

ねじれ Alexander 不変量

北野晃朗, 合田洋, 森藤孝之

まえがき

1920年代 J. W. Alexander は、今日 Alexander 多項式とよばれている結び目の不変量を導入した。それ以降現在にいたるまで、Alexander 多項式は結び目理論における基本的かつ重要な不変量として活発に研究されている。この多項式不変量は結び目補空間の基本群 (結び目群) から定義され、具体的に結び目群の表示が与えられると、自由微分を用いて比較的容易に求めることができる。Alexander 多項式は群の不変量という側面だけでなく、幾何学的には

- Seifert 曲面
- スケイン関係式
- 表現の変形の障害類
- Reidemeister トーション
- 無限巡回被覆空間の 1 次元ホモロジー群

などの観点からも定義可能であり、それぞれの視点から種々の興味深い性質が導き出される。もちろん計算しやすい分だけ個々の結び目のもつ幾何学的な情報をおとしてしまい、完全な不変量からはほど遠い。

1990年代前半、Alexander 多項式の計算可能という利点がある程度残しながら、Alexander 多項式よりも深い (非可換な) 情報をもつ不変量として、和田昌昭と X. S. Lin によって独立に「ねじれ Alexander 不変量」が導入された。大雑把にいうと、これは結び目群の線形表現を利用して得られる不変量であり、とくに自明表現に対応するものが本来の Alexander 多項式になっている。

1990年代後半の Kirk-Livingston による包括的な仕事を経て、この数年間でいくつかの進展がみられ、現在では Alexander 多項式でとらえることのできなかつた種々の幾何的情報をねじれ Alexander 不変量を用いてひき出すことに成功している。与えられた結び目に対してそれらの計算を実行するためには、結び目群の線形表現を具体的にみつけるという基本的な問題も介在するが、その部分においてはコンピュータを使うことにより、ねじれ Alexander 不変量の組織的計算も行えるようになってきた。また最近では、素数と結び目を対応させて結び目理論のアナロジーを整数論において考察する研究も行われ、Alexander 多項式などの結び目不変量と整数論の関連も見出されつつある。

このような現況をふまえ、ねじれ Alexander 不変量に関連する結果をまとめたものが本書である。読者としては、大学 4 年生から大学院生を想定し、位相幾何学、多様体論、代数学の基礎的知識があれば読み進められるよう配慮したつもりである。前半部分では Alexander 多項式に関する基礎的な事柄がねじれ Alexander 不変量との対応を念頭にまとめられている。そこで述べられる Alexander 多項式の様々な側面が、後半でねじれ

Alexander 不変量に拡張されていく．ねじれ Alexander 不変量に関する研究はまだ始まったばかりであり，本書の内容および参考文献にあげたいいくつかの論文でその全体像を概観できると期待している．

一方，Alexander 多項式に関連する研究は多種多様であり，その全体を総括することは筆者達の方のおよぶ範囲ではなく，ここに述べたものはそのほんの一部である．ねじれ Alexander 不変量の特別な場合が本来の Alexander 多項式であり，Alexander 多項式に関するいくつかの結果がねじれ Alexander 不変量に一般化されているという事実を鑑みると，今後ねじれ Alexander 不変量の研究がますます進展することが期待される．本書がその1つの礎になれば幸いである．

なお，読者の理解の助けとなるように，本文中にいくつか問題をあげておいた．演習問題レベルのものとそうでないものを区別するため，後者には * 印を付したので，参考にしてほしい．

最後に，草稿の段階から本書を精読されて貴重なご意見をお寄せ下さった寺垣内政一氏，鈴木正明氏にこの場を借りて御礼申し上げます．また，記述の不備など細部にいたるまで丁寧なご指摘をいただいた査読者の方々に深く感謝いたします．

2006年5月11日

北野 晃朗，合田 洋，森藤 孝之

目次

第 1 章	結び目, 絡み目	1
1.1	結び目の定義, 結び目の射影	1
1.2	Seifert 曲面	4
1.3	トーラス結び目, ファイバー結び目, 交代結び目	7
1.4	結び目群, 絡み目群	9
1.5	Tietze 変換と Wirtinger 表示	14
第 2 章	Seifert 行列と Alexander 多項式	17
2.1	絡み数	17
2.2	Seifert 行列	19
2.3	Seifert 曲面, 行列を使った Alexander 多項式の定義	22
第 3 章	スケイン関係式と Alexander 多項式	27
3.1	Conway 多項式	27
3.2	Alexander 多項式と Conway 多項式	29
第 4 章	自由微分と Alexander 多項式	33
4.1	Fox の自由微分	33
4.2	自由微分と被覆空間のホモロジー群	35
4.3	Alexander 行列と Alexander 多項式	41
4.4	表現の変形と Alexander 多項式	49
第 5 章	Reidemeister トーション	55
5.1	非輪状鎖複体のトーション	55
5.2	CW 複体の Reidemeister トーション	61
5.3	結び目の Reidemeister トーションと Alexander 多項式	66
第 6 章	無限巡回被覆と Alexander 多項式	75

6.1	代数的な準備	75
6.2	無限巡回被覆空間のホモロジー群	77
6.3	R -加群の位数イデアルと Reidemeister トーション	79
6.4	Seifert 行列と無限巡回被覆	83
第 7 章	ねじれ Alexander 不変量	89
7.1	定義	89
7.2	Seifert 曲面を使ったねじれ Alexander 不変量の定義	100
第 8 章	ねじれ Alexander 不変量の性質	109
8.1	ねじれ Alexander 不変量の可除性	109
8.2	Reidemeister トーションとしてのねじれ Alexander 不変量	113
8.3	ねじれ Alexander 不変量が零となる例について	117
8.4	Torres 条件	121
第 9 章	ねじれ Alexander 不変量の応用	127
9.1	結び目のファイバー性と Alexander 多項式	127
9.2	全射の存在と結び目の半順序	138
9.3	可逆性の判定への応用	146
9.4	周期的結び目	150
第 10 章	関連する話題	155
10.1	組み紐群	155
10.2	ねじれ Lefschetz ゼータ関数	163
10.3	結び目, 絡み目の Morse 理論と Alexander 多項式	166
10.4	コンピュータを使った計算について	170

記号表

- \mathbb{N} : 自然数全体の集合.
- \mathbb{Z} : 整数全体の集合.
- \mathbb{Q} : 有理数全体の集合.
- \mathbb{R} : 実数全体の集合.
- \mathbb{C} : 複素数全体の集合.
- \mathbb{F} : 可換体.
- \mathbb{F}_p : 標数 p の素体.
- R : 一意分解整域.
- $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$: x_1, \dots, x_n で生成される階数 n の自由群.
- $T = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$: 無限巡回群.
- $T_r = \langle t_1, \dots, t_r \mid t_i t_j = t_j t_i, 1 \leq i, j \leq r \rangle \cong \mathbb{Z}^r$: 階数 r の自由アーベル群.
- A^T : 行列 A の転置行列.
- $\text{int } X$: X の内部.
- $\text{cl}(X)$: X の閉包.
- $N(X)$: X の開管状近傍.
- $\tilde{X} \rightarrow X$: X の普遍被覆.
- $X_\infty \rightarrow X$: X の無限巡回被覆.
- $\chi(X)$: X の Euler 数.
- $\pi_1(X)$: X の基本群.
- $\pi_k(X)$: X のホモトピー群.
- \mathbb{R}^3 : 3次元ユークリッド空間.
- S^3 : 3次元球面.
- D^4 : 4次元球.
- K : S^3 内, あるいは \mathbb{R}^3 内の結び目.
- L : S^3 内, あるいは \mathbb{R}^3 内の絡み目.
- $E(K) = S^3 - N(K)$: 結び目 K の外部.
- $G(K) = \pi_1(E(K))$: 結び目群.
- $\Delta_K(t)$: 結び目 K の Alexander 多項式.
- $\Delta_L(t_1, \dots, t_l)$: 絡み目 L の多変数 Alexander 多項式.
- $\Delta_{G,\rho}(t_1, \dots, t_r)$: 有限表示群 G の表現 ρ に付随したねじれ Alexander 不変量.
- $\tau(C_*)$: 非輪状鎖複体 C_* のトーション.
- $\tau_\rho(X)$: X の非輪状表現 ρ に対する Reidemeister トーション.
- \doteq : $\pm t^e$ ($e \in \mathbb{Z}$) を法にした等号.

第 1 章

結び目, 絡み目

本書で結び目というのは, 図 1.1 (a), (b) に描かれたような 1 本の輪を表す. 数学的には 1 次元球面 S^1 の \mathbb{R}^3 もしくは S^3 への埋め込みの像を表す. 図 1.1 (c) のようにいくつかの結び目の和集合を絡み目とよび, その輪の本数を成分数という.

この章ではまず結び目, 絡み目に関する基本事項を述べることにする. 第 2 章以降で必要となる知識である. 証明は省略するが, 興味のある読者は [9], [13], [53], [92], [101], [110] などをご覧いただきたい.

1.1 結び目の定義, 結び目の射影

定義 1.1.1. \mathbb{R}^3 もしくは S^3 内の n 本の PL 単純閉曲線のことを成分数 n の絡み目という. とくに成分数が 1 の絡み目のことを結び目とよぶ.

ここで 'PL' は絡み目をなす閉曲線が \mathbb{R}^3 ($\subset S^3$) の線形構造 (もしくはアフィン構造) に関して, 有限個の線分からできていることを意味する. こうした考え方をするのは, 組み合わせ位相幾何学の立場をとるためで, それによって野性的絡み目 (wild link) を除外するためである. 以下に説明する結び目の射影を実際に描く際には, 各閉曲線は多くの (しかし有限個の) 線分からできているとみなし, なめらかな曲線で表すことにする. 本書では今後いちいち断らないが, 常に組み合わせ位相幾何学の立場をとっているとしよう.

K を \mathbb{R}^3 内の結び目とし, $p(x, y, z) = (x, y, 0)$ によって定義される射影

$$p: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

を考えよう. このとき, 像 $p(K)$ 上の点 k の逆像 $p^{-1}(k)$ が K の点を 2 点以上含むとき, k を多重点であるといい, $(p^{-1}(k)) \cap K$ の個数を $k \in p(K)$ の次数とよぶ. 次数 2 の多重点を 2 重点, 次数 3 の多重点を 3 重点などという. 結び目 K の多重点が 2 重点のみであり, かつそれが高々有限個のとき, p は K に関して正則射影であるという.

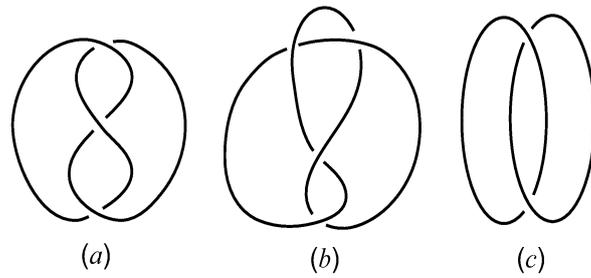


図 1.1 正則表示

命題 1.1.2. 任意の結び目 K に対して, K に関する正則射影が存在する.

正則射影像 $p(K)$ の 2 重点を **交点** といい, その逆像のうち z 座標の大きい方を **上交点**, 小さい方を **下交点** という. 正則射影像 $p(K)$ の 2 重点すべてに上交点, 下交点の区別をつけたものを結び目の **正則表示** という.

結び目は 1 つの閉曲線であるので, 向きをつけることができる. 向きは矢印で表されるが, 結び目には 2 つの正反対な向きがつく. 向きのついた結び目の正則表示も上と同様に考えることができる.

以上のことは絡み目に対しても同様に定義され, 同じ性質が成り立つことを注意しておく.

定義 1.1.3. L, L' を \mathbb{R}^3 内もしくは S^3 内の絡み目とする. \mathbb{R}^3 もしくは S^3 の向きを保つ自己同相写像 h で, (集合として) $h(L) = L'$ となるものが存在するとき, L と L' は **同値** である, または, L と L' は **同値な絡み目** であるという. 向きのついた絡み目を考える場合は, 制限 $h|L : L \rightarrow L'$ も向きを保存しているとき同値な絡み目という.

定義 1.1.4. 結び目, 絡み目の **交点数** とは, そのすべての正則表示を考えたときの 2 重点の最小数のことをいう.

この交点数の小さいものから順に結び目を分類した表というのが知られている. 本書では Reidemeister-Rolfsen による表 [101] を利用することにする. 例えば, 5_2 という書き方で, 交点数 5 の 2 番目の結び目を表す. 2 番目というのは伝統的な順序であり, Tait [111] や Little [77] によって始められたようである.

定義 1.1.5. 交点数が 0 である結び目を **自明な結び目** という. 同様に交点数が 0 である絡み目を **自明な絡み目** とよぶ.

図 1.2 のような結び目, 絡み目の正則表示の部分的な移動を **Reidemeister 移動** (Reidemeister move) という. ただし, 向きについては移動しない部分で一致するように

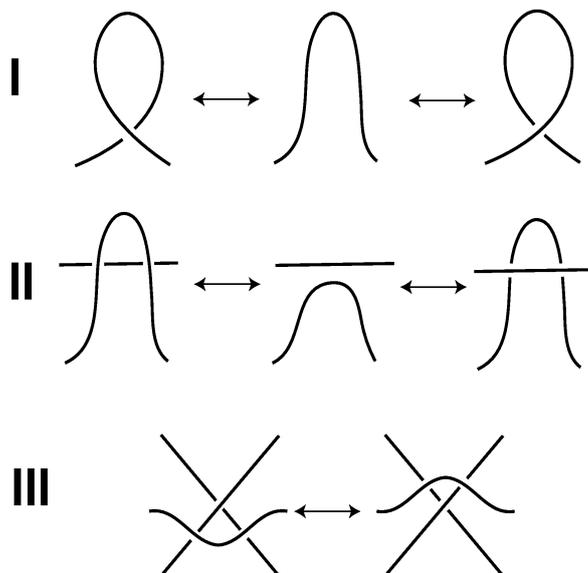


図 1.2 Reidemeister 移動

入っているものとする. これらの有限回の移動で移りあう 2 つの正則表示は同型であるという. このときつぎの定理が成り立つ.

定理 1.1.6. 2 つの結び目 (または絡み目) K, K' の正則表示を D, D' とする. このとき, K と K' が同値な結び目 (または絡み目) である必要十分条件は, D と D' が同型になることである.

この定理より結び目, 絡み目の同値問題はその正則表示の同型問題に帰着されることがわかる.

以下, その正則表示そのものを結び目, 絡み目とみなすことにする. 図 1.1(a) の結び目は三葉結び目 (Reidemeister-Rolfsen による表では 3_1), (b) は 8 の字結び目 (同じく 4_1), (c) は Hopf の絡み目とよばれる.

定義 1.1.7. 2 つの結び目の正則表示が与えられたとき, 図 1.3 のように各々の正則表示から小さな線分をとり除いて 4 個の端点を 2 つの新しい線分をつなぎ, 新しい結び目をつくることができる. この操作を連結和とよぶ. 2 つの結び目 K_1, K_2 から連結和で新しくできる結び目を $K_1 \# K_2$ と書くことにする. この操作において, 2 つの正則表示に交わりはないものとし, とり除く 2 本の線分はそれぞれ相手側にあるとする. さらに, 2 つの新しい線分はそれら自身および元の正則表示とも交わらないようにとる. 同じ操作が絡み目についても同様に定義できることを注意しておく.

結び目 K を $K_1 \# K_2$ と書いたとき, K_1 もしくは K_2 が自明な結び目にしかなり得ないとき, K は素な結び目とよばれる.

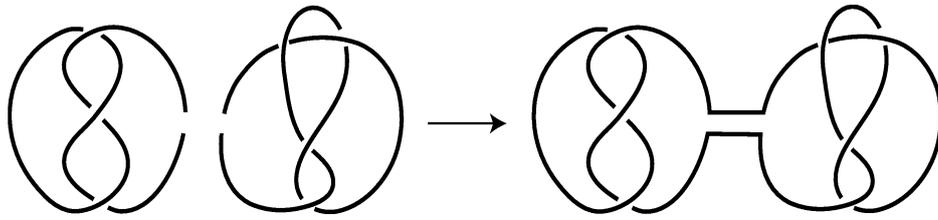


図 1.3

1.2 Seifert 曲面

定義 1.2.1. 空間 \mathbb{R}^3 内のコンパクトで向きづけ可能な境界つき曲面 F が絡み目 L の **Seifert 曲面** であるとは, F のどの連結成分も境界をもち, $\partial F = L$ となるときをいう. とくにコンパクトで向きづけられた境界つき曲面 F が向きづけられた絡み目 L の Seifert 曲面であるとは, F の向きから誘導される ∂F の向きが L の向きと一致するときをいう.

本書では, Seifert 曲面 F を絡み目補空間に制限した $F \cap (S^3 - N(L))$ も L の Seifert 曲面とよび, 同じ記号 F で表すことにする. ここで $N(L)$ は絡み目 L の開管状近傍を意味する.

定理 1.2.2. 任意の向きづけられた結び目 (または絡み目) に対し, Seifert 曲面が存在する.

Seifert は以下のようなアルゴリズムで与えられた絡み目に曲面をはることを考えた.

L を向きづけられた絡み目とし, D を L の正則表示とする. まず, D の各交点に注目し, 図 1.4 のように変形する. すると交点が無くなり, D は向きのついたいくつかの閉曲線になる (これらの曲線のことを Seifert 曲線とよぶ).

つぎにこれら各閉曲線に円板 D^2 をはる. 図 1.5 の場合, 2 つの円板 D_1^a, D_2^a , 図 1.6 の場合, 3 つの円板 D_1^b, D_2^b, D_3^b が得られる. 図 1.6 では, D_2^b は D_1^b の上に重なっているが, それで差し支えない. この部分は曲面が ‘2 階建て’ になる.

最後にこれらの円板を 1 回ねじった小さな帯で結びつけ (図 1.7), 全体として 1 つの曲面にする. この帯は元の正則射影 D の各交点に合ったものをはっていく. 得られる曲面 F には境界があり, それはちょうど元の絡み目 L になっている. さらに, F は向きづけられた曲面になる.

ここで注意すべき点は, 結び目の場合には, 得られる曲面は最初に与えられていた向きに依存しないが, 絡み目の場合には各成分にどのように向きが与えられているかによって, 得られる曲面は大きく変わるということである. このことから, Seifert 曲面を扱うときはいつも結び目, 絡み目に向きがつけられているとする. また, 各成分の向きを固定しても, 1 つの結び目, 絡み目にはることのできる Seifert 曲面は一意ではない. 絡み目 L にはれる

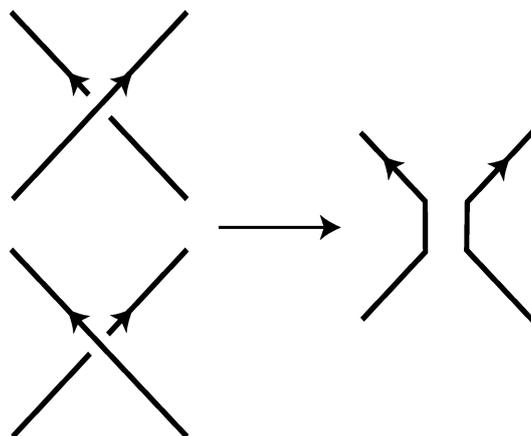


図 1.4

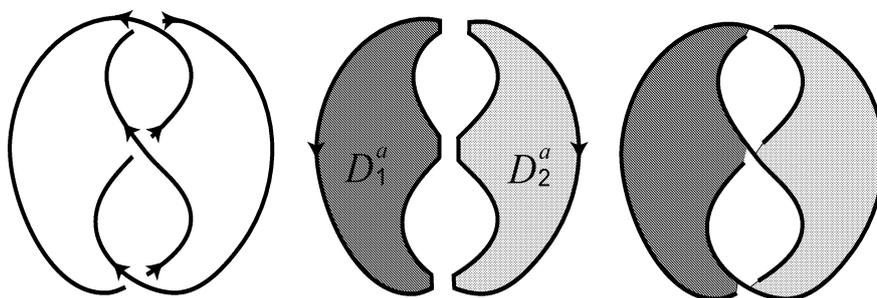


図 1.5

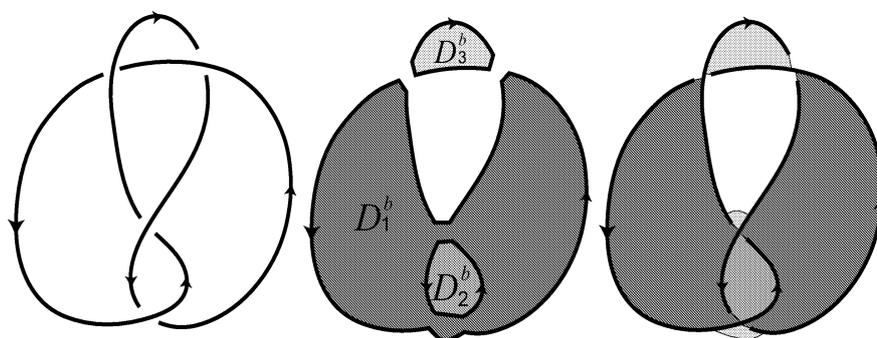


図 1.6

Seifert 曲面のうち最小種数であるものを**最小種数 Seifert 曲面**といい、その種数を絡み目 L の**種数**とよぶ。一般に、最小種数 Seifert 曲面に限っても一意性は成り立たない。つまり、最小種数 Seifert 曲面のなかにも S^3 のアンビエントアイソトピーで移りあわないものが存在する (例えば, [67] を参照)。

S^3 内の向きづけられた曲面 F と $D^1 \times D^2$ に対し, $F \cap (D^1 \times D^2) = \text{int } F \cap \partial(D^1 \times D^2) = D_1 \cup D_2 (= \partial D^1 \times D^2)$ となり, さらに $F' = (F - \text{int } D_1 \cup \text{int } D_2) \cup (\partial(D^1 \times D^2) - \text{int } D_1 \cup \text{int } D_2)$ が向きづけ可能曲面となるならば, F' を F の**1-ハンドル拡大**, また, この $D^1 \times D^2$ を**1-ハンドル**とよぶ。アーク $D^1 \times \{1 \text{ 点}\} (\subset D^1 \times D^2)$ を α とするとき,

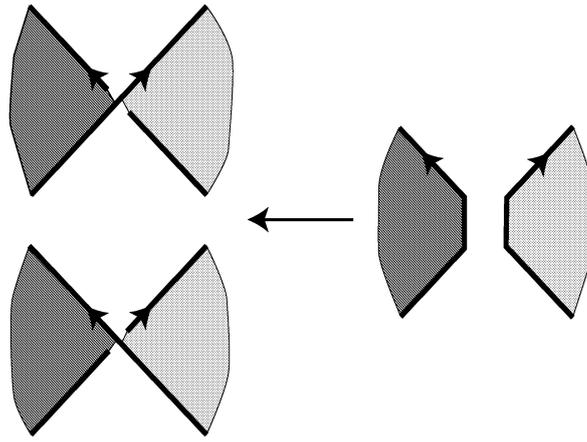


図 1.7

この1-ハンドル拡大をアーク α に沿った1-ハンドル拡大という. 逆に, F を F' の1-ハンドル縮小という.

定義 1.2.3. 絡み目 L の2つの Seifert 曲面 S, S' が S -同値であるとは, L の Seifert 曲面の列

$$S = S_1, S_2, \dots, S_{m-1}, S_m = S'$$

で, S_{i+1} が S_i の1-ハンドル拡大もしくは1-ハンドル縮小になっているときをいう.

命題 1.2.4. 向きづけられた絡み目に対する任意の2つの連結 Seifert 曲面は S -同値である.

以下, 第7章での Seifert 曲面を使ったねじれ Alexander 不変量の定義のためにいくつかの用語と結果を紹介することにする. 詳細は Lin の論文 [76] を参照のこと.

定義 1.2.5. S^3 内の絡み目 L の Seifert 曲面 S が自由であるとは, $S^3 - N(S)$ がハンドル体になっているときをいう. また, いくつかのサークルを1つの基点 $*$ で同一視したものをブーケとよぶ. Seifert 曲面 S のスパイン (spine) とは, S に埋め込まれたブーケで S の変形レトラクトになっているものをいう. Seifert 曲面 S が正則であるとは, S がつぎの条件をみたすスパインをもつことである.

(条件) S から得られる S^3 への埋め込みが標準的な埋め込みになっている.

このスパインを正則なスパインとよぶ (図 1.8 参照).

注意 1.2.6. Seifert のアルゴリズムで得られる Seifert 曲面は正則 Seifert 曲面になる. また, 正則 Seifert 曲面は自由であるが, その逆は一般に成り立たない.

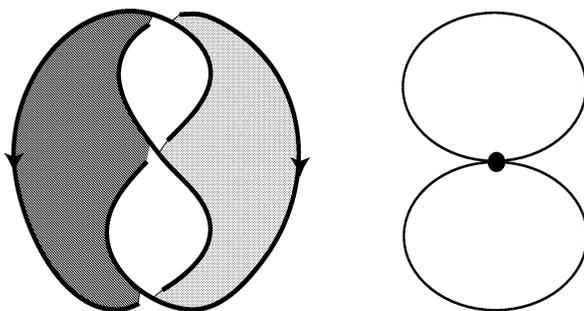


図 1.8 標準的に埋め込まれたスパイン

さて, Seifert 曲面 S を正則とし, その正則スパインを W とおく. S のアーク α に沿った 1-ハンドル拡大によって, S' が得られたとする. このとき, α の端点は W の基点にあると仮定してよい.

定義 1.2.7. S の 1-ハンドル拡大が正則であるとは, $W \cup \alpha$ が標準的な埋め込みになっているときをいう. 逆に, S' から S を得る操作を, 正則 1-ハンドル縮小とよぶ. 結び目 K の 2 つの Seifert 曲面 S, S' が正則 S -同値であるとは, K の正則 Seifert 曲面の列

$$S = S_1, S_2, \dots, S_{m-1}, S_m = S'$$

で S_{i+1} が S_i の正則 1-ハンドル拡大もしくは正則 1-ハンドル縮小になっているときをいう.

Lin [76] によって, つぎの定理が示されている. これは命題 1.2.4 を結び目の場合により詳細に調べたものになっている.

定理 1.2.8. 結び目 K の任意の 2 つの正則 Seifert 曲面は正則 S -同値である.

1.3 トーラス結び目, ファイバー結び目, 交代結び目

結び目理論でよく扱われる結び目, 絡み目をあげよう.

定義 1.3.1. 3次元球面内に埋め込まれたトーラス $S^1 \times S^1$ でその両側にソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ をはるものを, 標準的に埋め込まれたトーラスという. この上にメリディアン m (経線) とロンジチュード l (緯線) を図 1.9 の左図のように定める. このトーラスの表面にメリディアン方向に p 回, ロンジチュード方向に q 回巻きついた結び目, 絡み目を (p, q) 型トーラス結び目あるいは (p, q) 型トーラス絡み目とよび, $T(p, q)$ で表すことにする.

図 1.9 の右図の結び目は $(5, 2)$ 型トーラス結び目である. トーラス結び目, 絡み目についての詳細は, [1], [92]などを参照のこと. 例えば, 三葉結び目はトーラス結び目 $T(3, 2)$ で

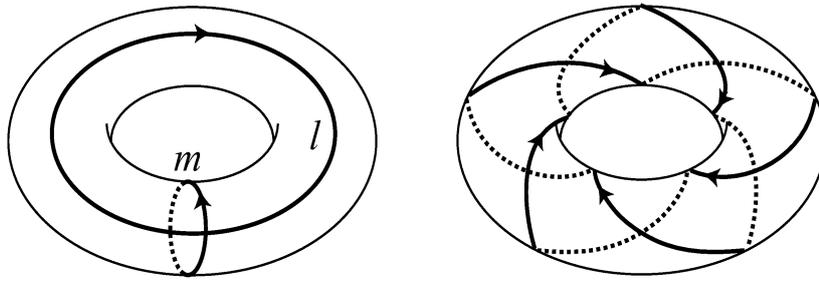


図 1.9

ある(確かめよ). また, p と q が互いに素なとき, 絡み目ではなく結び目になる. トーラス結び目についてはつぎのことが知られている.

定理 1.3.2. (i) (p, q) 型トーラス結び目が自明な結び目になるための必要十分条件は, $p = \pm 1$ または $q = \pm 1$ である.

(ii) 自明でないトーラス結び目 $T(p, q)$ と $T(p', q')$ が同値であるための必要十分条件は, (p', q') が (p, q) , (q, p) , $(-p, -q)$, $(-q, -p)$ のいずれかと等しいことである.

定義 1.3.3. L を向きづけられた絡み目とする. L の外部 $E(L)$ が Seifert 曲面の $E(L)$ への制限をファイバーにもつ S^1 上のファイバー束になっているとき, この L をファイバー絡み目とよぶ.

歴史的には, 結び目群 $G(K)$ (次節参照) の交換子群が有限生成になっている(実際に階数が K の種数の 2 倍になっている自由群) 結び目を Neuwirth 結び目とよび研究されていたのであるが, この概念は上述の定義と同値であることが Stallings [106] によって示され, ファイバー結び目とよばれるようになった.

どの結び目, 絡み目がファイバーか? という問題が起こるが, 例えば, 10 交点以下の素な結び目については金信 [50] によってどの結び目がファイバー結び目であるか決定されている. また, Gabai は [24] において与えられた絡み目がファイバー絡み目であることを示す幾何学的方法を編み出している. 第 9 章で, (ねじれ) Alexander 不変量を使った判定法を紹介するが, ここでは古典的なつぎの結果を述べておく.

定理 1.3.4. (i) 種数 1 のファイバー結び目は三葉結び目か 8 の字結び目に限る.

(ii) トーラス結び目はファイバー結び目である.

証明は [9] などを参照されたい. また, つぎの事実も知られている.

定理 1.3.5. L をファイバー絡み目とし, そのファイバーになる Seifert 曲面を S とする. このとき, この S は最小種数 Seifert 曲面になる.

つぎの定理は Stallings [107] と Gabai [24] によって示されている.

定理 1.3.6. 絡み目 L_1 と L_2 の連結和 $L_1 \# L_2$ がファイバー絡み目である必要十分条件は, L_1 と L_2 がともにファイバー絡み目であることである.

ファイバー結び目はその補空間の構造が扱いやすく様々な観点から研究されている. 非ファイバー結び目の補空間も含め, ファイバー構造を基準に結び目補空間の構造を統一的に扱う試みを 10.3 節で述べる.

定義 1.3.7. 結び目 K のある 1 点から 1 つの方向に K をたどっていったとき, 上交点, 下交点が交互に現れるような正則表示をもつ結び目 K のことを**交代結び目**という.

三葉結び目や 8 の字結び目は交代結び目である (確かめよ). 絡み目についても同様に定義される.

交代結び目は, その交点における ‘交代’ という幾何学的性質が, 結び目の代数的性質 (Alexander 不変量など) に反映していることが多い. そのことの考察は後の章にゆずることにし, ここではつぎの定理をあげておく. 証明は Gabai [25] によるものが簡明であろう.

定理 1.3.8. 交代結び目または交代絡み目の交代正則表示に Seifert のアルゴリズムを適用すると最小種数の Seifert 曲面が得られる.

1.4 結び目群, 絡み目群

定義 1.4.1. \mathbb{R}^3 または S^3 内の絡み目 L に対し, その外部 $\mathbb{R}^3 - N(L)$ または $E(L) = S^3 - N(L)$ の基本群 $\pi_1(E(L), b)$ を L の**絡み目群** (とくに L が結び目のときは, **結び目群**) とよび, $G(L)$ で表す (b は基点を表すが, しばしば省略される).

注意 1.4.2. S^3 を \mathbb{R}^3 の 1 点コンパクト化とみなすとき, 自然な同型

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - N(L)) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 - L) \cong \pi_1(S^3 - N(L))$$

がある.

以下で, \mathbb{R}^3 内の向きをついた絡み目 L の群 $G(L)$ の表示を求めることにする. \mathbb{R}^3 に右手系の向きを入れ, 各点 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ を $((x, y), 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \mathbb{R}^2$ につづき $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える. L の正則表示 $p(L)$ は連結で少なくとも 1 つの 2 重点をもつとし, v_j ($j = 1, 2, \dots, s$) で $p(L)$ の 2 重点を表す. そして各 j に対し, $p^{-1}(v_j)$ の上交点の開近傍のみ上半空間 \mathbb{R}_+^3 にあり, L の他の部分は $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ にあると仮定する. このとき, L は**上方標準位置**にあるという (同様に, $p^{-1}(v_j)$ の下交点の開近傍のみ下半空間

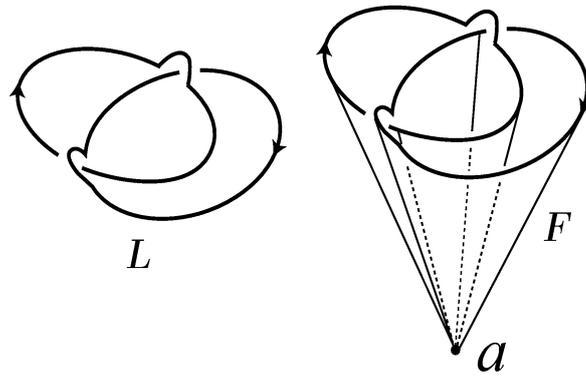


図 1.10

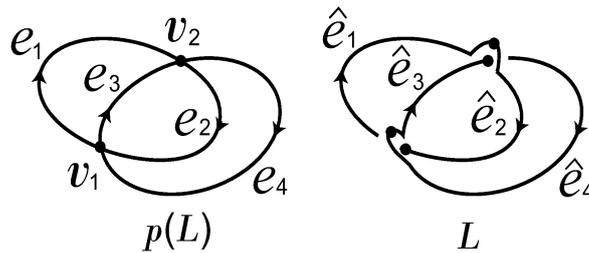


図 1.11

\mathbb{R}^3 にあり, L の他の部分は $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ にあるとき, L は下方標準位置にあるという). $G(L)$ の表示は以下の手順で求めることができる.

1. \mathbb{R}^3 の 1 点 a をとる. L のすべての点 u に対し, u と $p(u)$ を結ぶ線分と錐 $p(L) * a$ からなる 2 次元多面体を F とする (図 1.10).
2. $p(L)$ は頂点が v_j ($j = 1, 2, \dots, s$) からなるグラフとみなせる. e_i ($i = 1, 2, \dots, m$) をグラフ $p(L)$ の辺とする. L の向きにしたがって各 e_i に向きを入れ, $\cup_{j=1}^s p^{-1}(v_j)$ の各成分が 0-セル, e_i に対応する L の弧 \hat{e}_i が 1-セルとなるように L のセル分解をとる (図 1.11).
3. セル複体 X_L を, 0-セルは L の 0-セルに a を加えたもの, 1-セルを L の 1-セル $\cup \hat{e}_i$, $p^{-1}(v_j)$ の 2 点を p に沿ってまっすぐに結ぶ線分 v_j^1 ($j = 1, 2, \dots, s$), および a と v_j ($j = 1, 2, \dots, s$) を端点にもつ線分 a_j^1 とする (図 1.12). すなわち, これら 1-セルの和を X_L^1 と書くと

$$X_L^1 = (\cup \hat{e}_i) \cup (\cup v_j^1) \cup (\cup a_j^1).$$

そして, X_L の 2-セルを $F - X_L^1$ の各成分の閉包とすると, F はセル複体 X_L の多面体とみなせる (このとき, X_L の各 2-セルの境界は, 1-セル \hat{e}_i ($i = 1, 2, \dots, m$) をちょうど 1 つずつ含む). 1-セル \hat{e}_i を境界に含む X_L の 2-セルを D_i ($i = 1, 2, \dots, m$) と

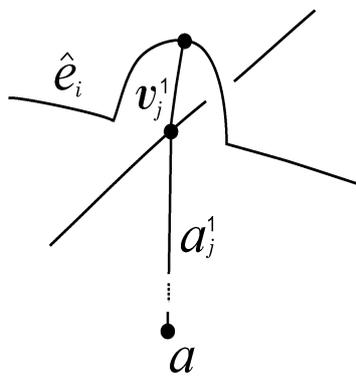


図 1.12

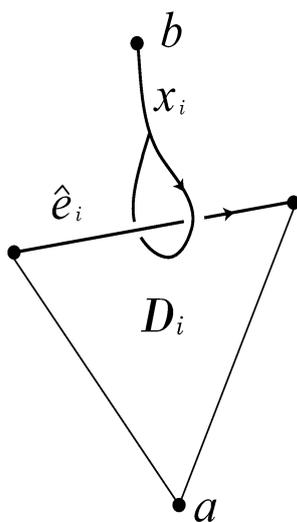


図 1.13

書き, \hat{e}_i 上で \hat{e}_i と向きが一致するように D_i に向きを入れる (図 1.13).

4. F の構成から F の補空間 $F^c = \mathbb{R}^3 - F$ は単連結である. $H = F^c \cup (\cup \text{int } D_i)$ とおく. すると $\pi_1(H)$ は, 基点を \mathbb{R}_+^3 の 1 点 b とし, 生成元が開 2-セル $\text{int } D_i$ と交差数 1 でちょうど 1 回交わる道で代表される元 x_i を使って, 階数 m の自由群 $\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$ として表される.

5. \bar{H} を $\mathbb{R}^3 - L$ に属する X_L の開 1-セルを H につけ加えることで得られるものとする. すなわち, $\bar{H} = H \cup (\cup \text{int } a_j^1) \cup (\cup \text{int } v_j^1)$. このとき, b を基点とする $\pi_1(\bar{H}, b)$ は $\pi_1(H) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$ につぎの 2 種類の関係子を加えたものになる.

(a) 図 1.14 の左図にあるように各 $\text{int } v_j^1$ に対応する関係子

$$x_i x_h^{-1}$$

(b) 図 1.14 の右図にあるように各 $\text{int } a_j^1$ に対応する関係子

$$x_s^\varepsilon x_i x_k^{-\varepsilon} x_h^{-1}$$

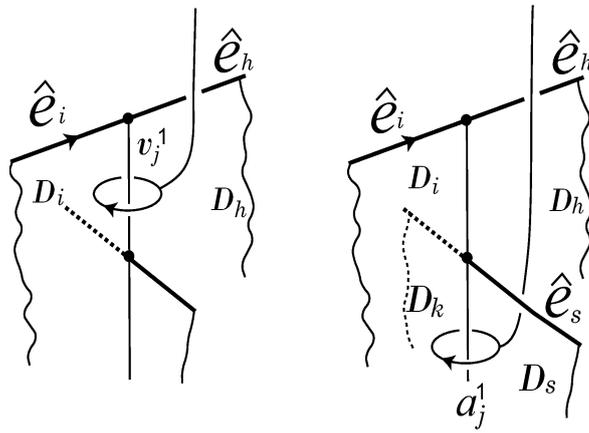


図 1.14

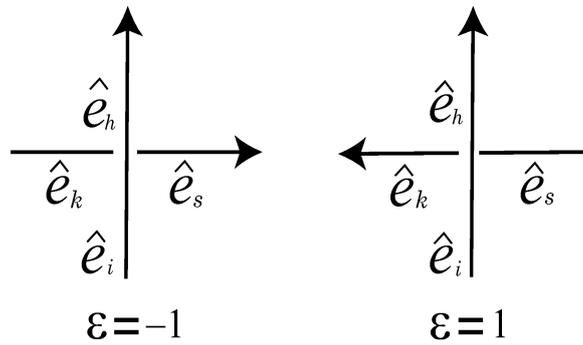


図 1.15

ここで, $\varepsilon = \pm 1$ は v_j に対応する交点での符号 (図 1.15) とする. また, このとき, (b) における各 $\text{int } a_j^1$ に対応する関係子は (b) の残りの関係子たちの帰結になっていることを注意しておく.

6. 最後に \overline{H} に a を加えて $\mathbb{R}^3 - L$ ができるが, このとき基本群には変化がなく, $\pi_1(\mathbb{R}^3 - L) = \pi_1(\overline{H})$.

定理 1.4.3. 以上の手順で得られるものは $G(L)$ の 1 つの群表示になっている. さらに, 任意の 1 つの 2 重点から生ずる関係子 $x_s^\varepsilon x_i x_k^{-\varepsilon} x_h^{-1}$ は省くことができる.

注意 1.4.4. 上述の 5. (a), (b) より各関係は

$$x_s^\varepsilon x_h = x_h x_k^\varepsilon$$

と書ける. とくに結び目の場合, 適当な基点をとり, そこから結び目の向きにしたがって各生成元に番号づけを行うと,

$$x_s^\varepsilon x_h = x_h x_{s+1}^\varepsilon$$

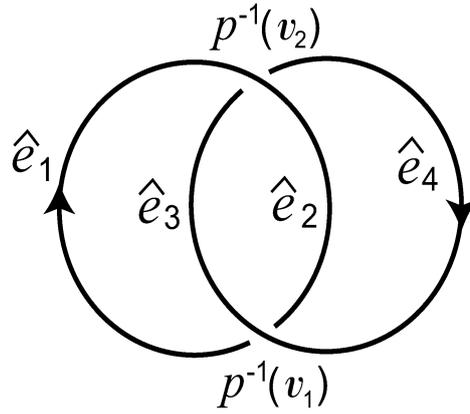


図 1.16 Hopf link

と書くことができる (h は s に依存しているので, 正確には $h(s)$ と書くべきものである). この表示は 4.3 節などで使われる.

さて, いくつか例をみてみよう.

例 1.4.5. L を Hopf の絡み目 (図 1.16) とし, 図 1.11 と同様に各辺と交点に名前をつける. このときすべて $\varepsilon = 1$ となり, 交点 $p^{-1}(v_1)$ から生じる関係子は $x_4x_3^{-1}$ と $x_2x_4x_1^{-1}x_3^{-1}$, 交点 $p^{-1}(v_2)$ から生じる関係子は $x_1x_2^{-1}$ と $x_3x_1x_4^{-1}x_2^{-1}$ となる. よって

$$G(L) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1x_2^{-1}, x_4x_3^{-1}, x_2x_4x_1^{-1}x_3^{-1}, x_3x_1x_4^{-1}x_2^{-1} \rangle.$$

定理 1.4.3 より, これは

$$G(L) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1x_2^{-1}, x_4x_3^{-1}, x_2x_4x_1^{-1}x_3^{-1} \rangle$$

と表示することもできる.

例 1.4.6. K を三葉結び目とし, 図 1.17 のように各辺に名前をつける. このときすべて $\varepsilon = -1$ となり, 関係子は $x_6x_1^{-1}$, $x_4^{-1}x_6x_3x_1^{-1}$, $x_4x_5^{-1}$, $x_2^{-1}x_4x_1x_5^{-1}$. そして, $x_2x_3^{-1}$, $x_6^{-1}x_2x_5x_3^{-1}$ となる. したがって,

$$G(K) =$$

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \mid x_6x_1^{-1}, x_4x_5^{-1}, x_2x_3^{-1}, x_4^{-1}x_6x_3x_1^{-1}, x_2^{-1}x_4x_1x_5^{-1}, x_6^{-1}x_2x_5x_3^{-1} \rangle$$

を得る. 定理 1.4.3 より,

$$G(K) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \mid x_6x_1^{-1}, x_4x_5^{-1}, x_2x_3^{-1}, x_4^{-1}x_6x_3x_1^{-1}, x_6^{-1}x_2x_5x_3^{-1} \rangle.$$

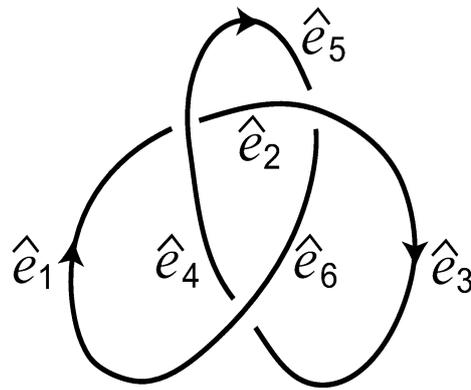


図 1.17 三葉結び目

1.5 Tietze 変換と Wirtinger 表示

一般に, 2つの群が同型かそうでないかを, 与えられた群の表示から判定するのは難しい問題である. しかしながら, ある群に対して与えられた2つの表示は, 下記 (I), (II) の操作およびそれらの逆操作 $(I)^{-1}$, $(II)^{-1}$ を有限回行うことで互いに移りあえることが知られている ([13], [112] を参照のこと).

いま, ある群表示

$$P = \langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_t \rangle$$

が与えられたとする.

(I) 関係子 r_i たちの帰結として得られる関係子 r を表示 P に加える:

$$P' = \langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_t, r \rangle.$$

(II) 新しい生成元 x と新しい関係子 xw^{-1} (ただし, w は x_1, \dots, x_s の語) を表示 P に加える:

$$P'' = \langle x_1, \dots, x_s, x \mid r_1, \dots, r_t, xw^{-1} \rangle.$$

これらをまとめて **Tietze 変換** という.

定義 1.5.1. 群の有限表示 $\langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_{s-1} \rangle$ において, $r_i = x_{h(i)}^{-1} w_i x_{k(i)} w_i^{-1}$ (w_i は x_1, x_2, \dots, x_s の語) の形に書かれているものを, **Wirtinger 表示** という. ここで, 関係子の個数は (生成元の個数) -1 になっていることを注意しておく.

前節の絡み目群の求め方で得られた $G(L)$ の表示は, Tietze 変換 $(II)^{-1}$ によって Wirtinger 表示になる. 例えば, Hopf の絡み目 L の場合

$$G(L) = \langle x_2, x_3 \mid x_2 x_3 x_2^{-1} x_3^{-1} \rangle$$

となるが、これは

$$G(L) = \langle x_2, x_3 \mid x_3^{-1}x_2x_3x_2^{-1} \rangle$$

と表示することもできる (この群は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ と同型). 三葉結び目 K の場合

$$G(K) = \langle x_1, x_3, x_5 \mid x_5^{-1}x_1x_3x_1^{-1}, x_1^{-1}x_3x_5x_3^{-1} \rangle$$

となる. 後の章で使うためにもう少し変形しておく, 関係子 $x_5^{-1}x_1x_3x_1^{-1}$ は関係 $x_5 = x_1x_3x_1^{-1}$ と同値なので, $x_5x_1x_3^{-1}x_1^{-1}$ と同値. Tietze 変換 (II)⁻¹ によって x_5 を消去して,

$$G(K) = \langle x_1, x_3 \mid x_1^{-1}x_3x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1} \rangle.$$

$x_1^{-1}x_3x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}$ は $x_3x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}$ と同値であり, $x_1 \rightarrow x, x_3 \rightarrow y$ と文字を置きかえると,

$$G(K) = \langle x, y \mid yxyx^{-1}y^{-1}x^{-1} \rangle$$

と書ける. これは

$$G(K) = \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$$

とも書かれる.

問題 1.5.2. 8 の字結び目 (図 1.1(b)) を K としたとき, 結び目群 $G(K)$ は Wirtinger 表示

$$G(K) = \langle x, y, z \mid x^{-1}z^{-1}xzyz^{-1}x^{-1}z, z^{-1}yz^{-1}xzy^{-1} \rangle$$

をもつことを示せ.

問題 1.5.3. Borromean 絡み目を L (図 1.18) とする. このとき, 絡み目群 $G(L)$ は

$$G(L) = \langle x_1, x_2, x_3 \mid r_1, r_2 \rangle,$$

$$r_1 = x_1^{-1}x_3x_2^{-1}x_3^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_3x_2x_3^{-1},$$

$$r_2 = x_2^{-1}x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_3x_2x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}$$

という表示をもつことを示せ.

問題 1.5.4. 図 1.19 にある結び目はそれぞれ樹下-寺阪の結び目 KT , Conway の結び目 C とよばれる. $G(KT)$ および $G(C)$ は以下の群表示をもつことを示せ:

$$G(KT) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid r_1, r_2, r_3 \rangle,$$

$$r_1 : x_1x_2x_1^{-1} = x_4x_2x_4x_2^{-1}x_4^{-1},$$

$$r_2 : x_4x_2x_4^{-1} = x_2^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_2,$$

$$r_3 : x_1x_3x_1^{-1} = x_4x_3x_4x_3^{-1}x_4^{-1}.$$

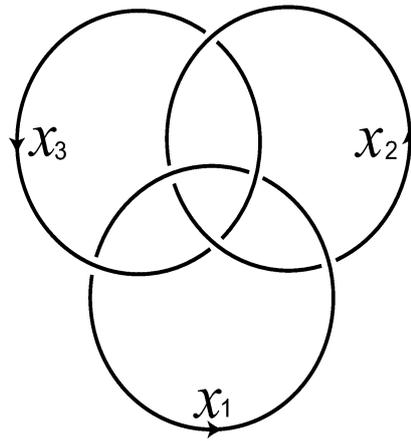


図 1.18 Borromean 絡み目

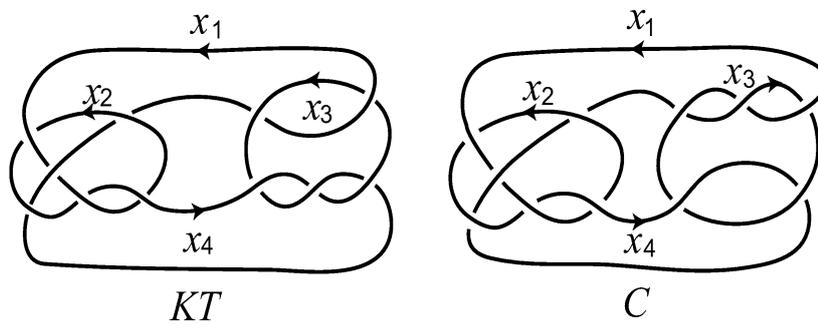


図 1.19 樹下-寺阪結び目と Conway 結び目

$$G(C) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid r_1, r_2, r_3 \rangle,$$

$$r_1 : x_1 x_2 x_1^{-1} = x_4 x_2 x_4 x_2^{-1} x_4^{-1},$$

$$r_2 : x_4 x_2 x_4^{-1} = x_2^{-1} x_3^{-1} x_1^{-1} x_3 x_1 x_3 x_2 x_1 x_2^{-1} x_3^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_1 x_3 x_2,$$

$$r_3 : x_1 x_3 x_1^{-1} = x_4 x_3^{-1} x_1 x_3 x_4^{-1}.$$

例 1.5.5. トーラス結び目 $K = T(p, q)$ はそれが乗っているトーラスから 1 つのアニュラスを切りとる. トーラスがはる 2 つのソリッドトーラスの基本群は各々 1 個の生成元からなる自由群であり, $E(K)$ はこの 2 つのソリッドトーラスがアニュラスではりあわさって得られると考えられる. よって van Kampen の定理により, トーラス結び目 $T(p, q)$ の結び目群は,

$$G(K) = \langle x, y \mid x^p = y^q \rangle$$

という表示をもつ. これは, Wirtinger 表示ではない.

