

ゲームの理論による対立と協力の関係の分析

釜江哲朗 (松山大学経済学部)

1. ゲームの理論とは

ゲームの理論は今日のコンピュータの生みの親でもある数学者ノイマンと経済学者モルゲンシュテルンによって1940年代に生み出された比較的新しい学問である。ここでいうゲームというのは、碁、将棋、マージャンといった娯楽から、人と人の駆け引き、社会的活動、個人や企業の経済活動、国家間の外交関係等を含む広範なもので、要は、複数の行動主体が各々の目的達成のため、対立したり協力する過程を分析する学問である。ゲームを構成するのは「プレイヤー」と呼ばれる複数の行動主体、各プレイヤーの持っている戦略の集合、および、すべてのプレイヤーによって戦略が選ばれたときに、各プレイヤーが得る利得を定める関数である。すなわち、

- (1) プレイヤーの集合 $N := \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 2$),
- (2) 各 $i \in N$ に対して、プレイヤー i のもつ戦略集合 X^i ,
- (3) 各プレイヤー i ($i \in N$) によって戦略 $x^i \in X^i$ が選ばれたとき、選ばれた戦略の組 (x^1, x^2, \dots, x^n) の関数として定まる各プレイヤー i ($i \in N$) の利得 $f^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$

という組 $(N, (X^i; i \in N), (f^i; i \in N))$ がゲームを定める。

このような設定で、各プレイヤーが選んだ戦略が安定したもの、すなわち、各々のプレイヤーが自分だけ戦略を変えても自分の利得が増加することのない戦略の組を、このゲームの「均衡解」と呼ぶ。すなわち、戦略の組 (x^1, x^2, \dots, x^n) が均衡解であるとは、任意の $i \in N$ に対して

$$f^i(x^1, \dots, x^i, \dots, x^n) = \max_{z^i \in X^i} f^i(x^1, \dots, z^i, \dots, x^n)$$

が成立することをいう。換言すれば、各プレイヤーは自分以外のプレイヤーの戦略を所与のものとしたとき、最善の戦略を選んでいるということであり、「均衡解」とは「最善手」の組のことである。

戦略が各プレイヤーによっていつきに選ばれる場合、このゲームは「戦略形」と呼ばれる。これに対して、戦略が時間の経過とともに順次選ばれる場合「展開形」と呼ばれる。戦略形ゲームを含む広いゲームのクラスである展開形ゲームでは、戦略が選ばれる順番を決める「木」とともに、各手番でプレイヤーがもつ情報の不完全さを表現する「情報分割」(木の頂点の分割)が与えられる。ここでは、展開形ゲームとしては、情報分割が各点分割となる完全情報ゲームのみを考察する。さらに、上の定義に当

てはまらない「提携形」ゲームを考察する．そこではもっぱらプレイヤー間の協力関係と利得の再分配が考察される．また，協力関係を前提としない戦略形ゲームでも，それが繰返されると協力関係が醸成されることが知られている．これは，2005年のノーベル経済学賞を受賞したロバート・オーマン氏の業績の一つとして，その受賞理由にも記されている．

本稿は，2006年日本数学会秋季総合分科会での市民講演会（9月18日，大阪市立大学）の予稿に手を加えたものであり，体系的記述というよりはゲームの理論の紹介を趣旨としたものである．

2．戦略形ゲームの例

例1（夫婦のいさかい） 週末をどう過ごすかで，夫婦の好みが変わっている．夫は野球観戦を望み，妻はコンサートを望んでいる．とはいえ，別々に過ごすのはお互いに最悪だ．このとき，夫婦はどのように行動すればよいただろうか．このゲームではプレイヤーは夫婦の2人，どちらも2つの戦略（野球観戦，コンサート）をもっている．夫の利得は，夫婦ともに野球観戦を選ぶときに最高で10となり，夫婦ともにコンサートを選ぶとき次善で6となり，別々の戦略を選ぶときは0となる．妻の利得は夫婦ともにコンサートを選ぶときに最高で10となり，夫婦ともに野球観戦を選ぶとき次善で4となり，別々の戦略を選ぶときは0となる．これを利得表にまとめると

夫 \ 妻	野球観戦	コンサート
野球観戦	(10,4)	(0,0)
コンサート	(0,0)	(6,10)

となる．ここで，たてに並んだ2つの戦略は夫の戦略を意味し，よこに並んだ2つの戦略は妻の戦略を意味する．表の中の数字の組は利得関数値の組であり，たとえば(10,4)は夫も妻も野球観戦を選んだ場合，夫の利得が10，妻の利得が4であることを意味している．

このゲームの均衡解は（野球観戦，野球観戦）の戦略の組，および（コンサート，コンサート）の戦略の組である．なぜなら，これらの組が実現しているとき，両者とも自分だけ戦略を変えることは得にならないからである．

