

市民講演会（絵のない紙芝居）

「あなたはマンモスを 殺したことがありますか？」

京都大学 大学院理学研究科 三輪哲二

Abstract

図書館に行けばマンモスについて書かれた書物を読むことはでき、どこかの博物館に行けばマンモスの化石を見ることもできる。でも、街角や野山でマンモスに出会うことはない。

学校における数学の授業とは、見たこともないマンモスについて、書物や化石を通して学ぶことなのだろうか？

はじめに

数学会の市民講演会ということで、みなさん数学を聞きにこられたと思うのですが、今日は数学の話はいたしません。子供の頃、東京の親戚の家に行くたびに、紙芝居屋さんがやってくると10円玉を握りしめて飛んでいった記憶がありますが、先週 OHP を用意していて、そのことを思い出していました。でも紙芝居には語りだけでなく「絵」があったのに、OHP には「絵がないなあ」とは思っていたのですが、今日になって、私の紙芝居には「数学」という絵がないんだと気が付きました。そこで、それをまずお断りしなくてはと思ったわけです。

第一幕 Teaching how to teach how to kill mammoths

2003年秋 米国某州立大学

ロシア人の若い数学者が休日にでてきた大学の研究室で、読んでいた学生のレポートを机の上にポイと投げ、窓から見えるただっ広い駐車場にポツンと停っているわがホンダシビックを眺めながら、ふと考えます。（以下、英語による自問自答、およびロシア語による自問自答の和訳）

What on earth is the benefit of mathematics for these students?

None of my business. But,

How can I answer if a student would ask me:

“What on earth is the benefit of mathematics you are teaching? Something like how to kill mammoths.”

俺の教えていることは役に立たない、てか？

(そして、ロシアの片田舎で数学の問題を解いていた頃を思い出しながら)

あの頃、数学が何の役に立つかなんて考えやしなかったなあ。しかし、こうして数学を教えて給料をもらっているんだから、役に立っているよなあ。マンモスの殺し方は役に立たなくたって、それを教えることは役に立つ。

Well, of course, I can teach how to teach how to kill mammoths, a useful thing to learn.

俺にだって、役に立つことが教えられる、ということだ。

第二幕 数学科教育法 I

2004年春 京都大学、桜は散って

ご紹介いただきましたように、私は4年ほど前に数学教室に移るまでは、数理解析研究所で数学の研究をしてきました。その間は、教育といいますが、授業はほとんどしたことがなかったのですが、今年度は「数学科教育法 I」という教育学部の講義を1年間担当することになりました。中学高校での教育経験がないことはやむを得ないとして、大学での講義も多くの経験をしてきていない中で、

数学科教育法 = how to teach mathematics

を、教えるということになったのです。さて何の話をしようかと考えていたとき、友人の数学者から

teaching how to teach how to kill mammoths

という話を聞きました。(上の version とは微妙に違います。) その中で

learning mathematics is something like learning how to kill mammoths.

(誤訳 数学の研究というものはマンモスを殺すようなものだ。)

というところが気に入りました。これは私の意識的な誤訳、というか転意です。学生にとって大学で習うような数学は、現代人にとってのマンモスのようなものだ、というのがもとの意味ですが、私は、数学者にとっての数学は原始人にとってのマンモスのようなものだ、という意味で気に入ったのです。

さて(さらに粗っぽく)

数学 = killing mammoths

だとすれば

数学教育 = teaching how to kill mammoths

したがって

数学科教育法 = how to teach how to kill mammoths

すなわち、わが身に振り返ってみれば

「数学科教育法 I」を教える = teaching how to teach how to kill mammoths

となります。

そこで、4月の開講一番

「あなたはマンモスを殺したことがありますか？」

中学や高校の数学教師になるために、何かを学ぼうと思ってやってきた学生に

「あなたは数学の研究をしたことがありますか？」

「あの発見の喜びを知っていますか？」

と言ってしまった。

数学者が「私は数学をやっています。」というとき、これを、「私の仕事はマンモスを殺すことです。」と言い換えるのは、話している数学者からも、聞いている数学者でない(仮に「普通の」という)人にとっても、受け入れやすいことかもしれません。その意味では、

mathematics = killing mammoths

というのは、乱暴であっても的を得ています。ところが、これを用いて、

数学教育 = teaching mathematics
= teaching how to kill mammoths
= 数学の発見の仕方を教えること

とやっっていいものでしょうか？

第三幕 “My name is Barry McCoy.”