第 2 章

Seifert 行列と Alexander 多項式

与えられた 2 つの結び目が同値であるかということを調べるのに、不変量という考え方があある。本書ではその 1 つである Alexander 多項式とそれを一般化したねじれ Alexander 不変量というものに焦点をあてている。この章では Seifert 曲面を使って Alexander 多項式を定義し、そこから導かれる Alexander 多項式に関するいくつかの性質を述べる。

2.1 絡み数

本節では向きのついた絡み目に対する重要な不変量として、**絡み数**を紹介する。まず、向きのついた結び目、絡み目の正則表示の交点に以下の規則で符号をつけることを考える。

定義 2.1.1. 向きのついた正則表示の交点 C で、図 2.1 で示した 2 つの場合が起こる。(a) の場合、交点の符号を $\text{sign}(C) = 1$ 、(b) の場合 $\text{sign}(C) = -1$ と決め、(a) を**正の交点**、(b) を**負の交点**とよぶ。

向きのついた 2 成分の絡み目 L の各成分の結び目を K_1, K_2 とおき、その正則表示 D の交点のうち、 K_1 と K_2 の正則表示が交わってできる交点 C_1, C_2, \dots, C_m を考える (K_1 自身または K_2 自身の交わりとしてできる D の交点は無視する)。このとき、

$$\text{lk}(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \{ \text{sign}(C_1) + \text{sign}(C_2) + \dots + \text{sign}(C_m) \}$$

とおき、 K_1 と K_2 の**絡み数**という。

例 2.1.2. 図 2.2 に絡み数の計算例をあげておく。確かめられたい。

問題 2.1.3. $\text{lk}(K_1, K_2) = \text{lk}(K_2, K_1)$ であることを確認せよ。

定理 2.1.4. $\text{lk}(K_1, K_2)$ は絡み目 L の不変量である。

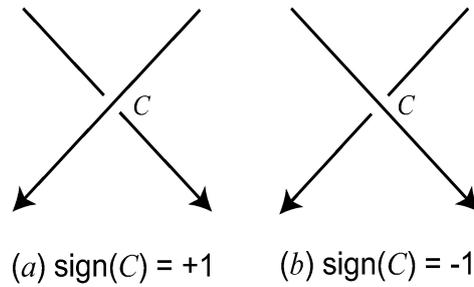


図 2.1 交点の符号

証明 D と D' を絡み目 L の正則表示とする. 定理 1.1.6 より D' は D から Reidemeister 移動 I, II, III を有限回行って得られるので, $\text{lk}(K_1, K_2)$ が絡み目の不変量であることを示すには, D に Reidemeister 移動 I, II, III を施して得られる正則表示に対してこの値が変わらないことを示せばよい.

Reidemeister 移動 I に関わるのは K_1 自身もしくは K_2 自身の交わりなので, $\text{lk}(K_1, K_2)$ に変化はない.

Reidemeister 移動 II について 2 つの成分が各々 K_1, K_2 のときを考えればよいが, このとき K_1, K_2 の向きは 3 つの場合が起こり得る (図 2.3). いずれの場合も新しく生じる 2 つの交点 C_1, C_2 の符号は逆なので, $\text{sign}(C_1) + \text{sign}(C_2) = 0$ となり, $\text{lk}(K_1, K_2)$ に変化はない.

D に Reidemeister 移動 III を施したとき, $\text{lk}(K_1, K_2)$ に影響があるのは交点の C_1, C_2, C_3 および C'_1, C'_2, C'_3 の符号である. 図 2.4 の各アーク (arc) をそれぞれ α, β, γ と名づけたとき, α, β, γ がどのような向きであっても,

$$\text{sign}(C_1) = \text{sign}(C'_3), \text{sign}(C_2) = \text{sign}(C'_2), \text{sign}(C_3) = \text{sign}(C'_1)$$

が成立. α が K_1 の一部, β, γ が K_2 の一部だとすると, $\text{lk}(K_1, K_2)$ に関係するのは $\text{sign}(C_1) + \text{sign}(C_3)$ と $\text{sign}(C'_1) + \text{sign}(C'_3)$ であるが, これらは上の等式より等しいことがわかる. 他の場合も同様に示すことができるので, 定理の主張がいえる. \square

その他, 以下の性質が知られている.

命題 2.1.5. (i) 絡み数は常に整数.

(ii) K_2 の向きをかえたものを $-K_2$ とするとき,

$$\text{lk}(K_1, -K_2) = -\text{lk}(K_1, K_2)$$

が成り立つ.

問題 2.1.6. これらのことを証明せよ.

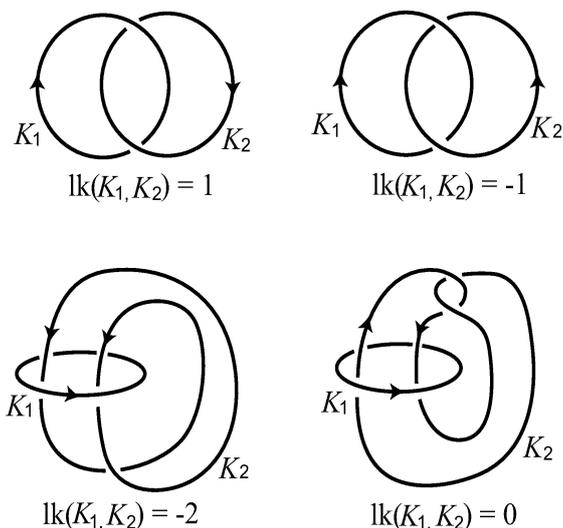


図 2.2 絡み数の例

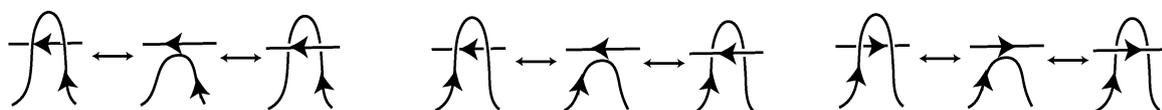


図 2.3

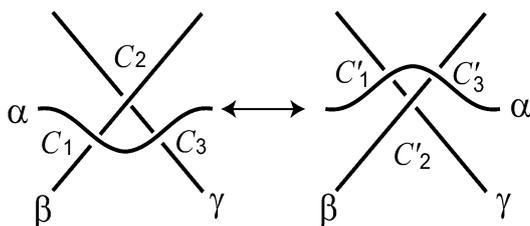


図 2.4

さて、つぎに向きのついた 3 次元球面 S^3 内の向きをついた結び目 K をとる. K の開管状近傍の境界 $\partial N(K)$ 上の閉曲線で, $\text{cl}(N(K))$ 内で K と 1 点で交わる円板の境界となるものを, この結び目 K のメリディアンという. このとき, つぎの定理が成立する.

定理 2.1.7. 結び目 K の外部 $E(K)$ の 1 次元ホモロジー群 $H_1(E(K); \mathbb{Z})$ は K のメリディアンで生成される群 \mathbb{Z} と同型である. また, C を $E(K)$ 内の閉曲線とすると, そのホモロジー類 $[C] \in H_1(E(K); \mathbb{Z})$ は $\text{lk}(C, K)$ となる.

2.2 Seifert 行列

この節では Seifert 行列を導入する. そして次節でこの行列を使って Alexander 多項式を定義する.

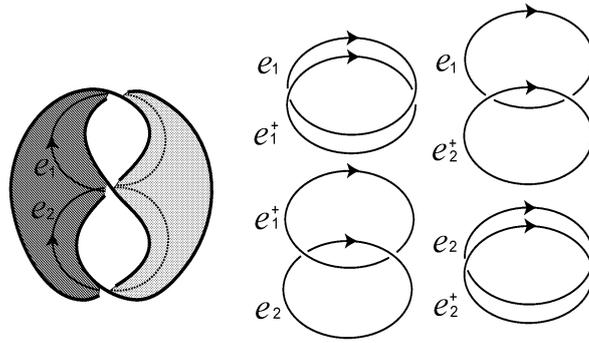


図 2.5 三葉結び目の Seifert 行列

K を結び目とし, K のある Seifert 曲面を \bar{S} とする. いま, \bar{S} の $\mathbb{R}^3 - N(K)$ (もしくは $S^3 - N(K)$) への制限を S とおく. $H_1(S; \mathbb{Z})$ の元として x をとる. そのサイクルとしての代表元も同じ記号 x で書くことにし, x^+ で S の正則近傍 $S \times [-1, 1]$ 内の $x \times \{1\}$ で表されるサイクルを表すことにする. 同様に, x^- を $x \times \{-1\}$ で表されるサイクルとする.

ここで, S の種数を g とすると, $H_1(S; \mathbb{Z})$ の $2g$ 個の生成元 e_1, e_2, \dots, e_{2g} がとれる.

定義 2.2.1. 各成分が次式で与えられる $2g \times 2g$ 行列 $M = (M_{i,j})$ のことを **Seifert 行列** という.

$$M_{i,j} = \text{lk}(e_i, e_j^+)$$

絡み目 L に対しては, 連結な Seifert 曲面 \bar{S} を考え, 結び目の場合と同様に S のサイクルを考える. このとき, $H_1(S; \mathbb{Z})$ の生成元が $2g + l - 1$ 個とれ (g は S の種数, l は L の成分数), 得られる Seifert 行列は $(2g + l - 1) \times (2g + l - 1)$ 行列になる.

いくつか例をみてみよう.

例 2.2.2. 図 2.5 は第 1 章でみた三葉結び目とその Seifert 曲面である. この曲面は種数 1 であり, 図に描かれているように $H_1(S; \mathbb{Z})$ の生成元 e_1, e_2 がとれる. そして, e_1, e_2, e_1^+, e_2^+ の相関図を右側に示した. このとき, Seifert 曲面のどちら側を $+1$ もしくは -1 にとっても差し支えない. したがって,

$$\text{lk}(e_1, e_1^+) = 1, \quad \text{lk}(e_1, e_2^+) = -1, \quad \text{lk}(e_2, e_1^+) = 0, \quad \text{lk}(e_2, e_2^+) = 1$$

となり, Seifert 行列は

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

例 2.2.3. 8 の字結び目 (図 2.6) の Seifert 行列をみてみよう. 三葉結び目の場合と同様に $H_1(S; \mathbb{Z})$ の生成元を図のようにとる. このとき,

$$\text{lk}(e_1, e_1^+) = -1, \quad \text{lk}(e_1, e_2^+) = 0, \quad \text{lk}(e_2, e_1^+) = 1, \quad \text{lk}(e_2, e_2^+) = 1$$

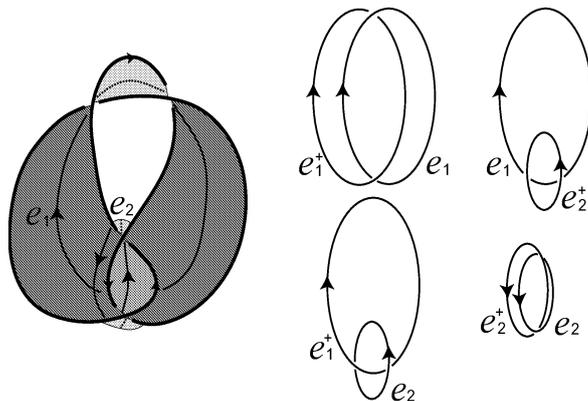


図 2.6 8 の字結び目の Seifert 行列

となり, Seifert 行列は

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

結び目 K の Seifert 行列は K の不変量ではない. 実際, K の Seifert 曲面は一意ではないので, Seifert 行列は必ずしも一致しない. それどころか, 1次元ホモロジー $H_1(S; \mathbb{Z})$ の生成元 e_1, e_2, \dots, e_{2g} の順序も方向も指定していないので, 順序をかえただけでも Seifert 行列はかわってしまう. しかしながら次節で紹介するように, この Seifert 行列を使うことで, 絡み目の不変量である Alexander 多項式が定義できる. その準備として, いくつかの概念をここで導入しよう.

定義 2.2.4. 整数を要素とする正方行列 M と M' が以下の条件をみたすとき, M と M' は S -同値であるという.

整数を要素とする正方行列の有限列

$$M = M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = M'$$

が存在し, 各 M_i は M_{i-1} とつぎのいずれかの関係にある.

- (i) $M_i = P_i M_{i-1} P_i^T$ をみたすユニモジュラー行列 P_i が存在.
- (ii) $M_i = \begin{pmatrix} M_{i-1} & \mathbf{u}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} M_{i-1} & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{u} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \end{pmatrix}$, およびこの逆操作.

ここで $\mathbf{0}$ は行零ベクトル, \mathbf{u} は整数を要素とする行ベクトルである. また P_i^T は P_i の転置行列を表す.

ユニモジュラー行列とは、整数を要素とする正方行列で、その行列式が ± 1 となるものである。

[115] において以下の定理が示されている。幾何的には Seifert 曲面の生成元のとりにかえと命題 1.2.4 に対応している。証明については [54, 命題 1.7.3], [92, 定理 6.1.3], [110, 定理 8.10] などを参照のこと。

定理 2.2.5. 1 つの結び目または絡み目から得られる任意の Seifert 行列は S -同値である。

2.3 Seifert 曲面, 行列を使った Alexander 多項式の定義

前節で定義した Seifert 行列に関して、つぎのことが知られている。

定理 2.3.1. M, M' を結び目または絡み目の Seifert 行列とする。このとき、 t^e ($e \in \mathbb{Z}$) を法として、つぎの等式が成立する:

$$\det(M - tM^T) = \det(M' - tM'^T).$$

証明 定理 2.2.5 における変化を確認すればよい。

$$\det(M_i - tM_i^T) = \det(P_i(M_{i-1} - tM_{i-1}^T)P_i^T) = \det(M_{i-1} - tM_{i-1}^T)$$

より (i) では不変。 (ii) については、

$$\begin{aligned} \det(M_i - tM_i^T) &= \det \begin{pmatrix} M_{i-1} - tM_{i-1} & \mathbf{u}^T & \mathbf{0}^T \\ -t \cdot \mathbf{u} & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & -t & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} M_{i-1} - tM_{i-1} & \mathbf{u}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & -t & 0 \end{pmatrix} \\ &= t \cdot \det(M_{i-1} - tM_{i-1}^T) \end{aligned}$$

となり、残りの場合も同様に示されるので、定理の主張がいえる。 \square

定義 2.3.2. この定理から、 M を絡み目 L の Seifert 行列とすると、

$$\det(M - tM^T)$$

は t^e ($e \in \mathbb{Z}$) を法として L の不変量になる。これを L の **Alexander 多項式** とよび、 $\Delta_L(t)$ と書く。

注意 2.3.3. 第4章以降の理論との関係や計算の便利さのために、通常は $\pm t^e$ を法とした $\Delta_L(t)$ を Alexander 多項式とよんでいる。本書では、 $\pm t^e$ ($e \in \mathbb{Z}$) を法にした等号を \doteq で表すことにする。

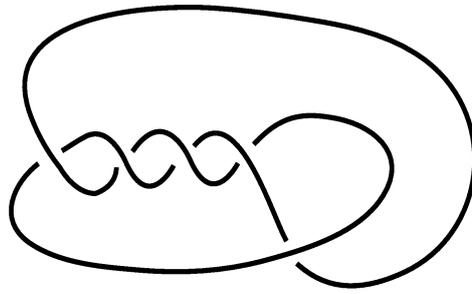


図 2.7

例 2.3.4. 三葉結び目 K の Seifert 行列として, 前節でみたように

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

がとれた. よって

$$\Delta_K(t) = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) = t^2 - t + 1$$

を得る. 同様にして 8 の字結び目 K' の Alexander 多項式 $\Delta_{K'}(t)$ は

$$\Delta_{K'}(t) = -t^2 + 3t - 1$$

となる.

問題 2.3.5. 図 2.7 の結び目の Alexander 多項式は $t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$ となること示せ.

結び目の Alexander 多項式の性質を紹介しよう. いま, 結び目 K の Alexander 多項式を

$$\Delta_K(t) = t^{-\frac{m}{2}} \det(M - tM^T)$$

と書くことにする. ただし, m は K の Seifert 行列 M の次数.

定理 2.3.6. K を結び目とすると, $\Delta_K(t)$ は対称な整係数 Laurent 多項式である. すなわち,

$$\Delta_K(t) = a_{-m}t^{-m} + a_{-(m-1)}t^{-(m-1)} + \cdots + a_{m-1}t^{m-1} + a_mt^m$$

(各 a_i ($-m \leq i \leq m$) は整数)

と書け,

$$a_{-m} = a_m, a_{-(m-1)} = a_{m-1}, \dots, a_{-1} = a_1$$

が成り立つ.

証明 命題 2.1.5 (i) より, 整数係数になることが従う. M を K の Seifert 行列とすると, M の次数は常に偶数になる ($2g \times 2g$ であった). それを m とすると,

$$\begin{aligned}\Delta_K(t^{-1}) &= t^{\frac{m}{2}} \det(M - t^{-1}M^T) = t^{-\frac{m}{2}} \det(tM - M^T) \\ &= (-1)^m t^{-\frac{m}{2}} \det(M^T - tM) = t^{-\frac{m}{2}} \det(M - tM^T)^T \\ &= t^{-\frac{m}{2}} \det(M - tM^T) = \Delta_K(t)\end{aligned}$$

となり主張が得られる. □

Alexander 多項式は t^e ($e \in \mathbb{Z}$) を法として決まるので, 定理 2.3.6 の形で書かれた Alexander 多項式は,

$$a_{-m} + a_{-(m-1)}t + \cdots + a_{m-1}t^{2m-1} + a_mt^{2m}$$

と同じである. この $2m$ を Alexander 多項式の**次数**という.

定理 2.3.7. $g(K)$ を結び目 K の種数, $2m$ をその Alexander 多項式の次数とする. このとき, $m \leq g(K)$.

証明 $g(K)$ を実現する K の Seifert 行列を M とする. M の次数は $2g(K)$ なので, K の Alexander 多項式の次数は高々 $2g(K)$ となる. □

例 2.3.8. 三葉結び目や 8 の字結び目は種数 1 なので, 例 2.3.4 からこの不等式の等号が成り立つ例となっている. 図 2.7 の結び目は種数 2 であるので (図 9.1), 同様の例となっている. しかしながら, 一般に等号は成立せず, 例えば樹下-寺阪の結び目や Conway の結び目 (図 1.19) はその例となっている (両者とも Alexander 多項式は 1 (問題 4.3.5) で, 種数はそれぞれ 2, 3 になることが知られている [23]).

命題 2.3.9. $K_1 \sharp K_2$ を結び目 K_1 と K_2 の連結和とする. このとき,

$$\Delta_{K_1 \sharp K_2}(t) = \Delta_{K_1}(t) \cdot \Delta_{K_2}(t).$$

証明 結び目 K_1, K_2 の Seifert 曲面 S_1, S_2 の境界部分を自然につなげた $K_1 \sharp K_2$ の Seifert 曲面 S を考える (図 2.8). このとき, M_1, M_2 を S_1, S_2 から得られた K_1, K_2 の Seifert 行列とすると, S から得られる $K_1 \sharp K_2$ の Seifert 行列 M はつぎの形をしている:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & O \\ \hline O & M_2 \end{array} \right).$$

したがって,

$$\det(M - tM^T) = \det(M_1 - tM_1^T) \cdot \det(M_2 - tM_2^T)$$

となり, 主張が得られる. □

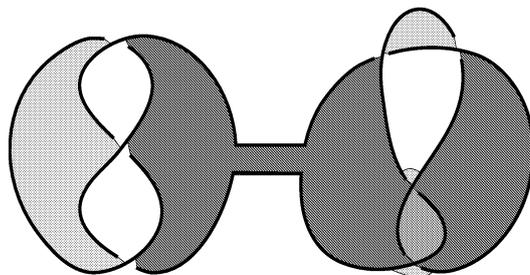


図 2.8

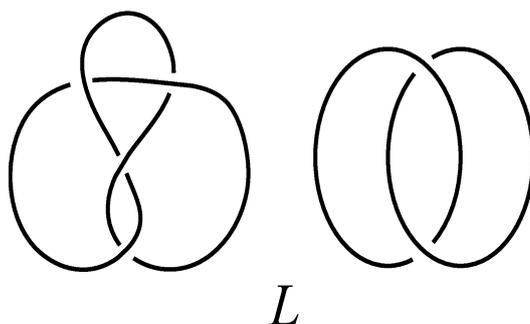


図 2.9 分離している絡み目

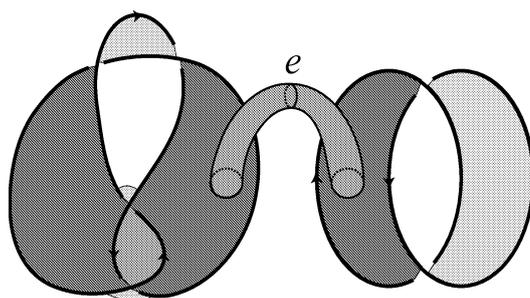


図 2.10 分離している絡み目の Seifert 曲面

定義 2.3.10. 絡み目 L の正則表示 D が互いに交点をもたない 2 つの絡み目の正則表示から得られているとき (図 2.9), D は分離しているという. L が分離している正則表示をもつとき, 絡み目 L は分離しているという.

命題 2.3.11. L が分離している絡み目のとき, $\Delta_L(t) = 0$ である.

証明 L が 2 つの絡み目 L_1, L_2 からできているとする. L_1, L_2 各々の連結 Seifert 曲面 S_1, S_2 の内部から小さな円板をくりぬき, その境界をアニュラス $S^1 \times [0, 1]$ でつなげると L の連結 Seifert 曲面になる (図 2.10). この Seifert 曲面のホモロジー群の生成元は S_1 と S_2 から得られるものと, はりあわせたアニュラスから生じるもの (図 2.10 では e) をあわせたものになる. この e と他のホモロジーの生成元との絡み数は 0 であり, e 自身について

も $\text{lk}(e, e^+) = 0$. ゆえに, S に対応する Seifert 行列 M は, S_1, S_2 に対応する Seifert 行列をそれぞれ M_1, M_2 と書いたとき,

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & O & \mathbf{0}^T \\ O & M_2 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, $\det(M - tM^T) = 0$ を得る. □

同じ議論からつぎの命題も得ることができる.

命題 2.3.12. 絡み目 L が非連結な Seifert 曲面をもつならば, $\Delta_L(t) = 0$ である.

第3章

スケイン関係式と Alexander 多項式

Alexander 多項式にはいくつかの定義がある．その1つが第2章で紹介した方法である．この章ではスケイン関係式とよばれるものから Alexander 多項式を定義する方法を紹介する．

3.1 Conway 多項式

定義 3.1.1. 向きがついた結び目 K (もしくは絡み目) に対し，つぎの2つの公理によって1変数整数係数多項式 $\nabla_K(z)$ を定義する．

(公理 1) K が自明な結び目のとき， $\nabla_K(z) = 1$ ．

(公理 2) K_+, K_-, K_0 を1点の近傍で図 3.1 で示されるような関係になっていて，その外側ではまったく一致している結び目 (または絡み目) とする．このとき，これらの3つの結び目 (または絡み目) の多項式の間につぎの等式が成立する．

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z\nabla_{K_0}(z)$$

この等式を **スケイン関係式** とよび，図に示された3つの正則表示のことを **スケイン図形** という．

こうして定義される $\nabla_K(z)$ のことを **Conway 多項式** という．公理 1, 2 からこの1変数整数係数多項式 $\nabla_K(z)$ が一意的に定まることの証明は省略し，実際にいくつかの例を計算してみることにしよう．

例 3.1.2. 図 3.2 の2つの結び目，1つの絡み目を考えよう．これらはちょうどスケイン図形の関係になっている．左の2つは自明な結び目なのでこれを K_0 と書くことにすると (公

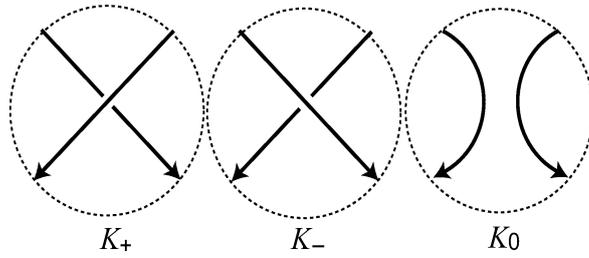


図 3.1 スケイン図形

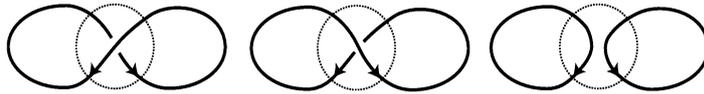


図 3.2

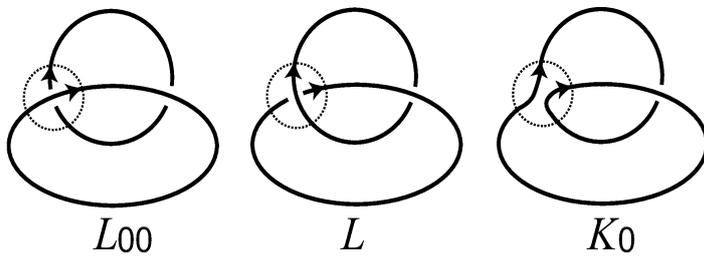


図 3.3

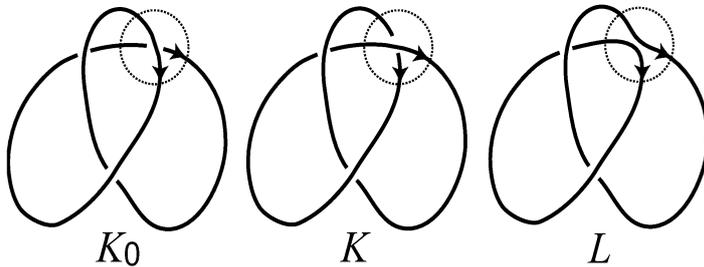


図 3.4

理 1) から $\nabla_{K_0}(z) = 1$. 自明な 2 成分絡み目を L_{00} と書くことにすると, (公理 2) より, $\nabla_{K_0}(z) - \nabla_{K_0}(z) = 1 - 1 = z\nabla_{L_{00}}(z)$ なので, $\nabla_{L_{00}}(z) = 0$ を得る.

例 3.1.3. つぎに Hopf 絡み目 L を考えてみよう. 図 3.3 のスケイン図形の関係があるので (公理 2) から $\nabla_{L_{00}}(z) - \nabla_L(z) = z\nabla_{K_0}(z)$. 例 3.1.2 の結果を使って, $\nabla_L(z) = -z$.

例 3.1.4. K を三葉結び目とする. 図 3.4 のスケイン図形の関係があるので, (公理 2) より $\nabla_{K_0}(z) - \nabla_K(z) = z\nabla_L(z)$. ここで, L は例 3.1.3 の Hopf 絡み目である. 以上から, $\nabla_K(z) = 1 + z^2$ となる.

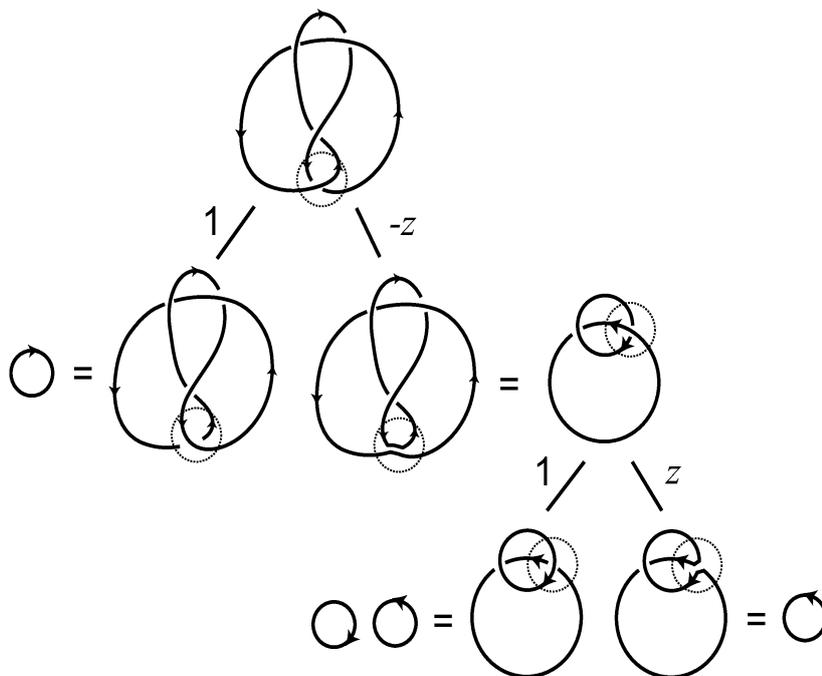


図 3.5 スケイン木図表

実際に Conway 多項式を計算するには、スケイン木図表 (skein tree diagram) というものを利用するのが便利である。8 の字結び目を例にそれを紹介しよう。まず、(公理 2) は

$$\nabla_{K_+}(z) = \nabla_{K_-}(z) + z\nabla_{K_0}(z)$$

$$\nabla_{K_-}(z) = \nabla_{K_+}(z) - z\nabla_{K_0}(z)$$

と書ける。図 3.5 の一番上の 8 の字結び目から始めて、スケイン図形を使って順次交点を変形していき、自明な結び目、絡み目になるまで続ける。このとき、交点の状況に合わせて上のスケイン関係式の右辺の係数 $1, z, -z$ を書きとめる。こうして得られる図表 (図 3.5) をスケイン木図表という。 $\nabla_K(z)$ を求めるには、各終点に現れている自明な結び目、または絡み目の Conway 多項式に、これら終点と 8 の字結び目の結ぶ線分の列につけられた係数をかけてその総和をとればよい。つまり、

$$\begin{aligned} \nabla_K(z) &= 1 \cdot \nabla_{K_0}(z) - z \cdot 1 \cdot \nabla_{K_{-0}}(z) - z^2 \cdot \nabla_{K_{-+}}(z) \\ &= 1 - z^2 \end{aligned}$$

となる。

3.2 Alexander 多項式と Conway 多項式

第 2 章でみた Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ と Conway 多項式 $\nabla_K(t)$ には以下の関係式が成立する。よって、Alexander 多項式を計算するのにスケイン関係式を使うことが可能で

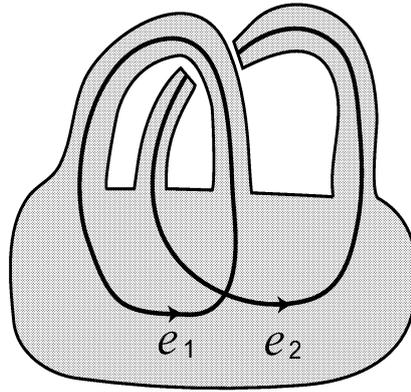


図 3.6 自明な結び目のある Seifert 曲面

ある.

定理 3.2.1. 対称化された Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ に対して

$$\Delta_K(t) = \nabla_K\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

が成り立つ.

この定理より, Conway 多項式がみたす公理は Alexander 多項式もみたすことがわかる. 実際, 自明な結び目を \circ で表し, 前節での記号を使って,

- $\Delta_{\circ}(t) = 1,$
- $\Delta_{K_+}(t) - \Delta_{K_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\Delta_{K_0}(t)$

が成立する. このことは以下のように証明できる.

自明な結び目は図 3.6 に描いたような Seifert 曲面をもつ. この Seifert 曲面に対応する Seifert 行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である. ゆえに $\Delta_{\circ}(t) = t$ を得るが, これは t^e を法として 1.

つぎにスケイン関係式に対応する式を示す. スケイン図形 (図 3.1) における K_0 の絡み目がこの部分で分離している絡み目のとき (円内の 2 つのアーキがそれぞれ別の成分に属するとき), K_+ と K_- は同値な絡み目になるので, $\Delta_{K_+}(t) - \Delta_{K_-}(t) = 0$. 一方, 命題 2.3.11 より, $\Delta_{K_0}(t) = 0$. ゆえに題意が成立.

そこで, 絡み目 K_0 が分離不可能であるとし, S_0 を K_0 の連結 Seifert 曲面とする. すると, S_0 の境界に 1 本の帯をはりつけることによって, K_+ と K_- の連結 Seifert 曲面 S_+, S_- が得られる (図 3.7). この帯から生じるホモロジーの生成元を考慮すると,

$$M_+ = \begin{pmatrix} M_0 & \mathbf{w} \\ \mathbf{u} & n \end{pmatrix}, \quad M_- = \begin{pmatrix} M_0 & \mathbf{w} \\ \mathbf{u} & n+1 \end{pmatrix}$$

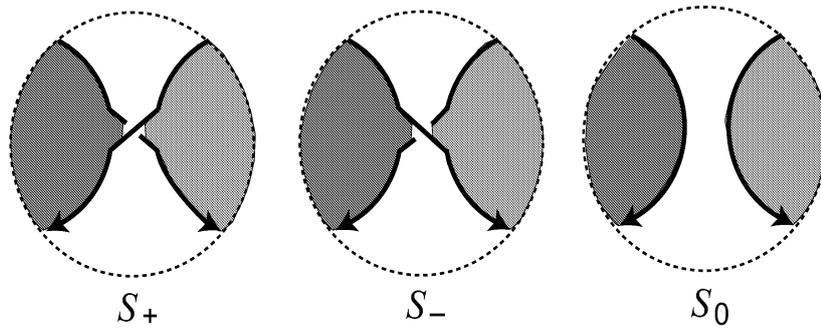


図 3.7

をみます, Seifert 曲面 S_+ , S_- , S_0 に対応した Seifert 行列 M_+ , M_- , M_0 が存在することがわかる. したがって,

$$\det(M_+ - tM_+^T) - \det(M_- - tM_-^T) = (t - 1) \det(M_0 - tM_0^T)$$

という等式を得る. 行列 M_+ , M_- の次数を k とすると, M_0 の次数は $k - 1$ なので,

$$\begin{aligned} \Delta_{K_+}(t) &= t^{-k/2} \det(M_+ - tM_+^T) \\ &= t^{-k/2} \det(M_- - tM_-^T) + t^{-k/2}(t - 1) \det(M_0 - tM_0^T) \\ &= \Delta_{K_-}(t) + \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \Delta_{K_0}(t) \end{aligned}$$

より主張が示せた.

命題 3.2.2. K を結び目とすると, $\Delta_K(1) = 1$.

証明 上の式より, $\Delta_{K_+}(1) - \Delta_{K_-}(1) = (1 - 1)\Delta_{K_0}(1) = 0$. すなわち, $\Delta_{K_+}(1) = \Delta_{K_-}(1)$. 任意の結び目は, 交点の上下を何回か入れかえることで自明な結び目になるので, $\Delta_o(1) = 1$ より主張が成立. \square

第 4 章

自由微分と Alexander 多項式

この章では自由微分を用いて定まる Alexander 行列の行列式によって、結び目の Alexander 多項式および絡み目の多変数 Alexander 多項式の定義を与える。前章までの Alexander 多項式の定義では、Seifert 曲面の種数あるいは正則射影の 2 重点の個数の増加にともなって計算量が多くなっていった。一方、Alexander 行列は結び目群の表示から定まるので、種数の高い結び目や絡み目についても比較的簡単な代数計算から Alexander 多項式を計算できるという利点がある。また絡み目の多変数 Alexander 多項式の構成は、第 7 章で導入する有限表示群に対するねじれ Alexander 不変量の構成の本質的部分を含んでいるという点で示唆的である。最後に結び目群の可換表現の変形と Alexander 多項式の関係について述べる。

4.1 Fox の自由微分

G を群とし、 $\mathbb{Z}G$ で \mathbb{Z} 上の G の群環を表す。つまり $\mathbb{Z}G$ の元は有限和

$$\sum_{\gamma} a_{\gamma} \gamma \quad (\gamma \in G, a_{\gamma} \in \mathbb{Z})$$

という形で表され、 $\mathbb{Z}G$ における和および積は

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma} a_{\gamma} \gamma + \sum_{\gamma} b_{\gamma} \gamma &= \sum_{\gamma} (a_{\gamma} + b_{\gamma}) \gamma, \\ \left(\sum_{\gamma} a_{\gamma} \gamma \right) \cdot \left(\sum_{\gamma} b_{\gamma} \gamma \right) &= \sum_{\gamma} \left(\sum_{\gamma'} a_{\gamma \gamma'^{-1}} b_{\gamma'} \right) \gamma \end{aligned}$$

によって定義される。 $\mathbb{Z}G$ から左 $\mathbb{Z}G$ -加群 V への \mathbb{Z} -線形写像

$$f: \mathbb{Z}G \rightarrow V$$

が G の任意の 2 元 γ, γ' に対して

$$f(\gamma\gamma') = f(\gamma) + \gamma f(\gamma') \quad (4.1)$$

をみたすとき, この写像 f を $\mathbb{Z}G$ の微分 (derivation) とよぶ. このことから容易に, $\gamma \in G$ に対して

$$f(\gamma^{-1}) = -\gamma^{-1}f(\gamma) \quad (4.2)$$

が成り立つことがわかる.

$\gamma \in G$ に対して, $\gamma - 1$ の形で表される元により生成される $\mathbb{Z}G$ の左イデアルを DG と書く. このとき $d\gamma = \gamma - 1$ ($\gamma \in G$) で与えられる \mathbb{Z} -線形写像

$$d: \mathbb{Z}G \rightarrow DG$$

は $\mathbb{Z}G$ の微分であるが (確かめよ), この写像 d はつぎの意味において普遍的である. つまり $\mathbb{Z}G$ の任意の微分

$$f: \mathbb{Z}G \rightarrow V$$

に対して, $\mathbb{Z}G$ -加群の間の準同型写像

$$h: DG \rightarrow V$$

が存在して $h \circ d = f$ が成り立つ. 実際 h は f の DG への制限になっていることがわかる. そこでこの写像 $d: \mathbb{Z}G \rightarrow DG$ を $\mathbb{Z}G$ の普遍微分 (universal derivation) とよぶことにする.

$F_s = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$ を階数 s の自由群とし, F_s の普遍微分

$$d: \mathbb{Z}F_s \rightarrow DF_s$$

を考える. F_s の任意の元 w は $x_1^{\pm 1}, \dots, x_s^{\pm 1}$ たちの積で書ける. また, 加群 DF_s は $\mathbb{Z}F_s$ 上 dx_1, \dots, dx_s によって生成されているので, dw に (4.1) と (4.2) を繰り返し適用することにより, dx_1, \dots, dx_s の $\mathbb{Z}F_s$ -線形結合として dw を表示することができる:

$$dw = \sum_{i=1}^s \frac{\partial w}{\partial x_i} dx_i.$$

右辺の各項の係数 $\frac{\partial w}{\partial x_i} \in \mathbb{Z}F_s$ ($1 \leq i \leq s$) を w の x_i に関する **Fox** の自由微分 (free derivative) とよぶ [16].

補題 4.1.1. 自由微分 $\frac{\partial}{\partial x_i}: \mathbb{Z}F_s \rightarrow \mathbb{Z}F_s$ はつぎをみたす.

- (i) $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$ (Kronecker の記号).

$$(ii) \frac{\partial w^{-1}}{\partial x_i} = -w^{-1} \frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

$$(iii) \frac{\partial w^n}{\partial x_i} = (1 + w + \cdots + w^{n-1}) \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad (n > 0).$$

証明 いずれも容易なので省略する. □

また, 自由微分の実際の計算につきの式は有用である.

補題 4.1.2. $\frac{\partial}{\partial x_j} (x_{\mu_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{\mu_k}^{\varepsilon_k}) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \delta_{j\mu_i} x_{\mu_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{\mu_i}^{(\varepsilon_i-1)/2}, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$

例 4.1.3. 階数 2 の自由群 $F_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$ を考える. $w_1 = x_1 x_2 x_1$, $w_2 = x_2 x_1 x_2$ とするとき

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = 1 + x_1 x_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_2} = x_1, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_1} = x_2, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = 1 + x_2 x_1.$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial (w_1 w_2^{-1})}{\partial x_1} &= \frac{\partial w_1}{\partial x_1} - w_1 w_2^{-1} \frac{\partial w_2}{\partial x_1} \\ &= 1 + x_1 x_2 - x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1}. \end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{\partial (w_1 w_2^{-1})}{\partial x_2} = x_1 - x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} - x_1 x_2 x_1 x_2^{-1}.$$

最後に自由微分の基本公式 (fundamental formula) とよばれる公式をあげて本節を終える. これは普遍微分と自由微分の定義から導かれる.

命題 4.1.4. 自由群の群環の元 $w \in \mathbb{Z}F_s$ に対して

$$w - 1 = \sum_{i=1}^s \frac{\partial w}{\partial x_i} (x_i - 1)$$

が成り立つ.

4.2 自由微分と被覆空間のホモロジー群

この節では Fox の自由微分を用いた $K(\pi, 1)$ -空間の被覆空間のホモロジー群の記述について具体例を通して述べる. 位相空間 X は基本群が $\pi_1(X) \cong \pi$ であり, 高次のホモトピー群が $\pi_k(X) = \{0\}$ ($k \geq 2$) をみたすとき, $K(\pi, 1)$ -空間 ($(\pi, 1)$ 型 Eilenberg-MacLane 空間) あるいは X は **aspherical** であるという.

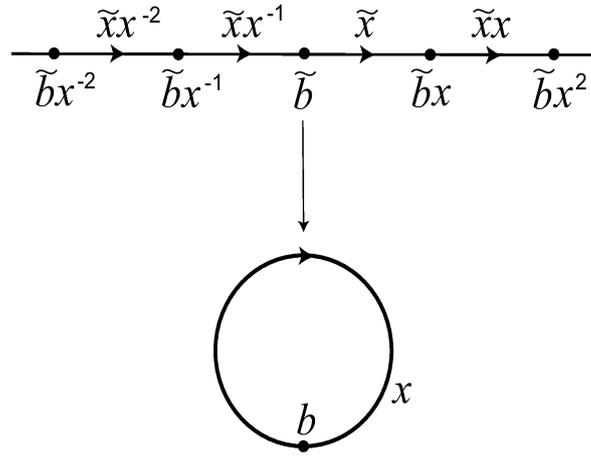


図 4.1

我々の主たる興味の対象である結び目の補空間は、 $K(\pi, 1)$ -空間であることが知られている ([9] を参照). $K(\pi, 1)$ -空間の被覆空間のホモロジー鎖複体は、基本群の作用を込めて、すなわち基本群の群環上の鎖複体として考えると、自由微分を用いて鎖複体の境界作用素を記述することができる. このことが Reidemeister トーションや無限巡回被覆空間のホモロジー群の位数イデアルと Alexander 多項式を結びつけるポイントとなる.

以下、被覆変換群としての基本群の作用はすべて右から作用していると仮定する. まず自由微分は出てこないが、一番簡単な $K(\pi, 1)$ -空間の例である 1 次元球面 S^1 の場合から始める.

例 4.2.1. 1 次元球面 S^1 .

1 次元球面 S^1 を

- 0-セル b ;
- 1-セル x

からなる CW 複体として考える.

1-セル x に向きをつけ、この x を基本群 $\pi_1(S^1, b) \cong \mathbb{Z}$ の生成元と同一視し、普遍被覆空間 $\mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$ を考える. ここでは基本群 $\pi_1(S^1, b)$ は右から \mathbb{R}^1 に作用している. S^1 の CW 複体の構造を \mathbb{R}^1 にもち上げるにより、 \mathbb{R}^1 は自然に CW 複体となる. 1-セル x のもち上げを \tilde{x} とし、 \tilde{x} の境界で負の向きの方が \tilde{b} になるように 0-セル b のもち上げ \tilde{b} をとることにする (図 4.1 参照).

このようにもち上げを固定すると、 \mathbb{R}^1 のセル全体は被覆変換群としての基本群の作用を用いて

$$\{\dots, \tilde{b}x^{-2}, \tilde{b}x^{-1}, \tilde{b}, \tilde{b}x, \tilde{b}x^2, \dots\},$$

$$\{\dots, \tilde{x}x^{-2}, \tilde{x}x^{-1}, \tilde{x}, \tilde{x}x, \tilde{x}x^2, \dots\}$$

と表される. この CW 複体の構造を用いて定義される \mathbb{R}^1 の \mathbb{Z} -係数鎖複体 $C_*(\mathbb{R}^1; \mathbb{Z})$ を考えると, $C_0(\mathbb{R}^1; \mathbb{Z})$ は

$$\{\dots, \tilde{b}x^{-2}, \tilde{b}x^{-1}, \tilde{b}, \tilde{b}x, \tilde{b}x^2, \dots\},$$

$C_1(\mathbb{R}^1; \mathbb{Z})$ は

$$\{\dots, \tilde{x}x^{-2}, \tilde{x}x^{-1}, \tilde{x}, \tilde{x}x, \tilde{x}x^2, \dots\}$$

となり, いずれも \mathbb{Z} 上の自由加群である. 境界作用素 $\partial : C_1(\mathbb{R}^1; \mathbb{Z}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^1; \mathbb{Z})$ は, セルのもち上げ \tilde{b}, \tilde{x} のとり方から $\partial(\tilde{x}) = \tilde{b}x - \tilde{b}$ になるが, さらに一般の $\tilde{x}x^k$ に対しても

$$\partial(\tilde{x}x^k) = \tilde{b}x^{k+1} - \tilde{b}x^k$$

になる.

この鎖複体 $C_*(\mathbb{R}^1; \mathbb{Z})$ は \mathbb{Z} 上で定義されているが, 上で述べた生成元, 境界作用素のとり方から, 基本群の作用を込めて基本群の群環 $\mathbb{Z}[\pi_1(S^1, b)]$ 上の鎖複体とみなすことができる. このことは, 本質的には基本群の \mathbb{R}^1 への作用が自由で胞体的 (すなわち, セルをセルへ置換している) であることから可能となる. そうすると $C_*(\mathbb{R}^1; \mathbb{Z})$ は

$$0 \rightarrow C_1(\mathbb{R}^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\pi_1(S^1, b)] \xrightarrow{x^{-1}} C_0(\mathbb{R}^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\pi_1(S^1, b)] \rightarrow 0$$

となる. これは基本群 $\pi_1(S^1, b) = \langle x \rangle$ の情報のみを用いて表されている.

つぎの例では Fox の自由微分が現れてくる.

例 4.2.2. 2次元トーラス T^2 .

2次元トーラス T^2 を

- 0-セル b ;
- 1-セル x, y ;
- 2-セル u

からなる CW 複体として考える. ただし, 2-セルは $\partial u = xyx^{-1}y^{-1}$ で接着されているものとする.

S^1 の場合と同様に 1-セル x, y に向きをつけ, $\pi_1(T^2, b) \cong \mathbb{Z}^2$ の生成元を x, y と同一視する. T^2 の普遍被覆空間 $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ を考え, ここでも被覆変換群としての基本群の \mathbb{R}^2 への作用は右からとする. T^2 の CW 複体の構造を \mathbb{R}^2 へもち上げる際, 0-セル b , 1-セル x, y , 2-セル u のもち上げ $\tilde{b}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}$ が

- \tilde{x} と \tilde{y} の境界で負の向きの方がともに \tilde{b} ,
- \tilde{u} の境界は $\tilde{x}, \tilde{y}x, \tilde{x}y, \tilde{y}$

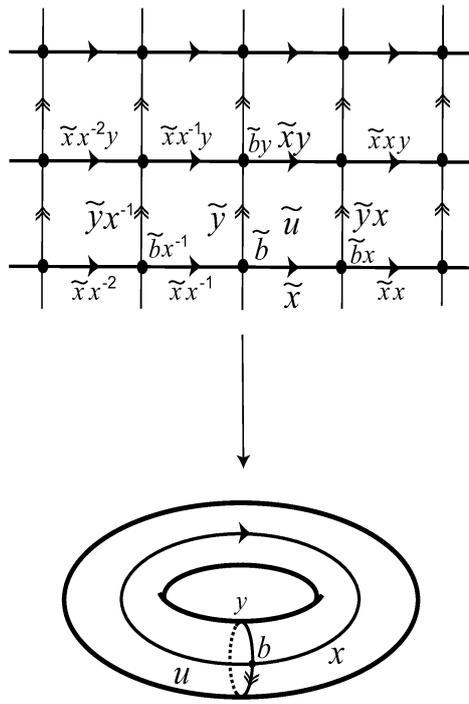


図 4.2

をみたすようにとる (図 4.2 参照).

この CW 複体の構造から定まる \mathbb{Z} 上の鎖複体 $C_*(\mathbb{R}^2; \mathbb{Z})$ は, 基本群の作用がこの場合にも自由かつ胞体的であることから, 基本群の群環 $\mathbb{Z}[\pi_1(T^2, b)]$ 上の鎖複体として考えることができる. 具体的には $C_*(\mathbb{R}^2; \mathbb{Z})$ は以下のようなになる. $\mathbb{Z}[\pi_1(T^2, b)]$ 上

- C_2 は \tilde{u} ;
- C_1 は \tilde{x}, \tilde{y} ;
- C_0 は \tilde{b}

で生成され, この基底のもとで境界作用素 $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1, \partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$ はつぎのようになる. まず $\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$ は S^1 の場合と同様に

$$\partial_1 = (x - 1, y - 1)$$

となる. ∂_2 であるが, セルのもち上げのとり方から

$$\begin{aligned} \partial_2(\tilde{u}) &= \tilde{x} + \tilde{y}x - \tilde{x}y - \tilde{y} \\ &= \tilde{x}(1 - y) + \tilde{y}(x - 1) \end{aligned}$$

となることがわかる.

ここで x, y で生成される自由群 F_2 上の自由微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{\partial}{\partial y}$ を考えてみよう.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}([x, y]) &= \frac{\partial}{\partial x}(xyx^{-1}y^{-1}) \\ &= \frac{\partial x}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial x}(x^{-1}y^{-1}) \\ &= 1 - xyx^{-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}([x, y]) &= \frac{\partial}{\partial y}(xyx^{-1}y^{-1}) \\ &= x \frac{\partial y}{\partial y} + xyx^{-1} \frac{\partial}{\partial y}(y^{-1}) \\ &= x - xyx^{-1}y^{-1}.\end{aligned}$$

これらは $\mathbb{Z}F_2$ 上の計算であるが, $\mathbb{Z}[\pi_1(T^2, b)]$ 上にうつして考えると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}([x, y]) &= 1 - xyx^{-1} = 1 - y, \\ \frac{\partial}{\partial y}([x, y]) &= x - xyx^{-1}y^{-1} = x - 1\end{aligned}$$

となり, 境界作用素 ∂_2 は自由微分を用いて

$$\partial_2(\tilde{u}) = \tilde{x} \frac{\partial[x, y]}{\partial x} + \tilde{y} \frac{\partial[x, y]}{\partial y}$$

と表されることになる.

以上のことから, 基本群の群環上の鎖複体 $C_*(\mathbb{R}^2; \mathbb{Z})$ は, $\pi_1(T^2, b) = \langle x, y \mid r = [x, y] \rangle$ の情報のみから自由微分を用いて純代数的に記述されることがわかった.

この T^2 の例は種数 g の閉曲面 Σ_g にただちに一般化される. すなわち, 正 $4g$ 角形の辺をはりあわせることで Σ_g ができているとする:

- 0-セル b ;
- $2g$ 個の 1-セル $x_1, y_1, \dots, x_g, y_g$;
- 2-セル u .