例2（囚人のディレンマ） 2人の共犯者 A, B が逮捕され別室で取調べを受けている． A, B ともに犯罪を否定したいのだが，自分が否定して共犯者が自白した場合は，自分是不利な立場におちいる．逆に，自分だけが自白し共犯者が否定した場合は，取り調べに協力したことにより情状酌量

を受けることができる。したがって、利得表は以下のようなものとなる。

$A \setminus B$	自白	否定
自白	(2,2)	(10,0)
否定	(0,10)	(8,8)

このゲームの均衡解は(自白, 自白)の組である(否定, 否定)の組の方が双方ともより良い利得が得られるにもかかわらず、これは均衡解とはならない。5節で論じる繰返しゲームでは(否定, 否定)の組が均衡解となる。

例3 (じゃんけん) A, B の2人がじゃんけんをする。このときの利得表は以下ようになる。

$A \setminus B$	石	はさみ	紙
石	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
はさみ	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
紙	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

このゲームでは、上の意味での均衡解はないが、「混合戦略」を考えると均衡解はある。すなわち、両者とも石、はさみ、紙をそれぞれ $1/3$ ずつの確率で出すというものである。ただし、双方のこの選択は独立に行われる。このときプレーヤ A の利得の期待値は

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = 0$$

であり、プレーヤ B についても同様である。また、双方とも自分だけが手を変えても利得の期待値は0にとどまる。したがって、この混合戦略の組は均衡解となる。

3. 展開形ゲームの例

例4 (新規参入) ある町にはすでに B スーパーが出店しているが、ここに A スーパーも出店することを計画している。 A スーパーが出店した場合、 B スーパーは利益を無視した安売りで対抗することも考えている。したがって、 A の戦略は出店する、出店しないの2つであり、 B の戦略は安売りする、安売りしないの2つである。このゲームは図1のような「木」で表現される。ここで、 $[A]$ 、 $[B]$ は A, B の「手番」であることを意味し、木の終端には利得関数値の組が書かれている。たとえば(0, 10)は A が出店しない場合(B の戦略と無関係に) A の利得は0、 B の利得は10を意味する。

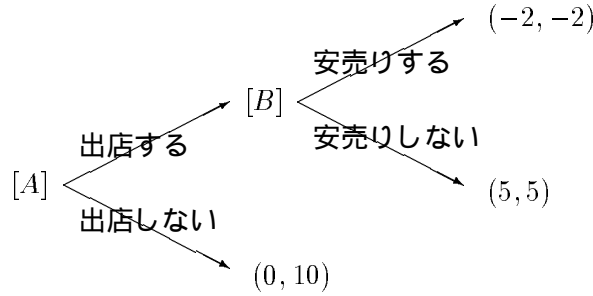


図 1: 新規参入

このゲームの均衡解は (出店する , 安売りしない) の組と (出店しない , 安売りする) の組の 2 つである . 後者が均衡解なのは A だけ戦略を変え出店すると , B の安売りによって損をする一方 , A が戦略を変えなければ , B の戦略とかかわりなく利得ベクトル $(0, 10)$ にたどり着くからだ . このうち , 前者は理にかなったものだが , 後者は手番の時間差を考えると , 合理性に欠けるものである . すなわち , A が出店するか否かを決める前には 「安売りするぞ」 という脅しは意味があり , この結果出店されなければ B は万々歳だ . しかし , ひとたび出店が決定されると , 安売りというのは B にとっても良い選択ではなくなる . 展開形ゲームでは時間とともにゲームが進行する . この結果たどりつく木のある分岐点を出発点と考えた 「部分ゲーム」 を考えることができる . どの部分ゲームにおいても均衡解となっている解こそ理にかなったものといえる . このような解は 「一貫した均衡解」 と呼ばれる . (出店する , 安売りしない) は図 2 の部分ゲームの均衡解でもあるので一貫した均衡解だが (出店しない , 安売りする) はそうではない .

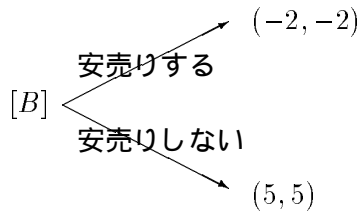


図 2: 部分ゲーム

ただし , この部分ゲームではもはや A の手番はないので , A の戦略 , 出店する , 出店しないは利得と無関係となる .

例 5 (夫婦のいさかい) 例 1 において , 妻が最初に戦略を選び , それを夫に知らせることとする . このときは , 図 3 の展開形ゲームとなる .

