師自身がする羽目になってあわてた）。

$$\frac{6}{11} = 0 + \frac{6}{11} \text{ (帯分数に直して、分子を6倍してつぎに)}$$

$$\frac{36}{11} = 3\frac{3}{11} \text{ (帯分数に直して、分子を6倍し、同様に続ける)}$$

$$\frac{18}{11} = 1\frac{7}{11}$$

$$\frac{42}{11} = 3\frac{9}{11}$$

$$\frac{54}{11} = 4\frac{10}{11}$$

$$\frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$$

$$\frac{30}{11} = 2\frac{8}{11}$$

$$\frac{48}{11} = 4\frac{4}{11}$$

$$\frac{24}{11} = 2\frac{2}{11}$$

$$\frac{12}{11} = 1\frac{1}{11}$$

分子に1が出たので,元に戻ります.かくしてできた数列{0313452421}が商の列, 数列{63791058421}があまりの列, そして周期が10です.

余りの列には1,2,3,...,10が全部出てきましたが,その並び方はすごく違いますね.

{0313452421}を2分して

表 4:  $\frac{1}{11}$  の6進展開

$$\begin{array}{r} 0 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \\ +) \quad 5 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \end{array}$$

今度は,5が並びました.1学期の成績と2学期の成績を足したら,全部5になった.すごいですね.

問題  $\frac{1}{13}$  を7進法で計算してください.

## 4 シャフリングを繰り返す

10枚のカードを使ったシャフリングの話に戻ります。生徒さんに出ていただいて、シャフリングをしてもらいます。ここにトランプがありますから、これで実際にシャフリングをし、その結果を別の人に書いてもらいます。（実は、転記ミスがでてうまくいかない。講師がやり直した）

さて、できた表を見ると5回繰り返した結果逆順になることがわかりました。さらに5回すると元に戻ります。すなわち、10回繰り返すと、元の並び順に戻りました。

これは驚くべきことですね。シャフリングを繰り返すと、トランプをよく切ることになるのだから、切れば切るほど、並び順が複雑になりそうなのですが、繰り返した結果元に戻ってしまったのです。

この結果があらかじめ分かっていたら、これを利用して得をすることができますね。トランプでずるいことをするのはと違えます。元に戻る回数を数学の力であらかじめ知ってこれを利用することができます。知識は力なりですね。

表での左端の数は回数を示します。そこで3列目の数を縦に眺めてみましょう。

これは、どこかで見た数です。そうです。 $\frac{1}{11}$ を6進法で小数に展開してできた数ができました。トランプが分数の計算を自分でしていたのです。

4列目の数をみると、3列目の数を縦にずらしてできた数です。上と下をつないで、時計のようにした方がわかりやすいでしょうね。

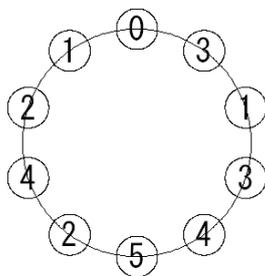


図 1: 3列目の数

回数	6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
2		3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
3		7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
4		9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
5		10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6		5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
7		8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
8		4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
9		2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

表 5: 10 枚トランプ

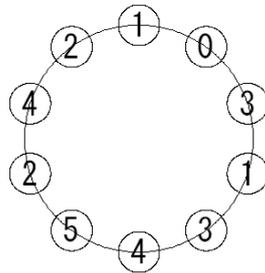


図 2: 4 列目の数

表 6:

最初のカード	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
回転度数	10	9	2	8	6	1	3	7	4	5

## 5 数はどうなっているか

最初のカードの数は1ですが、シャフリングした結果、最初の数字は6になりました。そこで、試みに他のカードの数も6倍してみましょう。すると、シャフリングした結果の数の求め方がわかります。