1-セルに向きをつけ基本群の元と同一視することにより, 基本群の表示として

$$\pi_1(\Sigma_g, b) = \langle x_1, y_1, \dots, x_g, y_g \mid r = [x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g] \rangle$$

が得られる. この CW 複体の構造を普遍被覆空間にもち上げ, $\mathbb{Z}[\pi_1(\Sigma_g, b)]$ -加群として鎖複体を考える. この境界作用素 $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$ は T^2 の場合と同様に, 関係子

$r = [x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g]$ に自由微分を適用したものをこの群環上で考えたものに一致する。詳細は省略するが各人で確かめてみられることをお勧めする。

さて、いままで述べてきたことを今度は無限巡回被覆空間の場合に述べてみよう。1次元球面 S^1 の場合は普遍被覆空間そのものである。

例 4.2.3. 2次元トーラス T^2 .

2次元トーラス T^2 を再び考える。これは0-セル b , 1-セル x, y , 2-セル u からなり、2-セルが $\partial u = xyx^{-1}y^{-1}$ で接着されている CW 複体であった。例 4.2.2 と同様に 1-セル x, y に向きをつけ、 $\pi_1(T^2, b)$ の生成元を x, y と同一視する。

ここで全射準同型 $\alpha : \pi_1(T^2, b) \rightarrow T = \langle t \rangle$ を $\alpha(x) = \alpha(y) = t$ と定義する。これに対応する無限巡回被覆空間 $T_\infty^2 \rightarrow T^2$ を考える。普遍被覆空間と同様に T^2 の CW 複体としての構造をもち上げ、 T_∞^2 を CW 複体とみなすと被覆変換群 T は自由かつ胞体的に作用している。したがって $C_*(T_\infty^2; \mathbb{Z})$ は被覆変換群の群環 $\mathbb{Z}T \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ 上の加群の鎖複体とみなすことができる。各次元の基底として、セル u, x, y, b のもち上げ $\tilde{u}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{b}$ をとる。ここでも普遍被覆空間の場合と同様に

- \tilde{x}, \tilde{y} の境界の負の向きの方がともに \tilde{b} ,
- \tilde{u} の境界は $\tilde{x}, \tilde{y}t, \tilde{x}t, \tilde{y}$

をみたすようにもち上げをとり固定する。

この基底のもとで境界作用素 $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$, $\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$ はつぎのようになる。まず

$$\partial_1(\tilde{x}) = \partial_1(\tilde{y}) = \tilde{b}(t - 1)$$

より、 ∂_1 は

$$\partial_1 = (t - 1, t - 1)$$

と表される。つぎに ∂_2 であるが、まずセルのもち上げのとり方から

$$\begin{aligned} \partial_2(\tilde{u}) &= \tilde{x} + \tilde{y}t - \tilde{x}t - \tilde{y} \\ &= \tilde{x}(1 - t) + \tilde{y}(t - 1) \end{aligned}$$

となる。

先ほどと同様に、自由群 $F_2 = \langle x, y \rangle$ 上の自由微分 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ を $r = [x, y]$ に対して施し、それを $\alpha_* : \mathbb{Z}F_2 \rightarrow \mathbb{Z}T$ で射影すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}([x, y]) &= 1 - xyx^{-1} \\ &\mapsto 1 - t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}([x, y]) &= x - xyx^{-1}y^{-1} \\ &\mapsto t - 1.\end{aligned}$$

よって境界作用素 ∂_2 は

$$\partial_2(\tilde{u}) = \tilde{x}\alpha_*\left(\frac{\partial[x, y]}{\partial x}\right) + \tilde{y}\alpha_*\left(\frac{\partial[x, y]}{\partial y}\right)$$

と表される.

以上のことから, 無限巡回被覆空間 T_∞^2 の場合も, 群環上の鎖複体 $C_*(T_\infty^2; \mathbb{Z})$ は基本群 $\pi_1(T^2, b)$ の表示から Fox の自由微分と $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ への射影を用いて純代数的に記述されることがわかった.

この T^2 の無限巡回被覆空間の $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -鎖複体 $C_*(T_\infty^2; \mathbb{Z})$ は, 準同型 $\alpha: \pi_1(T^2, b) \rightarrow T = \langle t \rangle$ によって定義される T^2 の $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ を係数とする局所係数鎖複体と考えることもできる. つまり, 普遍被覆空間 $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ の $\mathbb{Z}[\pi_1(T^2, b)]$ -鎖複体 $C_*(\mathbb{R}^2; \mathbb{Z})$ をまず考え, それに係数 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ を $\mathbb{Z}[\pi_1(T^2, b)]$ 上テンソルした鎖複体

$$C_*(\mathbb{R}^2; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(T^2, b)]} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

とみなすことができるのである. この観点からも, 自由微分を用いた鎖複体の記述は, $\alpha_*: \mathbb{Z}F_2 \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ への射影のかわりに $\mathbb{Z}[\pi_1(T^2, b)]$ 上のテンソルの定義を考えれば, 同様に得られることがわかる.

注意 4.2.4. 局所系のホモロジー群に関しては [38] を参照のこと.

4.3 Alexander 行列と Alexander 多項式

この節では自由微分を用いて定まる Alexander 行列によって Alexander 多項式を定義する. 簡単のため 3 次元球面 S^3 内の結び目 K から始める (詳しくは [13] を参照のこと).

結び目群 $G(K) = \pi_1(E(K)) = \pi_1(S^3 - N(K))$ の Wirtinger 表示を 1 つ固定する:

$$P = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle.$$

また, この表示に伴う自由群 F_n から $G(K)$ への全射準同型写像を

$$\phi: F_n \rightarrow G(K)$$

で表す. この写像 ϕ を線形に拡張して得られる \mathbb{Z} 上の群環の間の環準同型写像を

$$\tilde{\phi}: \mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}[G(K)]$$

とする. 一方, $G(K)$ の可換化準同型写像

$$\alpha : G(K) \rightarrow H_1(E(K); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} = \langle t \rangle$$

は $\alpha(x_1) = \cdots = \alpha(x_n) = t$ で与えられる. ここで $H_1(E(K); \mathbb{Z})$ は結び目 K のメリディアンによって生成されていることに注意する. α を線形に拡張することにより, 群環の間の準同型写像

$$\tilde{\alpha} : \mathbb{Z}[G(K)] \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

が得られる. 以後簡単のため, 合成写像 $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\phi} : \mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ による $\mathbb{Z}F_n$ の元 w の像を $w^{\alpha\phi}$ で表すことにする.

さて, Wirtinger 表示 P の関係子 r_1, \dots, r_{n-1} に自由微分 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ を施し, さらに環準同型写像 $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\phi}$ を合成することにより, $(n-1) \times n$ 行列

$$A = \left(\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)^{\alpha\phi} \right) \in M(n-1, n; \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$$

が得られる. ここで $M(n-1, n; \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ は Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ に係数をもつ $n-1$ 行 n 列の行列代数を表す. 行列 A を結び目群 $G(K)$ の表示 P に対する **Alexander 行列** とよぶ.

つぎに行列 A の j 列目をとり除いて得られる正方行列を A_j で表す. このとき結び目 K の **Alexander 多項式** を

$$\Delta_K(t) = \det A_j \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

によって定義する.

まず, この定義がとり除かれる列の選び方によらないことに注意しよう. 実際, 関係子 r_1, \dots, r_{n-1} に対して自由微分の基本公式 (命題 4.1.4) を適用すると

$$0 = (r_i - 1)^{\alpha\phi} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial x_j} (x_j - 1) \right)^{\alpha\phi} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)^{\alpha\phi} (t - 1)$$

を得る. Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ は零因子をもたないので, 結局

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)^{\alpha\phi} = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

となる. これは Alexander 行列 A の n 個の列ベクトルが線形従属であることを示している. したがって, $\Delta_K(t)$ は A のどの列をとり除いても符号の差を除いて同じ多項式として定まるのである.

さて, Wirtinger 表示とは限らない結び目群 $G(K)$ の表示

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$$

に対しては, 以下のように定義する. まず

$$A = \left(\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)^{\alpha\phi} \right) \in M(m, n; \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$$

の $(n-k) \times (n-k)$ 小行列式 ($0 < n-k \leq m$) 全体の生成する $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ のイデアルを $E_k(A)$ で表す. $n-k > m$ の場合は $E_k(A) = 0$ と約束する. また $n-k \leq 0$ ならば $E_k(A) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ である. そこで結び目 K の k 番目 Alexander 多項式を

$$\Delta_K^k(t) = \gcd(E_k(A))$$

によって定義する. 容易にわかるように, $G(K)$ の Wirtinger 表示に対しては

$$\Delta_K^1(t) = \Delta_K(t)$$

が成り立っている. これは Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ の単元 $\pm t^e$ ($e \in \mathbb{Z}$) による積を法として定まる. さらにこれは, はじめに固定した $G(K)$ の表示によらないことがわかる.

定理 4.3.1. Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ は $G(K)$ の表示のとり方によらない.

これを示すためには, 表示 P に対して Tietze 変換 (1.5 節参照) を施したときに, イデアル $E_k(A)$ が不変であることを示せばよい. 定理 4.3.1 の証明は, 第 7 章で導入するねじれ Alexander 不変量の不変性 (定理 7.1.6) の特別な場合として得られるのでここでは省略する.

例 4.3.2. K を三葉結び目とする. 1.5 節でみたように, 結び目群 $G(K)$ はつぎの表示をもつ:

$$G(K) = \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle.$$

一般に, 群の表示における関係 $u = v$ ($u, v \in F_s$) は関係子 uv^{-1} に対応する. 微分に関して $d(uv^{-1}) = du - (uv^{-1})dv$ が成り立つことから

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} (uv^{-1}) \right)^{\alpha\phi} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u - v) \right)^{\alpha\phi} \quad (j = 1, \dots, s)$$

が従う. よって Alexander 行列の計算をする場合, $r = uv^{-1}$ の代わりに $r = u - v$ を使ってよいことがわかる.

さて, 例 4.1.3 から, 三葉結び目のこの表示に関する Alexander 行列は

$$A = \left(\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^{\alpha\phi}, \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^{\alpha\phi} \right) = (t^2 - t + 1, -t^2 + t - 1)$$

となることがわかる. よって Alexander 多項式は

$$\Delta_K(t) = t^2 - t + 1$$

で与えられる.

問題 4.3.3. 8 の字結び目 K (図 1.1 (b)) の Wirtinger 表示 (問題 1.5.2 参照):

$$G(K) = \langle x, y, z \mid x^{-1}z^{-1}xzyz^{-1}x^{-1}z, z^{-1}yz^{-1}xzy^{-1} \rangle$$

に関する Alexander 行列は

$$\begin{pmatrix} -2t^{-1} + t^{-2} & 1 & -1 + 2t^{-1} - t^{-2} \\ t^{-1} & -1 + t^{-1} & 1 - 2t^{-1} \end{pmatrix}$$

であることを確認し, K の Alexander 多項式を求めよ (例 2.3.4 と比較せよ).

例 4.3.4. K をトーラス結び目 $T(p, q)$ とする. ただし p, q は互いに素な正整数を表す. 例 1.5.5 から結び目群 $G(K)$ はつぎの表示をもつ (Wirtinger 表示でないことに注意せよ):

$$G(K) = \langle x, y \mid x^p y^{-q} \rangle.$$

このとき可換化準同型写像 $\alpha: G(K) \rightarrow \mathbb{Z} = \langle t \rangle$ は

$$\alpha(x) = t^q, \quad \alpha(y) = t^p$$

で与えられる (確かめよ). よってこの表示に関するトーラス結び目 $T(p, q)$ の Alexander 行列は

$$A = \left(\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^{\alpha\phi}, \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^{\alpha\phi} \right) = \left(\frac{t^{pq} - 1}{t^q - 1}, -\frac{t^{pq} - 1}{t^p - 1} \right)$$

で与えられる. ゆえに Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ は

$$\Delta_K(t) = \gcd \left(\frac{t^{pq} - 1}{t^q - 1}, -\frac{t^{pq} - 1}{t^p - 1} \right) = \frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}$$

となることがわかる.

問題 4.3.5. 樹下-寺阪結び目および Conway 結び目 (図 1.19) の Alexander 多項式は 1 になることを示せ (問題 1.5.4, 例 7.1.11 参照).

さて, ここで結び目群の表示から定まる CW 複体について考える. 結び目群の Wirtinger 表示

$$G(K) = \langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_{s-1} \rangle$$

を 1 つ固定する. この表示に対応したつぎのような 2 次元 CW 複体 $X(K)$ を考える. すなわち, $X(K)$ は

- 1 つの 0-セル b ;
- s 個の 1-セル x_1, \dots, x_s ;
- $s - 1$ 個の 2-セル u_1, \dots, u_{s-1}

をもち, 2-セル u_i はそれぞれ $G(K)$ の関係子 r_i に対応する語に応じて 1-セルたちに接着されていると考える. このとき, $X(K)$ は結び目補空間とホモトピー同値である.

この $X(K)$ に対して無限巡回被覆空間のホモロジー群を考える. まず, $G(K)$ の可換化 $\alpha : G(K) \rightarrow T = \langle t \rangle$ に対する無限巡回被覆空間 $X(K)_\infty \rightarrow X(K)$ をとる. これまでと同様に CW 複体の構造をもち上げると, 被覆変換群 T は自由かつ胞体的に作用している. よって $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群の鎖複体 $C_*(X(K)_\infty; \mathbb{Z})$ を考えることが可能であり, 具体的に書き下すとつぎのようになる:

$$0 \rightarrow C_2 = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]^{s-1} \xrightarrow{\partial_2} C_1 = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]^s \xrightarrow{\partial_1} C_0 = \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow 0.$$

ここで C_2 は $\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{s-1}\}$, C_1 は $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_s\}$, C_0 は $\{\tilde{b}\}$ で各々 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ 上生成される自由加群と同一視している. このとき 2-セルの 1-セルへの接着の仕方が結び目群の関係子に対応していることから, 具体的に書き下せばつぎが成立することがわかる.

命題 4.3.6. ∂_2 は固定された Wirtinger 表示のもとでの Alexander 行列 A に一致し, $\partial_1 = (t - 1, \dots, t - 1)$ である.

この命題については [53] 第 7 章や [56] 第 4 章を参照されるとよい. また, この命題を用いて, 第 5 章で Alexander 多項式が Reidemeister トーションと一致することをみる.

例 4.3.7. 8 の字結び目の群表示 (問題 1.5.2 参照)

$$G(K) = \langle x, y, z \mid x^{-1}z^{-1}xzyz^{-1}x^{-1}z, z^{-1}yz^{-1}xzy^{-1} \rangle$$

とそこから作られる CW 複体に対して, これまで述べてきたことを適用してみよう. まず,

$$r_1 = x^{-1}z^{-1}xzyz^{-1}x^{-1}z, r_2 = z^{-1}yz^{-1}xzy^{-1}$$

とおく. ここで関係子 r_1, r_2 の自由微分を計算しておく, r_1 について

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial x} &= -x^{-1} + x^{-1}z^{-1} - x^{-1}z^{-1}xzyz^{-1}x^{-1}, & \frac{\partial r_1}{\partial y} &= x^{-1}z^{-1}xz, \\ \frac{\partial r_1}{\partial z} &= -x^{-1}z^{-1} + x^{-1}z^{-1}x - x^{-1}z^{-1}xzyz^{-1} + x^{-1}z^{-1}xzyz^{-1}x^{-1}. \end{aligned}$$

同様に r_2 に対して,

$$\frac{\partial r_2}{\partial x} = z^{-1}yz^{-1}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial y} = z^{-1} - z^{-1}yz^{-1}xzy^{-1}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial z} = -z^{-1} - z^{-1}yz^{-1} + z^{-1}yz^{-1}x.$$

この表示に対応した CW 複体 $X(K)$ は, 0-セル b , 1-セル x, y, z , 2-セル u_1, u_2 からなり, 関係子 r_1, r_2 で 2-セルはそれぞれ接着されている. 普遍被覆空間 $\tilde{X}(K) \rightarrow X(K)$ を考え, さらに $X(K)$ のセルの $\tilde{X}(K)$ へのもち上げをいままでと同じようにとる.

ここで例えば, 2-セル \tilde{u}_1 の境界は

$$\begin{aligned} & -\tilde{x}x^{-1}, \tilde{x}x^{-1}z^{-1}, -\tilde{x}x^{-1}z^{-1}xzyz^{-1}x^{-1}, \tilde{y}x^{-1}z^{-1}xz, \\ & -\tilde{z}x^{-1}z^{-1}, \tilde{z}x^{-1}z^{-1}x, -\tilde{z}x^{-1}z^{-1}xzyz^{-1}, \tilde{z}x^{-1}z^{-1}xzyz^{-1}x^{-1} \end{aligned}$$

である. これは自由微分を用いて表せば

$$\partial_2(\tilde{u}_1) = \tilde{x} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \tilde{y} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \tilde{z} \frac{\partial r_1}{\partial z}$$

となる. ここで可換化準同型 $\alpha : G(K) \rightarrow \langle t \rangle$ に対応した無限巡回被覆空間 $X(K)_\infty \rightarrow X(K)$ をとり, $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -係数の鎖複体

$$C_*(X(K); \mathbb{Z}[t, t^{-1}]) = C_*(\tilde{X}(K); \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[G(K)]} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

を考えると,

- ∂_2 は上の表示のもとでの 8 の字結び目の Alexander 行列

$$\begin{pmatrix} -2t^{-1} + t^{-2} & 1 & -1 + 2t^{-1} - t^{-2} \\ t^{-1} & -1 + t^{-1} & 1 - 2t^{-1} \end{pmatrix}$$

に一致し,

- $\partial_1 = (t - 1, t - 1, t - 1)$

となることが確かめられる (問題 4.3.3 と比較せよ).

つぎに 3 次元球面 S^3 内の l -成分 ($l \geq 2$) 絡み目 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_l$ について考える. 絡み目群 $G(L) = \pi_1(E(L)) = \pi_1(S^3 - N(L))$ の Wirtinger 表示を 1 つ固定する:

$$G(L) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle.$$

この場合絡み目群 $G(L)$ の可換化準同型写像は

$$\alpha : G(L) \rightarrow H_1(E(L); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^l = \langle t_1, \dots, t_l \mid t_i t_j = t_j t_i, 1 \leq i, j \leq l \rangle$$

となる. ただし \mathbb{Z}^l の各生成元 t_i は, L の i 番目の成分 L_i のメリディアンに対応しているとする. 結び目の場合と同様にして, $G(L)$ の Wirtinger 表示から **Alexander 行列**

$$A = \left(\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)^{\alpha\phi} \right) \in M(n-1, n; \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_l^{\pm 1}])$$

が定まる. また, A の列ベクトル表示を $A = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ とする. 関係子 r_1, \dots, r_{n-1} に対して自由微分の基本公式 (命題 4.1.4) を適用すると

$$0 = (r_j - 1)^{\alpha\phi} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial r_j}{\partial x_i} (x_i - 1) \right)^{\alpha\phi} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right)^{\alpha\phi} (x_i^{\alpha\phi} - 1)$$

を得る. よって

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i (x_i^{\alpha\phi} - 1) = 0$$

が成り立つ. したがって結び目の場合とは異なり, A の n 個の列ベクトル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ は $\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i = 0$ をみたさない. $\Delta_L = \det A_j$ によって絡み目の Alexander 多項式を定義することはできない (とり除かれる列に依存してしまう). しかしながら, 上式から

$$\begin{aligned} \det A_j (x_i^{\alpha\phi} - 1) &= \det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i (x_i^{\alpha\phi} - 1), \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots) \\ &= \det(\mathbf{u}_1, \dots, -\sum_{k \neq i} \mathbf{u}_k (x_k^{\alpha\phi} - 1), \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots) \\ &= \det(\mathbf{u}_1, \dots, -\mathbf{u}_j (x_j^{\alpha\phi} - 1), \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots) \\ &= \pm \det A_i (x_j^{\alpha\phi} - 1) \end{aligned}$$

となるので, 任意の i, j ($1 \leq i, j \leq n$) に対して

$$\frac{\det A_i}{x_i^{\alpha\phi} - 1} = \pm \frac{\det A_j}{x_j^{\alpha\phi} - 1}$$

が成り立つことがわかる. そこで絡み目 L の多変数 Alexander 多項式を

$$\Delta_L(t_1, \dots, t_l) = \frac{\det A_j}{x_j^{\alpha\phi} - 1}$$

によって定義する. Wirtinger 表示とは限らない絡み目群の表示に対しては, 結び目群の場合と同様にイデアル $E_k(A) \subset \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_l^{\pm 1}]$ の最大公約多項式として k 番目多変数 Alexander 多項式 $\Delta_L^k(t_1, \dots, t_l)$ を定める. Wirtinger 表示に対しては

$$\Delta_L^1(t_1, \dots, t_l) = \Delta_L(t_1, \dots, t_l)$$

が成り立っている.

注意 4.3.8. 上記定義による多変数 Alexander 多項式は多変数 Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_l^{\pm 1}]$ の元として, 単元 $\pm t_1^{e_1} \cdots t_l^{e_l}$ ($e_i \in \mathbb{Z}$) による積を法として定まることに注意する. 最初に固定した $G(L)$ の Wirtinger 表示によらないことは, 結び目の場合と同様に示すことができる.

注意 4.3.9. 絡み目群 $G(L)$ の可換化準同型 $\alpha : G(L) \rightarrow \mathbb{Z}^l$ および $t_1 = \cdots = t_l = t$ とおくことで定まる準同型 $\mathbb{Z}^l \rightarrow \mathbb{Z}$ を合成することにより, 全射準同型写像 $\alpha' : G(L) \rightarrow \mathbb{Z}$ が得られる. この α' を用いることで, 絡み目 L の (1 変数) Alexander 多項式 $\Delta_L(t)$ が Wirtinger 表示を用いて結び目の場合と同様に定義される. Wirtinger 表示とは限らない絡み目群の表示に対しても, k 番目 (1 変数) Alexander 多項式 $\Delta_L^k(t)$ が定義される.

例 4.3.10. L を Borromean 絡み目とする. $G(L)$ はつぎの Wirtinger 表示をもつ (問題 1.5.3 参照):

$$G(L) = \langle x_1, x_2, x_3 \mid r_1, r_2 \rangle,$$

$$r_1 = x_1^{-1} x_3 x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_3 x_2 x_3^{-1},$$

$$r_2 = x_2^{-1} x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} x_3 x_2 x_3^{-1} x_1 x_3 x_1^{-1}.$$

このとき可換化準同型写像は

$$\alpha : G(L) \rightarrow \mathbb{Z}^3 \cong \langle t_1, t_2, t_3 \mid t_i t_j = t_j t_i, 1 \leq i, j \leq 3 \rangle, \quad \alpha(x_i) = t_i$$

で与えられる. 簡単な計算から, $G(L)$ の Alexander 行列は

$$A = t_1^{-1} t_2^{-1} t_3^{-1} \begin{pmatrix} 0 & t_3(t_1 - 1)(t_3 - 1) & -t_3(t_1 - 1)(t_2 - 1) \\ -t_1(t_2 - 1)(t_3 - 1) & 0 & t_1(t_1 - 1)(t_2 - 1) \end{pmatrix}$$

となることがわかる. よって

$$\det A_1 = t_1^{-1} t_2^{-2} t_3^{-1} (t_1 - 1)^2 (t_2 - 1) (t_3 - 1),$$

$$\det A_2 = -t_1^{-1} t_2^{-2} t_3^{-1} (t_1 - 1) (t_2 - 1)^2 (t_3 - 1),$$

$$\det A_3 = t_1^{-1} t_2^{-2} t_3^{-1} (t_1 - 1) (t_2 - 1) (t_3 - 1)^2$$

となり, $\det A_j / (x_j^{\alpha_j} - 1)$ ($1 \leq j \leq 3$) と $\gcd(E_1(A))$ のいずれの計算からも, Borromean 絡み目 L の多変数 Alexander 多項式は

$$\Delta_L(t_1, t_2, t_3) \doteq (t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_3 - 1)$$

で与えられることがわかる.

さて, Seifert の結果 [103] により, 結び目の Alexander 多項式はつぎの 2 条件によって特徴づけられることが知られている (定理 2.3.6 および命題 3.2.2 を参照のこと).

定理 4.3.11. 3次元球面 S^3 内の結び目 K の Alexander 多項式は

$$(i) \Delta_K(t^{-1}) = t^{2k} \Delta_K(t)$$

$$(ii) \Delta_K(1) = \pm 1$$

をみます. また, (i), (ii) をみます任意の 1 変数多項式は, S^3 内のある結び目 K の Alexander 多項式として実現できる.

2 成分以上の絡み目 L に対しては, Torres [113] によりつぎが示されている (**Torres 条件**).

定理 4.3.12. l -成分絡み目 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_l \subset S^3$ の多変数 Alexander 多項式 $\Delta_L(t_1, \dots, t_l)$ はつぎをみます:

$$(i) \Delta_L(t_1^{-1}, \dots, t_l^{-1}) \doteq \Delta_L(t_1, \dots, t_l);$$

$$(ii) \Delta_L(t_1, \dots, t_{l-1}, 1) = \begin{cases} \frac{t_1^{\lambda_1} - 1}{t_1 - 1} \Delta_{L'}(t_1) & (l = 2) \\ (t_1^{\lambda_1} \cdots t_{l-1}^{\lambda_{l-1}} - 1) \Delta_{L'}(t_1, \dots, t_{l-1}) & (l > 2). \end{cases}$$

ただし $L' = L_1 \cup \cdots \cup L_{l-1}$ であり, λ_i は L_i と L_l の絡み数 $\text{lk}(L_i, L_l)$ を表す.

証明 (i) 絡み目の多変数 Alexander 多項式の Reidemeister トーションによる解釈および Reidemeister トーションの双対性から従う (注意 5.3.8 参照).

(ii) 第 7 章で導入するねじれ Alexander 不変量の場合に証明するのでここでは省略する (定理 8.4.1 参照). \square

とくに 2 成分絡み目 $L = L_1 \cup L_2$ に対しては, 定理 4.3.12 (ii) で $t_1 = 1$ とおくことによりつぎが成り立つことがわかる.

系 4.3.13. $\Delta_L(1, 1) = \pm \text{lk}(L_1, L_2)$.

注意 4.3.14. 定理 4.3.12 が示された当時, 上記 Torres 条件が絡み目 L の多変数 Alexander 多項式を特徴づけると期待されたが, Hillman [40] によって, 条件 (i), (ii) だけでは不十分であることが示されている.

4.4 表現の変形と Alexander 多項式

この節では Alexander 多項式と結び目群の可換表現の変形との関係について de Rham [14] にしたがって述べる.

まず結び目群 $G(K)$ の正則表示から得られる Wirtinger 表示

$$G(K) = \langle x_1, \dots, x_u \mid r_1, \dots, r_{u-1} \rangle$$

を固定する.

はじめに $G(K)$ の複素数体上の 1 次元可換表現

$$\rho_0 : G(K) \rightarrow \mathbb{C} - \{0\} = GL(1; \mathbb{C})$$

を考える. $G(K)$ の可換化が \mathbb{Z} と同型であることから, ある $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ が存在して,

$$\rho_0(x_1) = \rho_0(x_2) = \cdots = \rho_0(x_u) = a$$

となる. 自然な包含写像

$$GL(1; \mathbb{C}) \ni a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2; \mathbb{C})$$

により, 表現 ρ_0 を 2 次元表現 $G(K) \rightarrow GL(2; \mathbb{C})$ とみなすことにする.

このとき 2 次元可換表現 ρ_0 の 2 次元非可換表現 ρ への変形を考える. すなわち, 各生成元の行き先をつぎのように指定して, 実際に ρ がいつ $G(K)$ 全体に準同型として拡張するかを考察する.

$$\rho(x_1) = \begin{pmatrix} a & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \rho(x_u) = \begin{pmatrix} a & b_u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

このように定めた ρ が準同型になるためには, $u-1$ 個の各関係 r_1, \dots, r_{u-1} に対応する生成元の像の積が単位行列になることが必要十分条件である. いま Wirtinger 表示を考えているので, 各関係は交点の符号に応じて

$$x_i x_{k(i)} = x_{k(i)} x_{i+1}$$

もしくは

$$x_{i+1} x_{k(i)} = x_{k(i)} x_i$$

のどちらかの形をしている. ここでは, i 番目の関係が $x_i x_{k(i)} = x_{k(i)} x_{i+1}$ であると仮定する. このとき

$$\begin{aligned} \rho(x_i) \rho(x_{k(i)}) &= \begin{pmatrix} a & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b_{k(i)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab_{k(i)} + b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rho(x_{k(i)}) \rho(x_{i+1}) &= \begin{pmatrix} a & b_{k(i)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b_{i+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab_{i+1} + b_{k(i)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので, これらが一致するためには, $ab_{k(i)} + b_i = ab_{i+1} + b_{k(i)}$, すなわち

$$b_i - ab_{i+1} + (a-1)b_{k(i)} = 0$$

が成り立つことが必要. こうして得られた 1 次方程式を順に並べて, $\mathbf{b}^T = (b_1, \dots, b_u)$ を変数とし $u-1$ 個の方程式からなる 1 次方程式系

$$A(a)\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

が得られる. この係数行列 $A(a)$ の (i, j) 成分 a_{ij} はつぎのようになっている:

$$a_{ii} = 1, \quad a_{i,i+1} = -a, \quad a_{i,k(i)} = a - 1.$$

これは Fox の自由微分を用いて得られる

$$\tilde{\alpha} \circ \tilde{\phi} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (x_i x_{k(i)} - x_{k(i)} x_{i+1}) \right)$$

に $t = a$ を代入した式と一致する. このことは i 番目の交点の正負が逆になり, 対応する結び目群の関係が $x_{i+1} x_{k(i)} = x_{k(i)} x_i$ になっても同様である. すなわち, 行列 $A(a)$ は Alexander 行列 $A \in M(u-1, u; \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ に $t = a$ を代入した行列になっている.

ここで, ある 1 つの j に関して $b_j = 0$ とおいて $(b_1, \dots, b_{j-1}, 0, b_{j+1}, \dots, b_u)$ に対して先の 1 次方程式系の解が存在するかどうかを考える. この方程式系は

$$\mathbf{b}_j^T = (b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_u)$$

に関する 1 次方程式系としてまとめることができる. 対応する係数行列は $A(a)$ の j 列目をとり除いた $(u-1) \times (u-1)$ 正方行列 $A(a)_j$ である. この方程式

$$A(a)_j \mathbf{b}_j = \mathbf{0}$$

が非自明な解をもつための条件は

$$\det A(a)_j = 0$$

である. さて, $t = a$ を代入する前の Alexander 行列 A から j 列目をとり除いた行列 A_j の行列式 $\det A_j$ が結び目 K の Alexander 多項式であった. つまり, $t = a$ は Alexander 多項式の零点であり, $\mathbf{b}_j^T = (b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_u)$ は $A(a)_j$ の零固有値に対応する固有ベクトルである.

逆にこうなるように $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ およびベクトル $(b_1, \dots, b_{j-1}, 0, b_{j+1}, \dots, b_u)$ をとると,

$$\rho(x_1) = \begin{pmatrix} a & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \rho(x_{j-1}) = \begin{pmatrix} a & b_{j-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho(x_j) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho(x_{j+1}) = \begin{pmatrix} a & b_{j+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \rho(x_u) = \begin{pmatrix} a & b_u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定まる ρ は $G(K)$ から $GL(2; \mathbb{C})$ への線形表現を与える. まとめると, つぎの de Rham の定理 [14] (Burde [8] も参照のこと) が得られる.

定理 4.4.1. 生成元の像を上のように指定した ρ が $G(K)$ から $GL(2; \mathbb{C})$ への線形表現を与える必要十分条件は, $t = a$ が結び目 K の Alexander 多項式 $\Delta_K(t) = \det A_j$ の零点であり, $\mathbf{b}_j^T = (b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_u)$ が $A(a)_j$ の零固有値に対応する固有ベクトルになることである.

つぎに、この結果を結び目群のコホモロジー群の観点から見直す。準同型写像

$$\rho_0 : G(K) \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$$

を固定する。この(1次元可換)表現 ρ_0 で係数をねじった $G(K)$ の1次元コホモロジー群 $H^1(G(K); \mathbb{C}_{\rho_0})$ を以下のように定義する。

定義 4.4.2. 結び目群 $G(K)$ と準同型写像 $\rho_0 : G(K) \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ に対して、

(i) 1次元コサイクルとは、写像 $f : G(K) \rightarrow \mathbb{C}$ で任意の元 $\gamma, \gamma' \in G(K)$ に対して

$$f(\gamma\gamma') = f(\gamma) + \rho_0(\gamma)f(\gamma')$$

をみたすものである。

(ii) 1次元コバウンダリとは、写像 $f : G(K) \rightarrow \mathbb{C}$ で、ある定数 $c_f \in \mathbb{C}$ が存在して $f(\gamma) = (\rho_0(\gamma) - 1)c_f$ として表されるものである。

1次元コサイクル全体を $Z^1(G(K); \mathbb{C}_{\rho_0})$ 、1次元コバウンダリ全体を $B^1(G(K); \mathbb{C}_{\rho_0})$ とおくと、これらは複素数体 \mathbb{C} 上のベクトル空間になる。1次元コバウンダリ f に対して

$$\begin{aligned} f(\gamma\gamma') &= (\rho_0(\gamma\gamma') - 1)c_f \\ &= (\rho_0(\gamma) - 1 + \rho_0(\gamma\gamma') - \rho_0(\gamma))c_f \\ &= (\rho_0(\gamma) - 1)c_f + \rho_0(\gamma)(\rho_0(\gamma') - 1)c_f \\ &= f(\gamma) + \rho_0(\gamma)f(\gamma') \end{aligned}$$

が成り立つので、1次元コバウンダリは1次元コサイクルになり、

$$B^1(G(K); \mathbb{C}_{\rho_0}) \subset Z^1(G(K); \mathbb{C}_{\rho_0})$$

となる。

定義 4.4.3. 群 $G(K)$ の \mathbb{C}_{ρ_0} -係数1次元コホモロジー群を商ベクトル空間

$$H^1(G(K); \mathbb{C}_{\rho_0}) = \frac{Z^1(G(K); \mathbb{C}_{\rho_0})}{B^1(G(K); \mathbb{C}_{\rho_0})}$$

で定義する。

さてこの節のはじめに述べた可換表現 ρ_0 の非可換表現への変形 $\rho : G(K) \rightarrow GL(2; \mathbb{C})$ に対して $\rho(\gamma) = \begin{pmatrix} \rho_0(\gamma) & \varphi(\gamma) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。このとき、 ρ が準同型である条件は

$$\begin{pmatrix} \rho_0(\gamma\gamma') & \varphi(\gamma\gamma') \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0(\gamma) & \varphi(\gamma) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0(\gamma') & \varphi(\gamma') \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成立することである。成分を比較することにより

$$\varphi(\gamma\gamma') = \varphi(\gamma) + \rho_0(\gamma)\varphi(\gamma')$$

となり、 φ は $\rho_0 : G(K) \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ で係数をねじった 1 次元コサイクルであることがわかる。

逆に 1 次元可換表現 $\rho_0 : G(K) \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ で係数をねじった $G(K)$ の 1 次元コサイクル

$$\varphi : G(K) \rightarrow \mathbb{C}$$

が与えられたとしよう。このとき、複素数 t に対して写像 $\rho_t : G(K) \rightarrow GL(2; \mathbb{C})$ を

$$\rho_t : G(K) \ni \gamma \mapsto \begin{pmatrix} \rho_0(\gamma) & t\varphi(\gamma) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2; \mathbb{C})$$

で定義する。このとき ρ_t は準同型写像となり、可換表現 ρ_0 の非可換表現への 1-パラメーター変形を与えることが直接の計算により確かめられる。すなわち 1 次元コサイクル全体は、 ρ_0 のアフィン変換群の中での非可換表現への変形を記述している。

一方で表現の 1-パラメーター変形の中には、 $GL(2; \mathbb{C})$ の元 $\begin{pmatrix} a & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ による共役

$$\rho_t : G(K) \ni \gamma \mapsto \begin{pmatrix} a & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & -t/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0(\gamma) & t(\rho_0(\gamma) - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から定まるものがある。この変形 ρ_t に対応する 1 次元コサイクルは

$$G(K) \ni \gamma \mapsto t(\rho_0(\gamma) - 1) \in \mathbb{C}$$

であり、これは 1 次元コバウンダリである。つまり、 ρ_0 の変形の中で共役に対応しているものがコバウンダリである。

したがって、ここで述べたことをまとめると、 ρ_0 で係数をねじった $G(K)$ の 1 次元コホモロジー群

$$H^1(G(K); \mathbb{C}_{\rho_0}) = \frac{Z^1(G(K); \mathbb{C}_{\rho_0})}{B^1(G(K); \mathbb{C}_{\rho_0})}$$

は、可換表現 ρ_0 のアフィン変換群の中での共役ではない非可換表現への変形を記述していることがわかる。

準同型写像 $\rho_0 : G(K) \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ は必ず可換化 $\alpha : G(K) \rightarrow T = \langle t \rangle$ を経由し、 t に複素数 $a = \rho_0(x_i)$ を代入したものと考えることができる。ここで、無限巡回群 $T = \langle t \rangle$ を $GL(1; \mathbb{C}[t, t^{-1}])$ の部分群とみなすと、結び目群 $G(K)$ の可換化 $\alpha : G(K) \rightarrow T$ を用いて、先ほどと同様に α でねじった $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ -係数コホモロジー群 $H^1(G(K); \mathbb{C}[t, t^{-1}]_\alpha)$ を定義することができる。

変数 t に $t = a$ を代入する操作は、結び目群の表現だけでなく 1 次元コホモロジー群の間の自然な写像

$$H^1(G(K); \mathbb{C}[t, t^{-1}]_\alpha) \rightarrow H^1(G(K); \mathbb{C}_{\rho_0})$$

を導く。ここで、 $t = a$ が Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ の零点、すなわち $\Delta_K(a) = 0$ であるならば、1 次元コホモロジー群 $H^1(G(K); \mathbb{C}_{\rho_0})$ が非自明であり、それに対応して可換表現 ρ_0 から非可換表現への変形が存在することが知られている。この事実は第 6 章で述べる R -加群の位数イデアル、あるいは表現行列の概念を用いることにより説明がなされるが、ここではこれ以上触れないことにする。

第 5 章

Reidemeister トーション

この章では, Alexander 多項式とは異なる形で定義される Reidemeister トーション (Reidemeister torsion) を導入する. 位相幾何学に現れる多くの位相不変量はホモトピー不変量である. したがってそれらはホモトピー同値な空間を区別しない. 一方, Reidemeister トーションはホモトピー同値な 2 つのレンズ空間を分類するために登場した不変量である. まずはじめに 3 次元レンズ空間に対して Reidemeister が定義し, ただちに Franz, de Rham により高次元のレンズ空間に対して一般化された. その後 Milnor により理論的にさらに深められ, 現在でも様々な視点から研究されている. 解析的な定義もあるが, 組み合わせ的定義の基本的なアイデアは以下のように単純である.

組み合わせ的には同型ではないが, ホモトピー同値である 2 つの CW 複体が与えられたとする. それらの被覆空間はホモトピー同値であるが, 基本群の作用を含めた鎖複体を考えることにする. 底空間の CW 複体のセルを用いてこの鎖複体に基底が与えられ, 境界作用素は行列として表されることになる. この基底つき鎖複体は, ホモトピー不変量よりもさらに深い情報をもっているのである.

5.1 非輪状鎖複体のトーション

以下, V を体 \mathbb{F} 上の n 次元ベクトル空間とする. V の 2 つの基底 $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ と $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ をとる. このとき, $c_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j$ とおくことにより, 2 つの基底の変換行列 $A = (a_{ij}) \in GL(n; \mathbb{F})$ が与えられる. 慣習に従い, $[\mathbf{b}/\mathbf{c}]$ で行列 A の行列式を表すことにする.

注意 5.1.1. 1次元ベクトル空間 $\bigwedge^n V \cong \mathbb{F}$ の中で考えると、この行列式 $[\mathbf{b}/\mathbf{c}]$ に関して

$$b_1 \wedge b_2 \wedge \cdots \wedge b_n = [\mathbf{b}/\mathbf{c}] c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_n$$

が成立する.

体 \mathbb{F} 上の有限次元ベクトル空間からなる非輪状鎖複体

$$C_* : 0 \rightarrow C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$

で、各次元の C_q で基底 \mathbf{c}_q が与えられているものを考える. ここで、鎖複体が非輪状 (acyclic) であるとは、 $q = 1, \dots, m-1$ に対して、

$$\ker \partial_q = \text{Im } \partial_{q+1}$$

および

$$\ker \partial_m = \{0\}, \quad \text{Im } \partial_1 = C_0$$

すなわち、すべてのホモロジー群が自明になることである.

ここまですべてが最初に与えられる状況である. 非輪状という仮定から、もう1つ別の基底をつぎのように選ぶことができる.

まず、各次元のバウンダリ $B_q(C_*) = \text{Im } \partial_{q+1}$ の基底 \mathbf{b}_q を選び、これらの C_{q+1} へのもち上げを固定して $\tilde{\mathbf{b}}_q$ と表す. 鎖複体が非輪状であることから $B_q(C_*) \rightarrow Z_q(C_*)$ は同型なので、基底 \mathbf{b}_q は q 次元サイクル全体 $Z_q(C_*)$ の基底を与えることになる. さらに

$$0 \rightarrow Z_q(C_*) \hookrightarrow C_q(C_*) \xrightarrow{\partial_q} B_{q-1}(C_*) \rightarrow 0$$

は短完全系列であるから、基底の組 $(\mathbf{b}_q, \tilde{\mathbf{b}}_{q-1})$ は C_q の基底を与えることがわかる.

注意 5.1.2. $B_{-1} = \{0\}$ および $B_m = \{0\}$ より、 \mathbf{b}_{-1} と \mathbf{b}_m は空集合であることに注意.

補題 5.1.3. 行列式の値 $[\mathbf{b}_q, \tilde{\mathbf{b}}_{q-1}/\mathbf{c}_q]$ はもち上げ $\tilde{\mathbf{b}}_{q-1}$ のとり方には依存しない. よって単に $[\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q]$ と書いてよい.

証明 もち上げ $\tilde{\mathbf{b}}_{q-1}$ の異なるとり方は $Z_q(C_*)$ のベクトルの分だけある. したがってこのとりかえによる差は、 $C_q \cong B_q \oplus B_{q-1}$ の次元分の外積空間の中で \mathbf{b}_q と $\tilde{\mathbf{b}}_{q-1}$ の外積を考えると自明になる. ゆえに、もち上げのとり方によらずに定まる. \square

定義 5.1.4. 基底つき非輪状鎖複体 C_* のトーション $\tau(C_*)$ を交代積

$$\tau(C_*) = \prod_{q=0}^m [\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q]^{(-1)^{q+1}} \in \mathbb{F} - \{0\}$$

で定義する.

これにより, 体 \mathbb{F} 上の基底つき非輪状鎖複体 C_* が与えられると, $\mathbb{F} - \{0\}$ の元としてトーション $\tau(C_*)$ が得られる. まずはじめに, この定義が B_q の基底のとり方によらないことを証明する.

補題 5.1.5. トーション $\tau(C_*)$ は $\{B_q\}_q$ の基底 $\{\mathbf{b}_q\}_q$ のとり方によらない.

証明 $\{\mathbf{b}'_q\}$ を B_q の別の基底とすると, 基底の変換行列に関して

$$[\mathbf{b}'_q, \mathbf{b}'_{q-1}/\mathbf{c}_q] = [\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q][\mathbf{b}'_q/\mathbf{b}_q][\mathbf{b}'_{q-1}/\mathbf{b}_{q-1}]$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} \prod_{q=0}^m [\mathbf{b}'_q, \mathbf{b}'_{q-1}/\mathbf{c}_q]^{(-1)^{q+1}} &= \prod_{q=0}^m ([\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q][\mathbf{b}'_q/\mathbf{b}_q][\mathbf{b}'_{q-1}/\mathbf{b}_{q-1}])^{(-1)^{q+1}} \\ &= \prod_{q=0}^m ([\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q])^{(-1)^{q+1}} ([\mathbf{b}'_q/\mathbf{b}_q][\mathbf{b}'_{q-1}/\mathbf{b}_{q-1}])^{(-1)^{q+1}} \\ &= \prod_{q=0}^m [\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q]^{(-1)^{q+1}} \end{aligned}$$

となり主張を得る. □

以下では扱わないが, 鎖複体の基底をとりかえた場合にはつぎが成立する.

補題 5.1.6. 鎖複体の基底 $\{\mathbf{c}_q\}_q$ を $\{\mathbf{c}'_q\}_q$ にとりかえると,

$$\tau(C_*, \{\mathbf{c}'_q\}) = \tau(C_*, \{\mathbf{c}_q\}) \prod_{q=0}^m [\mathbf{c}_q/\mathbf{c}'_q]^{(-1)^{q+1}}$$

が成り立つ.

証明 左辺の各因子に関して

$$[\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}'_q] = [\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q][\mathbf{c}_q/\mathbf{c}'_q]$$

が成立するので,

$$\begin{aligned} \tau(C_*, \{\mathbf{c}'_q\}) &= \prod_{q=0}^m [\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}'_q]^{(-1)^{q+1}} \\ &= \prod_{q=0}^m ([\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q][\mathbf{c}_q/\mathbf{c}'_q])^{(-1)^{q+1}} \\ &= \tau(C_*, \{\mathbf{c}_q\}) \prod_{q=0}^m [\mathbf{c}_q/\mathbf{c}'_q]^{(-1)^{q+1}} \end{aligned}$$

となり主張が得られる. □

次元の低い鎖複体の具体例をいくつか与えよう.

例 5.1.7. 1次元非輪状鎖複体

$$C_* : 0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$

を考える. 非輪状であるという仮定は, 境界作用素 ∂_1 が同型写像であることを意味する. ここで, $\mathbf{b}_1 = 0$ と $\partial_1 \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_0$ によって B_1, B_0 の基底を定めると

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_0/\mathbf{c}_1] = 1, \quad [\mathbf{b}_0/\mathbf{c}_0] = \det \partial_1$$

が成立する. ゆえにトーションは

$$\begin{aligned} \tau(C_*) &= [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_0/\mathbf{c}_1]/[\mathbf{b}_0/\mathbf{c}_0] \\ &= \frac{1}{\det \partial_1} \end{aligned}$$

で与えられる.

例 5.1.8. 2次元非輪状鎖複体

$$C_* : 0 \rightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$

を考える. これが非輪状であるということは, この鎖加群の系列が短完全系列であることを意味する. 簡単のため, C_2, C_1, C_0 の基底は

$$[\partial_2 \mathbf{c}_2, \tilde{\mathbf{c}}_0/\mathbf{c}_1] = 1$$

をみたすと仮定する. さらに, $\partial_2 \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_0 = \mathbf{c}_0$ をみたすように基底 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_0$ をとると, トーションは

$$\begin{aligned} \tau(C_*) &= \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_0/\mathbf{c}_1]}{[\mathbf{b}_1/\mathbf{c}_2][\mathbf{b}_0/\mathbf{c}_0]} \\ &= \frac{[\partial_2(\mathbf{c}_2), \mathbf{c}_0/\mathbf{c}_1]}{[\mathbf{c}_2/\mathbf{c}_2][\mathbf{b}_0/\mathbf{c}_0]} \\ &= 1. \end{aligned}$$

ここで後から用いる補題をいくつか述べておく.

補題 5.1.9. 基底つき鎖複体の短完全系列 $0 \rightarrow C'_* \rightarrow C_* \rightarrow C''_* \rightarrow 0$ において、各鎖複体の基底 $\{\mathbf{c}'_q\}_q, \{\mathbf{c}_q\}_q, \{\mathbf{c}''_q\}_q$ に対し

$$[\mathbf{c}'_q, \mathbf{c}''_q / \mathbf{c}_q] = 1$$

が成立していると仮定する. このとき, この3つの鎖複体のうち2つが非輪状複体であるならば, 残りの1つも非輪状であり, これらのトーションの間に

$$\tau(C_*) = \pm \tau(C'_*) \tau(C''_*)$$

が成り立つ.

証明 2つの鎖複体が非輪状であれば残りの1つも非輪状になることは, 短完全系列から導かれるホモロジー群の長完全系列

$$\cdots \rightarrow H_q(C'_*) \rightarrow H_q(C_*) \rightarrow H_q(C''_*) \rightarrow H_{q-1}(C'_*) \rightarrow \cdots$$

からわかる. さらに鎖加群の間の短完全系列

$$0 \rightarrow C'_q \xrightarrow{i} C_q \xrightarrow{j} C''_q \rightarrow 0$$

より, バウンダリの間の短完全系列

$$0 \rightarrow B'_q \xrightarrow{i} B_q \xrightarrow{j} B''_q \rightarrow 0$$

が誘導される. ここでは $B'_q \xrightarrow{i} B_q$ が単射であることのみ示す.

任意の $c \in C'_{q+1}$ に対して $i(\partial c) = 0$ ならば, $c = \partial \delta$ をみたす $\delta \in C'_{q+2}$ が存在することを示せばよい.

写像の可換性により, $i(\partial c) = \partial ic = 0$. C_* は非輪状なので, $\alpha \in C_{q+2}$ が存在して $\partial \alpha = ic$ となる. さらに $j(\partial \alpha) = \partial j(\alpha) = ji(c) = 0$ より $\beta \in C''_{q+3}$ が存在して $\partial \beta = j(\alpha)$. 写像 j の全射性より, $j(\gamma) = \beta$ となる $\gamma \in C_{q+3}$ が存在する.

ここで $\alpha - \partial \gamma$ を考えると

$$\begin{aligned} j(\alpha - \partial \gamma) &= j(\alpha) - j\partial \gamma \\ &= j(\alpha) - \partial j(\gamma) \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって

$$0 \rightarrow C'_{q+2} \xrightarrow{i} C_{q+2} \xrightarrow{j} C''_{q+2} \rightarrow 0$$

の完全性より, $\delta \in C'_{q+2}$ が存在して $i(\delta) = \alpha - \partial\gamma$. したがって

$$\begin{aligned} i\partial\delta &= \partial i\delta \\ &= \partial\alpha - \partial\partial\gamma \\ &= \partial\alpha \\ &= i(c). \end{aligned}$$

再び i は単射であるから, $\partial\delta = c$. よって $\partial c = \partial\partial\delta = 0$ が成立する. ゆえに $B'_q \xrightarrow{i} B_q$ は単射であることが示された. 同様に $B_q \xrightarrow{j} B''_q$ の全射性もわかり, バウンダリの間の短完全系列

$$0 \rightarrow B'_q \rightarrow B_q \rightarrow B''_q \rightarrow 0$$

が誘導される.