この場合 , 例 1 の均衡解はともに一貫した均衡解となるが , 実際に実現

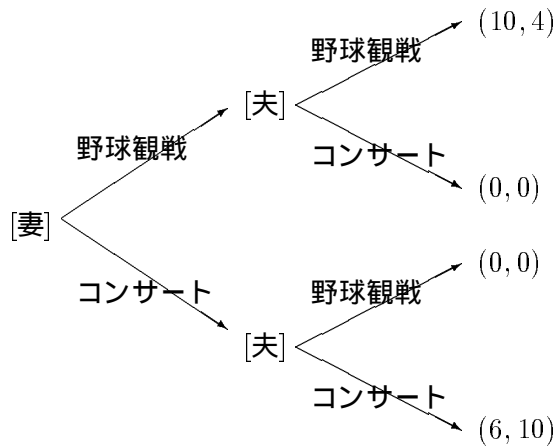


図 3: 夫婦のいさかい

するのは (コンサート, コンサート) である。なぜなら「後ろからの帰納法」で戦略を決めて行くと、図 3 の右上の部分ゲーム (図 4 の左) で夫が選ぶのは、野球観戦であり、図 3 の右下の部分ゲーム (図 4 の右) で夫が選ぶのは、コンサートである。

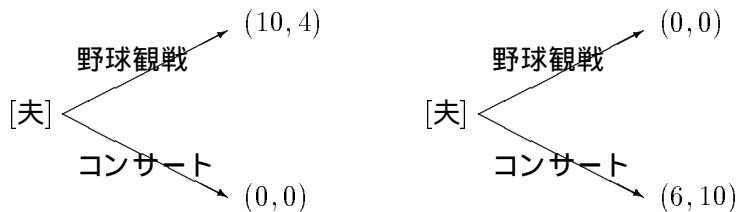


図 4: 部分ゲーム

したがって、妻が野球観戦を選べば、夫も野球観戦を選び、利得ベクトル (10, 4) に到達する。また、コンサートを選べば、夫もコンサートを選び、利得ベクトル (6, 10) に到達する。妻は当然自分の利得の多い方、(6, 10) を選ぶことになる。

この場合は、先に手番を持つ方が有利となるが、じゃんけんの後出しが有利なように、いつもそうとは限らない。

次に、松山大学の松本直樹氏による展開形ゲームを紹介する（数字は少し手直した）。これは「可愛い子には旅をさせよ」という教訓を説明するものである。

例 6（親子ゲーム） 図 5 の展開形ゲームを考えよう。すなわち、子供が

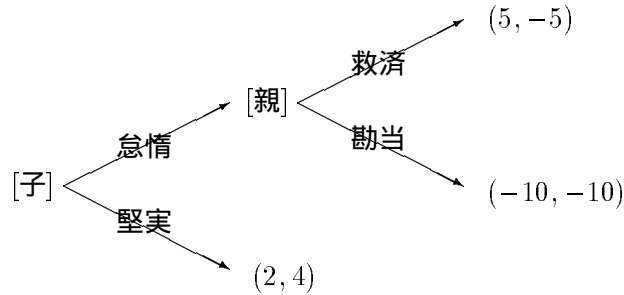


図 5: 親子ゲーム 1

堅実な生活を送っていると親は安心で、また、子供もそれなりに満足である。したがって、子の利得は 2 で親の利得は 4 となる。ところが、子供が怠惰な生活を送っていると、親は経済的な援助をして救済するか勘当するかを選択をしいられる。

このゲームに後ろからの帰納法を適用しよう。図 6 の部分ゲームにおい

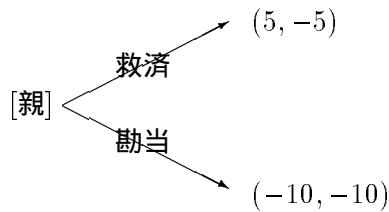


図 6: 部分ゲーム

て親は好ましくはないものの、マイナスのより少ない救済を選ぶ。このことを知っている子は、怠惰にすぎし親の救済を受ける方を選択する。なぜなら、この場合の子の利得は 5 であり、堅実にすぎず場合の利得 2 より大きいからである。

この結論では救いようがない。そこで先人の知恵「可愛い子には旅をさせよ」が生かされる。すなわち、子が堅実か怠惰かの生活を選ぶ前に、親は子を旅に出すか否かの選択をするのだ。この結果、以下の展開形ゲームが実現する。ここで、旅に出さない場合は先の親子ゲーム 1 の始点につながる。