京都大学数理解析研究所・大学院理学研究科数学数理解析専攻では、「先端数学の国際拠点形成と若手研究者育成」をテーマに21世紀 COE 拠点形成事業を行なっています。

これって

マンモスの狩人を育成

しているのでしょうか？

普通の人の質問：それって、どうやるの？

中学高校の数学教育から離れて、普通でない人たちの話をしましょう。

海外の研究会に初めていったときのことです。数理物理のイジング模型について、Wu, McCoy, Tracy, Barouch という4人の論文をもとに佐藤先生と神保さんと3人でした仕事が縁で、物理の人たちの研究会に呼んでもらったのでした。神保さんと2人、ロスアンジェルス空港につくなり、サンフランシスコへの乗り継ぎを待つ間に、気が付いたら聖書を買わされて、おまけにサンフランシスコでは荷物が出てこなくてと、散々な旅の後、やがて佐藤先生とも合流して

1979年冬 スタンフォード大学のコーヒールーム

人混みの中に (ポツン)³ と立っていると、つかつかとやってきた人が、言いました。

“My name is Barry McCoy.”

2004年夏の終わり 京都、高野川のほとりのホテルの朝食

夏の間 COE の研究プログラムで京都に滞在していたマッコイさんが帰国する日の朝の会話：

B：“We can teach formulas and techniques definitely. We should do so. But, it is impossible to teach how to solve problems.”

訳：「公式とか計算のテクニックとかは教えることができるんだし、教えなくっちゃいけない。でもね、問題の解き方は教えられるもんじゃあないよ。」

普通の人々の疑問：

ちょっと、まってください。若手研究者の育成って、ほんとにやってんですか？心配ご無用。話はこう続くんです。(もし私がさえぎらなかつたら)

B：“No one can teach how to solve problems, but one can learn how to solve them.”

訳：「教えるってこたあ、できませんがね。盗むことは、できるんですよ。」

数学教育に話を戻します。今日の話の中心のテーマを質問の形で提出しておきましょう。

問1 中学高校の数学教育において、数学を学ぶことにどんな意義があるのか？

英訳(逆訳)：

What is the benefit of learning how to kill mammoths for children of today in the world where mammoths are extinct.

これは私の「数学科教育法Ⅰ」で学生に与えている最も基本的な問いです。学生がこの問いに対して自分なりの答を見つけるためには、次のこと考えてみなくてはなりません。

問2 数学の発見はなぜマンモスを殺すことなのか。それと数学教育がどう関係するのか？

英訳：Why is discovery in mathematics compared to mammoth-killing? Why is it significant in school math?

さて、こういったことを教育法の時間に話し、学生にもレポートを提出してもらっているのですが、次の本を参考書として使いました。(これは、神保さんに教えてもらいました。)

シュタイナー学校の数学読本

—数学が自由なところをはぐくむ

Bengt Ulin 著 丹羽敏雄 森章吾共訳

以下、U:「」はこの本からの引用です。

実はこの紙芝居を用意していて、すばらしい副題がついているのに気が付きました。そこでもう一つ

問3 数学が自由なところをはぐくむとは、どういうことか？

英訳：Why does mathematics set our minds free?

第四幕 数覚、魂の器官

数学は役に立ちます、いうまでもなく。でも実生活に役立つということだけが、我々にとっての数学の意味ではありません。

役に立つという点に関しては

U：「古代のエジプト人やバビロニア人は実際的問題の解決法としての計算法、公式、数表を持っていた」のですが、それを越えて

U：「古代ギリシャ人は計算から数学への第一歩を踏み出した」のだそうです。（オリンピックだけじゃないんだ！）

昭和40年夏 東京都文京区、高校時代

横地清先生という有名な数学の先生がいました。「横地清名言集」よりいくつか紹介します。

ゼロで割ることは恐ろしいことである。あたかも、無人踏み切りを渡るようなものだ。

阿呆杖はつくな、剣山を置いとけ。

これを、ねこの定理という。

ねこの定理とは「3角形の2辺の和、他の1辺より長い」のこと。ニワトリは金網に突っ掛かってエサにありつけないが、ねこはまわりこんで食べるという横地先生の鋭い観察に基づく。転じて、まともに計算せず、うまくやることをいう。