このことより, B'_q, B_q, B''_q の基底を $[\mathbf{b}'_q, \mathbf{b}''_q/\mathbf{b}_q] = 1$ をみたすようにとることができる. よってこの基底のもとでトーションを計算すると

$$\begin{aligned} \tau(C_*) &= \prod_q [\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q]^{(-1)^{q+1}} \\ &= \prod_q [\mathbf{b}'_q, \mathbf{b}''_q, \mathbf{b}'_{q-1}, \mathbf{b}''_{q-1}/\mathbf{c}_q]^{(-1)^{q+1}} \\ &= \pm \prod_q [\mathbf{b}'_q, \mathbf{b}'_{q-1}, \mathbf{b}''_q, \mathbf{b}''_{q-1}/\mathbf{c}'_q, \mathbf{c}''_q]^{(-1)^{q+1}} \\ &= \pm \prod_q \left([\mathbf{b}'_q, \mathbf{b}'_{q-1}/\mathbf{c}'_q]^{(-1)^{q+1}} \cdot [\mathbf{b}''_q, \mathbf{b}''_{q-1}/\mathbf{c}''_q]^{(-1)^{q+1}} \right) \\ &= \pm \tau(C'_*)\tau(C''_*) \end{aligned}$$

となり主張を得る. □

注意 5.1.10. この補題と例 5.1.8 から, 2次元トーラス T^2 を境界にもつ2つの3次元多様体を T^2 ではりあわせた多様体の Reidemeister トーションが, それぞれの Reidemeister トーションの積になることが導かれる (命題 5.2.12 参照).

この節の最後にトーションの**双対性**に関する性質を述べておく.

体 \mathbb{F} 上のベクトル空間 V に対して, その**双対空間** $\text{hom}(V, \mathbb{F})$ を V^* で表す. また線形写像 $f: V \rightarrow W$ に対して, その双対写像を $f^*: W^* \rightarrow V^*$ で表す.

体 \mathbb{F} 上の有限次元ベクトル空間からなる基底つき非輪状鎖複体

$$C_*: 0 \rightarrow C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$

を考え, 鎖加群 C_q の基底を $\{\mathbf{c}_q\}_q$, バウンダリの基底を $\{\mathbf{b}_q\}_q$ とする. さらに, これらの双対空間 C_q^*, B_q^* の双対基底を $\{\mathbf{c}_q^*\}_q, \{\mathbf{b}_q^*\}_q$ とする.

ここで C_* の双対鎖複体を

$$C^\sharp : 0 \rightarrow C_m^\sharp \xrightarrow{\partial_m^\sharp} C_{m-1}^\sharp \xrightarrow{\partial_{m-1}^\sharp} \cdots \xrightarrow{\partial_2^\sharp} C_1^\sharp \xrightarrow{\partial_1^\sharp} C_0^\sharp \rightarrow 0$$

で定義する. ただし $C_q^\sharp = \text{hom}(C_{m-q}, \mathbb{F}) = C_{m-q}^*$ および $\partial_q^\sharp = (-1)^{q+1}(\partial_{m-q+1})^*$ である. 鎖加群 C_q^\sharp の基底 $\{\mathbf{c}_q^\sharp\}_q$ を $\mathbf{c}_q^\sharp = \mathbf{c}_{m-q}^*$, バウンダリ B_q^\sharp の基底 $\{\mathbf{b}_q^\sharp\}_q$ を $\mathbf{b}_q^\sharp = \mathbf{b}_{m-q-1}^*$ によって定義する. ここで

$$\begin{aligned} B_{m-q}^\sharp &= \text{Im}(\partial_{m-q+1}^\sharp : C_{m-q+1}^\sharp \rightarrow C_{m-q}^\sharp) \\ &= \text{Im}((-1)^{m-q}\partial_q^* : C_{q-1}^* \rightarrow C_q^*) \\ &\subset C_q^* = C_{m-q}^\sharp \end{aligned}$$

に注意する. これらのもとでつぎが成立する.

補題 5.1.11. $\tau(C^\sharp) = \pm\tau(C_*)^{(-1)^{m+1}}$.

証明 ここで固定した基底のもとで, トーションの定義にもどって計算すると

$$\begin{aligned} \tau(C^\sharp) &= \prod_{p=0}^m [\mathbf{b}_p^\sharp, \mathbf{b}_{p-1}^\sharp / \mathbf{c}_p^\sharp]^{(-1)^{p+1}} \\ &= \prod_{q=0}^m [\mathbf{b}_{m-q}^\sharp, \mathbf{b}_{m-q-1}^\sharp / \mathbf{c}_{m-q}^\sharp]^{(-1)^{m-q+1}} \\ &= \prod_{q=0}^m [\mathbf{b}_{q-1}^*, \mathbf{b}_q^* / \mathbf{c}_q^*]^{(-1)^{m-q+1}} \\ &= \pm \prod_{q=0}^m [\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1} / \mathbf{c}_q]^{(-1)^{m-q}} \\ &= \pm \left(\prod_{q=0}^m [\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1} / \mathbf{c}_q]^{(-1)^{q+1}} \right)^{(-1)^{m+1}} \\ &= \pm\tau(C_*)^{(-1)^{m+1}} \end{aligned}$$

が得られる ($[\mathbf{b}^* / \mathbf{c}^*] = [\mathbf{b} / \mathbf{c}]^{-1}$ が成り立つことに注意). □

5.2 CW 複体の Reidemeister トーション

これまで述べてきた基底つき非輪状鎖複体に対する代数的なトーションの定義をつぎのような幾何学的な状況に適用する.

X を有限 CW 複体とし, \tilde{X} をその普遍被覆空間とする. X の胞体分割の構造を被覆空間にもち上げる. X の基本群 $\pi_1(X)$ は右から \tilde{X} に作用しているとする. 必要なら X の分

割を細分することにより, この作用は胞体的としてよい. このとき各次元のセルによって生成される鎖複体 $C_*(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ は基本群の作用により, 右 $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ -自由加群の構造をもつ. このままでは 0 次元ホモロジー群は自明にならないので, $C_*(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ は非輪状鎖複体にはならない. そこで, X の基本群の表現を用いて係数をねじった局所係数の鎖複体を考える.

そのために, 基本群の線形表現

$$\rho: \pi_1(X) \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$$

を考える. 表現空間 $V = \mathbb{F}^n$ は ρ により左 $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ -加群の構造が入るので, そのことを表すため V_ρ と書くことにする. 局所係数の鎖複体 $C_*(X; V_\rho)$ を $C_*(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} V_\rho$ により定義し, 各次元の $C_q(X; V_\rho)$ の基底をつぎのように定める. まず表現空間 V の基底

$$\{e_1, \dots, e_n\}$$

を固定する. これと X の組み合わせ構造を用いて $C_q(X; V_\rho)$ の基底を

$$\{\tilde{\sigma}_1 \otimes e_1, \tilde{\sigma}_1 \otimes e_2, \dots, \tilde{\sigma}_1 \otimes e_n, \dots, \tilde{\sigma}_{k_q} \otimes e_1, \dots, \tilde{\sigma}_{k_q} \otimes e_n\}$$

と定める. ここで

$$\sigma_1, \dots, \sigma_{k_q}$$

は $C_q(X; \mathbb{Z})$ の基底を与える q 次元セル全体とし, これらの \tilde{X} へのもち上げを $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{k_q}$ とする.

注意 5.2.1. いま X は有限 CW 複体と仮定しているため, 各次元のセルの個数は有限個であることに注意.

定義 5.2.2. $C_*(X; V_\rho)$ が非輪状鎖複体, すなわち, すべての次元のホモロジー $H_*(X; V_\rho)$ が消えているとき, 表現 $\rho: \pi_1(X) \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$ を非輪状表現という.

注意 5.2.3. (i) 自明表現 $\pi_1(X) \rightarrow \{I\} \subset GL(n; \mathbb{F})$ に対しては, 0 次元ホモロジー群 $H_0(X; V_\rho) \cong H_0(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} V$ が消えないので非輪状表現ではない.

(ii) ρ を非輪状表現とすると, この複体の Euler 数は

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim H_q(X; V_\rho) &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim C_q(X; V_\rho) \\ &= (\dim V_\rho) \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{rank } C_q(X; \mathbb{Z}) \\ &= (\dim V_\rho) \chi(X) \end{aligned}$$

となる. したがって, 鎖複体 $C_*(X; V_\rho)$ が非輪状であるための必要条件として X の Euler 数 $\chi(X) = 0$ が成り立つ.

定義 5.2.4. 表現 $\rho : \pi_1(X) \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$ を非輪状表現とする. このとき, X の V_ρ -係数 Reidemeister トーション (Reidemeister torsion) $\tau(X; V_\rho)$ を鎖複体 $C_*(X; V_\rho)$ のトーションとして定義する.

非輪状表現 $\rho : \pi_1(X) \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$ に対して, Reidemeister トーション $\tau(X; V_\rho)$ は $\pm \text{Im}(\det \circ \rho) \subset \mathbb{F} - \{0\}$ の元をかけることを除いて定義される. 以下, 順にそのことをみていこう.

補題 5.2.5. \tilde{X} へのセルの持ち上げをとりかえると, Reidemeister トーション $\tau(X; V_\rho)$ は $\text{Im}(\det \circ \rho) \subset \mathbb{F} - \{0\}$ の元をかけた分だけずれる.

証明 X の q -セル全体を $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ とする. σ_i の \tilde{X} への持ち上げを $\tilde{\sigma}_i$ と表すことにする. このとき, σ_i のこれとは異なる持ち上げは $\pi_1(X)$ の元 γ を用いて, $\tilde{\sigma}_i \gamma$ ($\gamma \in \pi_1(X)$) と表される. よって

$$\{\tilde{\sigma}_i \gamma \otimes e_1, \dots, \tilde{\sigma}_i \gamma \otimes e_n\} = \{\tilde{\sigma}_i \otimes \rho(\gamma)e_1, \dots, \tilde{\sigma}_i \otimes \rho(\gamma)e_n\}$$

となり, 定義どおりに $\tau(X; V_\rho)$ を計算すると, ずれが $\det \rho(\gamma)$ であることがわかる. \square

補題 5.2.6. 各次元のセルの順序をかえたとき, $\tau(X; V_\rho)$ は ± 1 倍ずれる.

証明 X の q -セルを $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ とする. 簡単のため, はじめの 2 つのセルだけを入れかえた $\sigma_2, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ のみ考えることにする. このとき対応する鎖複体の基底は

$$\{\tilde{\sigma}_2 \otimes e_1, \dots, \tilde{\sigma}_2 \otimes e_n, \tilde{\sigma}_1 \otimes e_1, \dots, \tilde{\sigma}_1 \otimes e_n, \dots, \tilde{\sigma}_k \otimes e_1, \dots, \tilde{\sigma}_k \otimes e_n\}$$

となる. よって, この基底をもとの基底にもどす変換行列の行列式は $(-1)^{n^2}$. したがって, 一般の場合にも ± 1 倍ずれることがわかる. \square

補題 5.2.7. 各次元のセルの向きをとりかえると, $\tau(X; V_\rho)$ は ± 1 倍ずれる.

証明 X のセル σ_i の向きを $-\sigma_i$ にすると, これに対応した基底の変換行列は ± 1 倍される. よってトーションの値も ± 1 倍ずれることになる. \square

この ± 1 倍を除くと, Reidemeister トーションは CW 複体 X の組み合わせ構造を定めれば矛盾なく定義される. 一般的にはさらにつぎのことが知られている.

命題 5.2.8. Reidemeister トーション $\tau(X; V_\rho)$ は単純ホモトピー不変量である.

注意 5.2.9. 2 つの CW 複体 X, Y が単純ホモトピー同値であるとは, 有限回の縮約 (collapse) で互いにうつりあうときをいう (例えば, [51] を参照のこと).

以下で具体例を述べよう。これらは何度も扱っている例であるが、トーラスに沿った3次元多様体の切りはりに関する Reidemeister トーションの計算に対して、基本的な役割をはたす。

例 5.2.10. 1次元球面 S^1 .

例 4.2.1 と同様に、1次元球面 S^1 を 0-セル b , 1-セル x からなる CW 複体と考える (図 4.1). 1-セル x に向きをつけ、基本群 $\pi_1(S^1, b)$ の生成元を x から自然に定まるループと同一視して同じ記号で表す. S^1 の普遍被覆空間は \mathbb{R}^1 であり、そこへの $\pi_1(S^1, b) \cong \mathbb{Z}$ の作用は整数 $n \in \mathbb{Z}$ による平行移動と同一視することができる.

鎖複体 $C_*(S^1; V_\rho)$ を定義にしたがって考えてみよう. まず $C_*(\mathbb{R}^1; \mathbb{Z})$ は以下のようになっていたことを思い出そう.

$$0 \rightarrow C_1(\mathbb{R}^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\pi_1(S^1, b)] \xrightarrow{x^{-1}} C_0(\mathbb{R}^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\pi_1(S^1, b)] \rightarrow 0.$$

ここで $C_0(\mathbb{R}^1; \mathbb{Z})$, $C_1(\mathbb{R}^1; \mathbb{Z})$ はそれぞれ \tilde{b} , \tilde{x} により生成される $\mathbb{Z}[\pi_1(S^1, b)]$ -自由加群である. 表現 $\rho: \pi_1(S^1, b) \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$ を固定し、これを用いてこの鎖複体に $\mathbb{Z}[\pi_1(S^1, b)]$ 上 V_ρ をテンソルする. こうして鎖複体

$$C_*(S^1; V_\rho) : 0 \rightarrow C_1(S^1; V_\rho) \rightarrow C_0(S^1; V_\rho) \rightarrow 0$$

が得られる. このとき $C_0(S^1; V_\rho)$, $C_1(S^1; V_\rho)$ はともにベクトル空間としては $V = \mathbb{F}^n$ と同型であり、それぞれ

$$\{\tilde{b} \otimes e_1, \dots, \tilde{b} \otimes e_n\}, \quad \{\tilde{x} \otimes e_1, \dots, \tilde{x} \otimes e_n\}$$

ではられている. この基底のもとで境界作用素は $\partial_1 = \rho(x) - I$ となる. このとき基本群の表現 $\rho: \pi_1(S^1, b) \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$ が非輪状であるための必要十分条件は $\det(\rho(x) - I) \neq 0$ であり、Reidemeister トーションは

$$\tau(S^1; V_\rho) = \frac{1}{\det(\rho(x) - I)}$$

で与えられる.

例 5.2.11. 2次元トーラス T^2 .

例 4.2.2 と同様に、2次元トーラス T^2 を 0-セル b , 1-セル x, y , 2-セル u からなり、2-セル u が $\partial u = xyx^{-1}y^{-1}$ によって 1-セルに接着されている CW 複体と考える. またセルに向きをつけ、 $\pi_1(T^2, b)$ の生成元を x, y と同一視する (図 4.2). ここで $C_*(\mathbb{R}^2; \mathbb{Z})$ の各次元の鎖加群は $\mathbb{Z}[\pi_1(T^2, b)]$ 上 C_2 は \tilde{u} , C_1 は \tilde{x}, \tilde{y} , C_0 は \tilde{b} で生成され、この基底のもとで境界作用素は

$$\partial_1 = (x - 1, y - 1),$$

$$\partial_2(\tilde{u}) = \tilde{x} \frac{\partial[x, y]}{\partial x} + \tilde{y} \frac{\partial[x, y]}{\partial y}$$

であったことを思い出そう。さて、 $C_*(T^2; V_\rho)$ は以下のようなになる。 C_2, C_1, C_0 はそれぞれ

- $\{\tilde{u} \otimes e_1, \dots, \tilde{u} \otimes e_n\}$;
- $\{\tilde{x} \otimes e_1, \dots, \tilde{x} \otimes e_n, \tilde{y} \otimes e_1, \dots, \tilde{y} \otimes e_n\}$;
- $\{\tilde{b} \otimes e_1, \dots, \tilde{b} \otimes e_n\}$

ではられ、 ∂_2, ∂_1 は

$$C_* : 0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{(I-\rho(y), \rho(x)-I)} C_1 \xrightarrow{(\rho(x)-I, \rho(y)-I)} C_0 \longrightarrow 0$$

となる。よって $\det(\rho(x) - I), \det(\rho(y) - I)$ のどちらか一方が 0 でなければ非輪状となる。したがって、基本群の表現 $\rho : \pi_1(T^2, b) \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$ が非輪状であれば、例 5.1.8 の計算により $\tau(T^2; V_\rho) = 1$ となる。

この節の最後に 3 次元多様体のトーラス分解に対する Reidemeister トーションの積公式を述べる。 M をコンパクト 3 次元多様体とする。 M に埋め込まれた 2 次元トーラス $T^2 \subset M$ によって M は 2 つの部分多様体 N_1, N_2 に分解されているとする。基本群の基点を T^2 上にとることにより、 $\pi_1(M)$ は $\pi_1(N_1)$ と $\pi_1(N_2)$ の $\pi_1(T^2)$ 上の融合積として表される。線形表現 $\rho : \pi_1(M) \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$ に対して、部分群 $\pi_1(N_1), \pi_1(N_2), \pi_1(T^2)$ へ制限した表現も簡単のため同じ記号 ρ で表す。また、対応する Reidemeister トーションを、以後それぞれ $\tau_\rho(N_1), \tau_\rho(N_2), \tau_\rho(T^2)$ のように表すことにする。

命題 5.2.12. $\pi_1(T^2)$ 上に制限された表現 $\rho : \pi_1(T^2) \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$ が非輪状であるとする。このとき $\pi_1(M)$ 上で ρ が非輪状表現であることの必要十分条件は、 ρ の $\pi_1(N_1), \pi_1(N_2)$ への制限がともに非輪状表現であることである。さらにこのとき、 $\mathbb{F} - \{0\}$ の元をかけることを除いて

$$\tau_\rho(M) = \tau_\rho(N_1)\tau_\rho(N_2)$$

が成り立つ。

証明 トーラス分解 $M = N_1 \cup_{T^2} N_2$ に対応した V_ρ -係数鎖複体の完全系列

$$0 \rightarrow C_*(T^2; V_\rho) \rightarrow C_*(N_1; V_\rho) \oplus C_*(N_2; V_\rho) \rightarrow C_*(M; V_\rho) \rightarrow 0$$

から定まるホモロジー群の長完全系列

$$\cdots \rightarrow H_i(T^2; V_\rho) \rightarrow H_i(N_1; V_\rho) \oplus H_i(N_2; V_\rho) \rightarrow H_i(M; V_\rho) \rightarrow H_{i-1}(T^2; V_\rho) \rightarrow \cdots$$

を考える.

$\pi_1(T^2)$ 上 ρ が非輪状表現であるという仮定から, $H_*(T^2; V_\rho) = 0$ である. したがって

$$H_i(N_1; V_\rho) \oplus H_i(N_2; V_\rho) \rightarrow H_i(M; V_\rho)$$

は同型写像となる. ゆえに, 表現 ρ が M 上非輪状であることと N_1, N_2 に制限したものがともに非輪状であることは必要かつ十分条件である.

このとき補題 5.1.9 より, 符号の差を除いて

$$\tau_\rho(M)\tau_\rho(T^2) = \tau_\rho(N_1)\tau_\rho(N_2)$$

が成立する. ここで例 5.2.11 により $\tau_\rho(T^2) = 1$ となるので,

$$\tau_\rho(M) = \tau_\rho(N_1)\tau_\rho(N_2)$$

を得る. □

5.3 結び目の Reidemeister トーションと Alexander 多項式

この節では結び目の外部に対して, 前節まで述べてきた Reidemeister トーションが Alexander 多項式と本質的に一致することをみる. そしてそのことを用いて, Alexander 多項式のいくつかの性質を導くことにする.

以下, K を S^3 内の結び目とし, $E(K)$ をその外部 $S^3 - N(K)$ とする. ここで, $N(K)$ は K の開管状近傍である. K の結び目群 $G(K) = \pi_1(E(K))$ に対して, Wirtinger 表示

$$G(K) = \langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_{s-1} \rangle$$

を固定する. このとき, $G(K)$ の可換化

$$\alpha : G(K) \rightarrow H_1(E(K); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} = \langle t \rangle$$

は $\alpha(x_1) = \dots = \alpha(x_s) = t$ で与えられていた.

1 変数有理関数体 $\mathbb{Q}(t)$ への無限巡回群 $\langle t \rangle$ の自然な作用を考えることにより, $G(K)$ の可換化 α は線形表現

$$\alpha : G(K) \rightarrow GL(1; \mathbb{Q}(t))$$

と考えることができる. この表現により $E(K)$ の α に対応する Reidemeister トーション $\tau_\alpha(E(K))$ が定まる. これに関して, Milnor [79] によるつぎの結果が知られている.

定理 5.3.1.

$$\tau_\alpha(E(K)) = \frac{\Delta_K(t)}{t-1}.$$

注意 5.3.2. 上記の両辺はそれぞれ $\pm t^k$ 倍を除いて矛盾なく定義されているので、その意味での等式であることに注意する。

証明 結び目群の Wirtinger 表示

$$G(K) = \langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_{s-1} \rangle$$

に対応した 2 次元 CW 複体 $X(K)$ を考える. すなわち, $X(K)$ は 1 つの 0-セル, s 個の 1-セル, $s-1$ 個の 2-セルをもち, 2-セルはそれぞれ $G(K)$ の関係子 r_1, \dots, r_{s-1} に対応する語に応じて 1-セルに接着されていた.

このとき, $X(K)$ と $E(K)$ はホモトピー同値である. 実際, $X(K)$ から $E(K)$ への自然な写像は基本群の同型を誘導する. そこで無限巡回被覆空間のホモロジー群を計算すると, それぞれの 2, 3 次元のホモロジーは消えていることがわかる. よって Hurewicz の定理により $X(K)$ と $E(K)$ の 2 次以上のホモトピー群は消えている. したがって $X(K)$ から $E(K)$ への自然な写像は弱ホモトピー同値写像となる. Whitehead の定理 ([81] 参照) により, この写像はホモトピー同値写像となる.

さらに Waldhausen の結果 [121] により, 結び目群 $G(K)$ の Whitehead 群は自明であることが知られているので, $E(K)$ とホモトピー同値な空間は単純ホモトピー同値になることがわかる.

さて, Reidemeister トーションは単純ホモトピー不変量であったので (命題 5.2.8), $E(K)$ の トーション $\tau_\alpha(E(K))$ は $X(K)$ の トーション $\tau_\alpha(X(K))$ に等しい. $X(K)$ の $\mathbb{Q}(t)$ -係数の鎖複体 $C_*(X(K); \mathbb{Q}(t)_\alpha)$ は, 先に説明した $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -係数の鎖複体 $C_*(X(K); \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_\alpha)$ に有理関数体 $\mathbb{Q}(t)$ をテンソルした複体である. よって ∂_2 は $\mathbb{Q}(t)$ 上で考えた Alexander 行列と一致する (命題 4.3.6). したがって Reidemeister トーションの定義から

$$\tau_\alpha(X(K)) = \Delta_K(t)/(t-1)$$

が得られる. □

注意 5.3.3. Milnor は $E(K)$ と $X(K)$ が単純ホモトピー同値である事実は使わずに定理を証明している. まず, 境界つき 3 次元多様体 $E(K)$ を 2 次元 CW 複体に collapse する. つぎにこの 2 次元複体の極大樹を 1 つ固定する. これを 1 点に collapse しても トーションの値はかわらないので, そこまで $E(K)$ を collapse した CW 複体で考える. そこで トーションの計算を実行すると自然に Alexander 行列が出てくることから定理を導いている.

Seifert の結果 [103] である Alexander 多項式の係数の対称性 (定理 2.3.6) が, トーションの性質を使ってつぎのように示される.

そのために, より一般の状況で Reidemeister によって得られた **双対性** について述べる. M を n 次元コンパクト多様体とし単体分割を固定する (境界は空でも空でなくてもよい).

M の単体構造の双対胞体分割をもつ多様体を M' とする. M と M' は同じ多様体であるが, 組み合わせ構造を区別して考えるので異なる記号で表すことにする.

いま全射準同型写像

$$\alpha : \pi_1(M) = \pi_1(M') \rightarrow \mathbb{Z} = \langle t \rangle$$

を1つ固定し, これに対応した M, M' の無限巡回被覆空間 M_∞, M'_∞ を考える.

このとき前に述べた議論と同様にして, M_∞, M'_∞ の組み合わせ構造から定まる鎖複体には $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群の構造が入る. $\bar{t} = t^{-1}$ によって定まる $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ 上の双対写像を群環上に線形に拡張した写像も同じ記号

$$\bar{\cdot} : \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

で表すことにする.

P を右 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群とする. ここで P の $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ 上の双対加群

$$P^* = \text{hom}_{\mathbb{Z}[t, t^{-1}]}(P, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$$

を考える. P^* には右 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群の構造がつぎの作用により定まる. 任意の $\phi \in P^*$ に対して, $\phi t^k \in P^*$ を

$$\phi t^k(a) = \phi(a)t^{-k}$$

と定義する. このとき Reidemeister によってつぎの補題が示されている.

補題 5.3.4. $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群として $C_{n-q}(M'_\infty, \partial M'_\infty; \mathbb{Z})$ は標準的に $C_q(M_\infty; \mathbb{Z})$ の双対加群と同型である. さらにこの同型のもとで境界作用素

$$\partial : C_{n-q}(M'_\infty, \partial M'_\infty; \mathbb{Z}) \rightarrow C_{n-q-1}(M'_\infty, \partial M'_\infty; \mathbb{Z})$$

は ± 1 倍を除いて

$$\partial : C_{q+1}(M_\infty; \mathbb{Z}) \rightarrow C_q(M_\infty; \mathbb{Z})$$

の双対写像と一致する.

証明 任意のチェイン $c' \in C_{n-q}(M'_\infty, \partial M'_\infty; \mathbb{Z})$ に対して, 準同型

$$(c', \cdot) : C_q(M_\infty; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

を

$$(c', c) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle c' t^k, c \rangle t^k$$

により定義する. ここで

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C_{n-q}(M'_\infty, \partial M'_\infty; \mathbb{Z}) \times C_q(M_\infty; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

は代数的交点数である。このとき

$$(c', ct^k) = (c', c)t^k, (c't^k, c) = (c', c)t^{-k}, (c', \partial c) = \pm(\partial c', c)$$

が成り立つことが確かめられ、主張を得る。□

この補題を Reidemeister トーションに適用する。包含写像 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Q}(t)$ により、 $\mathbb{Q}(t)$ に係数をもつ局所係数の鎖複体を考え、その Reidemeister トーションを考える。ここで、 $\bar{\cdot} : \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ の拡張として、 $\bar{\cdot} : \mathbb{Q}(t) \rightarrow \mathbb{Q}(t)$ が定まる。補題 5.3.4 および双対空間のトーションと同様の議論によりつぎの命題が得られる。

命題 5.3.5. $C_*(M; \mathbb{Q}(t)_\alpha)$ と $C_*(M, \partial M; \mathbb{Q}(t)_\alpha)$ のどちらか一方が非輪状であるならば、もう一方も非輪状である。このとき

$$\tau_\alpha(M, \partial M) = \left(\overline{\tau_\alpha(M)} \right)^{(-1)^{n+1}}$$

が成立する。

証明 補題 5.3.4 により $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群として $C_{n-q}(M'_\infty, \partial M'_\infty; \mathbb{Z})$ は $C_q(M_\infty; \mathbb{Z})$ の双対加群と同型である。したがって表現

$$\alpha : \pi_1(M) = \pi_1(M') \rightarrow \langle t \rangle$$

を用いて $\mathbb{Q}(t)$ -係数の鎖複体を考えると $C_{n-q}(M', \partial M'; \mathbb{Q}(t)_\alpha)$ は $\mathbb{Q}(t)$ -加群としての構造まで込めて $C_q(M; \mathbb{Q}(t)_\alpha)$ の $\mathbb{Q}(t)$ 上の双対空間と同型である。

ここで $\mathbb{Q}(t)$ -加群としての構造は、 $C_q(M; \mathbb{Q}(t)_\alpha)$ に右から t^k が作用するとき、その双対空間には t^{-k} が作用する。つまり、鎖複体 $C_*(M; \mathbb{Q}(t)_\alpha)$ の双対鎖複体 $C^\sharp(M; \mathbb{Q}(t)_\alpha)$ において、次数 q を $n-q$ と対応させてベクトル空間としての双対をとり、さらに t の作用を \bar{t} の作用でおきかえたものになっている。ゆえに、補題 5.1.11 により

$$\begin{aligned} \tau_\alpha(M, \partial M) &= \tau_\alpha(M', \partial M') \\ &= \tau(C^\sharp(M; \mathbb{Q}(t)_\alpha)) \\ &= \left(\overline{\tau_\alpha(M)} \right)^{(-1)^{n+1}} \end{aligned}$$

となり主張を得る。□

さらにホモロジー群の完全系列を考えることにより、つぎの命題が成り立つ。

命題 5.3.6. $C_*(M; \mathbb{Q}(t)_\alpha)$ と $C_*(M, \partial M; \mathbb{Q}(t)_\alpha)$ がともに非輪状鎖複体であるならば、 $C_*(\partial M; \mathbb{Q}(t)_\alpha)$ も非輪状鎖複体であり、3つの Reidemeister トーションの間に

$$\tau_\alpha(M, \partial M) = \pm \tau_\alpha(M) / \tau_\alpha(\partial M)$$

が成立する。

以上の準備のもとで Alexander 多項式の係数の対称性 (定理 2.3.6) を再証明する.

定理 5.3.7. ある自然数 k が存在して

$$\Delta_K(t^{-1}) = \pm t^k \Delta_K(t)$$

が成り立つ.

証明 まず

$$\tau_\alpha(E(K)) = \overline{\pm \tau_\alpha(E(K))}$$

を示す. 結び目 K の外部 $E(K)$ は, 3次元の複体であるから命題 5.3.5 より

$$\tau_\alpha(E(K), \partial E(K)) = \overline{\tau_\alpha(E(K))}$$

が成立する. さらに $\partial E(K) \cong T^2$ であるから, 例 5.2.11 の計算により $\pm t^k$ 倍を除いて

$$\tau_\alpha(\partial E(K)) = 1.$$

したがって命題 5.3.6 から

$$\begin{aligned} \tau_\alpha(E(K), \partial E(K)) &= \pm \tau_\alpha(E(K)) / \tau_\alpha(\partial E(K)) \\ &= \pm \tau_\alpha(E(K)) \end{aligned}$$

を得る. ゆえに

$$\tau_\alpha(E(K)) = \overline{\pm \tau_\alpha(E(K))}$$

となることがわかる. 定理 5.3.1 より

$$\tau_\alpha(E(K)) \doteq \frac{\Delta_K(t)}{t-1}$$

なので

$$\frac{\Delta_K(t)}{t-1} \doteq \frac{\Delta_K(t^{-1})}{t^{-1}-1}$$

が成り立つ. すなわち, ある自然数 k が存在して

$$\Delta_K(t^{-1}) = \pm t^k \Delta_K(t)$$

が成立する. □

注意 5.3.8. S^3 内の l -成分絡み目 L に対して多変数 Alexander 多項式を考えると, 結び目の場合と同様に

$$\tau_\alpha(E(L)) = \Delta_L(t_1, \dots, t_l)$$

が成り立ち、この事実から

$$\Delta_L(t_1^{-1}, \dots, t_l^{-1}) = \pm t_1^{i_1} \cdots t_l^{i_l} \Delta_L(t_1, \dots, t_l)$$

が証明される (定理 4.3.12 (i) 参照).

つぎにこの双対性を用いて、スライス結び目の Alexander 多項式に関する結果を Fox-Milnor [17] にしたがって紹介する. ここで述べる証明は、最初に発表された原証明とは異なり、トーションを使った別証明である.

定義 5.3.9. S^3 を 4 次元球 D^4 の境界とみなしたとき、 K を境界にもつ局所平坦な 2 次元円板が D^4 内に存在するような結び目 K をスライス結び目という.

定理 5.3.10. K をスライス結び目とする. このとき \mathbb{Z} 上の多項式 $f(t)$ が存在して $\pm t^k$ 倍を除いて

$$\Delta_K(t) = f(t)f(t^{-1})$$

が成立する.

証明 K を境界にもつ D^4 内の局所平坦な 2 次元円板を S とおく. D^4 内での S の管状近傍 $\overline{N(S)}$ は $S \times D^2$ と同相になる. D^4 での S の外部 $D^4 - N(S)$ を $E(S)$ とおくと、明らかに $S^3 \cap E(S) = E(K)$ である. ホモロジーの Mayer-Vietoris 完全系列を用いた計算から、自然な包含写像により、 $H_1(\partial E(S); \mathbb{Z}) \cong H_1(E(S); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ が導かれる. これから定まる全射準同型写像を結び目の場合と同様に

$$\alpha : \pi_1(E(S)) \cong \pi_1(\partial E(S)) \rightarrow \mathbb{Z} \cong \langle t \rangle$$

と表す. これによって有理関数体 $\mathbb{Q}(t)$ に値をもつ $E(S)$ および $\partial E(S)$ のトーションが定まる. 命題 5.3.5 および命題 5.3.6 より

$$\tau_\alpha(\partial E(S)) = \tau_\alpha(E(S))\overline{\tau_\alpha(E(S))}$$

が成り立つ. ここで $E(S)$ の境界 $\partial E(S)$ を $\partial D^4 = S^3$ に含まれる $E(K)$ と D^4 の内部に含まれる部分にわけて考える. 空間対 $(\partial E(S), E(K))$ に関する鎖複体の完全系列

$$0 \rightarrow C_*(E(K)) \rightarrow C_*(\partial E(S)) \rightarrow C_*(\partial E(S), E(K)) \rightarrow 0$$

から

$$\tau_\alpha(\partial E(S)) = \tau_\alpha(E(K))\tau_\alpha(\partial E(S), E(K))$$

が成立する. このとき切除性により、空間対 $(\partial E(S), E(K))$ のホモロジー群と空間対 $(S \times \partial D^2, K \times \partial D^2)$ のホモロジー群は同型である. この場合、自然な包含写像

$$(S \times \partial D^2, K \times \partial D^2) \rightarrow (\partial E(S), E(K))$$

により、局所係数の鎖複体は同型である。したがって

$$\tau_\alpha(\partial E(S), E(K)) = \tau_\alpha(S \times \partial D^2, K \times \partial D^2) = \frac{1}{t-1}$$

が $\pm t^k$ 倍を除いて成立する。一方で、定理 5.3.1 から

$$\tau_\alpha(E(K)) \doteq \frac{\Delta_K(t)}{t-1}$$

となるので、

$$\tau_\alpha(E(S))\overline{\tau_\alpha(E(S))} \doteq \frac{\Delta_K(t)}{(t-1)^2}$$

が成り立つ。これを $\Delta_K(t)$ に関して整理すると

$$\begin{aligned} \Delta_K(t) &\doteq (t-1)^2 \tau_\alpha(E(S))\overline{\tau_\alpha(E(S))} \\ &\doteq (t-1)\tau_\alpha(E(S))\overline{(t-1)\tau_\alpha(E(S))} \end{aligned}$$

が成立する。

ここで $g(t) = (t-1)\tau_\alpha(E(S)) \in \mathbb{Q}(t)$ とおく。有理式 $g(t)$ を互いに素な多項式 $a(t), b(t)$ の比 $a(t)/b(t)$ で表す。Reidemeister トーションの定義から $a(t), b(t)$ は \mathbb{Z} 上の多項式としてよい。このとき $a(t^{-1})$ と $b(t)$ の最大公約元を $d(t)$ とおくと

$$a(t^{-1}) = p(t^{-1})d(t), \quad b(t) = q(t)d(t)$$

と表せる。これにより

$$a(t) = p(t)d(t^{-1}), \quad b(t^{-1}) = q(t^{-1})d(t^{-1})$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} g(t)g(t^{-1}) &= \frac{a(t)}{b(t)} \cdot \frac{a(t^{-1})}{b(t^{-1})} \\ &= \frac{p(t)d(t^{-1})p(t^{-1})d(t)}{q(t)d(t)q(t^{-1})d(t^{-1})} \\ &= \frac{p(t)p(t^{-1})}{q(t)q(t^{-1})} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $d(t)$ の選び方から $p(t^{-1}), q(t)$ は互いに素であるが、 $a(t), b(t)$ が素であることから $p(t), q(t)$ も素であることがわかる。したがって、上式の分母と分子は互いに素となる。一方で Alexander 多項式の定義から $\Delta_K(t) = g(t)g(t^{-1})$ は Laurent 多項式である。ゆえに $q(t) = 1$ でなければならない。よって $f(t) = p(t)$ とおけば、

$$\Delta_K(t) = g(t)g(t^{-1}) = f(t)f(t^{-1})$$

第 6 章

無限巡回被覆と Alexander 多項式

この章では無限巡回被覆空間のホモロジー群の位数イデアルに関する性質と、位数イデアルの観点からみた結び目の Alexander 多項式と Reidemeister トーションについて述べる。

6.1 代数的な準備

この節では R -加群の位数イデアルに関する代数的な準備を行う。以下で考える環はすべて可換環であるので、 R 上の加群に関して、右加群と左加群、右イデアルと左イデアルをそれぞれ区別せずに、単に R -加群、イデアルとよぶことにする。

R を主イデアル整域とし、 R 上の有限生成加群 M を考える。主イデアル整域上の有限生成加群の構造定理より、環 R の有限個の元 p_1, p_2, \dots, p_k が存在して R -加群としての同型

$$M \cong R/(p_1) \oplus R/(p_2) \oplus \cdots \oplus R/(p_k)$$

が成り立つ。ここで (p) は R の元 p が生成する R の主イデアルを表す。

定義 6.1.1. 積イデアル $(p_1 p_2 \cdots p_k)$ を R -加群 M の**位数イデアル**とよび、 $\text{order}(M)$ で表す。

例 6.1.2. 整数環 \mathbb{Z} 上の有限生成加群 $M \cong \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ に対しては、位数イデアルの定義から $\text{order}(M) = (p_1 \cdots p_k) \subset \mathbb{Z}$ となることがわかる。したがって、位数イデアルの概念は \mathbb{Z} 上の有限生成加群の位数の一般化である。

定義からつぎのことが導かれる。

命題 6.1.3. M を R -加群とする。

(i) $\text{order}(M) = (1)$ であるための必要十分条件は $M = \{0\}$ である。

- (ii) $\text{order}(M) = (0)$ であるための必要十分条件は M が直和因子として R -自由因子をもつことである.
- (iii) $\text{order}(M) \neq (0)$ であるための必要十分条件は M がねじれ元のみからなることである.

ここで R -加群の表示から位数イデアルがどのように求まるかを述べておく.

例 6.1.4. M をねじれ元のみからなる有限生成 \mathbb{Z} -加群とする. M が k 個の生成元からなるとすると, \mathbb{Z} -加群の短完全系列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^k \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^k \rightarrow M \rightarrow 0$$

が存在する. ここで \mathbb{Z} -加群の準同型 $A: \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^k$ を \mathbb{Z}^k の自然な基底に関して行列表示し, $A \in GL(k; \mathbb{Z})$ と考えることにする. \mathbb{Z} -加群として $M \cong \mathbb{Z}^k/A(\mathbb{Z}^k)$ であるから, M の位数は $\det A \in \mathbb{Z}$ の絶対値と一致する. したがって

$$\text{order}(M) = (\det A)$$

が成立する.

注意 6.1.5. (i) 例 6.1.4 で述べたことは, 有限生成加群の構造定理から従う. よって整数環 \mathbb{Z} 上だけでなく, 一般の主イデアル整域 R (例えば体上の Laurent 多項式環) 上の加群の場合にも同様に成立する.

- (ii) この例での行列 A を \mathbb{Z} -加群 M の**表現行列**という. 一般に, 可換環 R 上の有限生成加群 M に対して, 表現行列を考えることができる. つまり, R -加群の完全系列

$$R^n \xrightarrow{A} R^m \rightarrow M \rightarrow 0$$

に対して, $A \in M(m, n; R)$ を M の表現行列という. この表現行列は, 加群 M に対して一意的には定まらないことに注意.

つぎに Noether 環の定義, 性質をここでまとめておく. 以下で述べる事柄の詳細は代数学の基本的な教科書 (例えば [88], [127] など) を参照のこと.

環 R 上の加群 M に対して, M の部分加群全体の集合を $\mathbb{B}(M)$ とおく. M の部分加群の間に集合としての包含関係が成立するかどうかで, 集合 $\mathbb{B}(M)$ に半順序を定義することができる. すなわち, M の 2 つの部分加群 $M_1, M_2 \in \mathbb{B}(M)$ に対して $M_1 \subset M_2$ が成立するとき $M_1 \leq M_2$ と定める.

定義 6.1.6. R -加群 M に対して

- (i) 半順序集合 $\mathbb{B}(M)$ の任意の部分集合が極大元をもつとき, M を **Noether 加群**という.

(ii) 環 R 自身が R -加群として Noether 加群であるとき, R を **Noether 環** という.

一般に Noether 加群はつぎの命題で特徴づけられる.

命題 6.1.7. R -加群 M が Noether 加群であることと, すべての部分加群が有限生成であることは同値である.

例 6.1.8. \mathbb{Z} の任意の部分加群は $n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{Z}$) と表される. ゆえに整数環 \mathbb{Z} は Noether 環である.

また R -加群 M が Noether 加群であるという性質は, 部分加群や商加群に関してもよい振る舞いをする.

命題 6.1.9. R -加群 M とその部分加群 N についてつぎの 2 つは同値である.

- (i) M が Noether 加群である.
- (ii) N と M/N が Noether 加群である.

この命題を用いると, Noether 加群の有限個の直和が Noether 加群であることを示すことができる.

命題 6.1.10. Noether 環上の有限生成加群は Noether 加群である.

注意 6.1.11. 体 \mathbb{F} 上のベクトル空間 W を \mathbb{F} 上の加群と考える. このとき W の部分加群 (部分ベクトル空間) が \mathbb{F} 上有限生成であるということは, それらがベクトル空間として有限次元であるということである. したがって W が Noether 加群であるということは, W 自身が有限次元であるということに対応する.

つぎの命題から, 可換 Noether 環上の有限変数多項式環が再び Noether 環になることがわかる.

命題 6.1.12. 可換な Noether 環上有限生成な可換環は Noether 環である.

以上の準備のもと, 次節において幾何学的な設定で位数イデアルを扱うことにする.

6.2 無限巡回被覆空間のホモロジー群

X を連結な有限 CW 複体あるいは有限単体的複体とする. 全射準同型 $\alpha : \pi_1(X) \rightarrow T = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$ を考え, $X_\infty \rightarrow X$ を α に対応する X の無限巡回被覆空間とする.

以下 \mathbb{F} を標数 0 の体とし, \mathbb{F} 上の無限巡回被覆空間の鎖加群 $C_*(X_\infty; \mathbb{F}) = C_*(X_\infty; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}$ やホモロジー群 $H_*(X_\infty; \mathbb{F})$ を考える. これらは \mathbb{F} 上のベクトル空間であるが, 第 4 章で

述べた \mathbb{Z} -係数鎖複体の場合と同様に被覆変換群 T の作用を込めて考えると $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ -加群となる. このときつぎが成立する.

命題 6.2.1. ホモロジー群 $H_*(X_\infty; \mathbb{F})$ は $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ 上有限生成である.

証明 Laurent 多項式環 $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ は Noether 環 \mathbb{F} 上の有限生成可換環であるから Noether 環となる (命題 6.1.12). 一方, X の CW 複体としての有限性から鎖複体 $C_*(X_\infty; \mathbb{F})$ は $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ 上有限生成加群である. したがって, 命題 6.1.10 より, $C_*(X_\infty; \mathbb{F})$ は $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ 上 Noether 加群となる. 命題 6.1.9 から, その部分加群, 剰余加群も Noether 加群となるので, とくにホモロジー群 $H_*(X_\infty; \mathbb{F})$ は $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ 上 Noether 加群になる. よって命題 6.1.7 より $H_*(X_\infty; \mathbb{F})$ は $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ 上有限生成となる. \square

$\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ は主イデアル整域であるから, $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ -加群 $H_q(X_\infty; \mathbb{F})$ の位数イデアルが $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ のイデアルとして定まる. これに関してつぎの命題が成立する.

命題 6.2.2. 無限巡回被覆空間 $X_\infty \rightarrow X$ に対して

(i) ホモロジー群 $H_q(X_\infty; \mathbb{F})$ が \mathbb{F} 上有限次元ベクトル空間ならば,

$$\text{order}(H_q(X_\infty; \mathbb{F})) \neq (0) \subset \mathbb{F}[t, t^{-1}]$$

であり, このイデアルは $t \in T$ の作用 $\xi \mapsto \xi t$ が誘導する \mathbb{F} 上の線形写像 $t_* : H_q(X_\infty; \mathbb{F}) \rightarrow H_q(X_\infty; \mathbb{F})$ の特性多項式で生成される.

(ii) ホモロジー群 $H_q(X_\infty; \mathbb{F})$ が \mathbb{F} 上無限次元ベクトル空間ならば,

$$\text{order}(H_q(X_\infty; \mathbb{F})) = (0) \subset \mathbb{F}[t, t^{-1}].$$

我々の主たる興味の対象は結び目 K であり, その外部 $E(K)$ はホモロジー的には S^1 と同型である. つぎの命題は, 一般に CW 複体がホモロジー的に S^1 と同型であるとき, 位数イデアルが非自明であることを保証する.

命題 6.2.3. 有限 CW 複体 X のホモロジー群に関して $H_*(X; \mathbb{F}) \cong H_*(S^1; \mathbb{F})$ が成り立つならば, すべての k に対して $\text{order}(H_k(X_\infty; \mathbb{F})) \neq (0)$ であり, とくに $H_*(X_\infty; \mathbb{F})$ は \mathbb{F} 上有限次元となる.

証明 鎖複体の短完全系列

$$0 \rightarrow C_*(X_\infty; \mathbb{F}) \xrightarrow{t^{-1}} C_*(X_\infty; \mathbb{F}) \rightarrow C_*(X; \mathbb{F}) \rightarrow 0$$

からホモロジー群の長完全系列

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_i(X_\infty; \mathbb{F}) \xrightarrow{t^{-1}} H_i(X_\infty; \mathbb{F}) \rightarrow H_i(X; \mathbb{F}) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(X_\infty; \mathbb{F}) \rightarrow \cdots$$

が誘導される. 仮定 $H_*(X; \mathbb{F}) \cong H_*(S^1; \mathbb{F})$ より, 任意の $i \geq 2$ に対して $H_i(X; \mathbb{F}) = 0$ が成り立つ. したがって完全系列から

$$H_i(X_\infty; \mathbb{F}) \xrightarrow{t-1} H_i(X_\infty; \mathbb{F})$$

は全射となり, $H_i(X_\infty; \mathbb{F})$ の任意の元は $t-1$ でわり切れる. ゆえに $H_i(X_\infty; \mathbb{F})$ ($i \geq 2$) は $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ -加群として自由因子をもたない.

さらに $H_0(X; \mathbb{F}) \cong H_1(X; \mathbb{F}) \cong H_0(X_\infty; \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}$ より, 完全系列の $i = 0, 1$ の部分は

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_1(X; \mathbb{F}) & \xrightarrow{\cong} & H_0(X_\infty; \mathbb{F}) & \xrightarrow{0} & H_0(X_\infty; \mathbb{F}) & \xrightarrow{\cong} & H_0(X; \mathbb{F}) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

となっている. ゆえに $H_1(X_\infty; \mathbb{F}) \xrightarrow{t-1} H_1(X_\infty; \mathbb{F})$ も全射になり, $H_1(X_\infty; \mathbb{F})$ は $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ 上自由因子をもたないことがわかる. よって命題 6.1.3 と 6.2.2 から主張が得られる. \square

ここで無限巡回被覆空間のホモロジー群の位数イデアルが非自明になるための必要条件を 1 つあげておく.

命題 6.2.4. ホモロジー群 $H_*(X_\infty; \mathbb{F})$ が \mathbb{F} 上有限次元ならば, X の Euler 数 $\chi(X)$ は 0 となる.

証明 上の命題と同様に鎖複体の短完全系列

$$0 \rightarrow C_*(X_\infty; \mathbb{F}) \xrightarrow{t-1} C_*(X_\infty; \mathbb{F}) \rightarrow C_*(X; \mathbb{F}) \rightarrow 0$$

から誘導されるホモロジー群の長完全系列

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_i(X_\infty; \mathbb{F}) \xrightarrow{t-1} H_i(X_\infty; \mathbb{F}) \rightarrow H_i(X; \mathbb{F}) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(X_\infty; \mathbb{F}) \rightarrow \cdots$$

を考える. $H_*(X_\infty; \mathbb{F})$ が \mathbb{F} 上有限次元であるという仮定から, X_∞ の Euler 数が有限の値として定まることがわかる. ゆえに

$$\chi(X_\infty) = \chi(X_\infty) + \chi(X)$$

が成り立つ. したがって $\chi(X) = 0$ となり主張が得られる. \square

6.3 R -加群の位数イデアルと Reidemeister トーション

この節で Reidemeister トーションと位数イデアルの関係について述べる.

$$C_* : 0 \rightarrow C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$

を一意分解整域 R 上の基底つき鎖複体とし, すべての次元の鎖加群 C_q は R 上の加群として自由因子をもたないと仮定する. 以下, $\text{order}(H_q(C_*))$ の生成元を 1 つ固定し $\Delta_q(C_*) \in R$ で表す. いま環 R は一意分解整域なので, $\Delta_q(C_*)$ は R の単元倍を除いて一意的に定まる.

R の商体 \tilde{R} と各鎖加群 C_q とのテンソル積 $\tilde{C}_* = C_* \otimes \tilde{R}$ をとると, C_* が R 上自由因子をもたないという仮定から, \tilde{C}_* は非輪状鎖複体となる. さらにつぎが成立する.

命題 6.3.1. 非輪状鎖複体 \tilde{C}_* のトーシオンは, R -加群の鎖複体 C_* の位数イデアルを用いて

$$\tau(\tilde{C}_*) = \frac{\prod_{q:\text{odd}} \Delta_q(C_*)}{\prod_{q:\text{even}} \Delta_q(C_*)} \in \tilde{R}$$

で与えられる.

注意 6.3.2. Kirk-Livingston は [56] において, この命題の右辺をホモロジートーシオンとよび詳しく考察している.

証明 後で結び目の外部 $E(K)$ の無限巡回被覆空間の場合に述べるので (定理 6.3.4), ここでは概略のみに止める. まず非輪状複体 \tilde{C}_* の各次元の鎖加群 C_q において, \tilde{R} 上のベクトル空間としての基底をとる. 仮定から, これらを R 上の基底 \mathbf{c}_q としてとることができる. さらに R 上の境界作用素 ∂_q を考え, R 上の加群として, $B_q(C_*) = \text{Im } \partial_{q+1}$ の基底 \mathbf{b}_q をとる. これらの基底もそれぞれ \tilde{R} 上のベクトル空間の基底とみなすことができる.

さて, これらの基底の間の変換行列の行列式

$$[\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q] \in R$$

を考えると, $[\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q]$ が生成する R 上のイデアルがホモロジー群 $H_q(C_*)$ の位数イデアルと一致することが確かめられる. ゆえに主張は成立する. \square

注意 6.3.3. ここで左辺のトーシオンは各次元の鎖加群 C_q の基底を決めた上で定義されていたが, 右辺では基底を固定する必要がない. 左辺は \tilde{R} の元として定義され, 符号を除いて一意的に定まるのに対し, 右辺の各項は R の単元倍を除いて定まることに注意が必要である.

ここまで述べたことを結び目の場合にまとめてみよう. 以下, K を S^3 内の結び目とし, $E(K)$ をその外部とする. また, 体 \mathbb{F} は標数 0 の体 ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ など) とする.