このゲームに後ろからの帰納法を適用する．親子ゲーム 1 では後ろからの帰納法の結果，利得ベクトル $(5, -5)$ に到達する．他方，旅に出す方の

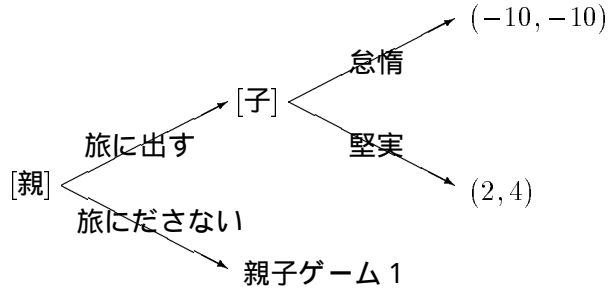


図 7: 親子ゲーム 2

枝を考えると，子は怠惰か堅実かの選択枝で，堅実を選ばざるをえない．旅に出ているため，親の救済はなく，怠惰にすごすと悲惨な結末（利得 -10 ）が待っているからである．この結果，この枝の利得ベクトルは $(2, 4)$ となり，親は旅に出す場合の利得 4 と旅に出さない場合の利得 -5 を比較して，旅に出す方を選択する．このようにして，親は子を旅に出し，世間のきびしさを知った子は堅実な生活をおくることになるのである．

4．均衡解の存在

戦略の概念を「混合戦略」まで広げた上で，どのようなゲームにも均衡解が存在する．これはナッシュが 1951 年に証明したもので，ナッシュの均衡解とも呼ばれる．この証明は角谷の不動点定理を用いると簡明となる．

角谷の不動点定理 (Kakutani, 1941) 有限次元ユークリッド空間内の有界閉凸集合 K の点 x に対して K の閉凸部分集合 $T(x) \neq \emptyset$ を対応させる写像 T が半連続（すなわち， $y_m \in T(x_m)$ かつ $\lim x_m = x$, $\lim y_m = y$ のとき $y \in T(x)$ ）であるなら $x \in T(x)$ となる点 $x \in K$ が存在する．

均衡解の存在 (Nash, 1951) 各プレイヤーが（0 でない）有限個の純粋戦略から生成される混合戦略の全体を戦略集合としてもつとき，均衡解は存在する．

（証明）各 $i \in N$ に対して，プレイヤー i のもつ純粋戦略を $\zeta_1^i, \zeta_2^i, \dots, \zeta_{r_i}^i$ ($r_i \geq 1$) とするとき，これらを p_1, p_2, \dots, p_{r_i} (各 $p_i \geq 0$, $p_1 + p_2 + \dots + p_{r_i} = 1$) の確率で混合した混合戦略を $(p_1, p_2, \dots, p_{r_i}) \in \mathbb{R}^{r_i}$ と表す． X^i をこのような混合戦略の全体とし， $K := X^1 \times X^2 \times \dots \times X^n$ とおく． K は $\mathbb{R}^{r_1+r_2+\dots+r_n}$ の空でない有界閉凸集合となる．各 $i \in N$ に対して利得関

数 f^i は、純粹戦略の組に対して定義されたものの確率的な期待値として定義されるので、 $f^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ は K 上の多重線形な関数となる。

K 上の点 $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ に対して、 Y^i ($i \in N$) を

$$f^i(x^1, \dots, y^i, \dots, x^n) = \max_{z^i \in X^i} f^i(x^1, \dots, z^i, \dots, x^n)$$

を満たす $y^i \in X^i$ の全体とし、 $T(x) = Y^1 \times Y^2 \times \dots \times Y^n$ と定義する。このとき、 f^i は z^i に関して線形で、かつ、 X^i は空でない有界閉凸集合なので、 Y^i は空でない閉凸集合となる。よって、 $T(x)$ は K の空でない閉凸集合となる。また、 $y_m \in T(x_m)$ かつ $\lim x_m = x$ 、 $\lim y_m = y$ のとき、各 $i \in N$ に対して、 f^i は連続なので、任意の $z^i \in X^i$ に対して

$$\begin{aligned} f^i(x^1, \dots, y^i, \dots, x^n) &= \lim f^i(x_1^m, \dots, y_i^m, \dots, x_n^m) \\ &\geq \lim f^i(x_1^m, \dots, z^i, \dots, x_n^m) \\ &= f^i(x^1, \dots, z^i, \dots, x^n) \end{aligned}$$

が成立する。故に、 $y \in T(x)$ となり、対応 T は半連続となる。よって角谷の不動点定理より、 $x \in T(x)$ となる点 $x \in K$ が存在する。すなわち、任意の $i \in N$ に対して

$$f^i(x^1, \dots, x^i, \dots, x^n) = \max_{z^i \in X^i} f^i(x^1, \dots, z^i, \dots, x^n)$$

が成立し、 x は均衡解となる。

5. 繰返しゲーム

昨年度のノーベル経済学賞受賞者の一人オーマンは長年ゲーム理論の様々な分野の発展に貢献してきたが、受賞理由には繰返しゲームへの貢献が特記されている。ゲームが繰返されることより「しっぺ返し」や「報復」といった戦略も均衡解となるため、一時は自分に有利だが相手に打撃を与える戦略は、往々にしてこのような対抗手段の標的となり、長期的には自分にとっても不利となる。このため、長期的視野に立った協力関係ができる。