横地先生の授業では問題演習が最も重要でした。

問題演習に用意するもの：模造紙、マジックインク、セロテープ（画鋸はだめ）

休み時間のうちに教室中に解答の書かれた模造紙が貼りめぐらされます。授業が始まると、先生は模造紙の前にどっかと座ってよしとかベケとか物凄いスピードでさばいていきました。

夏休みの宿題はプラトンの「国家」を読んで感想文をかくこと。400字づつめ原稿用紙20枚ピシャリというものでした。

プラトン「国家」より（「数学読本」からの引用）

数学を学ぶことによって、各人の魂の器官のひとつが浄化され、生命の火を

点じられることになるという、この点なのです。その器官は、人が他のことに気をとられているうちに破壊され、盲目にされてしまいます。そして、これを健全にすることは、何よりも大切なのです。なぜなら、魂のこの器官によってのみ、真実が見られるからです。

ああ、こんな恐ろしいことが書いてあったんだ、と横地先生の偉さを再認識しました。高校生当時から、本は読まずに感想文を書く能力は持っていたようです。

プラトンの言葉からもう一つ思い起こすことがあります。

小平邦彦

数学者。東京生れ。ハーヴァード大学・スタンフォード大学・東京大学教授などを歴任。第二次世界大戦後の頭脳流出第一号。代数幾何学・解析学の発展に貢献。調和積分論の研究でフィールズ賞を受賞。文化勲章。(1915~1997)
(広辞苑より)

数覚

広辞苑にはありませんでした。

これは小平先生がどこかに書かれていたことですが、人間には五感の他に数覚というものが備わっていて、この感覚に優れた人には、数覚を持たない人には「見えない」ものが「見える」というのです。ちなみに、小平先生には4次元の世界が見えたと言われています。

数学は、人間が「数覚」という「魂の器官」で見ることによって、始めてその存在が現れるものであって、人間の思考とは別個に存在しているものではない。しかしながら一方では、数学の真実は、それが見えてしまった者にとって、自分の思考が作りだしたものでないことも、明らかなのです。なぜなら、自分が見ているものと、「数覚」を持つ他の誰かに見えているものの間に、1点の違いもないことは、明らかだからです。

数学と自然科学の違いはここにあります。万有引力の法則はわからなくても、りんごが木から落ちることは誰でも知っています。DNAの2重らせんを、細胞とか遺伝とかの話をしてしながら普通の小学生に説明することよりも、角の3等分の作図が不可能だということを、普通の高校生に説明することの方がはるかに難しい。

... とは思いませんか？

2004年 夏の終わり 京都、高野川のほとりのホテルの朝食（再び）

B: "... it is impossible to teach how to solve problems."

T: "Yes, but I think how to find problems is the problem."

B: "I know what you mean, but that is a difference between mathematics and physics. In physics, the problems are clearer than in mathematics."

図書館に行けばマンモスについて書かれた書物を読むことはでき、どこかの博物館に行けばマンモスの化石を見ることもできる。でも、街角や野山でマンモスに出会うことはない。

でも、マンモスはいるんです。だって、そうでしょ。

数学者の定義（広辞苑に該当項目なし）

マンモスをみつけてやろう（find problems）、見つけたら殺してやろう（solve problems）とねんがら年百狙い続けている人種。だから、目つきが悪い。

誤解のないように、申し上げます。特に、美しい女性の方々に。

数学者は、数学のことを、マンモスのように醜悪なものと思っているわけではありません。あなた方のように美しいものとして見ているのです。だから、数学者があなたを見つめるのに出っくわしても、怖がらないでください。彼は、美しいあなたの向こう側に、美しい数学を夢見ているだけなのですから。

