うずまきの幾何

梅原雅顕

これは，平成１１年９月２６日に行われた数学会の「市民講演会」の筆者の表題の講演草稿に「多角形の頂点との関連について」と「あとがき」の節を加筆したものです.

1.「うずまき線とは？」

代表的なうずまき線に「アルキメデスのうずまき線」と「対数うずまき線」があります.

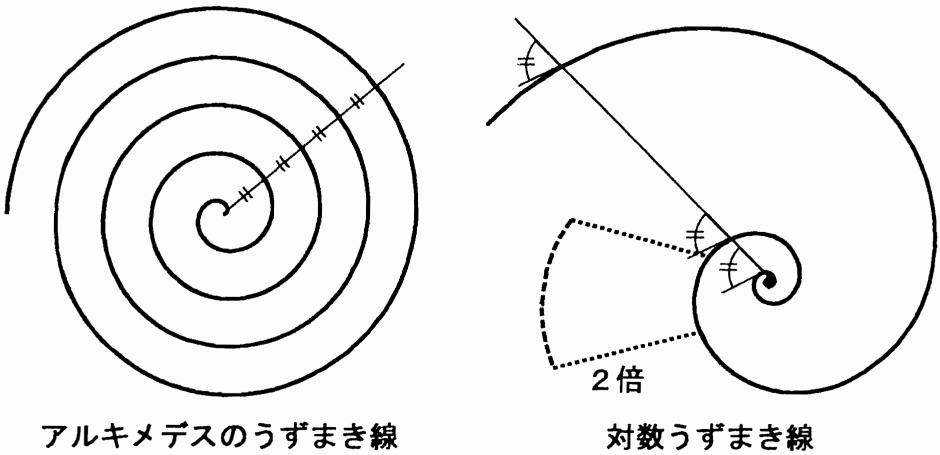

図 1: 代表的なうずまき線

(アルキメデスのうずまき線)　ギリシャ時代，アルキメデスによって研究されたのがこのうずまき線です[1]．２周目以降，出発点からの幅が一定に

[1] 極座標で表すと $r = a\theta$ ($a > 0$ は定数, $\theta > 0$).

なります．例えば，蚊取線香のつくる模様はこのうずまき線に近い形です．ろくろで平らな粘土板を回転させて，真ん中から棒で一定の速さでまっすぐ線を引くと，粘土にはこのうずまき模様が描かれます．

（対数うずまき線）　このうずまき線には，中心からどの方向に線を伸ばしても，うずまき線とのなす角が一定になるという性質があります[2]．自然界のうずまき線（巻貝，星雲 etc.）に，もっともよく見られるものですが，対数うずまき線を数式で表すためには，指数関数や対数関数が必要です．そのため，その発見はずっとあとでした．このうずまき線は，相似に拡大・縮小しても，元の曲線と合同になるという不思議な性質 (自己相似性) をもっています．実際図１（前ページ）のように，うずまきの一部を２倍に拡大すると，この拡大部分をうまく移動させて元のうずまき線に重ねることができます．

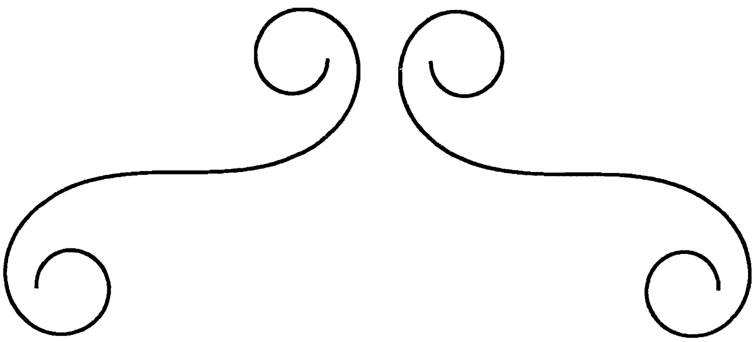

図 2: 正と負のうずまき線

一般にうずまき線は，図２のように正と負に大別されます．正のうずま

[2]極座標で表すと $r = a^{\theta}$ ($a > 1$ は定数，θ は実数).