可換化 $\alpha : G(K) \rightarrow T = \langle t \rangle$ から定まる無限巡回被覆空間

$$E(K)_\infty \rightarrow E(K)$$

を考える. ここで Alexander 双対定理 ([38] 参照) より, $E(K)$ のホモロジー群に関して

$$H_*(E(K); \mathbb{F}) \cong H_*(S^1; \mathbb{F})$$

が成り立つことがわかる. したがって命題 6.2.3 より $\text{order}(H_k(E(K)_\infty; \mathbb{F})) \neq (0)$ である. また, 体 \mathbb{F} の標数は 0 であるから自然な単射 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}$ が存在し, そこから誘導される環準同型 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{F}[t, t^{-1}]$ によって, Alexander 多項式などの整数係数の Laurent 多項式を \mathbb{F} -係数の Laurent 多項式とみなすことができる.

定理 6.3.4. 結び目 $K \subset S^3$ の外部 $E(K)$ に対して

- (i) $\text{order}(H_0(E(K)_\infty; \mathbb{F})) = (t - 1)$.
- (ii) $\text{order}(H_1(E(K)_\infty; \mathbb{F})) = (\Delta_K(t))$.

証明 結び目 K の Wirtinger 表示

$$G(K) = \langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_{s-1} \rangle$$

を固定する. この表示に対応した 2 次元 CW 複体 $X(K)$ を考える. すなわち, $X(K)$ は

- 1 つの 0-セル b ;
- s 個の 1-セル x_1, \dots, x_s ;
- $s - 1$ 個の 2-セル u_1, \dots, u_{s-1}

をもち, 各 2-セルは $G(K)$ の関係子 r_1, \dots, r_{s-1} に対応する語に応じて 1-セルに接着されている.

定理 5.3.1 の証明で述べたように, この $X(K)$ は結び目の外部 $E(K)$ と単純ホモトピー同値であり, 各 $q = 0, 1, 2, 3$ に対してホモロジー群の同型 $H_k(E(K)_\infty; \mathbb{F}) \cong H_k(X(K)_\infty; \mathbb{F})$ が成立する. また

$$\alpha : G(K) \rightarrow \langle t \rangle \subset GL(1; \mathbb{F}[t, t^{-1}])$$

から定まる局所係数のホモロジー群は, その定義から

$$H_k(X(K)_\infty; \mathbb{F}) \cong H_k(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_\alpha)$$

が成り立つ. そこで鎖加群 $C_*(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_\alpha)$ を具体的に書き下すとつぎのようになる:

$$0 \rightarrow C_2 = \mathbb{F}[t, t^{-1}]^{s-1} \xrightarrow{\partial_2} C_1 = \mathbb{F}[t, t^{-1}]^s \xrightarrow{\partial_1} C_0 = \mathbb{F}[t, t^{-1}] \rightarrow 0.$$

ここで C_2 は $\{u_1, \dots, u_{s-1}\}$, C_1 は $\{x_1, \dots, x_s\}$, C_0 は $\{b\}$ でそれぞれ生成される $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ 上の自由加群と同一視している. また, この同一視のもとで ∂_2 は, はじめに固定した

Wirtinger 表示のもとでの Alexander 行列 A に一致し, $\partial_1 = (t-1, \dots, t-1)$ である (命題 4.3.6).

まず 0 次元ホモロジー群から考える. 明らかに

$$H_0(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_\alpha) = \text{coker } \partial_1 \cong \mathbb{F}[t, t^{-1}]/(t-1)$$

が成り立つので, その位数イデアルは $(t-1)$ となる.

つぎに 1 次元ホモロジー群 $H_1(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_\alpha) = \ker \partial_1 / \text{Im } \partial_2$ の表示

$$0 \rightarrow \text{Im } \partial_2 \rightarrow \ker \partial_1 \rightarrow H_1(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_\alpha) \rightarrow 0$$

を考える. まず有理関数体 $\mathbb{F}(t)$ 上の境界作用素

$$\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$$

は全射である. したがって $\mathbb{F}(t)$ 上 $\ker \partial_1$ は $s-1$ 次元ベクトル空間であることがわかる. Laurent 多項式環 $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ にはねじれ元が存在しないので, $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ 上 $\ker \partial_1$ は $s-1$ 個の元で生成される. このとき $H_1(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_\alpha)$ の表示として

$$0 \rightarrow \text{Im } \partial_2 \cong \mathbb{F}[t, t^{-1}]^{s-1} \rightarrow \ker \partial_1 \cong \mathbb{F}[t, t^{-1}]^{s-1} \rightarrow H_1(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_\alpha) \rightarrow 0$$

が得られる. いま写像

$$\mathbb{F}[t, t^{-1}]^{s-1} \ni (f_1, \dots, f_{s-1}) \mapsto (f_1, \dots, f_{s-1}, \sum_{i=1}^{s-1} \frac{\partial r_i}{\partial x_s}) \in \mathbb{F}[t, t^{-1}]^s$$

によって, $\mathbb{F}[t, t^{-1}]^{s-1}$ を $\mathbb{F}[t, t^{-1}]^s$ の部分加群とみなす. この同一視のもとで上記 $H_1(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_\alpha)$ の表現行列は

$$0 \rightarrow \mathbb{F}[t, t^{-1}]^{s-1} \xrightarrow{A_s} \mathbb{F}[t, t^{-1}]^{s-1} \rightarrow H_1(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_\alpha) \rightarrow 0$$

となる. ここで A_s は Alexander 行列から s 列目をとり除いて得られる $(s-1) \times (s-1)$ 正方行列である. したがって, その行列式 $\det A_s = \Delta_K(t)$ が $H_1(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_\alpha)$ の位数イデアルを生成する (注意 6.1.5 参照). \square

以上をまとめると, 結び目 K の Alexander 多項式と $E(K)$ の Reidemeister トーションに関する Milnor の結果 (定理 5.3.1)

$$\tau_\alpha(E(K)) = \frac{\Delta_K(t)}{t-1}$$

が再び得られたことになる.

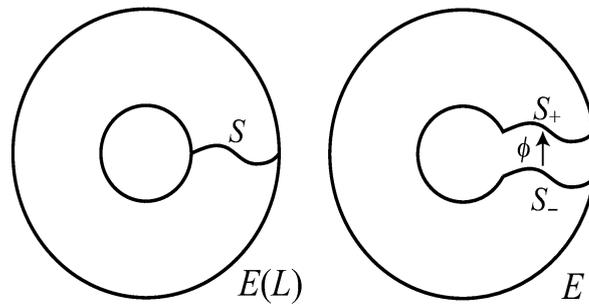


図 6.1

注意 6.3.5. 整数環 \mathbb{Z} 上の Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ は主イデアル整域ではないので、位数イデアルは定義できない。しかし、可換環 R 上ねじれ元のみからなる R -加群 M の表現行列 $A \in GL(k; R)$ が存在するならば、その行列式は R -加群 M の不変量として意味をもつ。とくに $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群 $H_1(E(K); \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_\alpha)$ に対して、表現行列として Alexander 行列 A から 1 列とり除いた行列 $A_s \in M(n-1, n-1; \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ をとることができる。このとき行列式 $\det A_s$ は $H_1(E(K); \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_\alpha)$ の不変量となっている。

6.4 Seifert 行列と無限巡回被覆

この節では、第 2 章で述べた Seifert 行列と無限巡回被覆との関係を述べよう。

S を S^3 内の向きづけられた絡み目 L の連結 Seifert 曲面とする。この節では Seifert 曲面は常に連結とする。 L の開管状近傍 $N(L)$ を十分小さくとることで、 S の $E(L) = S^3 - N(L)$ への制限 $\text{cl}(S \cap E(L))$ が S と同相になるようにできる。この $\text{cl}(S \cap E(L))$ も S と書くことにする。 $E(L)$ を S で切り開いて得られる 3 次元多様体を E とする。すなわち、 $E = E(L) - S \times (-1, 1)$ とする。また、 $S \times \{\pm 1\}$ に対応した E の境界を S_\pm と書くことにする。もちろん、 S_+ と S_- をもと通りはりあわせると、 $E(L)$ が復元できる。 $\phi: S_- \rightarrow S \rightarrow S_+$ を自然な同相写像とすると、 $E(L) = E/\phi$ となっている (図 6.1 参照)。

さて、 E の可算無限個のコピーを使って、 $E(L)$ の無限巡回被覆空間 $E(L)_\infty$ を具体的に構成しよう。 $\{E_i : i \in \mathbb{Z}\}$ を E と同相な 3 次元多様体の族とし、 $h_i: E \rightarrow E_i$ をその同相写像とする。このとき、無限巡回被覆空間 $E(L)_\infty$ は $h_i S_- (\subset E_i)$ と $h_{i+1} S_+ (\subset E_{i+1})$ を $h_{i+1} \phi h_i^{-1}$ ではりあわせることで得られる。

こうして得られる $E(L)_\infty$ 上、自然な (自己) 同相写像 $t: E(L)_\infty \rightarrow E(L)_\infty$ が $t|_{E_i} = h_{i+1} h_i^{-1}$ で与えられる。これは図 6.2 において E_{i-1} を E_i に、 E_i を E_{i+1} にうつすものである。したがって、 t によって生成される無限巡回群 $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ は $E(L)_\infty$ に自由に作用し、 t から定まるホモロジー群上の準同型写像 t_* で生成される無限巡回群 $\mathbb{Z} = \langle t_* \rangle$ は $H_1(E(L)_\infty; \mathbb{Z})$ にも作用する。

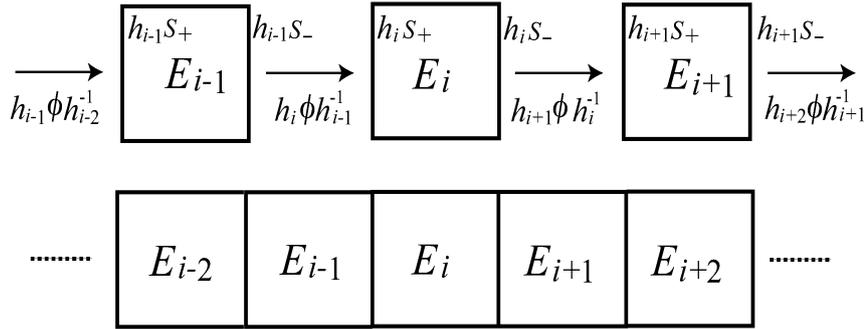


図 6.2

一方, Seifert 曲面 S はホモロジー群 $H_2(E(L), \partial E(L); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元であり, その双対基底が結び目のメリディアン $t \in H_1(E(L); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ に対応している (絡み目の場合は注意 4.3.9 にあるように, 各成分に対するメリディアン t_1, \dots, t_l を $t_1 = \dots = t_l = t$ とみなす). ホモロジー群 $H_1(E(L); \mathbb{Z})$ は絡み目群 $G(L)$ の可換化なので, ここで与えた無限巡回被覆空間は 4.3 節で考察したものに対応していることがわかる.

三葉結び目 K を例にここまで述べたことを観察してみよう. 例 2.2.2 と同様に, 三葉結び目の Seifert 曲面 S と $H_1(S; \mathbb{Z})$ の生成元 e_1, e_2 をとる. このとき, $E = E(K) - S \times (-1, 1)$ は種数 2 のハンドル体になる. 図 6.3 にあるように, 描かれている種数 2 の閉曲面の '外側' が E に対応していることを注意しておく. この種数 2 の閉曲面上の曲線は $\partial E(K) - \partial S \times (-1, 1)$ に対応する部分であり, 実際にはアニュラスであるが, 簡単のため曲線で表してある. ホモロジー群 $H_1(E; \mathbb{Z})$ の生成元を図のように x_1, x_2 とする. e_1 の $S \times \{1\}$ への像 e_1^+ は $H_1(E; \mathbb{Z})$ の元とみなすことができ, $e_1^+ = x_1 - x_2$ と表せる. 同様にして, $e_2^+ = x_2, e_1^- = x_1, e_2^- = -x_1 + x_2$ を得る.

上で説明したように無限巡回被覆空間 $E(K)_\infty$ を考え, E_0, E_1 上でこれらの関係式をみなおすと,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= tx_1 \\ x_2 &= t(-x_1 + x_2) \end{aligned}$$

となり, 一般に E_{i-1}, E_i 上で

$$\begin{aligned} t^{i-1}(x_1 - x_2) &= t^i x_1 \\ t^{i-1} x_2 &= t^i (-x_1 + x_2) \end{aligned}$$

を得る. このことからアーベル群として

$$H_1(E(K)_\infty; \mathbb{Z}) \cong \langle t^i x_1, t^i x_2 \mid t^{i-1}(x_1 - x_2) = t^i x_1, t^{i-1} x_2 = t^i (-x_1 + x_2), i \in \mathbb{Z} \rangle$$

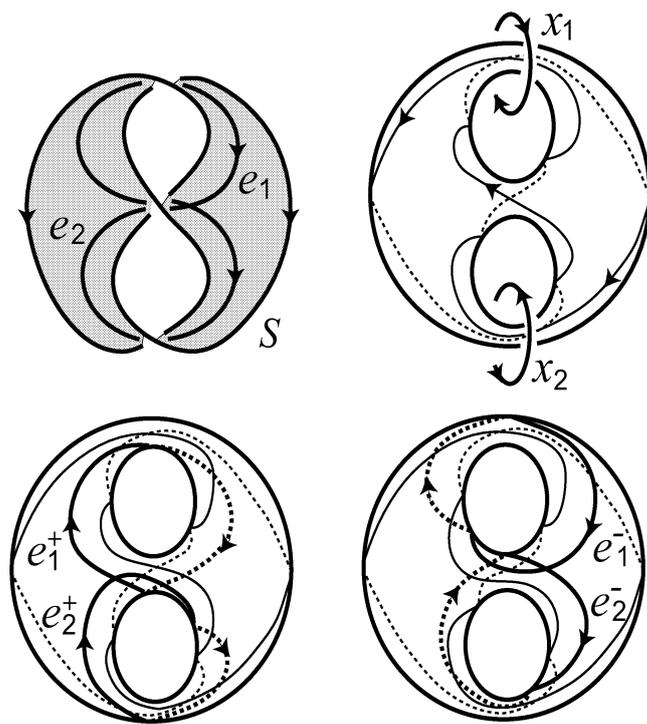


図 6.3

という表示を得るが、これを $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群とみなせば、

$$\begin{aligned} H_1(E(K)_\infty; \mathbb{Z}) &\cong H_1(E(K); \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_\alpha) \\ &\cong \langle x_1, x_2 \mid x_1 - x_2 = tx_1, x_2 = t(-x_1 + x_2) \rangle \end{aligned}$$

という表示になる．整理すると、 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群としての同型

$$\begin{aligned} H_1(E(K)_\infty; \mathbb{Z}) &\cong \langle x_1 \mid x_1 - tx_1 = t(-tx_1) \rangle \\ &\cong \langle x_1 \mid (t^2 - t + 1)x_1 = 0 \rangle \\ &\cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}] / (t^2 - t + 1) \end{aligned}$$

が得られる．よって、三葉結び目 K の $H_1(E(K)_\infty; \mathbb{Z})$ は、Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ を Alexander 多項式 $\Delta_K(t) = t^2 - t + 1$ で生成されるイデアルでわった形をしていることが確認できる．

注意 6.4.1. 前節で述べたように、 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ は主イデアル整域ではないので、上式を位数イデアルの言葉で直接解釈することはできないことに注意しよう．また、 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ のイデアル $E_k(A)$ が主イデアルにならない結び目の例が実際に存在するのでここで紹介しておく．Reidemeister-Rolfsen の表にある結び目 9_{46} の Alexander 行列 A は

$$\begin{pmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-2t & 0 \end{pmatrix}$$

と同値なものになる. ゆえに $E_1(A) = (2t^2 - 5t + 2)$, $E_2(A) = (2 - t, 1 - 2t)$, $E_k(A) = (1) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ ($k \geq 3$) となり, この場合 $E_2(A)$ は主イデアルではない (確かめよ). 詳細は [13] を参照のこと.

一般につきの定理が成立する.

定理 6.4.2. M を結び目または絡み目 L の Seifert 行列とする. このとき, $tM - M^T$ は $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群 $H_1(E(L)_\infty; \mathbb{Z})$ の表現行列になる.

この定理と注意 6.3.5 からつぎが得られる.

系 6.4.3. Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ の Seifert 行列を用いた定義と自由微分を用いた定義は $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ の単元倍を除いて一致する.

以下, 定理 6.4.2 の証明を念頭に議論を進めよう (詳細は [75] を参照).

S を S^3 内の向きづけられた絡み目 L の連結 Seifert 曲面とし, その正則近傍を $S \times [-1, 1]$ とする. e を S 内の閉曲線とすると, $\iota^\pm(e) = e \times \{\pm 1\}$ で 2 つの埋め込み $\iota^\pm : S \rightarrow S^3 - S \times (-1, 1)$ を定義することにする. 以下簡単のため, $e^\pm = \iota^\pm(e)$ と書く. まず, つぎの命題が成り立つ.

命題 6.4.4. S を S^3 内の l -成分絡み目の連結 Seifert 曲面とする. このとき, $H_1(S^3 - S; \mathbb{Z}) \cong H_1(S; \mathbb{Z})$ が成立し, さらに $S^3 - S$, S 内の向きづけられた閉曲線 x , e に対し $\beta([x], [e]) = \text{lk}(x, e)$ で定まる非退化双 1 次形式

$$\beta : H_1(S^3 - S; \mathbb{Z}) \times H_1(S; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

が一意的に存在する.

証明 S の種数を g とすると, $H_1(S; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2g+l-1}$ となる. このアーベル群の生成元を $\{[e_i]\}$ ($i = 1, 2, \dots, 2g+l-1$) とする. S の S^3 内での正則近傍 $V = S \times [-1, 1]$ は種数 $2g+l-1$ のハンドル体であり, $H_1(\partial V; \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}^{\oplus 2g+l-1}) \oplus (\mathbb{Z}^{\oplus 2g+l-1})$. このとき, このアーベル群の生成元として $\{[e_i^+]\}$ ($i = 1, 2, \dots, 2g+l-1$) および e_i と 1 点で交わる V 内の円板の境界で表される $\{[x_i]\}$ ($i = 1, 2, \dots, 2g+l-1$) がとれる. このとき, x_i の向きは $\text{lk}(x_i, e_j) = \delta_{ij}$ となるようにとる. $V' = \text{cl}(S^3 - V)$ とおき, Mayer-Vietoris 完全系列

$$\cdots \rightarrow H_2(S^3; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\partial V; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\nu} H_1(V; \mathbb{Z}) \oplus H_1(V'; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S^3; \mathbb{Z}) \rightarrow \cdots$$

を考えると, $H_2(S^3; \mathbb{Z}) \cong H_1(S^3; \mathbb{Z}) \cong 0$ であるので, ν は同型写像である. V' は $S^3 - S$ にホモトピー同値ゆえ, $H_1(S^3 - S; \mathbb{Z}) \cong H_1(V'; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2g+l-1}$ が得られ, その生成元として $\{[x_i]\}$ ($i = 1, 2, \dots, 2g+l-1$) をとることができる. とくに $H_1(S^3 - S; \mathbb{Z}) \cong H_1(S; \mathbb{Z})$ が成り立つ.

さてつぎに, $\beta([x_i], [e_j]) = \delta_{ij}$ とし, これを線形に拡張することで

$$\beta : H_1(S^3 - S; \mathbb{Z}) \times H_1(S; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

を定義する. いま, x を $S^3 - S$ 内の任意の向きづけられた閉曲線とし, e を S 内の任意の向きづけられた閉曲線とする. そして, $[x] = \sum_i \lambda_i [x_i]$, $[e] = \sum_j \mu_j [e_j]$ と表されたとすると, $\beta([x], [e]) = \sum_i \lambda_i \mu_i$ である. 定理 2.1.7 より, $\text{lk}(x, e_j) = [x] \in H_1(S^3 - e_j; \mathbb{Z})$ かつ $H_1(S^3 - e_j; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} = \langle x_j \rangle$ なので, $\text{lk}(x, e_j) = \lambda_j$. 同様に, $\text{lk}(e, x) = [e] = \sum_i \mu_i [e_i] \in H_1(S^3 - x; \mathbb{Z})$ かつ $[e_i] = \text{lk}(e_i, x)$. ゆえに

$$\text{lk}(e, x) = \sum_i \mu_i \text{lk}(e_i, x) = \sum_i \mu_i \text{lk}(x, e_i) = \sum_i \mu_i \lambda_i = \sum_i \lambda_i \mu_i.$$

以上をまとめると, $\beta([x], [e]) = \text{lk}(e, x) = \text{lk}(x, e)$ となり, 主張が得られる. \square

定義 6.4.5. 双 1 次形式

$$\sigma : H_1(S; \mathbb{Z}) \times H_1(S; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

を $\sigma(x, y) = \beta((\iota^-)_* x, y)$ で定義し, **Seifert 形式** とよぶことにする.

命題 6.4.4 より, S 内の向きづけられた閉曲線 a, b に対し, $\sigma([a], [b]) = \text{lk}(a^-, b)$ となることがわかる. また, $\text{lk}(a^-, b) = \text{lk}(a, b^+)$ であるから, $\sigma([a], [b]) = \text{lk}(a^-, b) = \text{lk}(a, b^+)$. さらに, $e_1, e_2, \dots, e_{2g+l-1}$ を $H_1(S; \mathbb{Z})$ の生成元とし, 命題 6.4.4 の証明にあるように, β に関して $\{e_i\}$ と双対の関係にある $H_1(S^3 - S; \mathbb{Z})$ の基底を $x_1, x_2, \dots, x_{2g+l-1}$ とすると, S に対する Seifert 行列 $M = (M_{i,j})$ は

$$M_{i,j} = \sigma([e_i], [e_j]) = \text{lk}(e_i^-, e_j) = \text{lk}(e_i, e_j^+)$$

である.

問題 6.4.6. $H_1(S^3 - S; \mathbb{Z})$ の元として, $[e_i^-] = \sum_j M_{i,j} [x_j]$, $[e_j^+] = \sum_i M_{i,j} [x_i]$ となることを示せ.

さて, 定理 6.4.2 の証明をしよう.

証明 S を S^3 内の向きづけられた絡み目 L の連結 Seifert 曲面とし, $E = E(L) - S \times (-1, 1)$ とおく. $\{E_i : i \in \mathbb{Z}\}$ を E と同相な 3 次元多様体の族とし, 図 6.2 のように $E(L)$ の無限巡回被覆空間を構成する. $E' = \cup_i E_{2i+1}$, $E'' = \cup_i E_{2i}$ とおき, 鎖複体の短完全系列

$$0 \rightarrow C_n(E' \cap E''; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi_n} C_n(E'; \mathbb{Z}) \oplus C_n(E''; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\omega_n} C_n(E(L)_\infty; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

を考える. ここで, $x \in C_n(E'; \mathbb{Z})$, $y \in C_n(E''; \mathbb{Z})$ に対し,

$$\omega_n(x, y) = x + y \in C_n(E(L)_\infty; \mathbb{Z})$$

であり, $e \in C_n(E' \cap E''; \mathbb{Z})$ に対し,

$$\psi_n(e) = (-e, e) \in C_n(E'; \mathbb{Z}) \oplus C_n(E''; \mathbb{Z})$$

である. このとき, この系列は $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群としての短完全系列となり, ホモロジー群の長完全系列

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_1(E' \cap E''; \mathbb{Z}) &\xrightarrow{(\psi_1)_*} H_1(E'; \mathbb{Z}) \oplus H_1(E''; \mathbb{Z}) \xrightarrow{(\omega_1)_*} H_1(E(L)_\infty; \mathbb{Z}) \\ &\rightarrow H_0(E' \cap E''; \mathbb{Z}) \xrightarrow{(\psi_0)_*} H_0(E'; \mathbb{Z}) \oplus H_0(E''; \mathbb{Z}) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

を誘導する. いま仮定から Seifert 曲面 S は連結なので, $H_0(S; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. ゆえに, $H_0(E' \cap E''; \mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群として, $H_0(E_0 \cap E_1; \mathbb{Z})$ の生成元を $1 \otimes 1$ に対応させることで, $H_0(S; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ と同型. 一方, $H_0(E'; \mathbb{Z}) \oplus H_0(E''; \mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群として, $H_0(E_0; \mathbb{Z})$ の生成元を $1 \otimes 1$ に対応させて, $H_0(E; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ と同型である. 以上から,

$$(\psi_0)_*(1 \otimes 1) = -(1 \otimes 1) + (1 \otimes t)$$

となるので, $(\psi_0)_*$ は $H_0(E' \cap E''; \mathbb{Z})$ 上で単射. よって, $(\omega_1)_*$ は全射準同型となる.

同様にして, $e \in H_1(E_0 \cap E_1; \mathbb{Z})$ を $e \otimes 1$ に対応させることで, $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群として $H_1(E' \cap E''; \mathbb{Z})$ は $H_1(S; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ と同型であり, $x \in H_1(E_0; \mathbb{Z})$ を $x \otimes 1$ に対応させることによって, $H_1(E'; \mathbb{Z}) \oplus H_1(E''; \mathbb{Z})$ は $H_1(E; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ と同型となる. ここで, $\{[e_i]\}$ と $\{[x_i]\}$ を命題 6.4.4 の証明で使った $H_1(S; \mathbb{Z})$ と $H_1(V'; \mathbb{Z})$ の生成元とすると, $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -加群として $H_1(E' \cap E''; \mathbb{Z})$ は $\{[e_i] \otimes 1\}$ を基底にもち, $H_1(E'; \mathbb{Z}) \oplus H_1(E''; \mathbb{Z})$ は $\{[x_i] \otimes 1\}$ を基底にもつ. $(\psi_1)_*$ の定義と問題 6.4.6 から,

$$(\psi_1)_*([e_i] \otimes 1) = \sum_j (-M_{i,j}([x_j] \otimes 1) + M_{j,i}([x_j] \otimes t))$$

を得る. ゆえに, $H_1(E(L)_\infty; \mathbb{Z})$ の表現行列は $tM - M^T$ で与えられることがわかる (例 6.1.4 および注意 6.1.5 参照). \square

第 7 章

ねじれ Alexander 不変量

Alexander 多項式の一般化であるねじれ Alexander 不変量は X. S. Lin と和田昌昭によってほぼ同時期に導入された。Lin は正則 Seifert 曲面を用いて、結び目群とその線形表現に対してねじれ Alexander 不変量 (正確には多項式) を定義した。一方、和田は自由アーベル群への全射準同型写像をもつ (絡み目群を含む) 任意の有限表示群とその線形表現に対して、ねじれ Alexander 不変量を定義した。定義から和田のねじれ Alexander 不変量は多項式になるとは限らないが、結び目群の場合、自然に Reidemeister トーションとしての解釈をもつという利点がある。

その後 Jiang-Wang による定式化を経て、Kirk-Livingston によってさらなる一般化が与えられた。この章では和田と Lin によるねじれ Alexander 不変量の定義を述べる。

7.1 定義

有限表示群 G および G から階数 $r \geq 1$ の自由アーベル群

$$T_r = \langle t_1, \dots, t_r \mid t_i t_j = t_j t_i, 1 \leq i, j \leq r \rangle$$

への全射準同型写像

$$\alpha : G \rightarrow T_r$$

が与えられているとする。可換環 R 上の T_r の群環は R に係数をもつ t_1, \dots, t_r の Laurent 多項式環 $R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}]$ と同一視される。準同型写像 α は \mathbb{Z} 上の群環の間の環準同型写像

$$\tilde{\alpha} : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}]$$

を誘導する。

つぎに群 G の表示を 1 つ固定する:

$$P = \langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_t \rangle. \quad (7.1)$$

また, この表示に伴う自由群 $F_s = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$ から G への全射準同型写像を

$$\phi: F_s \rightarrow G$$

とする. この準同型写像 ϕ を \mathbb{Z} 上の群環へ線形に拡張することにより, 環準同型写像

$$\tilde{\phi}: \mathbb{Z}F_s \rightarrow \mathbb{Z}G$$

が得られる.

以下 R を一意分解整域とし, V を R 上有限生成な自由加群とする (例えば体 R 上の有限次元ベクトル空間 V など). 群 G の V 上の表現 ρ を考えよう. V の基底を 1 つ選ぶと, この表現 ρ は準同型写像

$$\rho: G \rightarrow GL(n; R)$$

とみなすことができる. ただし n は表現空間 V の階数である. 先ほどと同様に, ρ を \mathbb{Z} 上の群環に線形に拡張することにより, R 上の次数 n の行列代数 $M_n(R) = M(n, n; R)$ への環準同型写像

$$\tilde{\rho}: \mathbb{Z}G \rightarrow M_n(R)$$

が定まる. そこで $\tilde{\phi}$ とテンソル積準同型写像

$$\tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha}: \mathbb{Z}G \rightarrow M_n(R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}])$$

の合成写像を Φ で表すことにする:

$$\Phi = (\tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha}) \circ \tilde{\phi}: \mathbb{Z}F_s \rightarrow M_n(R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}]).$$

この合成写像 Φ は環準同型写像であることに注意する.

さて, (i, j) 成分が $n \times n$ 行列

$$\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \in M_n(R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}])$$

である「大きな」 $t \times s$ 行列 M を考える. この行列 M は表現 ρ に付随した表示 (7.1) の **Alexander 行列** とよばれる. 実際, 行列 M を加群 $(R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}])^{ns}$ から $(R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}])^{nt}$ への線形写像とみなすとき, つぎが成り立つ.

命題 7.1.1. 微分の集合 $\mathcal{D} = \{f: \mathbb{Z}G \rightarrow (R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}])^n\}$ を $\tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha}$ によって $\mathbb{Z}G$ -加群とみなすとき, M の核 $\ker M$ と \mathcal{D} の間には自然な 1 対 1 対応が存在する.

証明 まず $\mathbb{Z}G$ のすべての微分

$$f : \mathbb{Z}G \rightarrow (R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}])^n$$

は環準同型写像 $\tilde{\phi}$ を合成することにより, 自由群 F_s の微分

$$f \circ \tilde{\phi} : \mathbb{Z}F_s \rightarrow (R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}])^n$$

を定めることに注意する. このとき普遍微分

$$d : \mathbb{Z}F_s \rightarrow DF_s$$

の性質から, $h \circ d = f \circ \tilde{\phi}$ となる $\mathbb{Z}F_s$ -加群の間の準同型写像

$$h : DF_s \rightarrow (R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}])^n$$

が存在することがわかる. DF_s は $\mathbb{Z}F_s$ 上 dx_1, \dots, dx_s によって自由加群として生成されているので, この写像 h は $\mathbb{Z}F_s$ -準同型写像として, dx_i ($i = 1, \dots, s$) たちの像

$$v_i = h(dx_i) \in (R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}])^n$$

によって完全に決まることになる. したがって, v_i たちによって決まる F_s の微分 $h \circ d$ が $\mathbb{Z}G$ の微分を誘導する必要十分条件は, 関係子 r_1, \dots, r_t が

$$h(dr_1) = \dots = h(dr_t) = 0$$

をみたすことである. これはまた

$$\sum_{j=1}^s \Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) v_j = 0 \quad (i = 1, \dots, t)$$

が成り立つこととも同値である. よって主張は示された. □

$t \times s$ 行列 M の j 列目 ($1 \leq j \leq s$) をとり除いて得られる $t \times (s-1)$ 行列を M_j で表す. 以下 M_j を成分が $R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}]$ の元である $tn \times (s-1)n$ 行列とみなすことにする.

$1 \leq i_1 < \dots < i_{(s-1)n} \leq tn$ をみたす $(s-1)n$ 個の番号の組

$$I = (i_1, \dots, i_{(s-1)n})$$

に対して, M_j の i_k 行 ($k = 1, \dots, (s-1)n$) たちからなる $(s-1)n \times (s-1)n$ 正方行列を M_j^I で表す.

このとき以下の2つの補題が成り立つ. これらはねじれ Alexander 不変量の構成の基本となるものである.

補題 7.1.2. ある番号 j に対して $\det \Phi(x_j - 1) \neq 0$.

証明 準同型写像 α は全射なので, $\alpha(x_j) = t_1^{e_1} \cdots t_r^{e_r} \neq 1$ となる生成元 x_j が少なくとも1つ存在する. このとき

$$\det \Phi(x_j - 1) = \det(t_1^{e_1} \cdots t_r^{e_r} \rho \circ \phi(x_j) - 1)$$

は0でない Laurent 多項式となる. □

補題 7.1.3. 任意の j, k ($1 \leq j < k \leq s$) と任意の I に対して

$$\det M_j^I \det \Phi(x_k - 1) = \pm \det M_k^I \det \Phi(x_j - 1)$$

が成り立つ. とくに表現 ρ の階数が偶数ならば, 等式における符号は常に + になる.

証明 必要ならば列の入れかえをすることにより, $j = 1, k = 2$ と仮定しても一般性を失わない. さて, 自由微分の基本公式 (命題 4.1.4) の両辺に環準同型写像 Φ を施すと

$$\sum_{j=1}^s \Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \Phi(x_j - 1) = 0 \quad (i = 1, \dots, t)$$

が成り立つことに注意する. 上式から $j = 1$ の項をとり出して移項すると

$$\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_1} \right) \Phi(x_1 - 1) = - \sum_{j=2}^s \Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \Phi(x_j - 1) \quad (7.2)$$

が成り立つ.

行列 M_2 の最初の n 列を $\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_1} \right)$ から $\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_1} \right) \Phi(x_1 - 1)$ へ置きかえることによつて得られる行列を \widetilde{M}_2 とする. 行列式の簡単な計算から

$$\det \widetilde{M}_2^I = \det M_2^I \det \Phi(x_1 - 1)$$

が成り立つ. ただし \widetilde{M}_2^I は番号の組 I に対応した \widetilde{M}_2 の行からなる正方行列を表す. また (7.2) から, \widetilde{M}_2 の最初の n 列は $-\sum_{j=2}^s \Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \Phi(x_j - 1)$ からなっているとみなすことができる.

最初の n 列が $-\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_2} \right) \Phi(x_2 - 1)$ からなる行列を \widetilde{M}_1 で表すことにする. そこで行列 \widetilde{M}_2 の最初の n 列の各々に対して, 他の $(s-2)n$ 列の適当な線形結合を加えると, 行列 \widetilde{M}_2 から \widetilde{M}_1 へ変形することができる. 行列 \widetilde{M}_1 は M_1 の最初の n 列に行列 $-\Phi(x_2 - 1)$ を右からかけることによつても得られることに注意すると,

$$\begin{aligned} \det \widetilde{M}_2^I &= \det \widetilde{M}_1^I \\ &= \pm \det M_1^I \det \Phi(x_2 - 1) \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる.

表現 ρ の階数が偶数のとき, M_j の $t \times (s-1)$ 行列としての列の入れかえ操作は $tn \times (s-1)n$ 行列としての列の入れかえ操作偶数回分に相当するので, 符号は常に + になることがわかる. \square

系 7.1.4. $\det \Phi(x_j - 1)$ と $\det \Phi(x_k - 1)$ が 0 でない Laurent 多項式ならば

$$\frac{\det M_j^I}{\det \Phi(x_j - 1)} = \pm \frac{\det M_k^I}{\det \Phi(x_k - 1)}$$

が成り立つ. とくに表現 ρ の階数が偶数ならば, 符号は常に + になる.

さて, よく知られているように, 一意分解整域 R 上の Laurent 多項式環 $R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}]$ は再び一意分解整域となる. そこで $\det M_j^I$ の I に関する最大公約多項式

$$Q_j(t_1, \dots, t_r) = \gcd_I(\det M_j^I) \in R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}]$$

をとることができる. ただし, この Laurent 多項式 $Q_j(t_1, \dots, t_r)$ は, 単元 $\varepsilon t_1^{e_1} \cdots t_r^{e_r}$ ($\varepsilon \in R^\times$, $e_i \in \mathbb{Z}$) による積を法として定まることに注意する. また $t < s-1$ の場合には, $Q_j(t_1, \dots, t_r) = 0$ と定める.

系 7.1.5. $\det \Phi(x_j - 1)$ と $\det \Phi(x_k - 1)$ が 0 でない Laurent 多項式ならば

$$\frac{Q_j(t_1, \dots, t_r)}{\det \Phi(x_j - 1)} = \varepsilon t_1^{e_1} \cdots t_r^{e_r} \frac{Q_k(t_1, \dots, t_r)}{\det \Phi(x_k - 1)}$$

が成り立つ.

補題 7.1.2 から, $\det \Phi(x_j - 1) \neq 0$ となる番号 j を常にとることができる. そこで群 G の表現 ρ に付随したねじれ **Alexander 不変量** (twisted Alexander invariant) を, 有理関数

$$\Delta_{G,\rho}(t_1, \dots, t_r) = \frac{Q_j(t_1, \dots, t_r)}{\det \Phi(x_j - 1)}$$

によって定義する.

系 7.1.5 より, $\Delta_{G,\rho}(t_1, \dots, t_r)$ は $\varepsilon t_1^{e_1} \cdots t_r^{e_r}$ ($\varepsilon \in R^\times$, $e_i \in \mathbb{Z}$) による積を法として番号 j のとり方によらずに定まる. さらにこれは, 群 G , 準同型写像 α および表現 ρ の不変量になる. つまり有限表示群 G_i ($i = 1, 2$) と全射準同型写像 $\alpha_i : G_i \rightarrow T_r$ に対して, $\alpha_1 = \alpha_2 \circ \psi$ をみたす同型写像

$$\psi : G_1 \rightarrow G_2$$

が存在するならば, G_1 の任意の表現

$$\rho : G_1 \rightarrow GL(n; R)$$

に対して

$$\Delta_{G_1, \rho}(t_1, \dots, t_r) = \varepsilon t_1^{\varepsilon_1} \cdots t_r^{\varepsilon_r} \Delta_{G_2, \rho \circ \psi^{-1}}(t_1, \dots, t_r)$$

が成り立つのである。これはつぎの定理から従う。

定理 7.1.6. ねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{G, \rho}(t_1, \dots, t_r)$ は G の表示のとり方によらない。

証明 ねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{G, \rho}(t_1, \dots, t_r)$ が群 G の表示

$$P = \langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_t \rangle$$

から得られているとする。そこで、表示 P に Tietze 変換 (I), (II) を施したときに、Alexander 行列 M がどのように変化するか調べる。

表示 P に Tietze 変換 (I) を施して得られる G の表示を

$$P' = \langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_t, r \rangle$$

とする。新たにつけ加わった関係子 r はその他の関係子 r_1, \dots, r_t の帰結として得られているので、

$$r = \prod_{k=1}^p w_k r_{i_k}^{\varepsilon_k} w_k^{-1} \quad (1 \leq i_k \leq t, w_k \in F_s, \varepsilon_k = \pm 1, 1 \leq k \leq p)$$

と書くことができる。両辺に普遍微分を施すと、簡単な計算から

$$dr = \sum_{k=1}^p \left(\prod_{l=1}^{k-1} w_l r_{i_l}^{\varepsilon_l} w_l^{-1} \right) (u_k dr_{i_k} + (1 - w_k r_{i_k}^{\varepsilon_k} w_k^{-1}) dw_k)$$

が得られる。ただし $u_k \in F_s$ は

$$u_k = \begin{cases} w_k & (\varepsilon_k = 1) \\ -w_k r_{i_k}^{-1} & (\varepsilon_k = -1) \end{cases}$$

を表す。ゆえに自由微分に関する等式

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^p \left(\prod_{l=1}^{k-1} w_l r_{i_l}^{\varepsilon_l} w_l^{-1} \right) \left(u_k \frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j} + (1 - w_k r_{i_k}^{\varepsilon_k} w_k^{-1}) \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \right)$$

を得る。関係子 r_i は $\Phi(r_i) = 1$ をみたすので、上式から

$$\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^p \varepsilon_k \Phi(w_k) \Phi \left(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j} \right) \quad (7.3)$$

が従う。

さて、群表示 P' から得られる Alexander 行列を M' とする. このとき M' の最初の tn 行はちょうど行列 M になっていることに注意する. (7.3) から行列 M' の最後の n 行は最初の tn 行の線形結合であることがわかる. よって M' から定まるねじれ Alexander 不変量は, M から定まるねじれ Alexander 不変量に一致する.

つぎに Tietze 変換 (II) を施して得られる群表示

$$P'' = \langle x_1, \dots, x_s, x \mid r_1, \dots, r_t, xw^{-1} \rangle \quad (w \in F_s)$$

から定まる Alexander 行列 M'' について考える. これはつぎの形で表されている:

$$M'' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで $\det \Phi(x_j - 1) \neq 0$ を仮定しよう. 行列 M_j'' の形から, sn 個の番号の組

$$J = (i_1, \dots, i_{s_n}) \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_{s_n} \leq (t+1)n)$$

に対応して定まる正方行列 $M_j''^J$ の行列式が 0 でない Laurent 多項式になり得るのは, J が

$$J = (i_1, \dots, i_{(s-1)n}, tn+1, \dots, (t+1)n)$$

と表されるときに限ることがわかる. このとき $I = (i_1, \dots, i_{(s-1)n})$ に対して

$$\det M_j''^J = \det M_j^I$$

が成り立つ. よって M'' から定まるねじれ Alexander 不変量も M から定まるねじれ Alexander 不変量に一致する.

以上のことから, $\Delta_{G,\rho}(t_1, \dots, t_r)$ は群 G の表示のとり方によらないことがわかる. \square

ねじれ Alexander 不変量は, 表現空間 V の基底の選び方にもよらないことに注意しよう. つまり, 同値な表現 ρ と ρ' (表現空間 V の自己同型写像 ψ が存在して $\rho'(\gamma) = \psi \circ \rho(\gamma) \circ \psi^{-1}$ が任意の $\gamma \in G$ に対して成り立つ) に対して, それらのねじれ Alexander 不変量は一致する:

$$\Delta_{G,\rho}(t_1, \dots, t_r) = \Delta_{G,\rho'}(t_1, \dots, t_r).$$

注意 7.1.7. 以上の構成は, 有限巡回群 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ への全射準同型写像 $\alpha : G \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ および線形表現 $\rho : G \rightarrow GL(n; \mathbb{Z})$ をもつ有限表示群 G に対しても同様に行うことができる. 具体的には円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ の類数 h_m が 1 のときに, $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ に値をもつねじれ不変量 $\Theta_{G,\rho} \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$ が $\mathbb{Z}[\zeta_m]$ の単元による積を法として定まることになる. 詳しくは [84] を参照のこと.

例 7.1.8. 最も簡単な例として無限巡回群 $G = \langle t \rangle$ を考えよう. この場合, 可換化準同型写像は恒等写像 $\alpha = id : G \rightarrow \langle t \rangle$ となる. すべての複素線形表現

$$\rho : G \rightarrow GL(n; \mathbb{C})$$

は G の生成元 t の像 $A = \rho(t) \in GL(n; \mathbb{C})$ で完全に決まる. このとき, G のねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{G, \rho}(t) = \frac{1}{\det(tA - I)}$$

で与えられる. これは線形変換 $A \in GL(n; \mathbb{C})$ のゼータ関数とよばれる.

例 7.1.9. 組み紐群 $B_3 = \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$ を考える. これは三葉結び目の結び目群と同型である (1.5 節参照).

まず B_3 の \mathbb{Z} 上の 1 次元自明表現

$$\rho_0 : B_3 \rightarrow GL(n; \mathbb{Z})$$

を考えよう. つまり $\rho_0(x) = \rho_0(y) = 1$ である. 例 4.3.2 から Alexander 行列は

$$\left(\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right), \Phi \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) \right) = (t^2 - t + 1, -t^2 + t - 1)$$

で与えられる. 一方

$$\Phi(x - 1) = \Phi(y - 1) = t - 1$$

であることから, 表現 ρ_0 に付随した B_3 のねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{B_3, \rho_0}(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t - 1}$$

となる.

つぎに **Burau 表現**とよばれる Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[s, s^{-1}]$ 上定義された 2 次元表現

$$\beta : B_3 \rightarrow GL(2; \mathbb{Z}[s, s^{-1}])$$

を考えよう. これは具体的に以下のように定義される:

$$\beta(x) = \begin{pmatrix} -s & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -s \end{pmatrix}.$$

直接計算から

$$\begin{aligned} \det \Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) &= \det \begin{pmatrix} 1 - t & -st^2 \\ -st + st^2 & 1 + st - st^2 \end{pmatrix} \\ &= (1 - t)(1 + st)(1 - st^2). \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}\det \Phi(y-1) &= \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ st & -st-1 \end{pmatrix} \\ &= (1-t)(1+st)\end{aligned}$$

であるので, Burau 表現 β に付随した B_3 のねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{B_3, \beta}(t) = 1 - st^2$$

で与えられる.

注意 7.1.10. 組み紐群 B_n ($n \geq 4$) に対しても Burau 表現

$$\beta : B_n \rightarrow GL(n-1; \mathbb{Z}[s, s^{-1}])$$

が定義されるが, この場合のねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{B_n, \beta}(t)$ は自明になる. 詳しくは 10.1 節を参照のこと.

ねじれ Alexander 不変量は, 結び目や絡み目だけでなく群とその表現に依存して定まるので, それ自身は結び目や絡み目の不変量にはならない. ねじれ Alexander 不変量から結び目の不変量を抽出する 1 つの方法は, 素数 p に対して標数 p の素体

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$$

上の表現を考えることである. この場合 $G(K)$ から $GL(n; \mathbb{F}_p)$ への表現の個数は有限個なので, 対応するねじれ Alexander 不変量の集まりを結び目の不変量とみなすことができるのである.

この考え方のもと 11 交点をもつ樹下-寺阪結び目と Conway 結び目をねじれ Alexander 不変量によって区別することができる. これらは自明な Alexander 多項式をもつ結び目として古くから知られており ([55] および問題 4.3.5 参照), ねじれ Alexander 不変量の強力を示す 1 つの例になっている.

具体的な計算をする前に, 定義を 1 つ与えておこう. 結び目群 $G(K)$ の $SL(2; \mathbb{F}_p)$ 表現

$$\rho : G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{F}_p)$$

がパラボリック表現であるとは, 結び目 K のメリディアン像がトレース 2 の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に共役であるときとする. また, 簡単のため, 結び目群 $G(K)$ のねじれ Alexander 不変量を $\Delta_{K, \rho}(t)$ で表すことにする.

例 7.1.11. 樹下-寺阪の結び目 KT , Conway の結び目 C を考える. $G(KT)$ および $G(C)$ は以下の群表示をもつ (問題 1.5.4 参照):

$$G(KT) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid r_1, r_2, r_3 \rangle,$$

$$r_1 : x_1 x_2 x_1^{-1} = x_4 x_2 x_4 x_2^{-1} x_4^{-1},$$

$$r_2 : x_4 x_2 x_4^{-1} = x_2^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3^{-1} x_2,$$

$$r_3 : x_1 x_3 x_1^{-1} = x_4 x_3 x_4 x_3^{-1} x_4^{-1}.$$

$$G(C) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid r_1, r_2, r_3 \rangle,$$

$$r_1 : x_1 x_2 x_1^{-1} = x_4 x_2 x_4 x_2^{-1} x_4^{-1},$$

$$r_2 : x_4 x_2 x_4^{-1} = x_2^{-1} x_3^{-1} x_1^{-1} x_3 x_1 x_3 x_2 x_1 x_2^{-1} x_3^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_1 x_3 x_2,$$

$$r_3 : x_1 x_3 x_1^{-1} = x_4 x_3^{-1} x_1 x_3 x_4^{-1}.$$

$G(KT)$ から $SL(2; \mathbb{F}_7)$ への非自明なパラボリック表現の同値類はちょうど 2 個存在することが知られている [119]. これらを θ_1, θ_2 とする. 具体的には

$$\theta_1(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \theta_1(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \theta_1(x_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \theta_1(x_4) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

および

$$\theta_2(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \theta_2(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \theta_2(x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \theta_2(x_4) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

で与えられる. 関係 r_1, r_2, r_3 に自由微分を施すことにより,

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_1} = 1 - x_1 x_2 x_1^{-1}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial x_2} = x_1 - x_4 + x_4 x_2 x_4 x_2^{-1}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_1} = -x_2^{-1} x_3 - x_2^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_2 + x_2^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_3 x_1^{-1},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_2}{\partial x_2} &= x_4 + x_2^{-1} - x_2^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} + x_2^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} \\ &\quad - x_2^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_2}{\partial x_3} &= -x_2^{-1} + x_2^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} - x_2^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} \\ &\quad + x_2^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3^{-1}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_1} = 1 - x_1 x_3 x_1^{-1}, \quad \frac{\partial r_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial r_3}{\partial x_3} = x_1 - x_4 + x_4 x_3 x_4 x_3^{-1}$$

を得る. よって表現 θ_1 に対して

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 6t & 6t^2 + 5t & 6t^2 + 4t & 0 & 0 \\ t & 5t + 1 & 2t^2 + t & t^2 + 2t & 0 & 0 \\ 2t + 4 & 3t + 6 & 6t + 1 + t^{-1} & 3t + 3 & 4t + 6 + 6t^{-1} & t + 4 \\ t + 1 & t & 2t + t^{-1} & 3t + 5 + t^{-1} & 4t + 6t^{-1} & 3t + 2 + 6t^{-1} \\ t + 1 & 6t & 0 & 0 & 3t^2 + 5t & 2t^2 + 4t \\ 4t & 4t + 1 & 0 & 0 & 6t^2 + t & 2t^2 + 2t \end{pmatrix}$$

となることがわかる. ゆえにねじれ Alexander 不変量は

$$\begin{aligned} \Delta_{KT, \theta_1}(t) &= \frac{\det M_4}{\det \Phi(x_4 - 1)} \\ &= \frac{t^2(6t^8 + 5t^7 + 4t^6 + t^5 + 3t^4 + t^3 + 4t^2 + 5t + 6)}{t^2 + 5t + 1} \\ &\doteq 6t^6 + 3t^5 + 4t^4 + 6t^3 + 4t^2 + 3t + 6. \end{aligned}$$

同様の計算から

$$\Delta_{KT, \theta_2}(t) = 6t^6 + 2t^4 + 5t^3 + 2t^2 + 6$$

となる.

Conway 結び目 C も $SL(2; \mathbb{F}_7)$ への 2 つの非自明なパラボリック表現 θ'_1, θ'_2 をもつことが知られている (もし $G(C)$ のパラボリック表現の個数が $G(KT)$ のそれと異なれば, この時点で KT と C は区別されることに注意する).

表現 θ'_1, θ'_2 およびそれらのねじれ Alexander 不変量はつぎで与えられる.

$$\theta'_1(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \theta'_1(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \theta'_1(x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \theta'_1(x_4) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

このとき

$$\Delta_{C, \theta'_1}(t) = 6t^{10} + 2t^9 + 6t^7 + 4t^6 + 3t^5 + 4t^4 + 6t^3 + 2t + 6.$$

また

$$\theta'_2(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \theta'_2(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \theta'_2(x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \theta'_2(x_4) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

に対して,

$$\Delta_{C, \theta'_2}(t) = 6t^{10} + 5t^9 + 6t^8 + 3t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 6t^2 + 5t + 6.$$

以上の計算から $\{\Delta_{KT, \theta_1}(t), \Delta_{KT, \theta_2}(t)\}$ と $\{\Delta_{C, \theta'_1}(t), \Delta_{C, \theta'_2}(t)\}$ は集合として異なるので, 結び目群 $G(KT)$ と $G(C)$ は同型でない (したがって KT と C は同値な結び目でない) ことがわかる.