話を数学者の数学から普通の人の数学教育に戻します。

問2 数学の発見はなぜマンモスを殺すことなのか。それと数学教育がどう関係するのか？

数学は、我々が思考の修練をし、数覚を研ぎ澄ませることによって、われわれの目の前に現れる。

のであり、

そこには、長時間にわたる思考の集中とある瞬間の突破が必要なのだ。

ということであって、

「あそこに木が生えているでしょ。大きいね。」

というときの「木」は我々のそとに確かに存在しているものであり、そのものに「木」という名前をつけるのは我々の内面の活動ではありますが、子供

たちは「木」という名前を知る前から、「木」の存在は知っている。

ただ、しかし、ヘレン ケラー が、自分の手の上をを流れる冷たいものに water という「名前」がついているということを知ったときの感動、その衝撃の強さは、彼女が「水」という名前を知ることによってはじめて、水というものの「存在」を知ったのだということを知らせてくれる。

「ほら、これが素数たちだよ。きれいだね。ポンポロリン。」と喋ってやることによって、子供に衝撃と感動を与えることができるためには、子供が庭中を飛びまわって木にぶつかり、水浴びをするように、その子が「数」の庭で駆け回り、ころがってきていることが必要なのです。

紀元前 2 * * 年夏？ ギリシャ

アルキメデスは、風呂から飛び出し「ユリーカ、ユリーカ」と叫んで街の中へかけだしていきました ...

... とさ。

数学的体験（ユリーカ体験）

アルキメデスにおけるような新しい発見でなくても、教室にいる我々ひとりひとりにとって、数覚を獲得し数学的実在をとらえるということはある。そのとき、われわれも「ユリーカ」と叫んでいる

... ですよ。

教師は授業の度に、この授業のユリーカは何かを考え、生徒ひとりひとりに「ユリーカ」を叫ばせることをめざしてほしい。

第五幕 最高の数学教師

2004年春 京都大学、講義室（再び）

「あなたはマンモスを殺したことがありますか？」

「あなたは知っていますか？大平原を越え深い森にわけいり、マンモスの足跡を見つけたときの、あの胸の高鳴りを。長く困難な追跡の果てに、木々の上に覆いかぶさるように立ち上がるマンモスを見たときの興奮を。石を投げ、槍を打ち込み、仕掛けに追い込んで、ついに仕留めたときの至福を。」

「もしあなたがたが数学教師として、数学の技術とか、ひとつひとつの定理とかを、教えるだけに終わるならば、マンモスの消え去った現代において、マンモスの殺し方を教えているようなものです。百科事典のページをひろげ

てこれがマンモスだと言ってみても、マンモスの化石をビデオで見せたとしても、あの胸の高鳴り、あの興奮、あの至福は伝えられません。」

「原始の人々が子孫に、マンモスの殺し方を、マンモスを殺すことによって教えたように、最高の数学教師は生徒と一緒にマンモスを追跡し、殺すのです。あなた方も、そうやって、あの胸の高鳴り、あの興奮、あの至福を生徒たちに伝えてください。」

私には最高の数学教師がいました。

1996年春 数理解析研究所3階、佐藤先生の部屋

毎朝、神保さんと私は9時かおそくとも10時頃には研究所に出てきて前の日の続きをやっていました。生協で昼の食事を終えてしばらくすると、佐藤先生が何か新しいアイデアやら計算結果やらを持ってやってこられます。それからは、先生の部屋で夜8時、9時、10時まで、議論が続くのでした。家へ帰ると、食事もそこそこにその日の計算をやり直して、少しでも先へ進めないかと、1時、2時まで粘ってということの繰り返しを続けて、3ヶ月も経った頃、ついに最終結果を黒板に書き上げた後、ふと窓から見上げると植物園の木々の向こうに

虹が

第六幕 問題がむこうからやってくる？

「数学読本」の日本語版へのまえがきに、数学者にとってすばらしいことが書かれています。(以下では訳文を少し変えています。)

数学的活動と人間の内面の関係という教育的観点から、クラスを感動にまで導く道筋と、数学の最も生き生きした部分である問題解決の際の道筋の2つを探求するのが数学教師の課題になります。こうしたことを探求しながら授業を進めると、数学の演習による思考の修練が、自らの存在に関わる価値をもたらすことを、生徒たちが体験するようになります。その、存在に対する価値とは、自らの思考力に対する信頼であり、自分自身の思考を観察しそれを吟味する能力です。