き線を鏡に写すと負のうずまき線になります．うらがえさないかぎり，2種類のうずまき線はけっして重なることはありません．図1のアルキメデスのうずまき線と対数うずまき線は共に負のうずまきですが，これをうらがえすと，正のうずまきになります．

2.「うずまき道路を走る車」

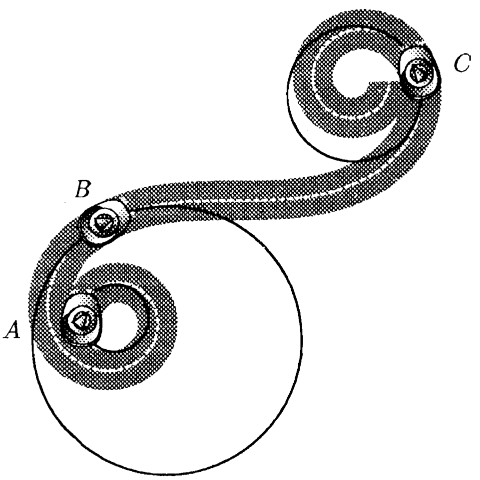

図3: うずまき道路を走る車

図2（前ページ）を見て，うずまき線には2種類あることが，なんとなく感覚として理解していただけると思いますが，図3のようなうずまき状の道路があったとして，その上を走る車の運転手の立場になると，もっと明確に両者の違いを説明することができます．まず，標語的には次のようになります．

正のうずまき線 ＝
運転手はハンドルを左に回し続ける．
負のうずまき線 ＝
運転手はハンドルを右に回し続ける．

うずまき線の正負は，進行方向に関係ありません．不思議に思えるかもしれませんが，正の（負の）うずまき道路では車はどちらの方角を走っていたとしても運転手はハンドルを左に（右に）回し続けているのです．このことを，正のうずまき道路（図3）を用いて説明しましょう．

出発点 (A) で道は，思いっきり右に曲がっています．そのため，運転手

はそこでハンドルを強く右に回しているはずです．もし，このままハンドルを固定したまま車を走らせると，車は円運動（図３の実線）となり，道を外れてしまいます．道路の方は，右への曲がり方が徐々に弱くなっておりますから，先に進むためには，ハンドルを少しずつ左の戻していかなければなりません．

少し右への曲がりが弱くなった次の地点 (B) でも，状況は同じです．ここでハンドルを止めてしまうと，実線の円（図３）のような軌道を描いてしまいますから，先に進むためには，やはりハンドルを少しずつ左の戻していく必要があります．

図３の地点 (C) では，道は左に曲がっています．先の方は左への曲がり方が徐々に強くなっておりますから，先に進むためには，ハンドルを少しずつ左に回していかなければなりません．

というわけで，この道路を走る運転手は，常にハンドルを徐々に左に回していることになります．さて，今度は進行方向を逆にした場合を考えてみましょう．

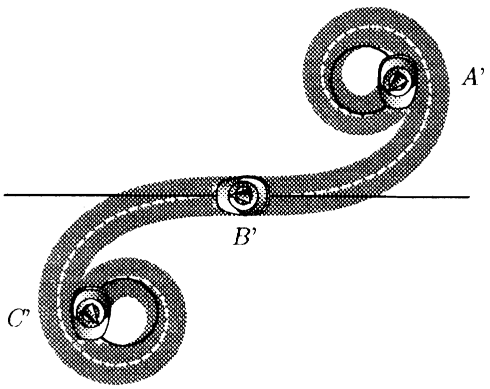

図 4: 進行方向を逆にしたとき

図４では，それぞれの地点 A', B', C' で，ハンドルがどの方向を向いているかを図示しておきました．もし運転手がハンドルを止めると，各地点で車は図に記したような実線の円（あるいは直線）運動になります．道を外れないために，運転手がハンドルを左に少しずつ回し続けなければいけないことを皆様自身で確かめてみてください．

このように正のうずまき道路では，運転手は，進行方向に関係なく左にハンドルを回す必要がありますが，負のうずまき道路では，反対に進行方向に関係なくハンドルを右に回していなければなりません．負のうずまき道路を正のうずまき道路を鏡に写したものと考えると，このことは直感的に理解できると思います．

3.「うずまきの正負と曲率円」

数学では，左回り（反時計回り）をもって正の回転と呼びます．左回りは人間にとって自然な回転方向のようでして，スケートリンクなどでも左回りが普通のようです．正のうずまき，負のうずまきの呼び名は，このことに由来します．一方，日時計の針（=影）は，北側を通って，西から東に移動します．時計については，このなごりで右回りですが，私たちはあまりに見慣れているため，逆向きに回る時計を見ると，何かとても奇異に感じてしまうことでしょう．そんなわけで，別に正のうずまきの方が由緒正しいということはないかもしれません．けれども，北半球では台風は正のうずまきを描きますし，かたつむりも正のうずまきを描くものが大部分のようです．