注意 7.1.12. より一般に、樹下-寺阪結び目 KT と Conway 結び目 C は、すべての有限体 \mathbb{F} について、同じ個数の $SL(2; \mathbb{F})$ パラボリック表現をもつことが知られている。この事実は KT と C がミュータントであることに基づいて示されるが、一般にミュータントな結び目のパラボリック表現の個数は一致するとは限らない [120].

7.2 Seifert 曲面を使ったねじれ Alexander 不変量の定義

この節では、Lin [76] による Seifert 曲面を使ったねじれ Alexander 不変量の定義を紹介する。

S を結び目 K の自由な Seifert 曲面とし、その種数を g とする。 W を S の内部に埋め込まれたスパイン (spine) で、各々向きづけられたサークル (circle) が e_1, e_2, \dots, e_{2g} と名づけられているとする。また、 W の基点を $*$ で表すことにする。 S の近傍 $S \times [-1, 1]$ に対し、 $W^\pm = W \times \{\pm 1\}$, $e_i^\pm = e_i \times \{\pm 1\}$ ($i = 1, 2, \dots, 2g$) とする。また、 $S \times [-1, 1]$ の境界上には W^+ と W^- の基点 $*^+, *^-$ をつなぐアーク (arc) で、その内点は W^\pm とは交わらないものが存在する。それを γ とおく。

さて、いま S は種数 g の自由 Seifert 曲面という仮定だったので、 $S^3 - N(S)$ ($N(S) = S \times (-1, 1)$) は種数 $2g$ のハンドル体になっており、その基本群は階数 $2g$ の自由群である。基点をアーク γ を 1 点にまで縮小して得られる点とし、このハンドル体 $S^3 - N(S)$ の基本群の生成元を x_1, x_2, \dots, x_{2g} とする。このとき、 e_i^+ および e_i^- は x_1, x_2, \dots, x_{2g} で表される語 y_i および z_i を定める。これらの語の集合 $\{y_i, z_i, i = 1, 2, \dots, 2g\}$ をスパイン W が誘導する語の集合とよぶことにする。

K' を K に平行でかつ $K \cap W = \emptyset$ をみたす S 内のサークルとする。 $m = \{*\} \times [-1, 1] \cup \gamma$ は K' のメリディアンとみなすことができ、 h を m で表される $G(K)$ の生成元とする。 $E(K)$ は $S^3 - N(S)$ から $S \times \{1\}$ と $S \times \{-1\}$ をはり合わせて得られるので、 $G(K)$ はこのはり合わせから生じる関係子 $hy_i h^{-1} = z_i$ をハンドル体 $S^3 - N(S)$ の基本群の生成元 $\langle x_1, \dots, x_{2g} \rangle$ に加えて得られる。すなわち、つぎを得る。

補題 7.2.1. 結び目群 $G(K)$ はつぎの表示をもつ:

$$\langle x_1, \dots, x_{2g}, h \mid hy_i h^{-1} = z_i, i = 1, \dots, 2g \rangle.$$

ここで、 h は K のメリディアンに対応した S^1 方向の生成元を表す。

以下、しばらく S は正則 Seifert 曲面 (定義 1.2.5) と仮定する。語 y_i, z_i を具体的に求めるには以下のようにすればよい。正則 Seifert 曲面 S のスパイン W は標準的な埋め込みとアイソトピックなので、向きづけられた各サークル e_1, e_2, \dots, e_{2g} は、 S^3 内の向きづけられた円板 D_1, D_2, \dots, D_{2g} をはる。さらにこのとき、 $i \neq j$ ならば、 $D_i \cap D_j = \{*\}$

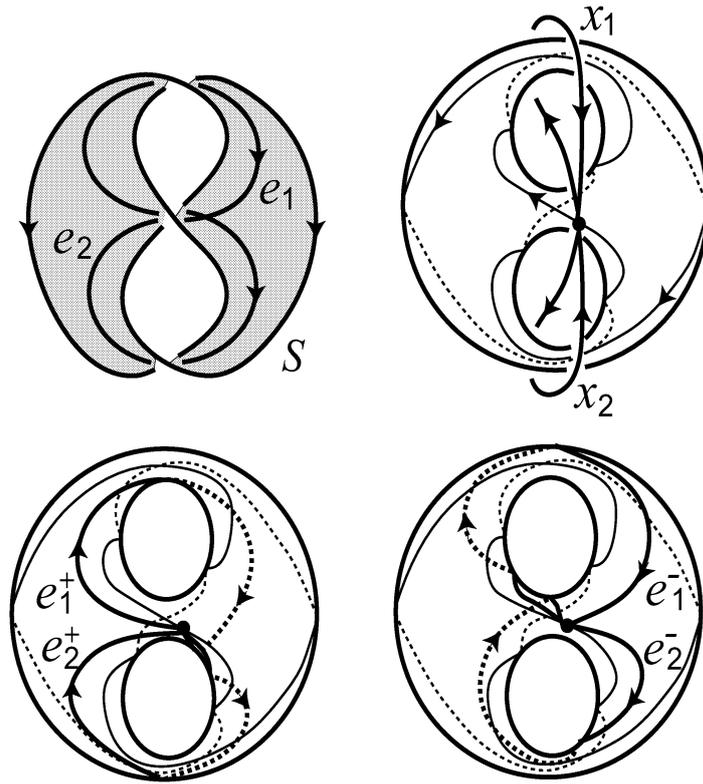


図 7.1

かつ $D_i \cap \gamma = \emptyset$ としてよい. これら円板の集合を $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_{2g}\}$ と表す. $F_{2g} = \langle x_1, \dots, x_{2g} \rangle$ を階数 $2g$ の自由群とし, 以下の手順で e_1^+ と \mathcal{D} の交わりを語 $y_1 \in F_{2g}$ で記録する. すなわち, e_1^+ と D_i の各交点を x_i もしくは x_i^- と書く. ここで肩の符号は交差数の ± 1 に対応する. 左から右へ順に e_1^+ のこれらの交点を書き下す. 同様の操作で e_2^+, \dots, e_{2g}^+ から語 y_2, \dots, y_{2g} が得られ, e_2^-, \dots, e_{2g}^- から語 z_1, \dots, z_{2g} を得る. これら

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_{2g}), \quad z_i = z_i(x_1, \dots, x_{2g}), \quad i = 1, 2, \dots, 2g$$

のことを K の正則 Seifert 曲面 S およびスパイン W の組 (S, W) の双対語とよぶ. もちろん, これらはスパイン W が誘導する語の集合である.

例 7.2.2. 図 7.1 は三葉結び目の例である. このとき, $y_1 = x_1 x_2^{-1}$, $y_2 = x_2$, $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2 x_1^{-1}$ となる.

さて, 補題 7.2.1 より, 結び目 K のある正則 Seifert 曲面 S を使って, 結び目群 $G(K)$ はつぎのように表示される:

$$\langle x_1, \dots, x_{2g}, h \mid h y_i h^{-1} = z_i, i = 1, \dots, 2g \rangle.$$

ただし,

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_{2g}), \quad z_i = z_i(x_1, \dots, x_{2g}), \quad (i = 1, 2, \dots, 2g)$$

は S の双対語である. そこで, この双対語の $2g \times 2g$ の群環係数の行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$

を考える.

前節と同様に, 結び目群の表現 $\rho: G(K) \rightarrow GL(n; \mathbb{C})$ をとる. そしてこの自由微分に関するヤコビアンに現れる各 x_i を $n \times n$ 行列 $\rho(x_i)$ におきかえて得られる $2gn \times 2gn$ 行列を

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}^\rho,$$

と書くことにする. つぎにこれらを用いて $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ -加群を導入する.

定義 7.2.3. つぎの表現行列で与えられる $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ -加群を結び目群 $G(K)$ のねじれ Alexander 加群とよび, $A(K, \rho)$ と書くことにする:

$$t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}^\rho - \begin{pmatrix} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}^\rho.$$

そして, 表現 $\rho: G(K) \rightarrow GL(n; \mathbb{C})$ に付随したねじれ Alexander 多項式 $\Delta_K(t, \rho)$ をねじれ Alexander 加群の位数イデアルの生成元として定義する. すなわち, A を $A(K, \rho)$ の表現行列としたとき,

$$\Delta_K(t, \rho) = \det A.$$

定理 7.2.4. $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の単元倍を除いて, $\Delta_K(t, \rho)$ は結び目 K の不変量になる.

定理 7.2.4 の証明の前に 1 つ例をみてみよう. 例 7.2.2 および補題 7.2.1 から三葉結び目 K は

$$G(K) = \langle x_1, x_2, h \mid hx_1x_2^{-1}h^{-1} = x_1, hx_2h^{-1} = x_2x_1^{-1} \rangle$$

という表示をもつ. そしてこの群はつぎの表現 $\rho: G(K) \rightarrow GL(2; \mathbb{Z}[s, s^{-1}])$ をもつ (確かめよ).

$$\rho(x_1) = \begin{pmatrix} -s^{-1} + 1 - s & s \\ -s^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_2) = \begin{pmatrix} -s^{-1} + 1 & -1 \\ s & -s \end{pmatrix}, \quad \rho(h) = \begin{pmatrix} -s & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

このとき,

$$A = t \cdot \begin{pmatrix} -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 + s & s^{-1} \\ 0 & 1 & -1 & s^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s^{-1} & -s^{-1} & 1 & 0 \\ 1 & -1 + s & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1-st & t & -t+st-s^2t & s^{-1}t-t \\ 0 & -1+t & -t & s^{-1}t \\ -s^{-1} & s^{-1} & -1-st & t \\ -1 & 1-s & 0 & -1+t \end{pmatrix}$$

となり,

$$\Delta_K(t, \rho) = (1-t)(1+st)(1-st^2)$$

を得る.

問題 7.2.5. 三葉結び目の群のこの表示と表現から, 7.1 節で定義したねじれ Alexander 不変量を計算せよ (ヒント: 群表示の構成から $\alpha(x_i) = 1, \alpha(h) = t$ である).

実は結び目群を補題 7.2.1 の形式で表示すると, その構成から常に $\alpha(x_i) = 1, \alpha(h) = t$ となる. 一方,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(hy_i h^{-1} - z_i) = h \frac{\partial y_i}{\partial x_j} - \frac{\partial z_i}{\partial x_j}$$

であることから,

$$A = M_{2g+1}$$

が成り立つ. つまり, 和田と Lin によるねじれ Alexander 不変量の間には, つぎの関係式が成り立っている.

命題 7.2.6. $\Delta_K(t, \rho) = \Delta_{K, \rho}(t) \cdot \det \Phi(h-1)$.

注意 7.2.7. B. Jiang と S. Wang は [48] において, コンパクト 3 次元多様体 X のねじれ Alexander 不変量 $A^\rho(X)$ を導入している (このとき基本群 $\pi_1(X)$ は境界の有無によって不足数 1 または 0 の表示をもつ). とくに結び目 K の外部 $X = E(K)$ の場合には, 補題 7.2.1 の表示に対して

$$A^\rho(X) = \frac{\Delta_K(t, \rho)}{\det \Phi(h-1)} = \Delta_{K, \rho}(t)$$

が成り立つ ([48] 命題 3.3 参照). 以上のことから, これらのねじれ Alexander 不変量の種々の定義は, 和田による代数的な定式化で統一的に扱えることがわかる.

以下, 定理 7.2.4 の証明の概略を紹介する.

$S^3 - N(S)$ の基本群の新しい生成系として $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2g}$ をとり, この生成系のもとでのスパイン W が誘導する語の表示を $\{y'_i, z'_i, i = 1, 2, \dots, 2g\}$ とする. F'_{2g} を $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2g}$ で生成される自由群とする.

補題 7.2.8. 各 i ($i = 1, 2, \dots, 2g$) に対して, $\phi(y'_i) = y_i, \phi(z'_i) = z_i$ をみたす同型写像 $\phi: F'_{2g} \rightarrow F_{2g}$ が存在する.

証明 生成系の変換 $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_{2g}\} \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_{2g}\}$ が同型写像 ϕ を与える. \square

生成系 $\{x_1, \dots, x_{2g}\}$ を使って $\{y'_i, z'_i, i = 1, 2, \dots, 2g\}$ を誘導するスパイン W' をとる. 変形レトラクト $S \rightarrow W$ は写像 $W' \rightarrow W$ を与えるが, この写像は, 対応する基本群の間の同型を与える. W' と W は同じ基点 $*$ をもち, 写像 $W' \rightarrow W$ はこの基点を保つとする. この写像から導かれる同型写像 $\phi : \pi_1(W', *) \rightarrow \pi_1(W, *)$ は自由群 $\pi_1(W, *)$ の生成系の変換に対応する. また, ϕ は同型写像 $\phi : \langle y'_1, \dots, y'_{2g} \rangle \rightarrow \langle y_1, \dots, y_{2g} \rangle$ および $\phi : \langle z'_1, \dots, z'_{2g} \rangle \rightarrow \langle z_1, \dots, z_{2g} \rangle$ とみなせる. この構成からつぎが得られる.

補題 7.2.9. 以下の2つの図式は可換である:

$$\begin{array}{ccc} \langle y'_1, \dots, y'_{2g} \rangle & \longrightarrow & \langle x_1, \dots, x_{2g} \rangle & \langle z'_1, \dots, z'_{2g} \rangle & \longrightarrow & \langle x_1, \dots, x_{2g} \rangle \\ \phi \downarrow & & \parallel & \phi \downarrow & & \parallel \\ \langle y_1, \dots, y_{2g} \rangle & \longrightarrow & \langle x_1, \dots, x_{2g} \rangle & \langle z_1, \dots, z_{2g} \rangle & \longrightarrow & \langle x_1, \dots, x_{2g} \rangle \end{array}$$

ここで水平方向の矢印はスパイン W およびスパイン W' が誘導する語によって得られる準同型写像である.

つぎに, 正則 Seifert 曲面 S に正則 1-ハンドルを接着して新しい正則 Seifert 曲面 \bar{S} が得られるとき, 双対語がどう変化するかをみることにしよう.

(S, W) の双対語を $\{y_i, z_i, i = 1, 2, \dots, 2g\}$ とし, S に接着する正則 1-ハンドルを図 7.2 のように描く. 得られる正則 Seifert 曲面を \bar{S} とし, W に e_{2g+1}, e_{2g+2} を加えて得られる \bar{S} のスパインを \bar{W} と書くことにする. (\bar{S}, \bar{W}) の双対語を $\{\bar{y}_i, \bar{z}_i, i = 1, 2, \dots, 2g\}$ とする. 必要ならば, e_{2g+1} に対応する帯に何回か full twists を施すことで, e_{2g+1}^+ と e_{2g+1}^- は e_{2g+1} がはる円板と交わらないようにしておく.

以上の構成からつぎを得る.

補題 7.2.10. $i = 1, 2, \dots, 2g$ に対して, \bar{y}_i, \bar{z}_i は $x_1, x_2, \dots, x_{2g+1}$ の語で書け, $x_{2g+1} = 1$ としたとき \bar{y}_i, \bar{z}_i は y_i, z_i となる. さらに, $\bar{y}_{2g+1} = vx_{2g+2}, \bar{y}_{2g+2} = 1, \bar{z}_{2g+1} = w, \bar{z}_{2g+2} = x_{2g+1}$ を得る. ここで, v と w は x_1, x_2, \dots, x_{2g} の語である.

さて, 定義 7.2.3 は任意の自由 Seifert 曲面に拡張できることを注意しておく. すなわち, S を結び目 K の自由 Seifert 曲面とし, S のスパインを W とする. $\pi_1(S^3 - N(S))$ の生成系を $\{x_1, x_2, \dots, x_{2g}\}$ とし, スパイン W が誘導する語を $\{y_i, z_i, i = 1, 2, \dots, 2g\}$ と書くとき, このときも, 表現行列

$$t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho - \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho$$

を考えることができる.

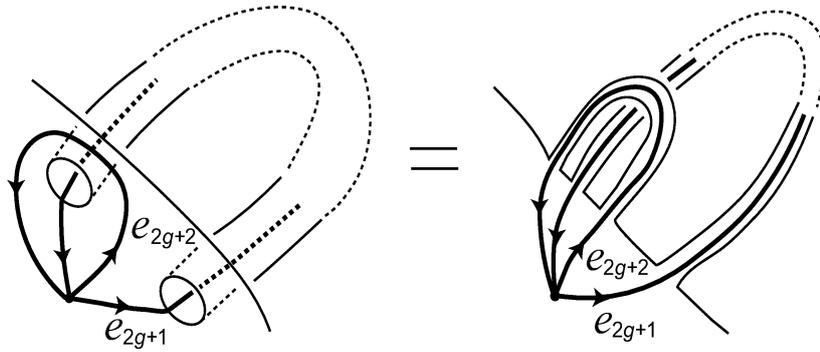


図 7.2

定理 7.2.4 の証明において, まず $\langle x_1, x_2, \dots, x_{2g} \rangle$ における変換を考察しよう. 新しい生成系を $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_{2g}\}$ とすると,

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x'_j} \right)^\rho = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right)^\rho$$

および

$$\left(\frac{\partial z_i}{\partial x'_j} \right)^\rho = \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right)^\rho$$

を得る. したがって,

$$\begin{aligned} & \det \left(t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x'_j} \right)^\rho - \left(\frac{\partial z_i}{\partial x'_j} \right)^\rho \right) \\ &= \det \left(t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right)^\rho - \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right)^\rho \right) \\ &= \det \left\{ \left(t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho - \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho \right) \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right)^\rho \right\} \\ &= \det \left(t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho - \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho \right) \cdot \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right)^\rho. \end{aligned}$$

$\left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right)^\rho$ は正則行列なので $\det \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right)^\rho \in \mathbb{C} - \{0\}$ となり, 生成系 $\langle x_1, x_2, \dots, x_{2g} \rangle$ のとり方によらないことがわかる.

つぎにスパイン W を W' にとりかえたときの $\Delta_K(t, \rho)$ の振る舞いを調べよう. 補題 7.2.9 の記号を使って,

$$\left(\frac{\partial y'_i}{\partial x_j} \right)^\rho = \left(\frac{\partial y'_i}{\partial y_j} \right)^\rho \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho, \quad \left(\frac{\partial z'_i}{\partial x_j} \right)^\rho = \left(\frac{\partial z'_i}{\partial z_j} \right)^\rho \cdot \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho$$

を得る. 一方, 変換 $\{y_1, y_2, \dots, y_{2g}\} \rightarrow \{y'_1, y'_2, \dots, y'_{2g}\}$ は変換 $\{z_1, z_2, \dots, z_{2g}\} \rightarrow \{z'_1, z'_2, \dots, z'_{2g}\}$ と同じであり,

$$\rho(h) \cdot \rho(y_i) \cdot \rho(h^{-1}) = \rho(z_i), \quad i = 1, 2, \dots, 2g,$$

なので,

$$\rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y'_i}{\partial y_j} \right)^\rho \cdot \rho(h^{-1})^{\oplus 2g} = \left(\frac{\partial z'_i}{\partial z_j} \right)^\rho$$

を得る. したがって,

$$\begin{aligned} & \det \left(t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y'_i}{\partial x_j} \right)^\rho - \left(\frac{\partial z'_i}{\partial x_j} \right)^\rho \right) \\ &= \det \left(t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y'_i}{\partial y_j} \right)^\rho \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho - \left(\frac{\partial z'_i}{\partial z_j} \right)^\rho \cdot \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho \right) \\ &= \det \left(t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y'_i}{\partial y_j} \right)^\rho \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho - \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y'_i}{\partial y_j} \right)^\rho \cdot \rho(h^{-1})^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho \right) \\ &= \det \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \det \left(\frac{\partial y'_i}{\partial y_j} \right)^\rho \cdot \det \left(t \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho - \rho(h^{-1})^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho \right) \\ &= \det \left(\frac{\partial y'_i}{\partial y_j} \right)^\rho \cdot \det \left(t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho - \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho \right) \end{aligned}$$

となり, スパインのとり方にもよらないことがわかる. この時点で $\Delta_K(t, \rho)$ は自由 Seifert 曲面のとり方にのみ依存することになるが, 以下, 正則 Seifert 曲面 S に話を制限し, 正則 1-ハンドル拡大のもとでの $\Delta_K(t, \rho)$ の振る舞いを調べることにする. \bar{S} を S から正則 1-ハンドル拡大で得られる正則 Seifert 曲面とし, 補題 7.2.10 の記号を使うことにする.

まず, $\bar{z}_{2g+2} = x_{2g+1}$ なので, $\left(\frac{\partial \bar{z}_{2g+2}}{\partial x_{2g+1}} \right)^\rho$ は単位行列 I_n になる. また, $\bar{y}_{2g+1} = vx_{2g+2}$ より,

$$\left(\frac{\partial \bar{y}_{2g+1}}{\partial x_{2g+2}} \right)^\rho = \rho(v).$$

したがって

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x_j} \right)^\rho &= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x_j} \right)_{2g \times 2g}^\rho & * & O \\ * & O & \rho(v) \\ O & O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{2g \times 2g}^\rho & * & O \\ * & O & \rho(v) \\ O & O & O \end{pmatrix}, \\ \left(\frac{\partial \bar{z}_i}{\partial x_j} \right)^\rho &= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \bar{z}_i}{\partial x_j} \right)_{2g \times 2g}^\rho & * & O \\ * & O & O \\ O & I_n & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)_{2g \times 2g}^\rho & * & O \\ * & O & O \\ O & I_n & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
& \det \left(t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g+2} \cdot \left(\frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x_j} \right)^\rho - \left(\frac{\partial \bar{z}_i}{\partial x_j} \right)^\rho \right) \\
&= \det \left\{ t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g+2} \cdot \left(\begin{array}{ccc} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{2g \times 2g}^\rho & * & O \\ * & O & \rho(v) \\ O & O & O \end{array} \right) - \left(\begin{array}{ccc} \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)_{2g \times 2g}^\rho & * & O \\ * & O & O \\ O & I_n & O \end{array} \right) \right\} \\
&= \det \left(\begin{array}{ccc} t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho - \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho & * & O \\ * & O & t \cdot \rho(h) \cdot \rho(v) \\ O & -I_n & O \end{array} \right) \\
&= (-1)^{2n} \cdot \det \left(\begin{array}{ccc} t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho - \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho & & O \\ * & & t \cdot \rho(h) \cdot \rho(v) \end{array} \right) \\
&= \det \left(t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho - \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho \right) \cdot \det (t \cdot \rho(h) \cdot \rho(v)) \\
&= t^n \cdot \det \left(t \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho - \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho \right) \cdot \det \rho(h) \cdot \det \rho(v).
\end{aligned}$$

以上の計算から, 正則 1-ハンドル拡大のもとで $\Delta_K(t, \rho)$ が不変であることがわかる. 定理 1.2.8 より, 定理 7.2.4 の証明が終わる.

[76] において, つぎの関数も結び目の不変量になることが示されている.

定理 7.2.11. $\rho: G(K) \rightarrow SL(n; \mathbb{C})$ を結び目群の表現とする. このとき, 次式で定義される K のねじれポテンシャル関数は結び目不変量になる:

$$\Omega_K(s, \rho) = \det \left(s \cdot \rho(h)^{\oplus 2g} \cdot \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^\rho - s^{-1} \cdot \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right)^\rho \right).$$

以上の構成から, ねじれ Alexander 不変量による正則 Seifert 曲面の種数の評価が示唆されるが, つぎの問題はまだ未解決である.

* **問題 7.2.12.** ねじれ Alexander 不変量を用いて結び目の種数に関する評価式を与えよ (定理 2.3.7 参照). 本書執筆中に [19], [20] も発表されたので参照のこと.

注意 7.2.13. 多変数 Alexander 多項式を使った絡み目種数の評価式は [2] で与えられている.

第 8 章

ねじれ Alexander 不変量の性質

この章ではねじれ Alexander 不変量の基本的性質について述べる．和田のねじれ Alexander 不変量は有理関数として定義され，一般に多項式になるとは限らないが，比較的弱い条件のもとで Laurent 多項式になることをみる．また，Alexander 多項式と Reidemeister トーションに関する Milnor の結果の一般化を記述する．ねじれ Alexander 不変量が零となる例および Torres 条件の拡張についても述べる．

8.1 ねじれ Alexander 不変量の可除性

7.1 節で導入した有限表示群に対するねじれ Alexander 不変量は，一般に有理関数として定まり常に Laurent 多項式になるとは限らない．実際，可換化が \mathbb{Z} となる有限表示群 G の Alexander 多項式 $\Delta_G(t)$ と 1 次元自明表現 $\mathbf{1}$ に付随したねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{G,\mathbf{1}}(t)$ の間には

$$\Delta_{G,\mathbf{1}}(t) = \frac{\Delta_G(t)}{t-1}$$

という関係が成り立ち，その可除性は明らかではない．本節では結び目群および絡み目群の場合に，ねじれ Alexander 不変量が Laurent 多項式で表されるための十分条件について考察する．

まず，つぎの条件 (C) をみたす結び目群 $G(K)$ の表現

$$\rho : G(K) \rightarrow GL(n; R)$$

を考える (ここで R は一意分解整域とする):

(C) $G(K)$ の交換子群 $[G(K), G(K)]$ の元 γ で $\rho(\gamma)$ が固有値 1 をもたないものが存在する．

このとき和田によってつぎが成り立つことが示されている ([119] を参照のこと).

命題 8.1.1. 結び目群 $G(K)$ の表現

$$\rho: G(K) \rightarrow GL(n; R)$$

が条件 (C) をみたすとき, ρ に付随したねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{K,\rho}(t)$ は R の商体に係数をもつ Laurent 多項式になる.

証明 結び目 K の Wirtinger 表示を

$$\langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_{s-1} \rangle$$

とし, M でその Alexander 行列を表す. また, $\phi(w^{-1}) = \gamma$ をみたす自由群の元 $w \in F_s$ を 1 つ選んでおく. Tietze 変換 (II) を施して得られる表示

$$\langle x_1, \dots, x_s, x \mid r_1, \dots, r_{s-1}, wx \rangle$$

に対する Alexander 行列を M' で表す. 容易にわかるように, M' はつぎの形をしている:

$$M' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ * & \Phi(w) \end{pmatrix}.$$

さて, $G(K)$ の交換子群の元 γ に対して

$$\begin{aligned} \Phi(w^{-1}) &= (\tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha}) \circ \tilde{\phi}(w^{-1}) \\ &= (\rho \otimes \alpha)(\gamma) \\ &= \rho(\gamma) \in SL(n; R) \end{aligned}$$

であり, 仮定から 1 は $\rho(\gamma)$ の固有値ではないので,

$$\det \Phi(x-1) = \det \Phi(w^{-1}-1) = \det \tilde{\rho}(\gamma-1)$$

は係数環 R の元であるが零元にはならないことがわかる. このときねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \frac{\det M'_{s+1}}{\det \tilde{\rho}(\gamma-1)}$$

と書かれるので, R の商体に係数をもつ Laurent 多項式になる. □

つぎに体 \mathbb{F} を係数とする結び目群 $G(K)$ の $SL(2; \mathbb{F})$ 表現について考える. 線形表現 $\rho: G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{F})$ は, 任意の 2 元 $\gamma, \gamma' \in G(K)$ に対して

$$\rho(\gamma)\rho(\gamma') = \rho(\gamma')\rho(\gamma)$$

が成り立つとき可換表現とよばれる。可換でない表現を非可換表現とよぶ。また表現空間の基底をうまく選ぶことにより、表現 ρ の像を一斉に上三角行列にとることができるとき、 ρ は可約表現であるという。可約でない表現を既約表現という。

さて、結び目群の $SL(2; \mathbb{F})$ 表現については、より一般につきのことが成り立つ。

命題 8.1.2. 結び目群 $G(K)$ の非可換 $SL(2; \mathbb{F})$ 表現

$$\rho: G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{F})$$

に対して、ねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{K, \rho}(t)$ は Laurent 多項式になる。

証明 まずはじめに、 ρ が既約表現という仮定のもとで以下の場合わけをする：

- (i) $\rho|_{G'(K)}$ は非可換表現.
- (ii) $\rho|_{G'(K)}$ は可換表現.

ここで簡単のため、 $G(K)$ の交換子群 $[G(K), G(K)]$ を $G'(K)$ で表すことにする。

(i) $G'(K)$ の異なる 2 元 γ, γ' に対して $\rho(\gamma), \rho(\gamma')$ のどちらか一方が固有値 1 をもたなければ、先の命題 8.1.1 より $\Delta_{K, \rho}(t)$ は Laurent 多項式となるので、 $\rho(\gamma), \rho(\gamma')$ のいずれも固有値 1 をもつと仮定する。

さて、非可換性の仮定から γ, γ' は

$$\rho(\gamma)\rho(\gamma') \neq \rho(\gamma')\rho(\gamma)$$

をみたすとしてよい。このとき $SL(2; \mathbb{F})$ で共役をとることにより、これらの元の像を

$$\rho(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(\gamma') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix} \quad (s_1, s_2 \in \mathbb{F} - \{0\})$$

へうつすことができる。簡単な計算から行列

$$\rho(\gamma\gamma') = \rho(\gamma)\rho(\gamma') = \begin{pmatrix} 1 + s_1s_2 & s_1 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix}$$

は固有値 1 をもたないことがわかるので、再び先の命題 8.1.1 により、 $\Delta_{K, \rho}(t)$ は Laurent 多項式になる。

(ii) 任意の $\gamma \in G'(K)$ に対して $\rho(\gamma)$ が固有値 1 をもつと仮定する。 $\rho|_{G'(K)}$ は可換表現なので、 $G'(K)$ の像は上三角行列と仮定してよい。さらに交換子群 $G'(K)$ は $G(K)$ の正規部分群であることから、任意の $\xi \in G(K)$ に対して

$$\rho(\xi)\rho(\gamma)\rho(\xi)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。よって $\rho(\xi)$ もまた上三角行列となるが、これは表現 ρ の既約性に反する。

最後に表現 $\rho : G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{F})$ が非可換可約表現の場合を考える. この場合 $G(K)$ の Wirtinger 表示の生成元 x_1, \dots, x_s の像を以下のようにとることができる:

$$\rho(x_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1^{-1} \end{pmatrix}, \dots, \rho(x_u) = \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ 0 & a_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

ただし $a_i \in \mathbb{F} - \{0\}$, $b_i \in \mathbb{F}$ である.

異なる 2 つの生成元 x_i, x_j ($i \neq j$) に対して $x_i x_j^{-1}$ は交換子群 $G'(K)$ の元なので, $a_i = a_j$ が任意の i, j に対して成り立つことがわかる. そこで簡単のため $a = a_j$ とおく.

さて, いま我々の扱う行列はすべて上三角行列であり, 行列式の計算は非対角成分 b_1, \dots, b_u によらないことは容易にわかる. よって以下の計算はすべての行列が対角行列であるとしても同じである. このとき $\Delta_{K, \rho}(t)$ の分子は, Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ に $t \mapsto at$ および $t \mapsto a^{-1}t$ を代入したもののたちの積になっていることがわかる:

$$\det M_j = \Delta_K(at) \Delta_K(a^{-1}t).$$

一方, $\Delta_{K, \rho}(t)$ の分母は $(t-a)(t-a^{-1})$ である. あとは $t = a$, a^{-1} が分子の零点であることがいえればよい. しかしながら, これは ρ が $G(K)$ の表現となる必要十分条件が

(i) $t = a^2$ が $\Delta_K(t)$ の零点,

(ii) (b_1, \dots, b_u) が Alexander 行列の零固有値に対する固有ベクトル

の 2 条件で与えられることから従う (4.4 節参照). 実際, $t = a$ が $\Delta_K(at)$ の零点であり, $t = a^{-1}$ が $\Delta_K(a^{-1}t)$ の零点であることがわかる. \square

この命題で非可換性の仮定は必要である.

例 8.1.3. K を三葉結び目とする:

$$G(K) = \langle x, y \mid r = xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1} \rangle.$$

可換表現の典型例として $G(K)$ の自明表現

$$\rho_0 : G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{F})$$

を考える. 簡単な計算から Alexander 行列は

$$\left(\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right), \Phi \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) \right) = \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 & 0 & -t^2 + t - 1 & 0 \\ 0 & t^2 - t + 1 & 0 & -t^2 + t - 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる. よって $G(K)$ の ρ_0 に付随したねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{K, \rho_0}(t) = \frac{(t^2 - t + 1)^2}{(t - 1)^2}$$

となり, 多項式でないことがわかる.

結び目群の場合と異なり，2成分以上の絡み目については任意の表現についてねじれ Alexander 不変量は Laurent 多項式で表される ([119] を参照のこと)．

命題 8.1.4. L が 2 成分以上の絡み目ならば，任意の表現

$$\rho : G(L) \rightarrow GL(n; R)$$

に対して，ねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{L,\rho}(t_1, \dots, t_l)$ は R の商体に係数をもつ Laurent 多項式になる．

証明 絡み目 L に対する Wirtinger 表示を

$$\langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_{s-1} \rangle$$

とし， M でその Alexander 行列を表す．生成元 x_j と x_k が $H_1(E(L); \mathbb{Z})$ において L の異なる成分のメリディアン t_a, t_b に対応していると仮定する．

補題 7.1.3 により，多項式 $\det M_j \det \Phi(x_k - 1)$ は多項式 $\det \Phi(x_j - 1)$ でわれることがわかる．ここで $\det \Phi(x_j - 1)$ は t_a に関する Laurent 多項式であり， $\det \Phi(x_k - 1)$ は t_b に関する Laurent 多項式なので，これらの最大公約多項式 δ は係数環 R の元となる．よって $\det \Phi(x_j - 1) = \delta f(t_a)$ と表すことにすると， $\det M_j$ は $f(t_a)$ でわり切れることになる．ゆえに

$$\Delta_{L,\rho}(t_1, \dots, t_l) = \frac{\det M_j}{\det \Phi(x_j - 1)}$$

は R の商体に係数をもつ Laurent 多項式となる． □

注意 8.1.5. 命題 8.1.1, 8.1.2 および 8.1.4 は，結び目群や絡み目群でない場合にも比較的弱い仮定のもとで一般化される．詳しくは [61] を参照のこと．

8.2 Reidemeister トーションとしてのねじれ Alexander 不変量

この節では Alexander 多項式が Reidemeister トーションとして解釈されたことと同様に，ねじれ Alexander 不変量が非輪状表現の Reidemeister トーションとして解釈できることを述べる．

S^3 内の結び目 K に対して，その結び目群 $G(K) = \pi_1(E(K))$ の Wirtinger 表示

$$G(K) = \langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_{s-1} \rangle$$

を固定する．これまでと同様に $G(K)$ の可換化は

$$\alpha : G(K) \rightarrow H_1(E(K); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} = \langle t \rangle,$$

$\alpha(x_1) = \cdots = \alpha(x_s) = t$ である.

このとき, まず結び目群の特殊線形表現 $\rho: G(K) \rightarrow SL(n; \mathbb{F})$ およびテンソル表現

$$\rho \otimes \alpha: G(K) \rightarrow GL(n; \mathbb{F}[t, t^{-1}]) \subset GL(n; \mathbb{F}(t))$$

を考えよう. ここで $\mathbb{F}(t)$ は体 \mathbb{F} 上の 1 変数有理関数体を表す. このとき以下の結果 [59] が成り立つ.

定理 8.2.1. テンソル表現 $\rho \otimes \alpha$ が非輪状表現ならば,

$$\tau_{\rho \otimes \alpha}(E(K)) = \Delta_{K, \rho}(t)$$

が n が奇数のとき $\pm t^{nk}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 倍, n が偶数のとき t^{nk} 倍を除いて成立する.

証明 第4章と同様に結び目群の Wirtinger 表示

$$G(K) = \langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_{s-1} \rangle$$

に対応した 2 次元 CW 複体 $X(K)$ を考える. すなわち, $X(K)$ は 1 つの 0-セル, s 個の 1-セル, $s-1$ 個の 2-セルをもち, 2-セルはそれぞれ $G(K)$ の関係子 r_1, \dots, r_{s-1} に対応する語に応じて 1-セルに接着されている.

このとき $X(K)$ と $E(K)$ は単純ホモトピー同値であり, Reidemeister トーションは単純ホモトピー不変量なので, $E(K)$ のトーション $\tau_{\rho \otimes \alpha}(E(K))$ は $X(K)$ のトーション $\tau_{\rho \otimes \alpha}(X(K))$ に等しい. したがって

$$\tau_{\rho \otimes \alpha}(X(K)) = \Delta_{K, \rho}(t)$$

を証明すればよい. ここで

$$\tau_{\rho \otimes \alpha}(X(K)) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}$$

であることを思い出そう (命題 6.3.1, 定理 6.3.4). ただし,

$$(\Delta_1) = \text{order} (H_1(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}^n)),$$

$$(\Delta_0) = \text{order} (H_0(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}^n)).$$

表現 ρ が 1 次元自明表現の場合は Milnor の結果 (定理 5.3.1) に他ならない. 表現 ρ が一般の場合はつぎの補題を用いる (証明は [56] を参照). まず, 以下のような代数的な設定を考える. V_1, V_2, V_3, V_4 を $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ 上有限生成な自由加群で, V_2 と V_4 の階数は等しいとする. さらに準同型 $a: V_1 \rightarrow V_2, b: V_1 \rightarrow V_3, c: V_2 \rightarrow V_4, d: V_3 \rightarrow V_4$ を考える. これらを組み合わせて得られる系列

$$C_*: 0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{a \oplus b} V_2 \oplus V_3 \xrightarrow{c+d} V_4 \rightarrow 0$$

が複体, すなわち, $(c+d) \cdot (a \oplus b) = 0$ をみたすとする. ここで d_b を $\text{order}(\text{coker}(b))$ の生成元, d_c を $\text{order}(\text{coker}(c))$ の生成元とする.

補題 8.2.2. もし c が単射ならば

$$\frac{d_b}{d_c} = \frac{\Delta_1(C_*)}{\Delta_0(C_*)}$$

が成立する.

この補題をねじれ Alexander 不変量の場合に以下のように適用する. いま簡単のため, 関係子を自由微分して得られる Alexander 行列から x_1 に対応した列をとり除くことにする. これに対応して,

$$V_1 = C_2(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}^n), \quad V_4 = C_0(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}^n)$$

とし,

$$V_2 \cong \mathbb{F}[t, t^{-1}], \quad V_3 \cong \mathbb{F}[t, t^{-1}]^{s-1} \subset C_1(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}^n)$$

を最初の 1 個の 1-セルで生成される加群とそれに続く $s-1$ 個の 1-セルで生成される加群とする. この分解に対応して, 境界作用素もつぎのように分解する:

$$\partial_2 : V_1 = C_2(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}^n) \rightarrow C_1(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}^n) = V_2 \oplus V_3;$$

$$\partial_1 : V_2 \oplus V_3 = C_1(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}^n) \rightarrow C_0(X(K); \mathbb{F}[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}^n) = V_4.$$

仮定から V_2 上境界作用素 ∂_1 は単射であるから, 補題 8.2.2 が適用できる. したがって,

$$\text{order}(\text{coker}(\partial_2 : V_1 \rightarrow V_3)) = (d_1), \quad \text{order}(\text{coker}(\partial_1 : V_2 \rightarrow V_4)) = (d_0)$$

とおくと

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}$$

が成り立つ. ここで左辺が $\Delta_{K, \rho}(t)$ に等しいことは比較的容易に確かめられるので,

$$\tau_{\rho \otimes \alpha}(X(K)) = \Delta_{K, \rho}(t)$$

が得られる. □

一般に非輪状鎖複体の Reidemeister トーションは, 位数イデアルの比として表示可能であり, その形で表されたものをホモロジートーションとよんでいた (命題 6.3.1 参照). よって, ねじれ Alexander 不変量は位数イデアルを用いて, ホモロジートーションとして表すことも可能である. 一般の有限 CW 複体 X の場合, 局所係数のホモロジー群が消えるとは限らないので, その場合には Reidemeister トーションは定義されない. しかしながら非輪状でない場合でも, H_1, H_0 の位数イデアルの比 Δ_1/Δ_0 は X の不変量として意味を

もち、ねじれ Alexander 不変量と一致することが、いまの議論とまったく同様にして証明される (詳細は [56] を参照).

さて、結び目 K の外部を $E(K)$ とし、表現 $\rho: G(K) \rightarrow SL(n; \mathbb{F})$ を考える. この表現 ρ が非輪状表現であると仮定しよう. このとき $E(K)$ の表現 ρ に対する Reidemeister トーション $\tau_\rho(E(K)) \in \mathbb{F}$ が定義される. そして、ねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{K,\rho}(t)$ の変数 t に 1 を代入した特殊値に関して、つぎが成り立つことがわかる.

命題 8.2.3. 符号の差を除いて $\Delta_{K,\rho}(1) = \tau_\rho(E(K)) \in \mathbb{F}$ が成立する.

結び目の Alexander 多項式の係数の対称性に関して、Reidemeister トーションの観点からの証明を定理 5.3.7 で述べた. 以下、ねじれ Alexander 不変量の係数に関する対称性について述べる.

表現 $\rho: G(K) \rightarrow SL(n; \mathbb{C})$ において、像 $\rho(G(K))$ が回転群 $SO(n)$ に入ると仮定する. $SO(n)$ は n 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^n の自然な内積に関する等長変換群であるから、内積によるベクトル空間とその双対空間の同一視のもとで、表現 ρ の **双対表現** (双対空間への表現) は ρ 自身と一致する. したがって Milnor による Alexander 多項式の場合 (定理 5.3.7) の証明と同様に、Reidemeister トーションの双対性を用いることでつぎの定理を示すことができる.

定理 8.2.4. 結び目群の表現 $\rho: G(K) \rightarrow SO(n)$ に対して、 $\pm t^k$ 倍を除いて

$$\Delta_{K,\rho}(t^{-1}) = \Delta_{K,\rho}(t)$$

が成立する.

証明は Alexander 多項式の場合とまったく同様であるのでここでは省略する. [59], [56] を参照のこと.

また $SL(2; \mathbb{R})$ の任意の元 A に対して、 $(A^T)^{-1}$ は A 自身と共役である. このことから $SL(2; \mathbb{R})$ 表現 $\rho: G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{R})$ に対しても、双対表現は自分自身と共役な表現となることがわかる. ゆえにこの場合にも、ねじれ Alexander 不変量の係数の対称性が成立する.

最後に結び目群の一般の線形表現に対して、双対性の成立しない例をとりあげる (例 7.1.9 参照).

例 8.2.5. K を三葉結び目 3_1 とする. $G(3_1)$ の表示として

$$\langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$$

をとる. $G(3_1)$ の表現 $\rho: G(3_1) \rightarrow GL(2; \mathbb{C})$ を

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} -z & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & -z \end{pmatrix}$$

により定義する. ここで z は 0 でない複素数とする. これは組み紐群 B_3 の Burau 表現 (10.1 節参照) において, パラメーター s を $s = z \in \mathbb{C} - \{0\}$ と特殊化したものであるから準同型写像になる. この表現 ρ に対してねじれ Alexander 不変量を計算すると,

$$\Delta_{3_1, \rho}(t) = 1 - zt^2$$

となる. この場合, 表現 ρ が $GL(2; \mathbb{C})$ への表現であるので, ねじれ Alexander 不変量は ct^k 倍 ($c \in \mathbb{C} - \{0\}, k \in \mathbb{Z}$) を除いて定まる. しかし, $z \neq \pm 1$ ならば,

$$\Delta_{3_1, \rho}(t^{-1}) = 1 - z/t^2 \neq \Delta_{3_1, \rho}(t)$$

となり, 対称性は成り立たないことがわかる.

8.3 ねじれ Alexander 不変量が零となる例について

この節では結び目のねじれ Alexander 不変量が零, すなわち, ねじれ Alexander 不変量の分子が零となる例について述べる. 結び目の Alexander 多項式は常に零ではなく, これは表現でねじることによって, はじめて現れる現象である.

これまで述べてきたように, ねじれ Alexander 不変量は表現によってねじられた局所系係数のホモロジー群の位数イデアルの比としても定義されるので, この位数イデアルが零イデアルかどうか, すなわち, ホモロジー群が自由因子をもつかどうかをみればよい (命題 6.1.3).

結び目群のねじれ Alexander 不変量の分母が常に零でないことは, 定義を与えるところでも述べたように容易に示される. さらに, 結び目とは限らない一般の場合にも, ねじれ Alexander 不変量の分母に関して以下が成立する.

X を連結な有限 CW 複体とする. ここでは, 体 \mathbb{F} 上の表現 $\rho: \pi_1(X) \rightarrow SL(n; \mathbb{F})$ と, 全射とは限らない準同型 $\alpha: \pi_1(X) \rightarrow T$ を考える. 記号の簡略化のため, n 次元ベクトル空間 \mathbb{F}^n を V , $V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ を $V[t, t^{-1}]$ で表す.

準同型 α の全射性を仮定していないので, 被覆空間 X_∞ は弧状連結とは限らない. 弧状連結でない場合, X_∞ の局所系は単純に $\pi_1(X_\infty)$ の表現でねじるという形では表されない. しかし, 各弧状連結成分の基本群から X の基本群への射影と表現 ρ の合成を用いることにより, X_∞ 上に V を係数とする局所系のホモロジー群が定義される. これを簡単のため, $H_*(X_\infty; V_\rho)$ と表すことにする.

命題 8.3.1. (i) $\alpha: \pi_1(X) \rightarrow T$ が非自明な準同型ならば, $H_0(X; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha})$ は $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ -加群として自由因子をもたず, ねじれ元のみからなる.

(ii) $\alpha : \pi_1(X) \rightarrow T$ が自明な準同型ならば,

$$H_0(X; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}) \cong H_0(X; V_\rho) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}[t, t^{-1}]$$

であり, $H_0(X; V_\rho) \neq 0$ ならば $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ -加群として自由加群になる.

証明 まず準同型 $\alpha : \pi_1(X) \rightarrow T$ が非自明の場合を考えよう. 局所係数のホモロジー群の定義から

$$H_0(X; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}) \cong H_0(X_\infty; V_\rho)$$

が成立することがわかる. このとき準同型 α の余核

$$\text{coker}(\alpha) = T/\text{Im}(\alpha)$$

は有限群であるから, 無限巡回被覆空間 X_∞ は有限個の弧状連結成分 X_1, \dots, X_k の和集合となる. よって, ホモロジー群は

$$H_0(X_\infty; V_\rho) = \bigoplus_{i=1}^k H_0(X_i; V_\rho)$$

と直和に分解される. 定義から各 $H_0(X_i; V_\rho)$ は有限次元ベクトル空間 V の商空間であり, \mathbb{F} 上の加群としてみたとき有限生成である. したがって $H_0(X_\infty; V_\rho)$ も \mathbb{F} 上有限生成となる. ゆえに $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ -加群として, $H_0(X_\infty; V_\rho)$ は $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ を因子としてもたない.

つぎに準同型 α が自明の場合には, α に対応した無限巡回被覆空間は, X の可算無限個のコピーからなる和集合として表される. このとき被覆変換群の作用は, 整数 \mathbb{Z} による平行移動に対応している. よって

$$H_0(X; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}) = H_0(X; V_\rho) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}[t, t^{-1}]$$

となることがわかる. ここで右辺は, \mathbb{F} 上のベクトル空間に $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ をテンソルした形になっているので, $H_0(X; V_\rho) \neq 0$ ならば $\mathbb{F}[t, t^{-1}]$ 上自由となる. \square

以上のことから, 準同型 $\alpha : \pi_1(X) \rightarrow T$ が自明かどうか, 0次元ホモロジー群 $H_0(X; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha})$ が自由因子をもつかどうか, きちんに対応していることがわかる.

つづいて, 1次元ホモロジー群 $H_1(X; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha})$ の位数イデアル, すなわち, ねじれ Alexander 不変量の分子について考察する. ここでは結び目の外部 $X = E(K)$ に対して, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ の場合に, $H_1(X; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha})$ が自由因子 $\mathbb{R}[t, t^{-1}]$ をもつ表現 $\rho : G(K) \rightarrow SO(3) \subset SL(3; \mathbb{R})$ の存在について述べる.

結び目 $K \subset S^3$ を winding number 0 のサテライト結び目とする. つまり, S^3 内の結び目 K_1 とソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ 内の結び目 K_2 をとり, K_1 の外部 $X_1 = E(K_1)$ に, ソリッドトーラスを境界の T^2 であり合わせて K_2 を S^3 内の結び目と考えたものが K である. こ

の構成から, サテライト結び目 K の外部 $X = E(K)$ において, $T^2 = \partial X_1 = \partial(S^1 \times D^2)$ は非圧縮トーラスであり, $X_2 = S^1 \times D^2 - N(K_2)$ とおくと $X = X_1 \cup_{T^2} X_2$ と表される.

ここで winding number が 0 であるという仮定から, 全射準同型 $\alpha : G(K) \rightarrow T$ は $\pi_1(X_1)$ および $\pi_1(T^2)$ に制限すると自明な写像になる. ここで表現 $\rho : G(K) \rightarrow SO(3)$ をつぎの 2 つの条件をみたすようにとる.

- (i) ρ を $\pi_1(X_1)$ に制限したものは可換表現ではない.
- (ii) ρ は $\pi_1(T^2)$ を $SO(3)$ の極大トーラス $SO(2)$ へうつす.

このような表現の例は三葉結び目の 0-twisted Whitehead double をはじめ, Whitehead double の中に多く存在することが Klassen [66] の仕事からわかる.

$SO(3)$ の $V = \mathbb{R}^3$ への標準的な作用に対応した V -係数ホモロジーを考える. 表現 ρ を $\pi_1(T^2)$ 上で考えると, その像が極大トーラス $SO(2)$ に入ることから, これは可換表現となる. $SO(3)$ の元の V への作用は, 必ず原点を通る直線に関する回転で表せることに注意しよう. 表現 ρ を $\pi_1(T^2) \rightarrow SO(2) \subset SO(3)$ として考えると, この作用は V 内のある 1 つの共通の直線に関する回転であるから, その回転軸の方向が 1 次元不変部分空間 (自明な表現なら 3 次元) となる. ゆえに $H_0(T^2; V_\rho)$ は自明ではなく, 不変部分空間の次元に対応して \mathbb{R} 上 1 次元または 3 次元となる. 一方で $\rho : \pi_1(X_1) \rightarrow SO(3)$ は非可換表現であるから, $H_0(X_1; V_\rho)$ は零となる.

ここで α は $\pi_1(T^2)$ および $\pi_1(X_1)$ 上自明であるから, 先の命題 8.3.1 により

- $H_0(T^2; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha})$ は自由加群として $\mathbb{R}[t, t^{-1}]$ を含み,
- $H_0(X_1; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}) = 0$ (とくにねじれ元のみ) となる.

また, α を基本群 $\pi_1(X_2)$ に制限したものは非自明であるから, 再び命題 8.3.1 から, $H_0(X_2; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha})$ は $\mathbb{R}[t, t^{-1}]$ 上ねじれ元のみからなることがわかる.