1 回きりの戦略形ゲームを $G := (N, (X^i; i \in N), (f^i; i \in N))$ とする。また、 $0 < \rho < 1$ を満たす ρ (割引率) が与えられたとき、繰返しゲーム $G_\rho^\infty = (N, (S^i; i \in N), (F^i; i \in N))$ を次のように定義する。

- (1) プレイヤーの集合 N 、
- (2) 各プレイヤー $i \in N$ の戦略集合 S_i は写像の無限列 $\xi^i := (\xi_1^i, \xi_2^i, \dots)$ の全体。ただし、

$$\xi_j^i : (X^1)^{j-1} \times \dots \times (X^n)^{j-1} \rightarrow X^i$$

この結果，実現する戦略の列 $\bar{\xi}_j^i \in X^i$ ($i \in N, j = 1, 2, \dots$) は以下のように帰納的に定義される．

$$\bar{\xi}_j^i = \xi^i(\bar{\xi}_1^1 \cdots \bar{\xi}_{j-1}^1, \dots, \bar{\xi}_1^n \cdots \bar{\xi}_{j-1}^n) \quad (i \in N, j = 1, 2, \dots),$$

(3) 各プレイヤー $i \in N$ の利得 \mathbb{F}^i は

$$\mathbb{F}^i(\xi^1, \dots, \xi^n) = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \rho)^{j-1} f^i(\bar{\xi}_j^1, \dots, \bar{\xi}_j^n).$$

例 7 (悪の協力関係) 例 2 (囚人のディレンマ) の繰返しゲームを考えよう． A, B は別件で何度も共犯となり取調べを受けるとしよう．両者とも，犯罪をかくすため，相手が自白しない限り自分も自白しないという戦略をとる．ただし，相手が自白すれば，次回からは自分も自白するものとする．この戦略の組は，十分に小さい割引率 ρ のもとでは均衡解となる．なぜなら，この戦略から A だけそれて，ある時点で自白したとすると，その時点だけでは A の利得は 8 から 10 に増えるが，次回からは B が報復のため自白するため，2 の利得しか期待できない．すなわち，8, 8, 8, \dots であった各回の利得が 8, \dots , 8, 10, 2, 2, \dots と変わりトータルな利得は減少する． B についても同様で「相手が自白しない限り自分も自白しない，相手が自白すれば，次回からは自分も自白する」という報復戦略の組が均衡解となり，結果として両者とも自白しないという協力関係が成立する．

このような悪の協力関係だけではなく，国家なり社会の秩序も，つきつめればこのような協力関係を基礎にしている．すなわち，全体としての利得を大きくするため，各個人は多少の損をがまんする戦略をとる．これからそれるとその回はよくとも，次回からは他の人たちからの報復を受け，結局不利益となるからだ．この報復は，法律であったり「村八分」といった社会的制裁であったりする．繰返しゲームの観点から社会現象を分析するという試みもある．オーマンと同時にノーベル経済学賞を受賞したシェリングはゲーム理論にもとづいて，アメリカでの人種住み分け現象を解析した．

6. 提携形ゲーム

プレイヤー全体の集合を N とする． N の一部または全体 S が提携し， S に属するプレイヤーの利得の和を最大にするようにお互いの戦略を調整するものとする．この結果得られる提携 S の利得 (すなわち， S に属するプレイヤーの利得の和) を $v(S)$ と記す．このようにして与えられる集合 N と N のすべての部分集合 S に対して利得 $v(S)$ を定める関数 v の組 (N, v)

を提携形ゲームと呼ぶ。このような提携形ゲームでは、全員が連携して得られる利得を各プレイヤーにどのように分配するかが問題となる。このような分配で合理的かつ安定なものが、提携形ゲームの「解」と呼ばれる。ここでは、とくに「コア」「仁」「シャプレイ値」について論じる。

例8（起業家集団） 起業を志す3人1,2,3が様々な組合せで起業した場合に期待できる利得を

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 2, & v(\{2\}) &= 1, & v(\{3\}) &= 3 \\ v(\{1,2\}) &= 5, & v(\{1,3\}) &= 6, & v(\{2,3\}) &= 6 \\ v(\{1,2,3\}) &= 9 \end{aligned}$$

とする。ここで、全員が共同で起業した場合の利得9を3人にどう分配するかを考える。3人への分配額を x_1, x_2, x_3 とする。これが

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 \geq 2, & x_2 \geq 1, & x_3 \geq 3 \end{aligned}$$

を満たすとき、分配額の組 (x_1, x_2, x_3) を「配分」と呼ぶ。これは全員が提携した場合の利得の分配で、各人が他人との協力なしでも獲得できる利得を保証したものである。