前節では，うずまき道路で運転手がハンドルを止めると円運動をすることを説明しました．この円は，うずまき線の**曲率円** とよばれています．

図５（次ページ）は，正と負のうずまき線の先端部分を拡大したものです．曲線の接線は，各地点でもっともよく曲線を近似する直線と解釈できますが，曲率円は，各地点でもっともよくうずまき線を近似する円になります．曲率円の半径を **曲率半径** とよびます．図５のように，うずまき線に向きをつけ曲率円もその進行方向に同調するような向きにします．する

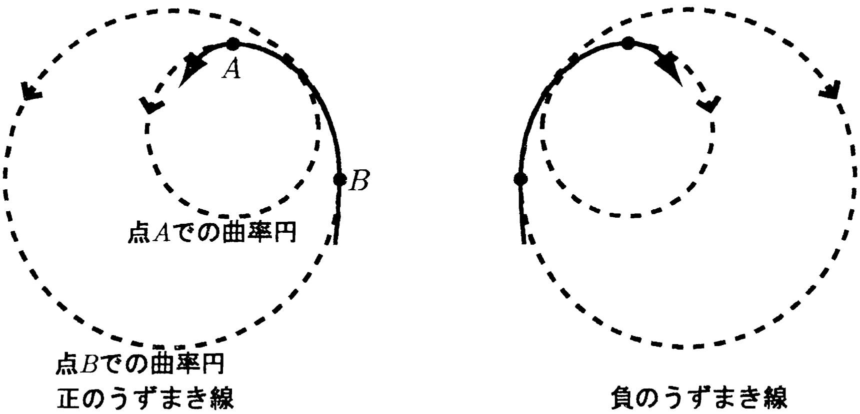

図 5: うずまき線と曲率円

と，正と負のうずまき線の違いを曲率円をつかって次のように特徴づけることができます．

正のうずまき線 = 曲率円の右側から左側へ接しながら横切る．

負のうずまき線 = 曲率円の左側から右側へ接しながら横切る．

うずまき線はけっして自分自身と交わることはありません．車の運転手の立場から説明しますと，図５のようにハンドルを同じ方向に回し続けると，先に進むにつれて，次々とさらに小さな曲率円の中に進路が拘束されていくからです．

4.「うずまき線の作図法」

簡単に，さまざまなうずまき線を描く方法を紹介しましょう．図６（次ページ）のようにへこみのないあて板（あるいはボール紙）を用意します．

あて板の右端あるいは左端に糸を固定して，糸を巻き付けます．そして今度は，糸をたわまないようにあて板から徐々にほぐしていきます．巻き

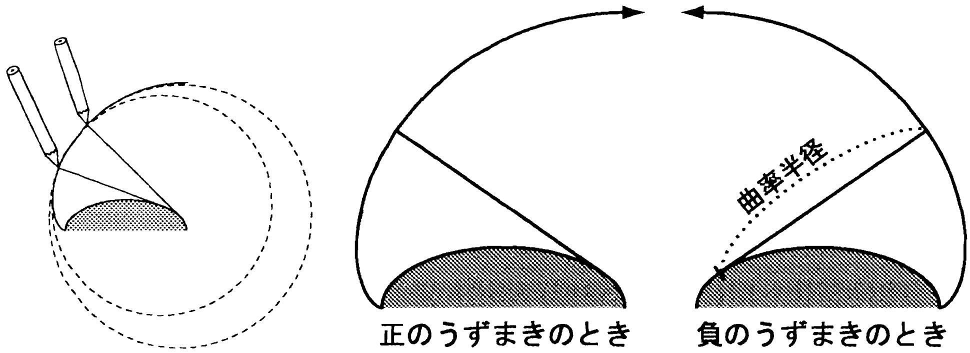

図 6: うずまき線の作図法

付けた糸をほぐすとき，糸の先端が描く図形はうずまき線になります．あるいは，糸が完全にほぐれた状態から，逆に糸を巻き付けていっても，まったく同じうずまき線が描けます．どちらの方向から描くかは，作図者の好みです．図 6 で右端に糸を固定すると正のうずまき線に，左端に糸を固定すると負のうずまき線になります．