さて, トーラス分解 $X = X_1 \cup X_2$ に対して, $V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}$ -係数のホモロジー群に関する Mayer-Vietoris 系列

$$\cdots \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_0(T^2) \rightarrow H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \rightarrow \cdots$$

を考えよう.

これまでみてきたように $H_0(X_1; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha})$, $H_0(X_2; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha})$ はともにねじれ元のみからなるので, この完全系列において $H_1(X; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha})$ の $H_0(T^2; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha})$ での像は, 階数が 3 または 1 となることがわかる. ゆえに $H_1(X; V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha})$ は $\mathbb{R}[t, t^{-1}]$ -加群として自由因子をもち, 位数イデアルは零となる.

この 1 次元ホモロジー群の位数イデアルが零イデアルになるという現象は, 古典的な Alexander 多項式の場合と同様に, 最初に与えられた表現の (無限小) 変形が存在するとい

うことに対応している. ここまで述べてきたことをこの観点から見直してみよう (群の表現とその変形については [70] や [123] を参考文献としてあげておく).

Lie 群 $SU(2)$ の Lie 代数 $su(2)$ 上への随伴表現

$$ad : SU(2) \rightarrow \text{Aut}(su(2))$$

を考える. \mathbb{R} 上のベクトル空間として Lie 代数 $su(2)$ は \mathbb{R}^3 と同型である. さらに $su(2)$ 上の Killing 形式による内積を考えると, この随伴表現は

$$ad : SU(2) \rightarrow SO(3)$$

と同一視することができる.

ここで表現 $\rho : G(K) \rightarrow SO(3)$ が,

$$\tilde{\rho} : G(K) \rightarrow SU(2)$$

と $SU(2)$ の随伴表現

$$ad : SU(2) \rightarrow SO(3)$$

との合成 $\rho = ad \circ \tilde{\rho}$ になっている場合を考えよう. このとき結び目群 $G(K)$ の 1 次元ホモロジー群

$$H_1(G(K); V[t, t^{-1}]_{\rho \otimes \alpha}) \cong H_1(X_\infty; V_\rho)$$

が自由因子をもつということは, このホモロジー群が \mathbb{R} 上のベクトル空間として無限次元になるということである. ホモロジー群が無限次元になるという事実をコホモロジー群の場合で考えると, つぎのことに対応していることがわかる.

無限巡回被覆空間 X_∞ の基本群 $\pi_1(X_\infty)$ は $G(K)$ の交換子群 $G'(K) = [G(K), G(K)]$ と同型であり, 1 次元コホモロジー群に関して同型

$$H^1(X_\infty; V_\rho) \cong H^1(G'(K); V_\rho)$$

が成り立つ.

このコホモロジー群は表現の無限小変形の空間に対応しているが, それはつぎのような空間の代数的な接空間 (**Zariski 接空間**) として記述される. 表現 $\rho = ad \circ \tilde{\rho}$ を X_∞ 上に制限して $\pi_1(X_\infty) = G'(K) \rightarrow SO(3)$ とみなす. $G'(K)$ の $SU(2)$ 表現 $\tilde{\rho}$ をすべて動かして, その共役類全体がなす空間を考える. この空間は基本群の表示の関係子から定まる代数方程式で定義され, 代数多様体の構造が入る. $SU(2)$ 表現 $\tilde{\rho}$ の共役類におけるこの代数多様体の接空間が 1 次元コホモロジー群 $H^1(X_\infty; V_\rho) \cong H^1(G'(K); V_\rho)$ と同一視されるのである. したがって上で述べたような状況では, この Zariski 接空間が \mathbb{R} 上無限次元であり, 最初に固定した表現 $\tilde{\rho} : G'(K) \rightarrow SU(2)$ において, この表現の無限小変形の空間が無限次元になっているということである.

先ほどのサテライト結び目 K の外部 $E(K)$ の場合, 非圧縮トーラスを無限巡回被覆空間にもち上げて, そこでベンディングとよばれる表現のはり合わせ操作を行うことにより, 実際に表現の変形空間が無限次元であることを確かめることができる (詳しくは [56] を参照のこと).

8.4 Torres 条件

この節では絡み目の多変数 Alexander 多項式に対する Torres 条件を 7.1 節で導入したねじれ Alexander 不変量の場合に記述する.

一般に, ねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{L,\rho}(t_1, \dots, t_l)$ は絡み目群 $G(L)$ だけでなく, その表現 ρ に依存して定まるので, 任意の表現

$$\rho: G(L) \rightarrow GL(n; R)$$

に対して定理 4.3.11 および定理 4.3.12 と同様の性質を期待することはできない. 実際, 定理 8.2.4 でみたように, 結び目の Alexander 多項式の対称性に関する定理 4.3.11 (i) は, $SO(n)$ 表現の場合にねじれ Alexander 不変量に対して一般化することができた. 結び目のねじれ Alexander 不変量に関する対称性は, $U(n)$ 表現に対しても成り立つことがわかる [56].

一方, 定理 4.3.11 (ii) に対応する性質は, 比較的性質のよい $SL(2; \mathbb{C})$ 表現に限っても, ねじれ Alexander 不変量に対しては成り立たない (命題 8.2.3 参照). このことは例 9.1.8 でみるように,

$$\Delta_{K,\rho}(1) = -2$$

となる表現 $\rho: G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ が存在することからわかる (この等式は t^{2k} ($k \in \mathbb{Z}$) 倍を除いて成り立つので $\Delta_{K,\rho}(1) = 1$ とはなり得ない).

さて, 絡み目に対する **Torres 条件** (定理 4.3.12) はねじれ Alexander 不変量の場合つぎのように記述される.

定理 8.4.1. $L = L_1 \cup \dots \cup L_l \subset S^3$ を l -成分の絡み目とする. このとき L のねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{L,\rho}(t_1, \dots, t_l)$ についてつぎが成り立つ.

(i) ユニタリー表現 $\rho: G(L) \rightarrow U(n)$ に対して

$$\Delta_{L,\rho}(t_1^{-1}, \dots, t_l^{-1}) \doteq \Delta_{L,\rho}(t_1, \dots, t_l).$$

(ii) 特殊線形表現 $\rho : G(L) \rightarrow SL(n; \mathbb{F})$ に対して

$$\begin{aligned} & \Delta_{L,\rho}(t_1, \dots, t_{l-1}, 1) \\ &= \{(t_1^{\lambda_1} \cdots t_{l-1}^{\lambda_{l-1}})^n + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_{k,\rho'} (t_1^{\lambda_1} \cdots t_{l-1}^{\lambda_{l-1}})^{n-k} + (-1)^n\} \\ & \quad \times \Delta_{L',\rho'}(t_1, \dots, t_{l-1}) \quad (\varepsilon_{k,\rho'} \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n-1). \end{aligned}$$

ただし、 L' は $(l-1)$ -成分の絡み目 $L' = L_1 \cup \cdots \cup L_{l-1}$ であり、 λ_k は絡み数 $\text{lk}(L_k, L_l)$ を表す。また表現 $\rho : G(L) \rightarrow SL(n; \mathbb{F})$ は自然な全射 $G(L) \rightarrow G(L')$ と表現 $\rho' : G(L') \rightarrow SL(n; \mathbb{F})$ の合成を表す。

証明 (i) 普遍可換被覆上でも Poincaré 双対性の拡張 (Blanchfield 双対性) が成り立つこと (例えば, [54] を参照) およびユニタリー表現の場合

$$\overline{\rho \otimes \alpha} = (\rho^T)^{-1} \otimes \alpha^{-1}$$

が成り立つことから、定理 8.2.4 と同様の議論によって主張は得られる。

(ii) 簡単のため、ここでは $n = 2$ の場合にのみ証明する。つまり等式

$$\Delta_{L,\rho}(t_1, \dots, t_{l-1}, 1) = \{(t_1^{\lambda_1} \cdots t_{l-1}^{\lambda_{l-1}})^2 + \varepsilon_{\rho'} t_1^{\lambda_1} \cdots t_{l-1}^{\lambda_{l-1}} + 1\} \Delta_{L',\rho'}(t_1, \dots, t_{l-1})$$

が成り立つことを示す。

絡み目群 $G(L)$ の Wirtinger 表示を 1 つ固定する:

$$G(L) = \langle x_{ij} \mid r_{km} \rangle.$$

ただし $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ij_i}$ ($1 \leq i \leq l$) は成分 L_i に対応した生成元を表し、関係子

$$r_{km} = x_{k'm'}^{\pm 1} x_{km} x_{k'm'}^{\mp 1} x_{k,m+1}^{-1}$$

は成分 $L_{k'}$ の L_k 上の交差に対応しているとする。

ここで表現 $\rho : G(L) \rightarrow SL(2; \mathbb{F})$ に付随した $G(L)$ の Alexander 行列を考えよう:

$$\begin{aligned} M(t_1, \dots, t_l) &= \left(\Phi \left(\frac{\partial r_{km}}{\partial x_{ij}} \right) \right) \\ &= \begin{pmatrix} \Phi \left(\frac{\partial r_{km}}{\partial x_{ij}} \right)_{k,i \neq l} & \Phi \left(\frac{\partial r_{km}}{\partial x_{lj}} \right)_{k \neq l, 1 \leq j \leq j_l} \\ \Phi \left(\frac{\partial r_{lm}}{\partial x_{ij}} \right)_{i \neq l, 1 \leq m \leq j_l} & \Phi \left(\frac{\partial r_{lm}}{\partial x_{lj}} \right)_{1 \leq j, m \leq j_l} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

このとき生成元 x_{ij} に対応した列を $M(t_1, \dots, t_l)$ からとり除くと

$$\det M_{ij}(t_1, \dots, t_l) = \det \Phi(x_{ij} - 1) \Delta_{L,\rho}(t_1, \dots, t_l)$$

が成り立つことがわかる. したがって行列 $M(t_1, \dots, t_l)$ において, $t_l = 1$ とおくと

$$\det M_{ij}(t_1, \dots, t_{l-1}, 1) = \det \Phi(x_{ij} - 1) \Delta_{L, \rho}(t_1, \dots, t_{l-1}, 1) \quad (i \neq l)$$

となることがわかる.

さて, 生成元 $\{x_{ij}\}$ はつぎの 2 種類の関係子に現れることに注意する:

$$(i) \ r_{lj} = x_{rs}^{\pm 1} x_{lj} x_{rs}^{\mp 1} x_{l,j+1}^{-1}, \quad (ii) \ r_{pq} = x_{lm}^{\pm 1} x_{pq} x_{lm}^{\mp 1} x_{p,q+1}^{-1}.$$

ただし関係子 (i) は成分 L_r の L_l 上の交差に対応し, 関係子 (ii) は成分 L_l の L_p 上の交差に対応している. そこでこれらのどの関係子が行列 $M(t_1, \dots, t_{l-1}, 1)$ に影響しているかをみてみよう.

まずはじめに, 関係子 r_{lj} に対しては以下のとおりである:

$$\begin{aligned} \Phi \left(\frac{\partial r_{lj}}{\partial x_{rs}} \right)_{t_l=1} &= O; \\ \Phi \left(\frac{\partial r_{lj}}{\partial x_{ij}} \right)_{t_l=1} &= \begin{cases} t_r^{\pm 1} \rho(x_{rs})^{\pm 1} & (l \neq r) \\ I & (l = r); \end{cases} \\ \Phi \left(\frac{\partial r_{lj}}{\partial x_{l,j+1}} \right)_{t_l=1} &= -I. \end{aligned}$$

ただし O と I はそれぞれ零行列と単位行列を表す. ここで, 生成元 $\{x_{ij}\}$ は自然な全射 $G(L) \rightarrow G(L')$ の核に含まれるので

$$\rho(x_{ij}) = I \quad (1 \leq j \leq j_i)$$

が成り立つことに注意する.

つぎに関係子 r_{pq} に対しては以下のとおりである:

$$\begin{aligned} \Phi \left(\frac{\partial r_{pq}}{\partial x_{lm}} \right)_{t_l=1} &= \pm(I - t_p \rho(x_{pq})); \\ \Phi \left(\frac{\partial r_{pq}}{\partial x_{pq}} \right)_{t_l=1} &= I; \\ \Phi \left(\frac{\partial r_{pq}}{\partial x_{p,q+1}} \right)_{t_l=1} &= -\rho(x_{pq}) \rho(x_{p,q+1})^{-1} \quad (p \neq l) \end{aligned}$$

($p = l$ の場合はすでに考察済みである). 以上のことから行列 $M(t_1, \dots, t_{l-1}, 1)$ はつぎの形をしていることがわかる:

$$M(t_1, \dots, t_{l-1}, 1) = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}.$$

とつぎの等式が得られる:

$$\begin{aligned} \det M_{ij}(t_1, \dots, t_{l-1}, 1) &= \det A_{ij} \det C \\ &= \{(t_1^{\lambda_1} \cdots t_{l-1}^{\lambda_{l-1}})^2 + \varepsilon_{\rho'} t_1^{\lambda_1} \cdots t_{l-1}^{\lambda_{l-1}} + 1\} \\ &\quad \times \det M'_{ij}(t_1, \dots, t_{l-1}). \end{aligned}$$

ここで行列 A_{ij} は A から生成元 x_{ij} に対応した列をとり除いて得られる正方行列を表している. 以上の議論から

$$\Delta_{L,\rho}(t_1, \dots, t_{l-1}, 1) = \{(t_1^{\lambda_1} \cdots t_{l-1}^{\lambda_{l-1}})^2 + \varepsilon_{\rho'} t_1^{\lambda_1} \cdots t_{l-1}^{\lambda_{l-1}} + 1\} \Delta_{L',\rho'}(t_1, \dots, t_{l-1})$$

が成り立つことが示された. □

注意 8.4.2. 表現 ρ が一般線形表現 $\rho: G(K) \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$ の場合には, $(t_1^{\lambda_1} \cdots t_{l-1}^{\lambda_{l-1}})^n$ の係数は 1 ではなく単元 $\varepsilon_{0,\rho'} \in \mathbb{F} - \{0\}$ となる.

注意 8.4.3. ねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{L,\rho}(t_1, \dots, t_{l-1}, 1)$ が $\Delta_{L',\rho'}(t_1, \dots, t_{l-1})$ でわり切れるという事実は, 全射準同型写像 $G(L) \rightarrow G(L')$ が存在することから, 9.2 節でみる定理 9.2.2 から従う.

さて, 絡み目群の表現 $\rho: G(L) \rightarrow SL(2; \mathbb{F})$ が可約表現の場合には, 定理 8.4.1 (ii) に現れる係数 $\varepsilon_{\rho'}$ を表現の固有値を用いて記述することができる (証明は [86] を参照のこと).

系 8.4.4. 定理 8.4.1 (ii) と同じ仮定のもと, 表現 $\rho': G(L') \rightarrow SL(2; \mathbb{F})$ が可約表現ならば

$$\varepsilon_{\rho'} = - \left(\prod_{i=1}^{l-1} \xi_i^{\lambda_i} + \prod_{i=1}^{l-1} \xi_i^{-\lambda_i} \right)$$

が成り立つ. ただし ξ_i は $G(L')$ の生成元 x_{ij} ($i \neq l$) の像の固有値の 1 つを表す.

最後にいくつか例をみてみよう.

例 8.4.5. 結び目 $L' = L_1$ の可約表現 $\rho': G(L') \rightarrow SL(2; \mathbb{F})$ を考えよう. このとき表現 ρ' に付随した L' のねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{L',\rho'}(t_1) = \frac{\Delta_{L'}(\xi t_1) \Delta_{L'}(\xi^{-1} t_1)}{(t_1 - \xi)(t_1 - \xi^{-1})}$$

で与えられる (命題 8.1.2 の証明参照). ゆえに等式

$$\begin{aligned} \Delta_{L,\rho}(1, 1) &= \frac{(1 - \xi^{\lambda_1})(1 - \xi^{-\lambda_1})}{(1 - \xi)(1 - \xi^{-1})} \Delta_{L'}(\xi) \Delta_{L'}(\xi^{-1}) \\ &= (1 + \xi + \cdots + \xi^{\lambda_1 - 1})(1 + \xi^{-1} + \cdots + \xi^{-(\lambda_1 - 1)}) \Delta_{L'}(\xi) \Delta_{L'}(\xi^{-1}) \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. とくに表現 ρ' が固有値 $\xi = 1$ をもつならば, $\Delta_{L,\rho}(1,1) = \lambda_1^2$ となることがわかる (系 4.3.13 参照).

例 8.4.6. 表現 $\rho' : G(L') \rightarrow SL(2; \mathbb{F})$ を自明表現とする. この場合 $\varepsilon_{\rho'} = -2$ が成り立つので

$$\Delta_{L,\rho}(t_1, \dots, t_{l-1}, 1) = (t_1^{\lambda_1} \cdots t_{l-1}^{\lambda_{l-1}} - 1)^2 \Delta_{L',\rho'}(t_1, \dots, t_{l-1})$$

となることがわかる. この式は定理 4.3.12 (ii) の両辺の 2 乗に対応している. とくに $l > 2$ に対して, $\Delta_{L,\rho}(1, \dots, 1) = 0$ が成り立つ.

* **問題 8.4.7.** 系 8.4.4 を (適当な仮定のもとで) 特殊線形表現

$$\rho' : G(L') \rightarrow SL(n; \mathbb{F})$$

に対して一般化せよ.

第9章

ねじれ Alexander 不変量の応用

この章ではねじれ Alexander 不変量の応用的側面について述べる. Neuwirth の結果によりファイバー結び目の Alexander 多項式はモニック多項式で表されるが, この性質はねじれ Alexander 不変量に対して自然に拡張される. これにより, Alexander 多項式では判別することのできない多くの結び目のファイバー性を判定することが可能になる. つぎに結び目群の間の全射準同型写像の存在と Alexander 多項式の可除性に関する古典的な結果をねじれ Alexander 不変量の枠組みに拡張する. この結果を用いることで 10 交点以下の素な結び目の間の半順序関係を具体的に決定することができる. また, 結び目の可逆性の判定への応用についても述べる. 最後に周期的結び目のねじれ Alexander 不変量に関する結果を解説する.

9.1 結び目のファイバー性と Alexander 多項式

3次元球面 S^3 内の結び目 K は, その外部 $E(K) = S^3 - N(K)$ に円周 S^1 上の曲面束の構造が入るときファイバー結び目とよばれた. これは Stallings の結果 [106] により, つぎの条件と同値である. つまり, 結び目群 $G(K)$ の可換化準同型写像

$$\alpha : G(K) \rightarrow H_1(E(K); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

に関する短完全系列

$$1 \longrightarrow \ker \alpha \longrightarrow G(K) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

に対して, $\ker \alpha = [G(K), G(K)]$ が有限生成自由群 F_{2g} と同型になるとき, K は種数 g のファイバー結び目となる.

例えば, 三葉結び目や 8 の字結び目はファイバー結び目の典型的な例である (定理 1.3.4 参照). しかしながら一般には, 与えられた結び目がファイバー結び目であるかどうかを判

定することは難しい問題である. この節では, $K \subset S^3$ がファイバー結び目となる必要条件を代数的に与える結果のいくつかを解説する.

K を種数 g のファイバー結び目とする. 外部 $E(K)$ のファイバー束の構造を用いることにより, $G(K)$ はつぎの群表示をもつことがわかる:

$$G(K) = \langle x_1, \dots, x_{2g}, h \mid hx_i h^{-1} = \varphi_*(x_i), 1 \leq i \leq 2g \rangle.$$

ここで x_1, \dots, x_{2g} はファイバーである種数 g のコンパクト曲面 Σ の基本群の生成系を表し, h は K のメリディアンに対応した S^1 方向の生成元を表している. また, φ_* はモノドロミー写像 $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ から誘導される曲面群 $\pi_1(\Sigma)$ の自己同型写像を表す. このとき可換化準同型写像 $\alpha: G(K) \rightarrow \mathbb{Z} \cong \langle t \rangle$ は

$$\alpha(x_1) = \dots = \alpha(x_{2g}) = 1, \quad \alpha(h) = t$$

で与えられる.

さて, 関係 $r_i: hx_i h^{-1} = \varphi_*(x_i)$ を生成元 x_j で自由微分すると

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_j} = h \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_*(x_i)}{\partial x_j}$$

となるので, Alexander 行列 A から $2g + 1$ 列目を取り除いて得られる $2g \times 2g$ 行列は

$$\begin{aligned} A_{2g+1} &= \left(\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)^{\alpha\phi} \right) \\ &= tI - \left(\left(\frac{\partial \varphi_*(x_i)}{\partial x_j} \right)^{\alpha\phi} \right) \in M_{2g}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \end{aligned}$$

で与えられる. このとき正方行列 A_{2g+1} は対角成分にのみ変数 t を含み, しかもそれらの係数はすべて 1 である. よって K の Alexander 多項式は

$$\begin{aligned} \Delta_K(t) &= \det A_{2g+1} \\ &= t^{2g} + \dots + 1 \end{aligned}$$

となる. 定数項が 1 であることは Alexander 多項式の対称性から従う (定理 2.3.6).

一般に, 多項式環 $\mathbb{Z}[t]$ の元 $a_m t^m + \dots + a_1 t + a_0$ は, その最高次係数が $a_m = 1$ をみたすとき **モニック多項式** とよばれる. 以上の議論から, つぎの Neuwirth による定理が得られたことになる ([93] 参照).

定理 9.1.1. 種数 g のファイバー結び目 K の Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ は $2g$ 次のモニック多項式で表される.

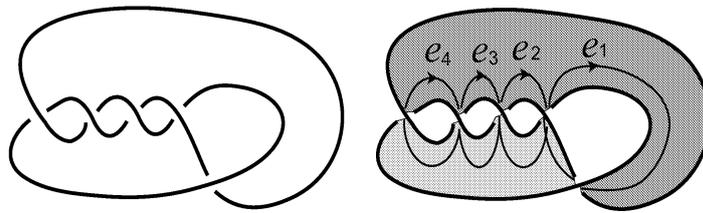
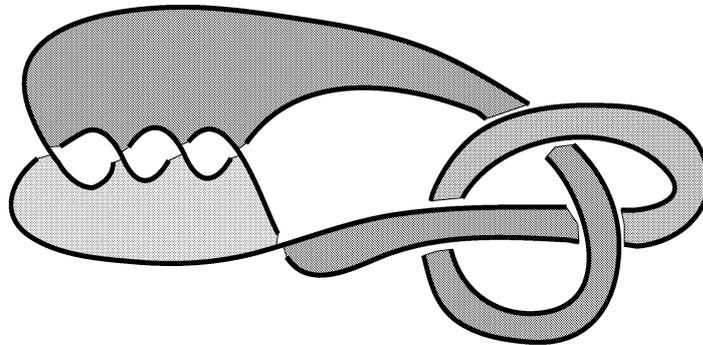
図 9.1 5_1 結び目の鏡像

図 9.2

例 9.1.2. これまでみてきたように、三葉結び目 (これは種数 1 のファイバー結び目であった) の Alexander 多項式は $t^2 - t + 1$ で与えられるので、実際、2 次のモニック多項式になっている。8 の字結び目についても $\Delta_K(t) = t^2 - 3t + 1$ であるので同様である。

この結果によって、比較的簡単な代数計算から結び目のファイバー性を判定することができる。とくに 10 交点以下の素な結び目 [50] や交代結び目 [89] に対しては、モニック多項式であることが十分条件になっていることも知られている。

しかしながら、一般の結び目に対しては、定理 9.1.1 は十分な判定法を与えているとはいえない。実際、モニック Alexander 多項式をもつ無限個のファイバーでない結び目を構成することができる。

例 9.1.3. 図 9.1 は、 5_1 結び目の鏡像である ([101] を参照のこと)。この結び目の Alexander 多項式は $t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$ であり (問題 2.3.5)、図 9.1 右図のように種数 2 の Seifert 曲面 S をもつ。このときこの曲面の 1 次元ホモロジー群の生成元 e_1, e_2, e_3, e_4 が図のようにとれる。2.3 節でみたように、Alexander 多項式は Seifert 行列から計算されるので、同じ Seifert 行列をもつ結び目の Alexander 多項式は一致することに注意する。

いま S を図 9.2 のように変形したものを S' とすると、 S' の Seifert 行列は生成元 e_2, e_3, e_4 が関わる部分は S とかわらず、 $\text{lk}(e_1, e_1^+)$ が 3 減少する。そこで図 9.3 のように補正すると、3 減少していた絡み数が 3 増えて差し引き 0 にすることができる。結果として、 S の Seifert 行列と同じ Seifert 行列をもつ Seifert 曲面 S'' が得られることになる。このようにしてできた Seifert 曲面 S'' の境界の結び目を K とする (K の種数も 2 である)。

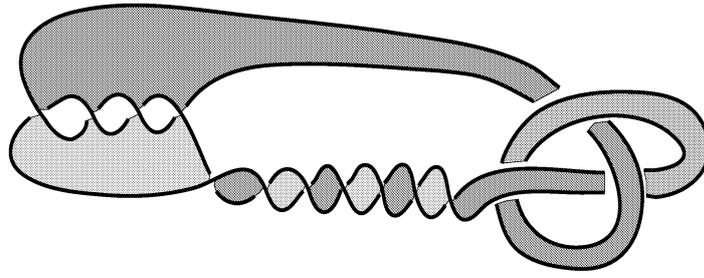


図 9.3

構成から明らかに

$$\Delta_K(t) = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$$

が成り立つ. つまり, 結び目 K はモニック Alexander 多項式をもつ. しかしながら例 9.1.10 でみるように, ねじれ Alexander 不変量を用いることで, この結び目 K はファイバー結び目にならないことがわかる.

K を n 個連結和して得られる結び目を $K_n = \sharp^n K$ とする. 命題 2.3.9 から K_n の Alexander 多項式はモニック多項式のままであるが, 定理 1.3.6 より K_n はファイバー結び目でないことがわかる. よって, モニック Alexander 多項式をもつ非ファイバー結び目の無限系列が存在する.

結び目のファイバー性に関する定理 9.1.1 は, ねじれ Alexander 不変量に対しても自然に拡張される.

定理 9.1.4. $K \subset S^3$ をファイバー結び目とする. このとき特殊線形表現

$$\rho : G(K) \rightarrow SL(2n; \mathbb{F})$$

に付随したねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{K,\rho}(t)$ は, モニック多項式の有理関数として表される.

注意 9.1.5. 体 \mathbb{F} 上の特殊線形表現 $\rho : G(K) \rightarrow SL(2n; \mathbb{F})$ に対して, ねじれ Alexander 不変量 (Reidemeister トーション) は t^{2nk} ($k \in \mathbb{Z}$) 倍を除いて定義されていたことを思い出そう (定理 8.2.1). よってこの場合, ねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{K,\rho}(t)$ に対しても, モニック多項式の意味をもつことになる (勝手な表現 $\rho : G(K) \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$ に対しては, 単元 at^{nk} ($a \in \mathbb{F} - \{0\}, k \in \mathbb{Z}$) による積の不定性があるのでモニック多項式は意味をなさない).

注意 9.1.6. Kirk-Livingston によるねじれ Alexander 不変量の枠組み [56] においても, 結び目のファイバー性に対する必要条件を記述することができる. 詳細は Cha [10] を参照のこと. また, Silver-Williams [104] は Crowell の導来群 (Crowell's derived group)

の特別な場合であるねじれ Alexander 群 (twisted Alexander group) の概念を用いて, Neuwirth と Stallings の結果の一般化を与えている.

証明 $G(K)$ のファイバー結び目としての表示

$$G(K) = \langle x_1, \dots, x_{2g}, h \mid hx_i h^{-1} = \varphi_*(x_i), 1 \leq i \leq 2g \rangle$$

を固定する. 表現 ρ に付随した Alexander 行列を M とする. このとき M_{2g+1} の (i, j) 成分は $2n \times 2n$ 行列

$$\Phi \begin{pmatrix} \partial r_i \\ \partial x_j \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{F}[t, t^{-1}])$$

で与えられる. よって M_{2g+1} の対角成分は

$$\begin{aligned} \Phi \begin{pmatrix} \partial r_i \\ \partial x_i \end{pmatrix} &= \Phi \left(h - \frac{\partial \varphi_*(x_i)}{\partial x_i} \right) \\ &= t\rho(h) - \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \varphi_*(x_i)}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

となり, とくに $\det \Phi \begin{pmatrix} \partial r_i \\ \partial x_i \end{pmatrix}$ の変数 t に関する最高次係数はちょうど

$$\det \rho(h) = 1$$

であることがわかる. また, M_{2g+1} の他の成分 $\Phi \begin{pmatrix} \partial r_i \\ \partial x_j \end{pmatrix}$ ($i \neq j$) は変数 t を含まないので, $\det M_{2g+1}$ の最高次係数はやはり 1 である.

一方, ねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{K, \rho}(t)$ の分母は

$$\begin{aligned} \det \Phi(h-1) &= \det(t\rho(h) - I) \\ &= (\det \rho(h))t^{2n} - (\operatorname{tr} \rho(h))t^{2n-1} + \dots + 1 \\ &= t^{2n} + \dots + 1 \end{aligned}$$

である. さらに, いま考えている表現 ρ は偶数次なので, $\Delta_{K, \rho}(t)$ は t^{2nk} ($k \in \mathbb{Z}$) 倍を除いて定まる. ゆえにファイバー結び目 K のねじれ Alexander 不変量は, モニック多項式の有理関数として表される. \square

とくに $n = 1$ の場合, つまり表現 $\rho: G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{F})$ に対しては, 前章の命題 8.1.2 と組み合わせることにより, 次数に関する情報も得られる.

系 9.1.7. $K \subset S^3$ を種数 g のファイバー結び目とする. このとき $G(K)$ の非可換表現

$$\rho: G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{F})$$

に付随したねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{K, \rho}(t)$ は, $4g - 2$ 次のモニック多項式で表される.

例 9.1.8. K を 8 の字結び目とする. 結び目群 $G(K)$ はつぎの表示をもつ (問題 1.5.2 参照):

$$G(K) = \langle x, y \mid z x z^{-1} y^{-1} \rangle, \quad z = x^{-1} y x y^{-1}.$$

$G(K)$ の非可換表現 $\rho: G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ を

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}$$

により定義する. ただし $\omega \in \mathbb{C}$ は $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ をみたす複素数を表す. 関係 $r: z x = y z$ に自由微分を施すと

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -x^{-1} + x^{-1}y + yx^{-1} - yx^{-1}y + x^{-1}yxy^{-1}$$

となるので, 行列

$$M_2 = \left(\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \right) = \begin{pmatrix} -(\omega + 1)t + \omega + 2 - t^{-1} & t + \omega - 2 + t^{-1} \\ (\omega - 1)t - \omega + 1 & -(\omega + 1)t + 3 - t^{-1} \end{pmatrix}$$

を得る. このとき $\Delta_{K,\rho}(t)$ の分子は

$$\begin{aligned} \det M_2 &= t^{-2}(t^4 - 6t^3 + \omega^4 t^2 + \omega^2 t^2 + 11t^2 - 6t + 1) \\ &= t^{-2}(t-1)^2(t^2 - 4t + 1). \end{aligned}$$

一方, 分母は

$$\begin{aligned} \det \Phi(y-1) &= \det(t\rho(y) - I) \\ &= \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ -\omega t & t-1 \end{pmatrix} \\ &= (t-1)^2. \end{aligned}$$

ゆえに 8 の字結び目 K の表現 ρ に付随したねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{K,\rho}(t) = t^2 - 4t + 1$$

となり, 実際に $4 \cdot 1 - 2 = 2$ 次のモニック多項式になっていることがわかる.

注意 9.1.9. 8 の字結び目の $SL(2; \mathbb{C})$ 既約表現の表現空間については, [58] に詳細な記述がある.

例 9.1.10. K を図 9.4 で与えられる結び目とする. これは図 9.3 をアイソトピーで変形することにより得られる. 結び目群 $G(K)$ は表示

$$G(K) = \langle x_1, \dots, x_7 \mid r_1, \dots, r_6 \rangle,$$

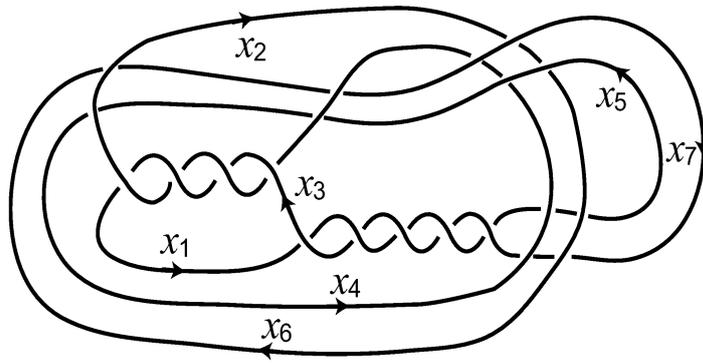


図 9.4

$$\begin{aligned}
r_1 : x_2 x_1 &= x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}, \\
r_2 : x_6 x_5 x_6^{-1} &= x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3^{-1} x_1 x_3^{-1} x_4^{-1}, \\
r_3 : x_6 x_7 x_6^{-1} &= x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3^{-1} x_4^{-1}, \\
r_4 : x_5 x_6 x_5^{-1} &= x_7 x_2 x_7^{-1}, \\
r_5 : x_2 x_6 x_2^{-1} &= x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_7 x_3 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1}, \\
r_6 : x_5 x_4 x_5^{-1} x_7 &= x_7 x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1}
\end{aligned}$$

をもつ (確かめよ). ねじれ Alexander 不変量の計算のために, 関係 r_1, \dots, r_6 の自由微分を与えておこう.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_1}{\partial x_1} &= x_2 - x_3 x_2 + x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1}, \\
\frac{\partial r_1}{\partial x_2} &= 1 - x_3 - x_3 x_2 x_1 + x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}, & \frac{\partial r_1}{\partial x_3} &= -1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_2}{\partial x_1} &= x_4 x_3 x_1^{-1} + x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} - x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 \\
&\quad - x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} - x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3^{-1}, \\
\frac{\partial r_2}{\partial x_3} &= -x_4 - x_4 x_3 x_1^{-1} - x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} + x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} \\
&\quad + x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3^{-1} + x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3^{-1} x_1 x_3^{-1}, \\
\frac{\partial r_2}{\partial x_4} &= -1 + x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3^{-1} x_1 x_3^{-1} x_4^{-1}, \\
\frac{\partial r_2}{\partial x_5} &= x_6, & \frac{\partial r_2}{\partial x_6} &= 1 - x_6 x_5 x_6^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_3}{\partial x_1} &= x_4 x_3 x_1^{-1} + x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} - x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 - x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1}, \\
\frac{\partial r_3}{\partial x_3} &= -x_4 - x_4 x_3 x_1^{-1} - x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} + x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} \\
&\quad + x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3^{-1}, \\
\frac{\partial r_3}{\partial x_4} &= -1 + x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3^{-1} x_4^{-1}, \\
\frac{\partial r_3}{\partial x_6} &= 1 - x_6 x_7 x_6^{-1}, \quad \frac{\partial r_3}{\partial x_7} = x_6,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial x_2} = -x_7, \quad \frac{\partial r_4}{\partial x_5} = 1 - x_5 x_6 x_5^{-1}, \quad \frac{\partial r_4}{\partial x_6} = x_5, \quad \frac{\partial r_4}{\partial x_7} = -1 + x_7 x_2 x_7^{-1},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_5}{\partial x_1} &= -x_3 x_2 + x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} - x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_7 x_3 x_2 \\
&\quad + x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_7 x_3 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1}, \\
\frac{\partial r_5}{\partial x_2} &= 1 - x_2 x_6 x_2^{-1} - x_3 - x_3 x_2 x_1 + x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \\
&\quad - x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_7 x_3 + x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_7 x_3 x_2 x_1 x_2^{-1} \\
&\quad + x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_7 x_3 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1}, \\
\frac{\partial r_5}{\partial x_3} &= -1 + x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} - x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_7 \\
&\quad + x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_7 x_3 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1}, \\
\frac{\partial r_5}{\partial x_6} &= x_2, \quad \frac{\partial r_5}{\partial x_7} = -x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_6}{\partial x_1} &= -x_7 x_3 x_2 + x_7 x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1}, \\
\frac{\partial r_6}{\partial x_2} &= -x_7 x_3 - x_7 x_3 x_2 x_1 + x_7 x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}, \\
\frac{\partial r_6}{\partial x_3} &= -x_7 + x_7 x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1}, \\
\frac{\partial r_6}{\partial x_4} &= x_5, \quad \frac{\partial r_6}{\partial x_5} = 1 - x_5 x_4 x_5^{-1}, \quad \frac{\partial r_6}{\partial x_7} = x_5 x_4 x_5^{-1} - 1.
\end{aligned}$$

ただし、自明なところは省略した。以上の計算から、表示 $G(K)$ に対する Alexander 行

列 A は

$$\begin{pmatrix} t^3 - t^2 + t & -t^3 + t^2 - t + 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2t - 3t^2 & 0 & 3t^2 - 3t & t - 1 & t & 1 - t & 0 \\ 2t - 2t^2 & 0 & 2t^2 - 3t & t - 1 & 0 & 1 - t & t \\ 0 & -t & 0 & 0 & 1 - t & t & t - 1 \\ 2t^3 - t^4 - t^2 & t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1 & 2t - t^2 - 1 & 0 & 0 & t & -t \\ t^4 - t^3 & -t^4 + t^3 - t^2 & t^2 - t & t & 1 - t & 0 & t - 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる. よって K の Alexander 多項式は

$$\begin{aligned} \Delta_K(t) &= \det A_7 \\ &= -t^9 + t^8 - t^7 + t^6 - t^5 \\ &\doteq t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 \end{aligned}$$

となり, この計算からも $\Delta_K(t)$ がモニック多項式であることがわかる. また, K は種数 2 の結び目であったので, Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ によって K のファイバー性を判定することはできない.

そこで, 以下で定義される素体 \mathbb{F}_5 上の $G(K)$ の表現

$$\rho: G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{F}_5)$$

を考えよう:

$$\begin{aligned} \rho(x_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \\ \rho(x_5) &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_6) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_7) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 9.1.8 と同様の計算から, 表現 ρ に付随した K のねじれ Alexander 不変量は

$$\begin{aligned} \Delta_{K,\rho}(t) &= \frac{\det M_7}{\det \Phi(x_7 - 1)} \\ &= \frac{t^{12}(3t^4 + 4t^3 + t^2 + 4t + 3)}{t^2 + 3t + 1} \\ &= 3t^2 + 3 \end{aligned}$$

となりモニック多項式ではないので, 定理 9.1.4 から K はファイバー結び目でないことがわかる. またこのことは, 結び目 K の種数が具体的にわからなくても, 系 9.1.7 から導くことができる. 実際, ねじれ Alexander 不変量が

$$\Delta_{K,\rho}(t) = t^4 + 6t^3 + 6t^2 + 6t + 1 \in \mathbb{F}_7[t, t^{-1}]$$

となるような結び目群 $G(K)$ の表現 $\rho: G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{F}_7)$ が存在する. K がファイバー結び目ならば, 系 9.1.7 から等式

$$4g - 2 = 4$$

をみtasことになり、種数が $g = 3/2$ となって矛盾する。

定理 9.1.4 の逆、つまり、ねじれ Alexander 不変量のモニック性が結び目のファイバー性を特徴づけるかどうかについては現在未解決である。

* **問題 9.1.11.** 非ファイバー結び目 K に対して、ねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{K,\rho}(t)$ がモニック多項式の有理関数とならない表現 $\rho : G(K) \rightarrow SL(2n; \mathbb{F})$ は存在するか。

モニックでない Alexander 多項式をもつ結び目 K については、 $G(K)$ の自明表現をとればよいので、この問題はモニック Alexander 多項式をもつ非ファイバー結び目 K に対するところが本質的である。

一方、Alexander 多項式がモニック多項式でない (したがってファイバー結び目でない) 結び目 K に対して、ねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{K,\rho}(t)$ が常にモニックでない多項式の有理関数として表されるかというそうではない。

例 9.1.12. K を 5_2 結び目とする。これは Reidemeister-Rolfsen による結び目の分類表の中で一番最初に現れるファイバー結び目でない素な結び目の例になっている [101]。実際 Alexander 多項式は

$$\Delta_K(t) = 2t^2 - 3t + 2$$

で与えられる。

結び目群 $G(K)$ は 2 橋結び目としての表示

$$G(K) = \langle x, y \mid xwy^{-1}w^{-1} \rangle, \quad w = yxy^{-1}x^{-1}yx$$

をもつ ([9] 参照)。 $G(K)$ の非可換表現 $\rho_0 : G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ を

$$\rho_0(x) = X = \begin{pmatrix} s_0 & 1 \\ 0 & s_0^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho_0(y) = Y = \begin{pmatrix} s_0 & 0 \\ 3/2 & s_0^{-1} \end{pmatrix}$$

で定義する。ここで s_0 は複素数

$$s_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{-7}) \in \mathbb{C}$$

を表す。関係 $r : xw = wy$ を自由微分することにより

$$\frac{\partial r}{\partial x} = 1 + xy - xyxy^{-1}x^{-1} + xyxy^{-1}x^{-1}y - y + yxy^{-1}x^{-1} - yxy^{-1}x^{-1}y$$

を得る。よって行列

$$\begin{aligned} M_2 &= \Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \\ &= I + t^2 XY - tXYXY^{-1}X^{-1} + t^2 XYXY^{-1}X^{-1}Y \\ &\quad - tY + YXY^{-1}X^{-1} - tYXY^{-1}X^{-1}Y \end{aligned}$$

の行列式は

$$\det M_2 = t^4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}t^3 + 3t^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}t + 1$$

で与えられる. 一方, $\Delta_{K,\rho_0}(t)$ の分母は

$$\begin{aligned} \det \Phi(y-1) &= \det(tY - I) \\ &= \det \begin{pmatrix} s_0 t - 1 & 0 \\ 3t/2 & s_0^{-1} t - 1 \end{pmatrix} \\ &= t^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t + 1 \end{aligned}$$

である. ゆえに 5_2 結び目の表現 ρ_0 に付随したねじれ Alexander 不変量は

$$\begin{aligned} \Delta_{K,\rho_0}(t) &= \frac{\det M_2}{\det \Phi(y-1)} \\ &= t^2 - \sqrt{2}t + 1 \end{aligned}$$

となり, モニック多項式となる.

注意 9.1.13. 例 9.1.12 の表現 $\rho_0 : G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ は以下のように構成される. まず生成元 x, y の像を

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \xi & 1 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho(y) = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ -\eta & \xi^{-1} \end{pmatrix} \quad (\xi, \eta \in \mathbb{C} - \{0\})$$

と仮定しても一般性を失わない. このとき ρ が $G(K)$ の表現になるためには

$$\rho(x)\rho(y) = \rho(y)\rho(x)$$

が成り立つことが必要である. 直接計算から, この条件は

$$f(\xi, \eta) = \eta^4 \xi^3 - (2\eta^6 - 3\eta^4 + 2\eta^2)\xi^2 + (\eta^8 - 3\eta^6 + 6\eta^4 - 3\eta^2 + 1)\xi - 2\eta^6 + 3\eta^4 - 2\eta^2$$

に対して $f(\xi, \eta) = 0$ と同値になる. つまり $G(K)$ の $SL(2; \mathbb{C})$ 既約表現の表現空間は

$$\mathcal{R}_K(\xi, \eta) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 \mid f(\xi, \eta) = 0, \xi \neq 0, \eta \neq 0\}$$

となることがわかる.

一方, ねじれ Alexander 不変量の分子の最高次係数は

$$g(\xi, \eta) = \xi^2 - (\eta^2 - 2 + \eta^{-2})\xi + 4$$

で与えられる. これは表現空間 $\mathcal{R}_K(\xi, \eta)$ 上の複素関数であり, 例 9.1.12 における表現 $\rho_0 = (s_0, -3/2) \in \mathcal{R}_K(\xi, \eta)$ は方程式 $g(\xi, \eta) = 1$ の 1 つの解になっている.

9.2 全射の存在と結び目の半順序

2つの結び目群の間に全射準同型が存在したとき、それらの Alexander 多項式の間にはつぎのような関係が存在する。この事実は古典的によく知られており、例えば [13] では演習問題の1つになっている。

定理 9.2.1. $G(K)$ から $G(K')$ に全射準同型が存在するならば、 K の Alexander 多項式は K' の Alexander 多項式でわり切れる。

結び目群とは限らない一般の有限表示群 G, G' に対して、それぞれの可換化と交換可能な全射準同型 $\varphi: G \rightarrow G'$ が存在するとき、上で述べたような関係が同様に成り立つ。これはさらに、ねじれ Alexander 不変量の場合に拡張される [65]。

G, G' を有限表示群、 $\alpha: G \rightarrow \mathbb{Z}^l, \alpha': G' \rightarrow \mathbb{Z}^l$ をそれらの可換化準同型とする。これらを用いて定義されるねじれ Alexander 不変量を考える。ここで $\varphi: G \rightarrow G'$ を G, G' の間の全射準同型とし、 $\alpha = \alpha' \circ \varphi$ をみたすとする。このとき、つぎが成立する。

定理 9.2.2. 群 G' の任意の表現 $\rho': G' \rightarrow GL(n; R)$ および G の表現 $\rho = \rho' \circ \varphi$ に対して、 G のねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{G, \rho}(t_1, \dots, t_l)$ は G' のねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{G', \rho'}(t_1, \dots, t_l)$ でわり切れる。

注意 9.2.3. 一般に、ねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{G, \rho}, \Delta_{G', \rho'}$ は有理式である。ここでそれらが変わり切れるという意味は、わつたら多項式になるということである。

証明 群 G の表示

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_u \mid r_1, r_2, \dots, r_v \rangle$$

を固定する。 φ が全射であるから、 G' は $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_u)$ で生成される。よって G' の表示として

$$G' = \langle \varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_u) \mid s_1, s_2, \dots, s_{v'} \rangle$$

の形のものをとることができる。記号の煩雑さを避けるため、 $\varphi(x_i) \in G'$ を単に x_i と書くことにする。このとき、関係子 $r_i = \varphi_*(r_i)$ は G' においても関係子を与えるので、 G' の中でつぎのような形で表すことができる:

$$r_i = \prod_k u_k s_{l_{i_k}}^{\varepsilon_{i_k}} u_k^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, v, \quad 1 \leq l_{i_k} \leq v', \quad \varepsilon_{i_k} = \pm 1.$$

Fox の自由微分 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ を関係子 r_i に施し, $\frac{\partial s_k}{\partial x_j}$ に関して整理すると,

$$\varphi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^{v'} A_{i,k} \frac{\partial s_k}{\partial x_j}. \quad (9.1)$$

ここで $A_{i,k}$ ($1 \leq i \leq v$) は $\varepsilon_\bullet \varphi(u_\bullet)$ の 1 次結合であり, 添え字 j にはよらずに定まる.

行列 $M_G, M_{G'}$ を G, G' の Alexander 行列からそれぞれ u 列目を取り除いた行列

$$M_G = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha} \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_1} \right) & \cdots & \tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha} \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_{u-1}} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha} \left(\frac{\partial r_v}{\partial x_1} \right) & \cdots & \tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha} \left(\frac{\partial r_v}{\partial x_{u-1}} \right) \end{pmatrix},$$

$$M_{G'} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}' \otimes \tilde{\alpha}' \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_1} \right) & \cdots & \tilde{\rho}' \otimes \tilde{\alpha}' \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_{u-1}} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\rho}' \otimes \tilde{\alpha}' \left(\frac{\partial s_{v'}}{\partial x_1} \right) & \cdots & \tilde{\rho}' \otimes \tilde{\alpha}' \left(\frac{\partial s_{v'}}{\partial x_{u-1}} \right) \end{pmatrix}$$

とする. このとき (9.1) から,

$$M_G = AM_{G'}$$

が成立することがわかる. ここで $A = (\rho'(A_{i,k}))$ は $nv \times nv'$ 行列である. また, 添え字の集合 $I = (i_1, i_2, \dots, i_{n(u-1)})$ に対して,

$$\det M_G^I = \det (A^I M_{G'}^I) = \sum_K \pm (\det A_K^I) (\det M_{G'}^K)$$

が成り立つことが, 線形代数における行列式の Laplace 展開 ([46] 参照) により示される. ただし $K = (k_1, k_2, \dots, k_{n(u-1)})$ であり, A_K^I は A^I の $k_1, k_2, \dots, k_{n(u-1)}$ 列からなる正方行列である. すべての I に対して, $\det M_{G'}^I$ が P を共通因子としてもてば, $\det M_G^I$ も P を共通因子としてもつことが示される. したがって, $\Delta_{G,\rho}$ の分子は $\Delta_{G',\rho'}$ の分子でわり切れることがわかる.

さらにねじれ Alexander 不変量の定義から, $\Delta_{G,\rho}$ の分母と $\Delta_{G',\rho'}$ の分母はともに $\det(\Phi(x_u - 1))$ となり一致している. 以上のことから主張は成立する. \square

G, G' がともに結び目群の場合には, ねじれ Alexander 不変量が Reidemeister トーションであることを用いて, この定理を証明することができる. 以下, これについて述べる.

S^3 内の結び目 K, K' に対し, それらの結び目群 $G(K), G(K')$ と可換化 $\alpha : G(K) \rightarrow \mathbb{Z}, \alpha' : G(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ を考える.

結び目群 $G(K), G(K')$ の Wirtinger 表示をそれぞれ固定し, これらの表示に対応した 2 次元 CW 複体 $X(K), X(K')$ をとる. ここで全射準同型 $\varphi : G(K) \rightarrow G(K')$ が存在した

とする. 必要ならば結び目群 $G(K)$ の生成元を逆元でとりかえる (向きをかえる) ことにより, $\alpha' \circ \varphi = \alpha$ と仮定してよい.

ここで簡単のため $G(K')$ の表現 $\rho' : G(K') \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$ に対して, それと φ との合成 $\rho' \circ \varphi$ により定まる $G(K)$ の表現を単に ρ と書き, 有理関数体 $\mathbb{F}(t)$ 上の n 次元ベクトル空間を V で表す. 準同型 φ は連続写像 $X(K) \rightarrow X(K')$, さらに鎖写像 $\varphi_* : C_*(X(K), V_{\rho \otimes \alpha}) \rightarrow C_*(X(K'), V_{\rho' \otimes \alpha'})$ を誘導する. また, 表現 $\rho \otimes \alpha$ と $\rho' \otimes \alpha'$ はともに非輪状表現であると仮定する. このとき定理 9.2.2 は, Reidemeister トーションを用いるとつぎの形に書き表すことができる.

定理 9.2.4. $\tau(X(K); V_{\rho \otimes \alpha})$ は $\tau(X(K'); V_{\rho' \otimes \alpha'})$ でわり切れて Laurent 多項式になる.

まずつぎの命題を証明する.

命題 9.2.5. 鎖写像 $\varphi_* : C_*(X(K); V_{\rho \otimes \alpha}) \rightarrow C_*(X(K'); V_{\rho' \otimes \alpha'})$ は全射となる.

証明 まず, 全射準同型 φ が

- 0 次元鎖加群上は同型
- 1 次元鎖加群上は全射

を誘導することは, 定義よりわかる. したがって 2 次元鎖加群上で全射であることを証明すればよい.