たとえば、 $(2, 2, 5)$ は配分となるが、この分配は安定したものではない。なぜなら、配分 $(2.5, 2.5, 4)$ を考えると、プレイヤー1と2に対する分配は増加している。さらに、新しい配分でのこの2人を合せた分配額5は、 $v(\{1,2\}) = 5$ なので、他のプレイヤーの協力なしで獲得可能である。すなわち、プレイヤー1と2は有利で実現可能なあらたな配分 $(2.5, 2.5, 4)$ を提案することができまる。このような場合、配分 $(2, 2, 5)$ は配分 $(2.5, 2.5, 4)$ によって（集合 $\{1,2\}$ 上で）「支配」されるという。

他の配分によって支配されない配分の集まりを「コア」と呼ぶ。配分 $(2.5, 2.5, 4)$ はコアに含まれる。また、配分 $(3, 2, 4)$ もコアに含まれる。このようにコアが複数個の配分を含む場合、どの配分が最も合理的だろうか。これに関して「仁」という概念が導入される。

配分によって、各人は他のプレイヤーの協力なしで獲得可能な額以上の利得を獲得する。この差額を「過剰分配」と呼ぶ。配分 $(2.5, 2.5, 4)$ の過剰分配ベクトルは $(0.5, 1.5, 1)$ となる。また、配分 $(3, 2, 4)$ の過剰分配ベクトルは $(1, 1, 1)$ となる。個々のプレイヤーだけでなく（空と全体を除く）提携についても過剰分配を考えると、配分 $(2.5, 2.5, 4)$ の過剰分配ベクトルは $(0.5, 1.5, 1, 0, 0.5, 0.5)$ 、配分 $(3, 2, 4)$ の過剰分配ベクトルは $(1, 1, 1, 0, 1, 0)$ となる。ただし、ベクトルの要素は、順にプレイヤー1,2,3および提携 $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ の過剰分配を表している。

「仁」は過剰分配の絶対値の最大値を最小にする配分として定義される．過剰分配の絶対値の最大値は配分 $(2.5, 2.5, 4)$ に対しては 1.5 となり，配分 $(3, 2, 4)$ に対しては 1 となる．各プレイヤーに対する過剰分配の合計額は 3 なので，過剰分配の最大値は 1 以上となるので，これが 1 となる配分 $(3, 2, 4)$ は仁となる．過剰分配の絶対値の最大値を最小にするということは，過剰分配のでこぼこを可能な限り少なくする配分ということである．過剰分配の絶対値の最大値を最小にする配分が複数個存在するときは，その最大値をとる要素を一つずつ除いたベクトルを考え，そこでの絶対値の最大値を最小にするものを選ぶ．この操作を繰返すことにより，仁は 1 つに定まる．

例 9 (株主総会) 4人の株主 $1, 2, 3, 4$ が株主総会に臨む．それぞれ $2, 2, 3, 3$ の株数を持っているものとしよう．株主が連携し過半数の株数が集まれば，株主総会を牛耳ることができる．したがってそのような連携の利得は 6 と定義する．例えば，連携 $\{3, 4\}$ は株数 $3 + 3 = 6$ の株数を持ち，総数 10 の株数の過半数となる．したがって，この連携の利得は 6 である．また，ちょうど半数の株数が集まった場合の利得は 3 ，半数の株数も集まらない場合の利得は 0 と定義する．すなわち，連携

$$\{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$$

は利得 6 を持ち，提携

$$\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}$$

は利得 3 を持つ．これ以外の連携は利得 0 である．

連携が参加者 0 の状態からはじまって，参加者が 1 人ずつ増え，最後には全員が参加するまでに成長して行く過程を考えよう．例えば， $4, 1, 3, 2$ という順にプレイヤーが連携に加わって行くとする．これに応じて連携の利得は

$$0 \xrightarrow{4} 0 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{3} 6 \xrightarrow{2} 6$$

の順に増えて行く．ここで，新たな参加者がもたらす連携の利得の増加を考えると， 1 と 3 が 3 の利得増加をもたらす．他のプレイヤーのもたらす利得増加は 0 である．

提携の成長は集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上の順列で表されその総数は $4! = 24$ 通りあり，このすべてが同じ確率 $1/24$ で実現されるとする．提携の成長をこのように確率的なものと考えた上で，各プレイヤーがもたらす利得増加の期待値をこの提携形ゲームにおける各プレイヤーの「シャプレイ値」と定義する．この総和は全員が参加した連携の利得と一致し，ある条件下で，この分配は例 8 で述べた配分となる．実際にシャプレイ値を計算してみよう．

プレイヤー 1 に対するシャープレイ値 S_1 は、提携の成長過程でプレイヤー 1 の参加がもたらす利得増加の期待値である。プレイヤー 1 の参加が正の利得増加をもたらすのは、