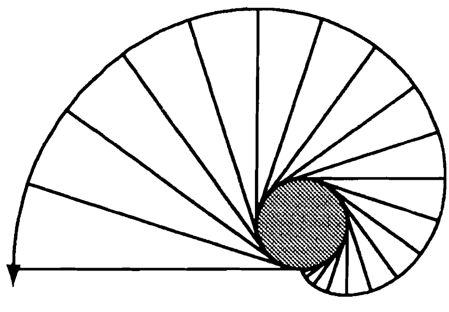

図 7: 円からできるうずまき線

この方法でうずまき線を作図すると，ほぐれた糸の長さが，ちょうど曲率半径となり，糸の根元が曲率円の中心になることが知られております．数学用語では，曲率円の中心の軌跡を縮閉線とよびますが，この作図法では，あて板の曲線は，描かれたうずまき線の縮閉線になります．

わかりやすい例としては，あて板のかわりに釣り竿のリールを考え，巻き付けたつり糸をそこからほぐしていく場合です．このときは，釣り針の

描く図形として，図７ (前ページ) のようなうずまき線が描けます．

５．「振り子時計への応用」

前節のうずまき線の作図法を，ホイヘンス（Christiaan Huygens 1629-95）は振り子時計に応用しました．彼は，ニュートンとほぼ同時代に活躍し，光の波動説から屈折や反射を説明するホイヘンスの原理で有名なオランダの科学者です．

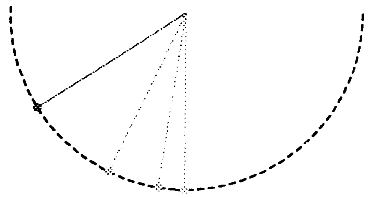

図 8: 素朴な振り子

彼の時代より少し前，ガリレイ（Galileo Galilei 1564-1642）は，振り子を振動させて，もとの位置まで戻ってくるまでの時間（振り子の周期という）を測定し，振幅が小さいとき，周期 T が振り子の重さや，手を放す位置に依らず，糸の長さ L だけにしか依らないないことを発見しました (図８)．具体的には次の式が成り立ちます．

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ここで g は重力加速度です．また $\approx$ は，これが近似式であることをあらわします．実際，この法則は厳密には正しくなく，振り子を高い位置で離すと，低い位置の場合より少し周期が長くなります．それでは，本当にどこで手を離しても周期が変わらない振り子を作るにはどうしたらよいでしょうか．

図９（次ページ）のように，円が直線の上をすべることなく転がるとき，円上の一点が描く曲線をサイクロイドといいます．ホイヘンスは，ガリレ

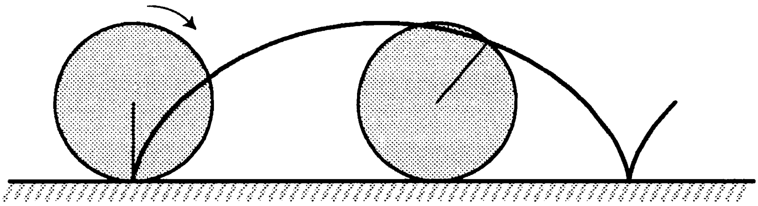

図 9: サイクロイド

イの主張した振り子の周期を与える式が，不正確であることを見出し，さらにサイクロイドの等時性を発見しました．図 10 のように，サイクロイドを逆さまにして，玉を転がします．すると，どこから手を離しても，このサイクロイド上では玉が真下まで到達するまでの時間は同じになることを発見したのです．すると振り子がサイクロイドを描くようにすれば，真に正確な時を刻む振り子時計ができるはずです．しかし，振り子にサイクロイドを描かせるにはなにか本質的な工夫が必要です．

彼のもう一つの重要な発見は，「サイクロイドの曲率円の中心の軌跡はサイクロイド自身になる」ということでした．ホイヘンスの発見したこと整理すると以下のようになります．

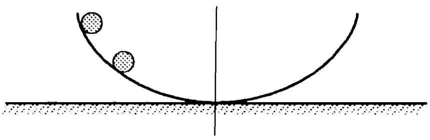

図 10: 逆さサイクロイド

(1) 逆さにしたサイクロイドに玉を置き，手を離すと真下に到達する時間は，玉を置いた場所に依らず一定になる．

(2) サイクロイドの曲率円の中心の軌跡は，サイクロイド自身になる．とくに，前節のうずまき線の作図法において，あて板をサイクロイドにすると，振り子はサイクロイドを描くことになる．