すなわち、カードの各数を6倍します。ただし11を超えたら11を引くのです。これで、シャフリングした結果がわかるのです。

例えばカードの数が5ならどうなるか？ 6倍して30。そこで、11を2回引きます。

$$30 - 11 - 11 = 8$$

だから、8になる。確かに、シャフリング後の、5番目のカードには8がきています。

さらにシャフリングをくり返すとどうなるでしょう。シャフリングを10回すると、元の並び方に戻るのです。5回シャフリングすると

$$10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$$

となり、逆順になることがわかります。

## 6 トランプのカード

ジョーカーを除くとトランプのカードは52枚ありますね。このときは、26回シャフリングしてようやく、逆順になり、さらに26回すると元に戻ることがわかります。

シャフリングを分数の計算で行うと、 $\frac{1}{53}$ について、まず分子を27倍します。さらに分子を27倍してから、帯分数に直し、その真分数部分の分子を27倍して、また帯分数に直すことを繰り返すと、分子の部分にシャフリングをしたときの、1枚目のカードの数が順に出てきます。

分数の計算としては結構大変な労力が必要です。そこでエクセルに任せてやってもらいましょう。コンピュータでの準備をします。

(教育委員会で用意したwindows 2000にusbのメモリーを差すと、再起動を要求したりで時間がかかる。仕方ないから急造のネタでしのご)

「ところで、平方根を知っていますか？  $\sqrt{2}$ を『一夜一夜にひと見頃に』などと言って覚えますね。えっ、知らないですか（後で、きいたら、中学3年で平方根を学習するのだそうだ）」

「いいことを教えてあげよう。『次郎、四股名、五井さん』というんだ。言ってみよう。これは大輪教授に考えた $\sqrt{7}$ の新しい覚え方です。」

ようやく、プロジェクターにエクセルの表が写るようになりました。

2枚のジョーカーを加え、54枚でシャフリングをすれば10回で逆順、さらに10回すれば、元に戻ります。この場合は、52枚の時、52回で元に戻ったのと比べれば、案外簡単になったと言えます。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	5	5	11	6								
2	回数	6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1		6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
4	2		3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
5	3		7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
6	4		9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
7	5		10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
8	6		5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
9	7		8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
10	8		4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
11	9		2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
12	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	11		6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
14	12		3	6	9	1	4	7	10	2	5	8

図 3: カードは5 2枚

トランプでは、よく切ることが大切です。シャフリングを鮮やかにして、さらに繰り返せばますます良く切ったことになり、分からなくなりそうですが、54枚でシャフリングをすれば、10回で逆順なのだから、これを知っておいて、トランプ手品に見せかけたら、きっと大受けするでしょう。

しかし、シャフリングを正確にするのは、よほどの名人でないと難しいですね。ときどき、失敗してすうまい落として、それを入れ直したり、すると、下手ですから、きっとそんなことをしてインチキしていると思われるかもしれません。

実際には、そういった失敗があるため、予測しがたいシャフリングになるのでしょう。結果として、うまくトランプが切れれば、それでOKです。

シャフリングにはいろいろな方法があるそうです。たとえば、ある惑星に住む生物は手が3本ありそれで、トランプのシャフリングをするとしましょう。彼らはトランプを3つに分けて巧みに合わせているかもしれません。人間が3に分けるシャフリングをするのは難しそうですが、実際トランプの本にはそのやり方が説明してあります。

シャフリングの新しいやり方をいろいろ工夫することができます。どんなやり方でもいいのですがそれを繰り返すと、いつの間にか必ず元の並び方に戻ります。これは数学での群論にある定理です。これは非常に不思議なことです。

トランプを切るとき、繰り返して十分よく切りますね。こんなに、繰り返したから、カードの順番はめちゃくちゃになってと思うのが常識です。

しかし、数学の定理によればある回数だけ繰り返すと必ず元に戻るといいます。切ったことにならないのです。52枚で普通のシャフリングをすると、52回してようやく元に戻ります。

一般に、 $2n$ 枚のカードで普通のシャフリングをすると、 $2n$ 回してようやく元に戻ったとすると、 $2n+1$ は素数になる、という数学の定理があります。

$52+1=53$ は素数ですが、 $54+1=55$ は5でわれるので、素数ではありません。53は素数だという事実の中にトランプの面白さの秘密があります。このように、トランプには面白い数学が隠れています。

講演の後、質疑応答の時間があつた。意外なことに中学生は次から次へ質問が切れ目無く出た。