(1) 1 以前に 3, または, 4 が提携に参加しており, 1 の参加が提携の利得を 0 から 3 に 3 増加させる場合。すなわち, 提携の成長が

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{3} 0 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{4} 6 \\ 0 &\xrightarrow{3} 0 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{4} 6 \xrightarrow{2} 6 \\ 0 &\xrightarrow{4} 0 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{3} 6 \\ 0 &\xrightarrow{4} 0 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{3} 6 \xrightarrow{2} 6 \end{aligned}$$

となる 4 つの場合で, その確率は $4/24 = 1/6$ となる。

(2) 1 以前に 2 と 3, または, 2 と 4 が提携に参加しており, 1 の参加が提携の利得を 3 から 6 に 3 増加させる場合。すなわち, 提携の成長が

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{2} 0 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{4} 6 \\ 0 &\xrightarrow{3} 0 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{4} 6 \\ 0 &\xrightarrow{2} 0 \xrightarrow{4} 3 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{3} 6 \\ 0 &\xrightarrow{4} 0 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{3} 6 \end{aligned}$$

となる 4 つの場合で, その確率は $4/24 = 1/6$ となる。

以上より, 利得増加の期待値は

$$3 \times 1/6 + 3 \times 1/6 = 1$$

となり, $S_1 = 1$ である。同様に, $S_2 = 1$ となる。

シャープレイ値 S_3 を求めよう。提携の成長過程でプレイヤー 3 の参加が正の利得増加をもたらすのは, 以下の場合である。

(1) 3 以前に 1 または 2 が提携に参加しており, 3 の参加が提携の利得を 0 から 3 に 3 増加させる場合。すなわち, 提携の成長が

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{4} 6 \\ 0 &\xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{4} 6 \xrightarrow{2} 6 \\ 0 &\xrightarrow{2} 0 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{4} 6 \\ 0 &\xrightarrow{2} 0 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{4} 6 \xrightarrow{1} 6 \end{aligned}$$

となる 4 つの場合で, その確率は $4/24 = 1/6$ となる。

(2) 3 以前に 4 が提携に参加しており, 3 の参加が提携の利得を 0 から 6 に 6 増加させる場合。すなわち, 提携の成長が

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{4} 0 \xrightarrow{3} 6 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{2} 6 \\ 0 &\xrightarrow{4} 0 \xrightarrow{3} 6 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{1} 6 \end{aligned}$$

となる 2 つの場合で，その確率は $2/24 = 1/12$ となる．

(3) 3 以前に 1 と 2 が提携に参加しており，3 の参加が提携の利得を 0 から 6 に 6 増加させる場合．すなわち，提携の成長が

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{1} & 0 & \xrightarrow{2} & 0 & \xrightarrow{3} & 6 \xrightarrow{4} 6 \\ 0 & \xrightarrow{2} & 0 & \xrightarrow{1} & 0 & \xrightarrow{3} & 6 \xrightarrow{4} 6 \end{array}$$

となる 2 つの場合で，その確率は $2/24 = 1/12$ となる．

(4) 3 以前に 1 と 4，または，2 と 4 が提携に参加しており，3 の参加が提携の利得を 3 から 6 に 3 増加させる場合．すなわち，提携の成長が

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{1} & 0 & \xrightarrow{4} & 3 & \xrightarrow{3} & 6 \xrightarrow{2} 6 \\ 0 & \xrightarrow{4} & 0 & \xrightarrow{1} & 0 & \xrightarrow{3} & 6 \xrightarrow{2} 6 \\ 0 & \xrightarrow{2} & 0 & \xrightarrow{4} & 3 & \xrightarrow{3} & 6 \xrightarrow{1} 6 \\ 0 & \xrightarrow{4} & 0 & \xrightarrow{2} & 3 & \xrightarrow{3} & 6 \xrightarrow{1} 6 \end{array}$$

となる 4 つの場合で，その確率は $4/24 = 1/6$ となる．

以上より，利得増加の期待値は

$$3 \times 1/6 + 6 \times 1/12 + 6 \times 1/12 + 3 \times 1/6 = 2$$

となり， $S_3 = 2$ である．同様に， $S_4 = 2$ となる．

このように，シャプレイ値にもとづく配分は $(1, 1, 2, 2)$ となる．また，このゲームのコアは空集合となる．なぜならコアに属す配分は提携 $\{3, 4\}$ ， $\{1, 2, 3\}$ ， $\{1, 2, 4\}$ のいずれにも 6 を分配しなければならない．もしそうでないなら，提携外のプレイヤーが提携内のプレイヤーの一部と組んで過半数を握り，その利得 6 を新たな提携内のプレイヤーに以前の分配より増加するよう分配することができるからである．他方，これらの提携に 6 を分配することは，分配の総額が 9 であることとなり配分であることと矛盾する．