あなたは、自分の思考力に信頼を持っていますか？

考えながら、考えている自分について吟味していますか？

「問題の発見」と「問題の解決」についてもう一度

塩野七生「ローマ人の物語」第3から5巻 ハンニバル戦記

アルプスを越えて侵入したハンニバルのカルタゴ軍をローマ人は10年以上の長い年月をかけて撃退します。ローマ人はハンニバルの作り出した問題を解決したのです。その問題は誰の目にも明らかだったわけではなく、いや、だれも予想すらしていなかったものでした。

ハンニバルの軍勢がガリアの野に消えたとき、敵も味方も、ハンニバルただひとりを除いて、何が起きているのか誰もわからなかった。そして、軍勢はアルプスを越えたのでした。

生徒から見ると ...

数学の問題はむこうからやってくる。

中間試験や期末試験の度に5、6題の難問が集団で襲ってくる。それをひとつひとつ撃退し、そして、大学入試という最終戦争が ...

中学高校における、数学による思考の修練では、どうしても、問題の解決ということが中心になります。でも ...

数学にはもうひとつ、問題の発見という別の側面があって、ハンニバルの場合のように、問題を解決したことよりも問題をつくりだしたことの方が、しばしば大きな感動を生むのだということを、意識しながら授業をしてほしい、と思うのです。

ハンニバルの名前は、みなさん聞いたことがあるでしょう。では ...

ハンニバルを倒したローマ軍の武将の名をご存じですか？

第七幕 思考の修練の場としての数学

これは、「数学読本」の2章のタイトルです。ウリーンさんは、数学において問題解決の修練を積むことで自らの思考力に対する信頼、自分自身の思考を観察しそれを吟味する能力が得られる、とっています。

思考の修練は数学だけのことなのだろうか？また、特に数学の演習の重要性を強調するのはなぜか？

2004年夏 アテネ、鈴木桂治のインタビュー

「柔道には考えることがいっぱいあって、考えることが重要なんです。柔道について考えるということでは、俺は頭がいいと自分では思っていますよ。」

日本中の中学校の柔道部で、柔道の練習の中から生徒たちが鈴木選手のように思考の修練を積んでいるかということ、それはあり得ない。

柔道では、体を鍛えることに多くの時間を使わなければなりません。実戦では考えている暇はもちろん、ありません。これに対して ...

数学は純粋な思考の修練です。

いつでも、いつまでも考えていいのです。

(これはあくまでも原理的な意味。状況を考えること。近しい、普通の人がそばにいるときは、控える。)

将棋も純粋な思考?

1手を指すということは、「読み」を打ち切っている。思考を停止し、判断をしている。

数学において「命題の真偽」について意見が分かれたとすれば、どちらか(か、あるいは両方)の思考が間違っている。

将棋において、ある局面での最善手について意見が分かれたとすると、それは、どちらかの思考が間違っているのではなく、どちらかの判断が正しくない。

もっと極端な話、軍隊では、右に行くべきか左に行くべきかで意見が分かれば、指揮官が決めます。兵隊は、指揮官の判断力に信頼を持つことはあっても、自分の思考力に頼ることはありません。

数学でも、教師が黒板で問題を解いて見せるという状況では、軍隊の進軍のようなもので、生徒に自分の思考力に対する信頼が生れることはありません。だから ...

模造紙が必要なのです。

問題演習で、模造紙に何をどう書くかは、自分で全部決めます。

Who knows? (訳 ほんと? xxx ちゃんに書いてもらったもん。)

間違いがあれば、先生がそれを指摘します。そして生徒の思考力が、そのたびに鍛えられるのです。なぜ間違えたかということの反省は、自分の思考を観察し吟味することに、ほかなりません。

思考力をこのようにして鍛えていくためにはつねに新しい問題が必要になり

ます。ところが教室では問題はむこうからいくらでもやってきます。それでも足りなければ、自分で作ることだってできます。なぜなら、

数学は自由だ。

(英訳:Mathematics is free, and a mathematician is free at heart.)

こうして、いろいろな問題によって鍛えられた思考力は、数学以外の世界においても通用する力を持っているのです。

... と私は信じたい。

ご清聴ありがとうございました。