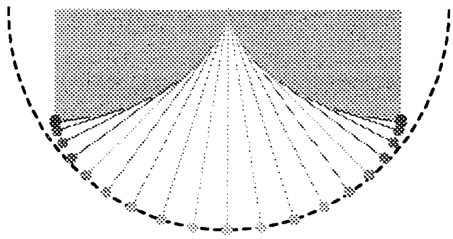

図 11: サイクロイド振り子

具体的には，長さ L の振り子を用意し，以下のような装置をつくると，サイクロイドを描き，正確に時を刻む振り子ができます．サイクロイドは，真ん中を境に負と正のうずまき線に分解されます．左右のあて板は，半径 $L/4$ の円から作られるサイクロイドの半分です．左側のあて板から糸をほどく操作は，まさに前節の負のうずまき線の作図法そのものです．このとき，性質（2）から，振り子は右側のあて板と同じ図形（つまりサイクロイドの負のうずまき部分）を描きます．最初振り子は，左側あて板に張り付いていますが，ほどけるにつれて振り子は，あて板とまったくおなじサイズのサイクロイドの半分を描きます．糸が完全にほどけたときが，振り子が真下にくるときです．さらに振り子は，勢いで右側のあて板に巻き付いていきます．この操作は前節の正のうずまき線の作図法になっており，巻き付くにつれて振り子は，やはりあて板とまったくおなじサイクロイドを描きます．結局，振り子はサイクロイドの軌道上を振幅することになります．すると，たとえ振幅が次第に弱まっていったとしても性質（1）から，このサイクロイド振り子の周期 T は正確に

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

となるわけです．図 11(前ページ) の点線は，半径 L の円です．このように重ねてみると，この円とサイクロイド振り子の描く軌道がいかに近いか，よくわかるでしょう．一昔前のガリレオが間違えたのも仕方ないかもしれません．

6．「単純閉曲線をうずまき線へ分解する」

一般の曲線は，正と負のうずまき線を組み合わせてできています．

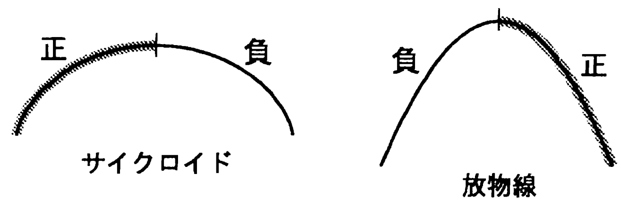

図 12: 曲線のうずまき分解

図 12 のようにサイクロイドは，正と負のうずまきに分解され，また放物線も頂点を境にやはり正と負のうずまきに分解されます．終点と始点が一致する曲線を **閉曲線** とよびますが，閉曲線についてもうずまき線への分解が考えられます．

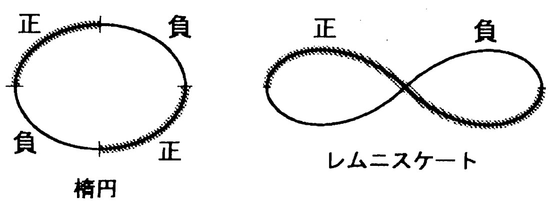

図 13: 閉曲線のうずまき分解

たとえば，楕円は図 13 のように 4 つのうずまき線に分解します．またレムニスケートは，2 点からの距離の積が一定になる点の軌跡として特徴づ

けられるますが，二つのうずまき線に分解できます．このように閉曲線を正と負のうずまき線に分解すると，正と負同数のうずまき線に分解されます．正と負のうずまき線の継ぎ目を，曲線の**頂点**と呼びます．ただし，曲線が円あるいは円の一部を含むとき，その部分自体をうずまき線の継ぎ目とみなし，頂点とよぶことにします．もし，曲線を道路にたとえるなら，そこを走る車の運転手は頂点を次のように認識するはずです．

頂点 ＝ ハンドルの回す方向を変えた地点

自己交差のない以下のような閉曲線を**単純閉曲線**とよびます (図 14).