このゲームの仁を求めよう．仁を (x_1, x_2, x_3, x_4) とする．ここで， $x_1 = x_2$ ， $x_3 = x_4$ でなければ新たな配分 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_3+x_4}{2}, \frac{x_3+x_4}{2})$ は例 8 で述べた意味での過剰分配のこぼこをより小さくしている．仁はこれを最小にするものであったから， $x_1 = x_2$ ， $x_3 = x_4$ でなければならない．したがって，仁は $(x, x, 3-x, 3-x)$ と書ける．提携 $\{3, 4\}$ ， $\{1, 2, 3\}$ ， $\{1, 2, 4\}$ への過剰分配をそれぞれ $-a$ ， $-b$ ， $-c$ とすると $(6-a) + (6-b) + (6-c) = 12$ となり， $a+b+c = 6$ を得る．他方，シャプレイ値にもとづく配分 $(1, 1, 2, 2)$ において，過剰分配の絶対値の最大値は 2 なので， $a = b = c = 2$ でなければならない．これより， $2(3-x) = 4$ となり $x = 1$ を得る．すなわち，シャプレイ値にもとづく配分 $(1, 1, 2, 2)$ が仁となる．

例10 (タルムード) タルムードはユダヤ教の経典の一つで、生活にかかわる様々な知恵が記されたものである。その中に遺産分配についての記述がある。ある人がなくなったあとに3人の債権者が現れ、遺産からの返済を求めた。彼らが主張する債権の総額は遺産の総額を上回っている。このとき、遺産を3人の債権者にどのように分配すればよいかという問題である。これについてタルムードでは3つの具体例が示されているが、その根拠は記されていない。長年この3例を統一する原理が見つからなかったが、ユダヤ人のオーマンはこの原理こそ、例8で述べた仁であることを発見した。

債権者	1	2	3
遺産 \ 債権額	100	200	300
100	100/3	100/3	100/3
200	50	75	75
300	50	100	150

100, 200, 300の債権額をもつ債権者1, 2, 3に対して、遺産総額が100, 200, 300の場合、3人の債権者にどのように分配すればよいかを示したのが上の表である。遺産総額が100の場合は均等分配、遺産総額が300の場合は比例分配となっている。遺産総額が200の場合の分配はどういう計算式によるものかわからない。いずれにせよ3例を通しての分配原理が見えてこない。

タルムードの別の箇所では3人以上の交渉は、まず債権額が最も少ない債権者と他の債権者集団の2者で行なえと書かれている。上の表で遺産総額が200の場合について説明しよう。最初に100の債権額を持つ債権者1と200 + 300 = 500の債権額を持つ債権者集団 $II = \{2, 3\}$ の間の分配を定める。これは以下の提携形ゲームと考えられる。

$$v(\{1\}) = 0, v(\{II\}) = 100, v(\{1, II\}) = 200$$

ここで $v(\{1\})$ は遺産総額から II の債権額を差し引いたもの、ただし、負となる場合は0と定義する。すなわち、 $200 - 500 < 0$ なので0となる。同様に $v(\{II\})$ は遺産総額から1の債権額を差し引いたもの、すなわち、 $200 - 100 = 100$ となる。 $v(\{1, II\})$ は遺産総額の200となる。この設定で例8で述べた仁を求める。1に0, II に100をまず分配した上で、残りの100を等分に分けると、1に50, II に150の分配となり、過剰分配は1, II ともに50となる。これは仁である。

次に、2と3に債権者集団 II の得た150を分配するのである。これは以下の提携形ゲームと考えられる。

$$v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = 0, v(\{2, 3\}) = 150$$

$v(\{2\})$, $v(\{3\})$ がともに 0 となるのは, 2 と 3 の債権額がいずれも 150 を上回るからである. したがってこの場合の仁は 150 を等分に分けることとなる. したがって, 2 と 3 はともに 75 を受取るのである. すなわち, 1, 2, 3 への配分 (50, 75, 75) が仁にもとづく分配となる.

遺産総額が 300 の場合も同じ原理で説明できる. 遺産総額が 100 の場合は 2 段階で考えるのではなく, 提携形ゲーム

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, v(\{1, 2, 3\}) = 100$$

の仁として求まる.

文献

- S. Kakutani, Duke Math. J. 8(1941)
- J. F. Nash, Non-cooperative games, Ann. of Math. 54(1951), 286-295
- R. J. Aumann and M. Maschler, Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud, J. Economic Theory 36 (1985), 195-213
- 鈴木光男著「新ゲーム理論」勁草書房, 1994 年
- 岡田 章著「ゲーム理論」有斐閣, 1996 年
- 松本直樹著「ゲーム理論の基礎とその応用」松山大学総合研究所所報 第 45 号, 2004 年