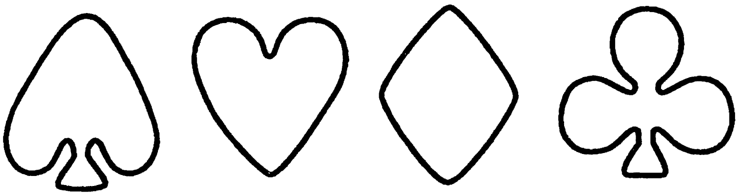

図 14: 単純閉曲線

単純閉曲線は，閉曲線の中でもっとも単純なものですが，このような曲線のうずまき分解に関して次の定理が知られています．

(定理) 単純閉曲線には，少なくとも 4 つ頂点が存在する．

この定理は，1909 年インドの数学者 Mukhopadhyaya により，凸閉曲線（卵形線とも云う）について，1912 年ドイツの数学者 Kneser により，一般の単純閉曲線について証明されました．当時の証明は難解でしたが，今では比較的簡単な証明が知られております．(文献 [3], [5] 参照.) この定理を，車の運転によって解釈するなら「立体交差のないサーキットを車で一

周するには，最低４回ハンドルを回す方向を変えなければならない」となります．立体交差がある場合には，先のレムニスケートのように２回ハンドルを回す方向を変えるだけで原理的にもとに戻れるサーキットが存在しますので，主張は成り立ちません．

７．「多角形の頂点との関連について」

三角形には内接円がただひとつ存在します．長方形ではどうでしょうか．３点で長方形に内接する円の数は一般に２つです．ただし正方形のときだけ４点で内接する円が１つ存在し，ほかに内接円は存在しません．正方形の場合は，「３点で内接する二つの円が重なり４点で接するようになった」と考えて，３点で内接する円の数をやはり２つと勘定します．すると三角形の場合と同様に長方形の場合にも

$$(\text{頂点の数}) - (3\,\text{点で内接する円の数}) = 2$$

という公式が成り立ちます (図 15)．実はこの公式は，任意の凸多角形について成り立ちます．

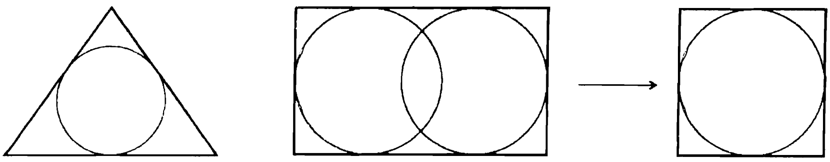

図 15: 三角形の内接円と長方形の内接円

頂点の数が有限の平面単純閉曲線についても４頂点定理の一般化として次の公式が成り立つことが知られております．

$$(\text{曲線の内部にすっぽり入る曲率円の数}) - (3\,\text{点で内接する円の数}) = 2$$

$$(\text{曲線の内部がすっぽり入る曲率円の数}) - (3\,\text{点で外接する円の数}) = 2$$

とくに

$$(\text{曲線の内部にすっぽり入る曲率円の数}) \geq 2$$

$$(\text{曲線が内部にすっぽり入る曲率円の数}) \geq 2$$

となります．いま，単純閉曲線は左まわりとします．このとき，各曲率円はそれぞれ曲線と接点を持ち，円が曲線の中にすっぽり入る場合，接点は正のうずまきが負のうずまきに変わる継ぎ目になり，曲線がその中にすっぽり入る円の場合，接点は負のうずまきが正のうずまきに変わる継ぎ目になります．よって頂点は少なくとも4つ存在することは，この公式から自動的にわかります．この意味でこの公式は4頂点定理を精密化したものであり，1936年にインドの数学者 Bose によって卵形線の場合に証明され，1969年にドイツの数学者 Haupt によって単純閉曲線にまで拡張されました.「曲線はなめらかなのに，頂点という言葉はおかしい」と思うかもしれませんが，この公式の立場から考えると，多角形の頂点と無関係ではないことがわかります．

８．「あとがき」

市民講演ということで，数式をできるだけ用いずに，感性によって説明することに努めました．一部の図を作成するにあたって，Gray の本 [2] と Mathematica 3.0 を利用しました．

筆者はすでに，うずまき線について，もう少し高度な同じテーマを扱ったものを [5] に，さらに程度の高い内容を [4] に著わしておりますので，興味のある方は参照してください．また，サイクロイドと振り子時計については [1] が詳しいです．

参考文献

[1] S. G. Gindikin 著（三浦伸夫訳）：ガリレイの１７世紀，シュプリンガー・フェアラーク東京 (1996).

[2] A. Gray: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA, Second Edition*, CRC Press(1997).

[3] 小林昭七著「曲線と曲面の微分幾何」（裳華房：基礎数学選書 17)

[4] 梅原雅顕,「４頂点定理について」（寄稿）数学５０巻 ４号 (1998 年)

[5] 川久保勝夫，宮西雅且編「現代数学序説（I)」の第４章「うずまきの幾何」（大阪大学出版会）

（うめはら まさあき，広島大学・理学研究科・数学教室）