そこで, まずはじめに, 0 ではない 2-チェイン $z \in C_2(X(K'); V_{\rho' \otimes \alpha'})$ をとる. 鎖複体 $C_*(X(K'); V_{\rho' \otimes \alpha'})$ が非輪状であることから, 境界作用素

$$\partial : C_2(X(K'); V_{\rho' \otimes \alpha'}) \rightarrow C_1(X(K'); V_{\rho' \otimes \alpha'})$$

は単射である. よって ∂z は 0 ではない. 一方で,

$$\varphi_* : C_1(X(K); V_{\rho \otimes \alpha}) \rightarrow C_1(X(K'); V_{\rho' \otimes \alpha'})$$

の全射性から, $\varphi_*(w) = \partial z$ をみたす 1-チェイン $w \in C_1(X(K); V_{\rho \otimes \alpha})$ が存在する. ここで写像の可換性より

$$\varphi_*(\partial w) = \partial \varphi_*(w) = \partial \partial z = 0.$$

これにより $\partial w = 0$ となる. 再び非輪状性より $H_1(X(K); V_{\rho \otimes \alpha}) = 0$ であるから, $\partial \tilde{w} = w$ をみたす $\tilde{w} \in C_2(X(K); V_{\rho \otimes \alpha})$ が存在する. ここで, 写像の可換性と $\partial : C_2(X(K'); V_{\rho' \otimes \alpha'}) \rightarrow C_1(X(K'); V_{\rho' \otimes \alpha'})$ の単射性を用いることによって $\varphi(\tilde{w}) = z$ が得られる. ゆえに 2 次元鎖加群上 φ_* は全射であることが証明された. \square

定理 9.2.4 を証明しよう. 命題 9.2.5 より, $D_* = \ker \varphi_*$ とおくと, 鎖複体の短完全系列

$$0 \rightarrow D_* \rightarrow C_*(X(K); V_{\rho \otimes \alpha}) \rightarrow C_*(X(K'); V_{\rho' \otimes \alpha'}) \rightarrow 0$$

が得られる. 表現 $\rho \otimes \alpha, \rho' \otimes \alpha'$ はともに非輪状表現なので, 補題 5.1.9 から鎖複体 D_* も非輪状複体であり, それらの Reidemeister トーションの間に

$$\tau(X(K); V_{\rho \otimes \alpha}) = \tau(X(K'); V_{\rho' \otimes \alpha'}) \tau(D_*)$$

が成り立つ. したがって $\tau(D_*)$ が Laurent 多項式になることを証明すればよい.

ここで $\varphi_* : C_0(X(K); V_{\rho \otimes \alpha}) \rightarrow C_0(X(K'); V_{\rho' \otimes \alpha'})$ は同型写像であるから, 0 次元鎖加群 D_0 は自明である. よって D_* のトーションは境界作用素 $\partial_2 : D_2 \rightarrow D_1$ の行列式と一致する. ゆえに, これは t に関する Laurent 多項式となる. \square

注意 9.2.6. この Reidemeister トーションを用いた議論とまったく同様にして, $\varphi : G(K) \rightarrow G(K')$ が単射であるならば, $\tau(X(K'); V_{\rho' \otimes \alpha'})$ は $\tau(X(K); V_{\rho \otimes \alpha})$ でわり切れることを示すことができる.

以下では, 結び目群の間に全射準同型が存在する幾何学的な状況について述べておく. 結び目群 $G(K)$ から $G(K')$ に全射が存在する十分条件として, つぎのような条件が知られている.

- K' が自明な結び目であるとき.
- 結び目 K が連結和 $K = K_1 \sharp K_2$ で, K' が K_1 または K_2 であるとき.
- K が周期 n の周期的結び目で K' がその商結び目であるとき.
- 結び目の外部 $E(K)$ から $E(K')$ に固有な degree 1 写像が存在するとき.
- 結び目 K と K' の間にリボンコンコーダンスが存在するとき.

順に説明していこう. 自明な結び目の結び目群は \mathbb{Z} と同型であるから, 任意の結び目群 $G(K)$ に対して, 可換化 $\alpha : G(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ を考えれば, 自明な結び目群への全射は常に存在することがわかる.

また, 2 つの結び目 K_1, K_2 の連結和 $K_1 \sharp K_2$ の結び目群は, それぞれの結び目群 $G(K_1), G(K_2)$ の自由積 $G(K_1) * G(K_2)$ と同型である. したがって自然な射影によって全射準同型写像 $G(K_1) * G(K_2) \rightarrow G(K_1), G(K_1) * G(K_2) \rightarrow G(K_2)$ が与えられる.

つづいて周期的な結び目の場合について説明する. まず周期的結び目を定義する.

定義 9.2.7. \mathbb{R}^3 内の結び目 K が周期 n をもつ周期的結び目であるとは, つぎの条件をみたす (\mathbb{R}^3, K) の周期的写像 f が存在することである:

- (i) f は \mathbb{R}^3 内のある直線 l に関する $2\pi/n$ 回転.

(ii) $l \cap K = \emptyset$.

K が周期的結び目であるとき, $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/f$ を回転による \mathbb{R}^3 からの商写像とする. 写像 f は直線 l に関する回転であるから, その作用でわって得られる商空間 \mathbb{R}^3/f は再び \mathbb{R}^3 となる. さらに $l \cap K = \emptyset$ より, $\overline{K} = \pi(K)$ は $\mathbb{R}^3/f \cong \mathbb{R}^3$ の結び目を与える. このとき, 商写像 $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/f$ により

$$\pi_*: G(K) \rightarrow G(\overline{K})$$

が誘導される. この回転の軸に垂直な平面への正則射影を用いて, それぞれの結び目群の Wirtinger 表示を考えれば, この準同型写像は全射となることがわかる.

つぎに degree 1 写像について述べる. X, Y を境界をもつ向きづけられた n 次元コンパクト多様体とする. 向きから定まるホモロジー群の基本類をそれぞれ $[X, \partial X], [Y, \partial Y]$ とする. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が X の境界 ∂X を Y の境界 ∂Y にうつすとき, f は固有な写像であるという.

定義 9.2.8. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が n 次元ホモロジー群上に誘導する準同型写像を $f_*: H_n(X, \partial X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(Y, \partial Y; \mathbb{Z})$ とする. $f_*([X, \partial X]) = [Y, \partial Y]$ が成り立つとき, f を **degree 1 写像** という.

注意 9.2.9. degree 1 写像をここでは結び目の外部に対して考えるため, 境界のある場合に定義をしたが, 境界のない閉多様体の場合にもまったく同様に定義される.

2つの多様体間の固有な degree 1 写像は, 基本群の間の全射を誘導することを示そう. ここでは簡単のため向きづけられた n 次元閉多様体の場合に証明を与えるが, 境界付きの場合も, まったく同様に証明することができる. 以下では X, Y を向きづけられた n 次元閉多様体とし, これらのホモロジー基本類を $[X], [Y]$ で表す. このときつぎが成り立つ.

命題 9.2.10. degree 1 写像 $f: X \rightarrow Y$ は基本群の間の全射 $f_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ を誘導する.

証明 まず, $f_*(\pi_1(X))$ が $\pi_1(Y)$ の指数有限部分群であることを背理法で示す. そこで指数 $[\pi_1(Y) : f_*(\pi_1(X))] = \infty$ と仮定しよう.

部分群 $f_*(\pi_1(X))$ に対応した Y の無限被覆 $p: \tilde{Y} \rightarrow Y$ を考える. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, 基本群上に誘導される写像は $f_*(\pi_1(X)) = p_*(\pi_1(\tilde{Y})) \subset \pi_1(Y)$ をみたすので, f の \tilde{Y} へのもち上げ $\tilde{f}: X \rightarrow \tilde{Y}$ が存在する. ここで $f = p \circ \tilde{f}$ であるから, n 次元ホモロジー群上にこれらが誘導する写像を考えると, $f_*[X] = p_*(\tilde{f}_*[X])$ が成立する. ここで \tilde{Y} は Y の無限被覆空間であるからコンパクトではない. したがって n 次元ホモロジー群は

$H_n(\tilde{Y}; \mathbb{Z}) = 0$ をみたま。よって $\tilde{f}_*[X] = 0$ となり,

$$f_*[X] = p_*(\tilde{f}_*[X]) = 0$$

が成り立つ。これは f が degree 1 写像であることに反するので、指数 $[\pi_1(Y) : f_*(\pi_1(X))]$ は有限である。

つぎに f_* が全射準同型、すなわち、指数 $[\pi_1(Y) : f_*(\pi_1(X))] = 1$ を証明する。再び背理法を用いる。指数 $n = [\pi_1(Y) : f_*(\pi_1(X))] \geq 2$ と仮定する。先ほどの議論と同様に、 $f_*(\pi_1(X))$ に対応する Y の n 重被覆空間 $p_n : Y_n \rightarrow Y$ を考える。この場合も $f_*(\pi_1(X)) = p_{n*}(\pi_1(Y_n)) \subset \pi_1(Y)$ より、 f のもち上げ $\tilde{f}_n : X \rightarrow Y_n$ が存在する。したがって

$$f_*[X] = p_{n*}(\tilde{f}_{n*}[X])$$

が成立する。ここで $p_n : Y_n \rightarrow Y$ は n 重被覆空間であるから、 Y_n のホモロジー基本類を $[Y_n]$ であらわすと、 $p_{n*}[Y_n] = n[Y]$ となる。また $\tilde{f}_{n*}[X] = m[Y_n]$ とおくと

$$f_*[X] = p_{n*}(\tilde{f}_{n*}[X]) = p_{n*}(m[Y_n]) = nm[Y]$$

となる。ここで f は degree 1 写像であるから、 $nm = 1$ が成立。しかし、これは $n, m \in \mathbb{Z}$ かつ $n \geq 2$ に矛盾する。ゆえに背理法の仮定から $n = 1$ が示された。□

5 番目の条件であるリボンコンコーダンスについて述べる。この概念は Gordon [33] によって導入されたものである。まず、 $S^3 \times [0, 1]$ 内の 2 次元多様体 C に関して

- (i) $C \cong S^1 \times [0, 1]$,
- (ii) $i = 0, 1$ に対して $C \cap S^3 \times \{i\} = K_i$

の 2 条件が成り立つとき、 C を結び目 K_1 と K_0 の間のコンコーダンス (concordance) という。

必要ならアイソトピーで少し変形することにより、結び目のコンコーダンスは、 $S^3 \times [0, 1]$ の $[0, 1]$ 方向への射影 $S^3 \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を C に制限したとき Morse 関数になっていると仮定してよい。この Morse 関数の臨界点は、一般には、指数 0 = 極小, 指数 1, 指数 2 = 極大の 3 タイプである。この Morse 関数が指数 2 の臨界点をもたないとき、このコンコーダンス C を結び目 K_1 から K_0 へのリボンコンコーダンス (ribbon concordance) とよぶ。

命題 9.2.11. K_1 から K_0 へリボンコンコーダンスが存在するとき、 $G(K_1)$ から $G(K_0)$ への全射準同型が存在する。

証明は [26] を参照のこと。また、リボンコンコーダンスが必ずしも degree 1 写像と対応しないことも知られている [83]。

最後に、素な結び目の間の半順序の決定に定理 9.2.2 が応用できることを述べる。まず、素な結び目あるいは結び目群に関する以下の事実に注意する (詳細は [53] を参照のこと)。

- 素な結び目はその結び目群によって完全に分類される (Whitten [124] と Gordon-Luecke [34] の結果)。
- 任意の結び目群は有限生成剰余有限 (residually finite) 群である。
- 一般に有限生成剰余有限群は **Hopfian** である。

注意 9.2.12. 任意の全射準同型写像 $\varphi : G \rightarrow G$ が単射 (すなわち同型) となるとき、群 G は Hopfian であるという。

これらの事実のもとで、素な結び目全体に半順序が定義される。

定義 9.2.13. 2つの素な結び目 K_1, K_2 に対して、それらの結び目群の間に全射準同型 $\varphi : G(K_1) \rightarrow G(K_2)$ が存在するとき $K_1 \geq K_2$ と定義する。

以下では素数 p を固定し、標数 p の有限体 \mathbb{F}_p 上の $SL(2; \mathbb{F}_p)$ 表現を考える。定理 9.2.2 の対偶から、つぎの命題が成立する。

命題 9.2.14. $G(K')$ のある表現 $\rho' : G(K') \rightarrow SL(2; \mathbb{F}_p)$ に対して、そのねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{K', \rho'}(t)$ が、 $G(K)$ のすべての表現 $\rho : G(K) \rightarrow SL(2; \mathbb{F}_p)$ に対するねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{K, \rho}(t)$ をわり切らなければ、 $G(K)$ から $G(K')$ への全射準同型は存在しない。

この命題とコンピュータを用いて得られるねじれ Alexander 不変量の計算および全射準同型の具体的構成を組み合わせることにより、Reidemeister-Rolfsen の 10 交点以下の素な結び目のリストに対して、この半順序を完全に決定することができる [62]。

定理 9.2.15. 10 交点以下の素な結び目に対して半順序関係 \geq が存在するのは以下の場合のみであり、それ以外の場合には半順序関係は存在しない:

$$\begin{aligned} &8_5, 8_{10}, 8_{15}, 8_{18}, 8_{19}, 8_{20}, 8_{21}, 9_1, 9_6, 9_{16}, 9_{23}, \\ &9_{24}, 9_{28}, 9_{40}, 10_5, 10_9, 10_{32}, 10_{40}, 10_{61}, 10_{62}, \\ &10_{63}, 10_{64}, 10_{65}, 10_{66}, 10_{76}, 10_{77}, 10_{78}, 10_{82}, \\ &10_{84}, 10_{85}, 10_{87}, 10_{98}, 10_{99}, 10_{103}, 10_{106}, 10_{112}, \\ &10_{114}, 10_{139}, 10_{140}, 10_{141}, 10_{142}, 10_{143}, 10_{144}, \\ &10_{159}, 10_{164} \end{aligned} \geq 3_1;$$

$$8_{18}, 9_{37}, 9_{40}, 10_{58}, 10_{59}, 10_{60}, 10_{122}, 10_{136}, 10_{137}, 10_{138} \geq 4_1;$$

$$10_{74}, 10_{120}, 10_{122} \geq 5_2.$$

証明 ここでは証明の概略を述べる. 上にあげた結び目の組に関して全射準同型が存在することは, 全射を実際に構成することにより示される. 具体的にはコンピュータを用いて, 結び目群の生成元の行き先を指定して, その対応が関係子をみたすかどうかをチェックしていくことによりみつけることができる.

これ以外の組に全射が存在しないことは以下のように示す. 例えば, 10_{147} から 3_1 へ全射が存在しないことは, つぎのような手順で確かめられる. 標数 5 の有限体 \mathbb{F}_5 上で命題 9.2.14 を適用する. まず, $G(3_1)$, $G(10_{147})$ の $SL(2; \mathbb{F}_5)$ 表現の共役類をコンピュータを用いてすべて求め, それぞれに対応するねじれ Alexander 不変量を計算する. ねじれ Alexander 不変量は線形表現を共役類の中でとりかえても不変なので, ここまでの作業で 3_1 と 10_{147} の $SL(2; \mathbb{F}_5)$ 表現に対応するねじれ Alexander 不変量の集合が得られたことになる. 実際, 3_1 は 10 個, 10_{147} は 13 個の不変量からなる集合となる. そして, これらを 1 つ 1 つ調べていくことにより, 3_1 のねじれ Alexander 不変量の中に 10_{147} のすべての不変量をわり切らないものが存在することがわかる. 他の結び目の組についても同様である. 詳細は [62] を参照のこと. \square

注意 9.2.16. ねじれ Alexander 不変量を計算しなくても, Alexander 多項式 (定理 9.2.1) によって 2 つの結び目群の間に全射準同型が存在しないことがわかる例もある. 例えば, 4_1 と 3_1 を考えてみると, $\Delta_{3_1}(t) = t^2 - t + 1$, $\Delta_{4_1}(t) = t^2 - 3t + 1$. したがって互いにわり切らないので, どちらの向きにも全射は存在しないことがわかる.

10 交点以下の素な結び目に関しては, その周期がすべて決定されている [69]. この結果と比較することによりつぎが証明される.

定理 9.2.17. 全射が存在する 10 交点以下の結び目の組み合わせの中で, 周期的な結び目とその商結び目として実現される組み合わせは以下のとおりである:

$$\begin{aligned} &8_5, 8_{15}, 8_{19}, 8_{21}, 9_1, 9_{16}, 9_{28}, 9_{40}, 10_{61}, 10_{63}, \\ &10_{64}, 10_{66}, 10_{76}, 10_{78}, 10_{98}, 10_{139}, 10_{141}, 10_{142}, 10_{144} \end{aligned} \geq 3_1;$$

$$8_{18}, 10_{58}, 10_{60}, 10_{122}, 10_{136}, 10_{138} \geq 4_1;$$

$$10_{120} \geq 5_2.$$

10 交点以下の結び目の半順序関係においては

- (i) $3_1, 4_1, 5_1$ が極小元になっている
- (ii) 交点数が少ない方から多い方へは全射が存在しない

の2点が成り立っていることが結果から読みとれる。これに関して

- (i) $3_1, 4_1$ に関しては、素な結び目全体の中で極小元である
- (ii) 11 交点の交代結び目まで範囲を広げても交点の多い方へは全射は存在しない [64]

ことが実際に証明できる。 $3_1, 4_1$ が極小元であることをみるために、ファイバー結び目に関する命題を1つ準備する。

命題 9.2.18. 2つの結び目 K, K' に対して、それぞれの結び目群の可換化準同型と交換可能な全射準同型 $G(K) \rightarrow G(K')$ が存在し、かつ K は種数 g のファイバー結び目であるとする。このとき K' は種数 g 以下のファイバー結び目である。

種数1のファイバー結び目は 3_1 と 4_1 のみであるという事実 (定理 1.3.4) と命題 9.2.18 を組み合わせることにより、つぎが得られる。

命題 9.2.19. 結び目 3_1 と 4_1 は、すべての素な結び目の中でこの半順序に関して極小である。

証明 $G(3_1)$ または $G(4_1)$ から、非自明な結び目群 $G(K)$ へ全射準同型が存在したと仮定する。命題 9.2.18 より結び目 K は種数1のファイバー結び目となる。したがって K は 3_1 または 4_1 となるが、 3_1 と 4_1 の間には全射は存在しないので主張が得られる。 \square

9.3 可逆性の判定への応用

この節では、Kirk-Livingston [56], [57] によるねじれ Alexander 不変量の可逆性の判定への応用について述べる。第1章でみたように1つの結び目には2つの向きが定まるので、一方を K 、もう一方を K^* で表すことにする。 K と K^* が同値な結び目になるとき、この結び目は**可逆**であるという。

これまでは結び目 K 自身のねじれ Alexander 不変量を結び目群 $G(K)$ の可換化 $\alpha : G(K) \rightarrow H_1(E(K); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ と $\rho : G(K) \rightarrow GL(n; R)$ の組に対して考えてきた。このねじれ Alexander 不変量は、結び目群 $G(K)$ とその表現 α, ρ に対して定義される不変量であり、基本群の不変量である。したがって、このままでは可逆性を捉えることはできない。そこでつぎに述べるように、結び目補空間の有限被覆に対してねじれ Alexander 不変量を考える。この議論は、被覆空間を用いた Alexander 多項式の議論のねじれ Alexander 不変量への精密化といえることができる。

以下、自然数 n を固定する．結び目 K の補空間 $S^3 - K$ の n 重巡回被覆空間

$$X_n \rightarrow S^3 - K$$

とそれに付随した K で分岐する n 重巡回分岐被覆空間

$$\bar{X}_n \rightarrow S^3$$

をとる．この被覆空間の射影から誘導されるホモロジー群上の自然な準同型写像

$$H_1(X_n; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S^3 - K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

を考える．この写像は全射ではなく、その像は \mathbb{Z} の部分加群 $n\mathbb{Z}$ と同型である．この $n\mathbb{Z}$ を改めて \mathbb{Z} と同一視し、基本群からの写像 $\pi_1(X_n) \rightarrow H_1(X_n; \mathbb{Z})$ と合成すると、全射準同型写像

$$\epsilon : \pi_1(X_n) \rightarrow \mathbb{Z} = \langle t \rangle$$

が得られる．さらに自然数 d を固定し、全射準同型

$$H_1(\bar{X}_n; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

が与えられたと仮定する．ここで $\zeta_d \in \mathbb{C}$ を 1 の原始 d 乗根とし、 $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ で ζ_d を有理数体 \mathbb{Q} に添加した円分体を表すことにする．さらに $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ への作用

$$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow GL(1; \mathbb{Q}(\zeta_d))$$

を $k \mapsto \zeta_d^k$ 、すなわち、 $k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ に対して $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ の元を ζ_d^k 倍することによって定義する．

包含写像 $X_n \rightarrow \bar{X}_n$ から誘導されるホモロジー群上の写像 $H_1(X_n; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\bar{X}_n; \mathbb{Z})$ を $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow GL(1; \mathbb{Q}(\zeta_d))$ と合成することで、1次元線形表現

$$\rho : \pi_1(X_n) \rightarrow GL(1; \mathbb{Q}(\zeta_d))$$

が得られる．この ϵ, ρ による $\pi_1(X_n)$ の (Kirk-Livingston の意味での) ねじれ Alexander 不変量を $\Delta_{K,n,\epsilon}^\rho$ と書くことにする (詳しくは [56], [57] を参照のこと)．この不変量を計算することで可逆性が判定できる．

以下 $K = 8_{17}$ を具体例として考えよう．歴史的には 8_{17} が可逆でないという事実は、まず河内 [52] と Bonahon-Siebenmann (論文としては未発表) により独立に証明された．その後、Hartley [37] によってさらに異なる証明が与えられた．Hartley の証明はまず $G(8_{17}) \rightarrow \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を考え、ここから 13 重非正則被覆空間をとり、そのホモロジー群を調べることによってなされる．この Hartley による証明を分岐被覆空間のねじれ Alexander 不変量を使う立場で見直すとつぎのようになる．まず $S^3 - K$ の 3 重巡回被覆空間 X_3 、および 3 重分岐被覆空間 \bar{X}_3 を考える．直接の計算により

$$H_1(\bar{X}_3; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$$

が示される. \overline{X}_3 の被覆変換群は位数 3 の巡回群であり, その生成元を

$$F : \overline{X}_3 \rightarrow \overline{X}_3$$

とおく. 有限体 $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ 上の線形写像として, F の $H_1(\overline{X}_3; \mathbb{Z})$ への作用を考えると, その固有値は $3, 9 \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ である. 固有値 $i = 3, 9 \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ に対応する固有空間を V_i とすると, $H_1(\overline{X}_3; \mathbb{Z}) = V_3 \oplus V_9$ と直和分解される.

注意 9.3.1. 固有値 $3, 9$ は $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ における 1 の原始 3 乗根である.

ここで

$$\overline{\chi}_3 : H_1(\overline{X}_3; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$$

を V_3 上で自明となる非自明な準同型とし,

$$\overline{\chi}_9 : H_1(\overline{X}_3; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$$

を V_9 上自明となる非自明な準同型とする. このような表現をすべて動かして \overline{X}_3 のねじれ Alexander 不変量の集合

$$\{\Delta_{K^*, 3, \epsilon}^{\overline{\chi}_3} \mid \overline{\chi}_3\}, \quad \{\Delta_{K^*, 3, \epsilon}^{\overline{\chi}_9} \mid \overline{\chi}_9\}$$

を考える.

この不変量の集合を結び目 K の向きを逆にした $K^* = 8_{17}^*$ に対しても考える. ここで $S^3 - K^*$ の 3 重巡回被覆空間 X_3^* は位相空間としては X_3 のままである. しかし, 向きを逆にしたことにより,

- 全射準同型 $\epsilon : \pi_1(\overline{X}_3) \rightarrow \langle t \rangle$ は $\bar{\epsilon}(\gamma) = \epsilon(\gamma)^{-1}$ になり,
- 被覆変換群の生成元 F^* は逆写像 F^{-1} となり,
- 2 つの固有値に対応する固有空間は入れかわる.

ゆえに, $F^* = F^{-1}$ の固有値 3 に対する固有空間上で自明となる $\overline{\chi}_3 : H_1(\overline{X}_3; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ に対しては, ある $\alpha \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ と, もともとの F の固有値 9 に対する上のような準同型 $\overline{\chi}_9$ が存在して, $\overline{\chi}_3$ と $\alpha\overline{\chi}_9 : H_1(\overline{X}_3; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ は一致する. したがって

$$\begin{aligned} \Delta_{K^*, 3, \epsilon}^{\overline{\chi}_3}(t) &= \sigma_\alpha(\Delta_{K^*, 3, \bar{\epsilon}}^{\overline{\chi}_9}(t)) \\ &= \sigma_\alpha(\Delta_{K^*, 3, \epsilon}^{\overline{\chi}_9}(t^{-1})) \end{aligned}$$

が得られる. ただし, σ_α は $\sigma_\alpha(\zeta_{13}) = \zeta_{13}^\alpha$ により定まる $\mathbb{Q}(\zeta_{13})$ の Galois 群の元である. ここで $\mathbb{Q}(\zeta_{13})$ は \mathbb{Q} 上

$$\{1, \zeta_{13}, \zeta_{13}^2, \dots, \zeta_{13}^{11}, \zeta_{13}^{12}\}$$

ではられるベクトル空間であり, σ_α の作用はこの基底の置換により定まる.

ここでもし $K = 8_{17}$ が可逆であると仮定すると、上でとったような K と K^* のねじれ Alexander 不変量の集合は Galois 群の元の作用を通して一致することになる。しかし具体的な計算から、ねじれ Alexander 不変量の集合

$$\{\Delta_{K,3,\epsilon}^{\bar{X}_3}(t)\}, \quad \{\Delta_{K^*,3,\epsilon}^{\bar{X}_3}(t)\} = \{\sigma_\alpha(\Delta_{K,3,\epsilon}^{\bar{X}_3}(t^{-1}))\}$$

を比較すると、どのように $\alpha \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ をとって作用させても、これらは一致しないことがわかる。したがって $K = 8_{17}$ は可逆な結び目ではない。

Kirk-Livingston [57] では、さらにこの設定で 8_{17} が 8_{17}^* にコンコードランスでないことを以下のようにして示している。

ここで使う結果はつぎの定理である [56]. K を S^3 内の向きづけられたスライス結び目とする。2つの奇素数 p, q をとり、さらに $n = p^r, d = q^s$ とおく。このときつぎが成り立つ。

定理 9.3.2. 位数イデアルに関して $\text{order}(M)^2 = \text{order}(H_1(\bar{X}_n; \mathbb{Z}))$ となる $H_1(\bar{X}_n; \mathbb{Z})$ の部分群 M が存在して、 M 上自明となる任意の $\bar{\chi} : H_1(\bar{X}_n; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ に対して、そのねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{K,n,\epsilon}^{\bar{X}}(t)$ は $at^k f(t)\bar{f}(t)(1-t)^s$ の形に因数分解される。ここで $a \in \mathbb{Q}(\zeta_d)$, $f(t) \in \mathbb{Q}(\zeta_d)[t, t^{-1}]$ である。さらに、 $\bar{\chi}$ が非自明ならば $s = 1$ であり、 $\bar{\chi}$ が自明ならば $s = 0$ となる。

注意 9.3.3. 部分群 M は、 \bar{X}_n から K のスライス円板上で分岐する D^4 の分岐被覆空間への包含写像が誘導する 1次元ホモロジー群上の準同型写像の核であり、とくに被覆変換から誘導される 1次元ホモロジー群上の同型写像で不変となる。この定理は、定理 5.3.10 のねじれ Alexander 不変量版である。

この定理の証明、および、ここに現れるねじれ Alexander 不変量と Casson-Gordon 不変量との関係については、原論文 [56] を参照してほしい。ただし、この定理の証明に Casson-Gordon 不変量を直接用いるわけではないことを注意しておく。

さて、結び目のコンコードランス群の中で結び目 K の逆元を $-K$ で表すことにする。もし $K = 8_{17}$ が $K^* = 8_{17}^*$ とコンコードランスだったとすると、連結和 $K\sharp(-K^*)$ はスライス結び目となり、 $-K$ は K の鏡像 $m(K)$ において向きを逆にしたものになる。これまでと同様に、 K で分岐する S^3 の 3重分岐被覆空間 \bar{X}_3 と $-K^*$ で分岐する 3重分岐被覆空間 \bar{Y}_3 を考えよう。このとき

$$\begin{aligned} G &= H_1(\bar{X}_3\sharp\bar{Y}_3; \mathbb{Z}) \\ &\cong H_1(\bar{X}_3; \mathbb{Z}) \oplus H_1(\bar{Y}_3; \mathbb{Z}) \\ &\cong \mathbb{Z}^{\oplus 2} \oplus (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^{\oplus 2} \end{aligned}$$

が成立する。被覆変換 F に対応して G は固有値 3 に対応する固有空間 $\langle v_3, w_3 \rangle$ と固有値

9 に対応する固有空間 $\langle v_9, w_9 \rangle$ に分解される. ここで $\{v_3, v_9\}$ は $H_1(\bar{X}_3; \mathbb{Z})$, $\{w_3, w_9\}$ は $H_1(\bar{Y}_3; \mathbb{Z})$ での固有ベクトルである.

よって定理 9.3.2 における 1 次元ホモロジー群の部分群 M の候補は,

- (i) $G_0 = \langle v_3, w_3 \rangle$,
- (ii) $G_0 = \langle v_9, w_9 \rangle$,
- (iii) $G_0 = \langle \lambda v_3 + \mu w_3, \xi v_9 + \eta w_9 \rangle$

の 3 通りである. それぞれの場合にねじれ Alexander 不変量を計算すると, 定理 9.3.2 にあるような分解をもたないことがわかる. したがって, $K\sharp(-K^*)$ はスライス結び目ではない. ゆえに $K = 8_{17}$ は $K^* = 8_{17}^*$ とコンコーダンスでないことがわかる.

9.4 周期的結び目

この節では, 周期的結び目 (定義 9.2.7 参照) の Alexander 多項式に関する村杉の結果 [91] およびそれらのねじれ Alexander 不変量への一般化 [43] について概説する. 村杉の結果はその後 Hillman [41] と作間 [102] によって絡み目の場合に拡張されているが, ここでは触れない.

村杉の結果は大雑把に言って, 周期的結び目 K の Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ を結び目 $\bar{K} = K/f$ と絡み目 $\bar{L} = \bar{K} \cup \bar{A}$ (ただし $\bar{A} = A/f$, A は周期的写像 $f: S^3 \rightarrow S^3$ の固定点集合) の Alexander 多項式を用いて表すものである.

定理 9.4.1. $K \subset S^3$ を周期 q の周期的結び目とする. このとき

$$\delta_\lambda(t) \Delta_K(t) \doteq \prod_{i=0}^{q-1} D(t, \zeta_q^i)$$

をみたす 2 変数多項式 $D(t, s) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, s^{\pm 1}]$ が存在する. ただし $\delta_\lambda(t) = (1 - t^\lambda)/(1 - t)$ であり, λ は絡み数 $\text{lk}(K, A) = \text{lk}(\bar{K}, \bar{A})$ を表す. また ζ_q は 1 の原始 q 乗根を表す. とくに $D(t, s) = \Delta_{\bar{L}}(t, s)$ であり, Torres 条件 (定理 4.3.12) により $\Delta_{\bar{L}}(t, 1) = \delta_\lambda(t) \Delta_{\bar{K}}(t)$ となるので

$$\Delta_K(t) \doteq \Delta_{\bar{K}}(t) \prod_{i=1}^{q-1} \Delta_{\bar{L}}(t, \zeta_q^i)$$

が成り立つ.

問題 9.4.2. 絡み数 $\lambda = \text{lk}(K, A)$ は $(\lambda, q) = 1$ をみたすことを示せ.

さらに K の周期 q が素数べき $q = p^r$ (p は素数, $r > 0$) のとき,

$$\sum_{i=1}^{p^r} a_i \zeta_q^i \mapsto \sum_{i=1}^{p^r} [a_i] \pmod{p}$$

で定まる準同型写像 $\Phi_p : \mathbb{Z}[\zeta_q] \rightarrow \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ を考えることにより, つぎの合同式 (村杉合同式) が得られる.

定理 9.4.3. $K \subset S^3$ が周期 p^r の周期的結び目ならば, つぎの合同式が成り立つ:

$$\Delta_K(t) \equiv (\Delta_{\overline{K}}(t))^{p^r} (\delta_\lambda(t))^{p^r-1} \pmod{p}.$$

応用としてこの合同式を用いることで, 任意のファイバー結び目が有限個の周期しかもち得ないこと ([114] 参照) や, トーラス結び目 $T(p, q)$ の周期は p または q の約数に限る ([12] 参照) などの結果が導かれることが知られている.

例 9.4.4. 三葉結び目 $T(3, 2)$ の周期は 2 と 3 に限る. 実際, $T(3, 2)$ が周期 2 と 3 をもつことは容易にわかるので (図 9.5 参照), $T(3, 2)$ の周期がこれらに限ることを示そう. そこで周期 p (p は 5 以上の素数) をもつと仮定する. 村杉合同式から, ある多項式 $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が存在して

$$1 - t + t^2 \equiv f(t)^p (1 + t + \cdots + t^{\lambda-1})^{p-1} \pmod{p}$$

が成り立つ.

ここで $f(t)$ の定数項が p の倍数ならば, 右辺は \pmod{p} で定数項をもたないので合同式が不成立となる. 一方 p の倍数でなければ, 右辺は \pmod{p} で 3 次以上の非自明な項をもつか, あるいは定数となるので, この場合もやはり合同式は成り立たない. よって $T(3, 2)$ の周期は 2 と 3 に限ることがわかる.

つぎにこれらの結果を Kirk-Livingston によるねじれ Alexander 不変量 $\Delta_K^\rho(t)$ の枠組みに一般化する ($\Delta_K^\rho(t)$ は和田のねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{K,\rho}(t)$ の分子に対応している). $K \subset S^3$ を周期 q の周期的結び目とし, A, \overline{K} および \overline{A} を前述のとおりとする. さらに表現 $\bar{\rho} : G(\overline{K}) \rightarrow GL(n; R)$ ($R = \mathbb{Z}$ または \mathbb{Q}) が与えられているとし, $\rho : G(K) \rightarrow GL(n; R)$ を $\bar{\rho}$ のもち上げ (つまり ρ は自然な全射 $G(K) \rightarrow G(\overline{K})$ と $\bar{\rho}$ の合成で表される) とする. このときつぎが成り立つ.

定理 9.4.5. $\Delta_K^\rho(t) = \Delta_{\overline{K}}^{\bar{\rho}}(t) \prod_{i=1}^{q-1} F(t, \zeta_q^i)$ をみたす 2 変数多項式 $F(t, s) \in R[t^{\pm 1}, s^{\pm 1}]$ が存在する.

注意 9.4.6. $\Delta_K^\rho(t)$ が $\Delta_{\overline{K}}^{\bar{\rho}}(t)$ でわり切れることは, 定理 9.2.2 から従う.

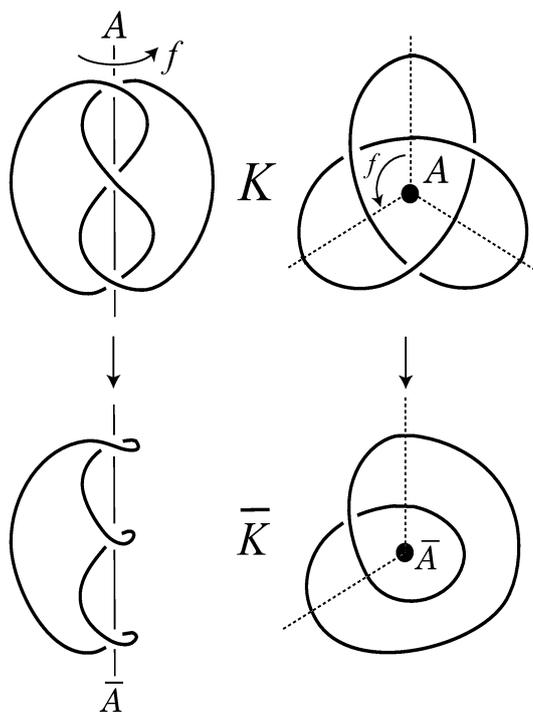


図 9.5 三葉結び目の周期

さらに村杉合同式の一般化としてつぎの関係式が得られる.

定理 9.4.7. 素数べき $q = p^r$ を周期とする周期的結び目 K とその表現 $\bar{\rho} : G(\bar{K}) \rightarrow GL(n; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ に対して, $\Delta_K^\rho(t) \neq 0$ ならば

$$\Delta_K^\rho(t) = \left(\Delta_{\bar{K}}^{\bar{\rho}}(t) \right)^q (\delta_{L,\rho}(t)/\Delta_0)^{q-1}$$

が成り立つ. ただし $\delta_{L,\rho}(t) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ であり, Δ_0 は 0 次元ホモロジー群の位数イデアルの生成元を表す.

注意 9.4.8. 多項式 $\delta_{L,\rho}(t)$ は村杉合同式における $\delta_\lambda(t)$ よりも複雑で具体的に書き下すことは一般に困難であるが, 多くの例では K と ρ の情報から決定することができる. とくに ρ が 1 次元自明表現の場合には, $\Delta_0 = 1 - t$, $\delta_{L,\rho}(t) = 1 - t^\lambda$ となっており, $\delta_\lambda(t)$ は $\delta_{L,\rho}(t)/\Delta_0$ に一致していることがわかる (特殊線形表現の場合, $\delta_{L,\rho}(t)$ は定理 8.4.1 (ii) を $\bar{L} = \bar{K} \cup \bar{A}$ に適用したときの $\Delta_{\bar{K},\bar{\rho}}(t)$ の係数多項式で与えられる).

ここでは証明を与えることはせず, 具体例をみていくことにする (詳細は原論文 [43] を参照のこと).

10 交点をもつ結び目 10_{163} を考える. これは既約 Alexander 多項式

$$\Delta_{10_{163}}(t) = 3t^4 - 9t^3 + 11t^2 - 9t + 3$$

をもつ. まずはじめに, 村杉の条件式は 10_{163} が周期 3 をもつことに関しての障害にならないことをみてみよう.

実際, $\Delta_{\overline{K}}(t) = \Delta_{10_{163}}(t)$ および $\lambda = 1$ とすると, これは定理 9.4.3 の 1 つの解であることがわかる. また, 定理 9.4.1 については,

$$\alpha = 1 + s + s^2, \quad D(t, s) = at^4 - 3at^3 + (4\alpha - 1)t^2 - 3at + \alpha$$

とすればよいことがわかる. さらにこれは村杉の条件式に対する唯一の解であることもわかる. そこで 10_{163} が周期 3 をもつと仮定する. 定理 9.4.3 を用いると, 絡み数 λ は 1 でなければならないことがわかる. 定理 9.4.1 から, ある多項式 $D(t) \in \mathbb{Z}[\zeta_3][t, t^{-1}]$ と非自明な $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ の Galois 自己同型写像 σ に対して, $\Delta_{10_{163}}(t)$ は

$$\Delta_{\overline{K}}(t)D(t)\sigma(D(t))$$

という分解をもつ可能性がある. しかしながら, $\Delta_{10_{163}}(t)$ は $\mathbb{Z}[\zeta_3][t, t^{-1}]$ において既約なので, 唯一の因子は $\Delta_{\overline{K}}(t) = \Delta_{10_{163}}(t)$ である.

つぎにねじれ Alexander 不変量に関する条件式は, 10_{163} が周期 3 をもつことの障害になることをみてみよう. 先の議論から, もしこれが実際に周期 3 をもつとすると, 商として得られる結び目 \overline{K} も同じ Alexander 多項式をもつことがわかる. したがって \overline{K} の 2 重分岐被覆は位数 $\Delta_{10_{163}}(-1) = 35$ のホモロジー群をもつことがわかる. これは 5 でわれるが 5^2 でわれないので, \overline{K} は共役を除いてただ 1 つ正 5 面体群 (fifth dihedral group) D_5 への全射準同型写像をもつことがわかる (D_5 への表現は 2 重分岐被覆の 1 次元ホモロジー群の $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ への表現と対応している).

正 5 面体群 D_5 は一般線形群 $GL(4; \mathbb{Z})$ への表現をもつ (位数 2 の自己同型写像は複素共役で与えられ, 位数 5 の自己同型は ζ_5 による積で与えられる). これは \mathbb{Z}^4 と $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ を自由アーベル群として同一視することにより定まる. よって 10_{163} それ自身も, 共役を除いてただ 1 つ $GL(4; \mathbb{Z})$ への非自明な表現 ρ をもつことになる. もちろんこれは, \overline{K} の表現の持ち上げでなければならない.

この表現 ρ に関して, 直接計算から, 10_{163} のねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{10_{163}}^\rho(t) = (11t^8 - 21t^6 - 39t^4 - 21t^2 + 11)(t-1)^3(t+1)^3$$

で与えられることがわかる. 上記因数分解に現れる各因子は $\mathbb{Z}[\zeta_3][t, t^{-1}]$ において既約である. ゆえに定理 9.4.5 から

$$\Delta_{\overline{K}}^\rho(t) = \Delta_{10_{163}}^\rho(t)$$

が成り立つことがわかる. このとき定理 9.4.7 の条件式が成り立たないことは明らかである. したがって 10_{163} は周期 3 をもたないことがわかる.

さらに、定理 9.4.5 および定理 9.4.7 は自明な Alexander 多項式をもつ結び目の周期の決定に関しても有効である (これらの結び目に対しては、村杉の条件式は無力である). [43] において、11 交点をもつこのような結び目に対する例がいくつか計算されている. また、結び目の自由周期 (free period) に関する Hartley の結果 [36] のねじれ Alexander 不変量への一般化についても述べられているので、興味のある読者には一読をお勧めする.

第 10 章

関連する話題

この章ではねじれ Alexander 不変量に関連する話題について簡単に触れることにする。結び目群とは限らない有限表示群に対するねじれ Alexander 不変量の計算例として、組み紐群とその Jones 表現を扱う。また、Lefschetz ゼータ関数の一般化としてねじれ Lefschetz ゼータ関数を導入し、特別な場合、それがねじれ Alexander 不変量として解釈できることをみる。結び目の Morse 理論と Alexander 多項式の関連についても述べる。

10.1 組み紐群

7.1 節で導入したねじれ Alexander 不変量は、結び目や絡み目の群だけでなく自由アーベル群 T_r への全射準同型写像

$$\alpha : G \rightarrow T_r$$

をもつ有限表示群 G に対して定義されていた。このような群 G に対してねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{G,\rho}(t_1, \dots, t_r)$ が組織的に計算されている例として、組み紐群 (braid group) とその Jones 表現 (Jones representation) がある。この節ではこれらの結果の概説を行う。

n 本の紐からなる**組み紐群**を B_n で表す。容易にわかるように、 $B_2 \cong \mathbb{Z}$ が成り立つ。また $B_3 \cong G(3_1)$ も成り立つ (1.5 節参照)。そこで、以後 $n \geq 3$ を仮定しよう。

組み紐群 B_n に対して、 $n - 1$ 個の生成元 $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ と以下の 2 種類の関係をもつ群表示が存在する (Artin [4] を参照):

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i & (|i - j| \geq 2), \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & (i = 1, \dots, n - 2). \end{aligned}$$

また、 B_n の可換化準同型写像 $\alpha : B_n \rightarrow \mathbb{Z} = \langle t \rangle$ は

$$\alpha(\sigma_1) = \dots = \alpha(\sigma_{n-1}) = t$$

で与えられる.

さて, 組み紐群 B_n の既約線形表現としてよく知られているものの中に **Burau 表現** とよばれているものがある [7]. これは, 自由群 F_n の自己同型群 $\text{Aut } F_n$ の部分群に対して定義される Magnus 表現の典型的な例になっている [6]. 具体的には, B_n の Burau 表現

$$\beta: B_n \rightarrow GL(n-1; \mathbb{Z}[s, s^{-1}])$$

はつぎのように定義される:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\mapsto \begin{pmatrix} -s & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-3}, & \sigma_{n-1} &\mapsto I_{n-3} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -s \end{pmatrix}, \\ \sigma_i &\mapsto I_{i-2} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & -s & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-2} \quad (1 < i < n-1). \end{aligned}$$

ここで I_n は $n \times n$ 単位行列を表す. このときつぎが成り立つ.

命題 10.1.1. 組み紐群 B_n ($n \geq 3$) の Burau 表現 $\beta: B_n \rightarrow GL(n-1; \mathbb{Z}[s, s^{-1}])$ に付随したねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{B_n, \beta}(t) = \begin{cases} 1 - st^2 & (n = 3) \\ 1 & (n \geq 4) \end{cases}$$

で与えられる.

$n = 3$ の場合の計算は例 7.1.9 ですで行っているもので, ここでは $n \geq 4$ の場合を考える. 証明は初等的な線形代数の知識で十分であるが, 計算はやや繁雑である.

まず, 簡単な計算からねじれ Alexander 不変量の分母はつぎで与えられる.

補題 10.1.2. $\det \Phi(1 - \sigma_{n-1}) = (1 - t)^{n-2}(1 + st)$.

分子の計算を実行するために, B_n の群表示に現れる各関係につぎの手順で番号づけを行う. まず生成元 σ_i と σ_j の間の関係を $[i, j]$ で表す. つぎに関係 $[i, j]$ たちの順序づけは表 10.1 のように行う (この表 10.1 は B_6 に対する行列 M_5 を計算するのに十分である). ただし, 表 10.1 において空白になっている部分はすべて 0 である.

分子の計算についてつぎのことがわかる.

補題 10.1.3. 番号の組 I の任意の選び方に対して, $\det M_{n-1}^I$ は $(1 - t)^{n-2}(1 + st)$ でわり切れる.

証明 まずはじめに, 行列 M_{n-1} を列ベクトル \mathbf{m}_j ($1 \leq j \leq n-2$) によって表しておく:

$$M_{n-1} = \left(\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial \sigma_j} \right) \right) = (\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{n-2}).$$

表 10.1 関係 $[i, j]$ の番号づけ

	$\partial r_i / \partial \sigma_1$	$\partial r_i / \partial \sigma_2$	$\partial r_i / \partial \sigma_3$	$\partial r_i / \partial \sigma_4$
$r_1 = [1, 2]$	$1 - \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2$	$-1 + \sigma_1 - \sigma_2 \sigma_1$		
$r_2 = [1, 3]$	$1 - \sigma_3$		$\sigma_1 - 1$	
$r_3 = [2, 3]$		$1 - \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3$	$-1 + \sigma_2 - \sigma_3 \sigma_2$	
$r_4 = [1, 4]$	$1 - \sigma_4$			$\sigma_1 - 1$
$r_5 = [2, 4]$		$1 - \sigma_4$		$\sigma_2 - 1$
$r_6 = [3, 4]$			$1 - \sigma_4 + \sigma_3 \sigma_4$	$-1 + \sigma_3 - \sigma_4 \sigma_3$
$r_7 = [1, 5]$	$1 - \sigma_5$			
$r_8 = [2, 5]$		$1 - \sigma_5$		
$r_9 = [3, 5]$			$1 - \sigma_5$	
$r_{10} = [4, 5]$				$1 - \sigma_5 + \sigma_4 \sigma_5$

ただし

$$\mathbf{m}_j = \left(\Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial \sigma_j} \right), \dots, \Phi \left(\frac{\partial r_l}{\partial \sigma_j} \right) \right)^T$$

であり, l は組み紐群 B_n の Artin の表示における関係の個数を表している (つまり $l = (n-1)(n-2)/2$). このとき各列ベクトル \mathbf{m}_j の j 列目は, 共通因子 $1-t$ を含んでいることがわかる. 実際表 10.1 から, \mathbf{m}_j における非自明な部分は以下の $n-2$ 個の行列である:

$$n-2 \begin{cases} \Phi(\sigma_1 - 1) \\ \dots \\ \Phi(\sigma_{j-2} - 1) \\ \Phi(-1 + \sigma_{j-1} - \sigma_j \sigma_{j-1}) \quad \dots (*) \\ \Phi(1 - \sigma_{j+1} + \sigma_j \sigma_{j+1}) \quad \dots (**) \\ \Phi(1 - \sigma_{j+2}) \\ \dots \\ \Phi(1 - \sigma_{n-1}) \end{cases}$$

明らかに最初の $j-2$ 個の行列 $\Phi(\sigma_1 - 1), \dots, \Phi(\sigma_{j-2} - 1)$ において, 各々 j 列目にある非自明な成分は $-1+t$ のみである. 同様に最後の $n-j-2$ 個の行列において, j 列目にある非自明な成分は $1-t$ のみである. さらに直接計算から, 行列 (*) の j 列目は

$$\underbrace{(0, \dots, 0, t - t^2, -1 + t, 0, \dots, 0)}_{j-2}^T$$

であり, 行列 (**) の j 列目は

$$\underbrace{(0, \dots, 0, 1 - t, -st + st^2, 0, \dots, 0)}_{j-1}^T$$

であることがわかる. よって各列ベクトル \mathbf{m}_j ($1 \leq j \leq n-2$) の j 列目から $1-t$ を 1

つずつくり出すことができる. ゆえに行列 M_{n-1} の列ベクトルに関する共通因子として $(1-t)^{n-2}$ が得られる.

つぎに行列 M_{n-1} において, $(n-1), 2(n-1), \dots, (n-3)(n-1)$ 番目の各列および $(n-2)(n-1) - 1$ 列目の $-t$ 倍を $(n-2)(n-1)$ 列目に加えると, $(n-2)(n-1)$ 番目の列ベクトルは

$$(0, \dots, 0, \overbrace{0, \dots, 0}^{(n-1)(n-3)}, 1+st, \dots, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-2}, 1+st, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-3}, -t-st^2, 1+st)^T$$

となる. ただし $m = (n-1)(n-2)(n-3)/2$ である. それゆえ, この列から共通因子として $1+st$ をくり出すことができる. 後の計算で必要になるので, M から $(1-t)^{n-2}(1+st)$ をくり出して得られる行列を \overline{M}_{n-1} によって表すことにする. 以上の議論から

$$(1-t)^{n-2}(1+st) \mid \det M_{n-1}^I$$

が任意の番号の組 I に対して成り立つことがわかる. □

行列 \overline{M}_{n-1} が列ベクトルに関して他の共通因子をもたないこと, つまり

$$Q_{n-1}(t) = \gcd(\det M_{n-1}^I) = (1-t)^{n-2}(1+st)$$

が成り立つことを示すために, つぎの補題が必要である (証明は [85] を参照のこと).

補題 10.1.4. 以下をみたす番号の組 I, I', I'' が存在する:

- (i) $\det \overline{M}_{n-1}^I = (1+st)^{n-3}(1-st^2)^{n-2}(1-t+t^2)^{(n-2)(n-3)}$ ($n \geq 4$),
- (ii) $\det \overline{M}_{n-1}^{I'} = (1+st)^{n-3}(1-t)^{(n-2)(n-3)}$ ($n \geq 5$),
- (iii) $n \geq 4$ に対して, $\det \overline{M}_{n-1}^{I''}$ は $1+st$ を因子として含まない.

補題 10.1.5. $Q_{n-1}(t) = (1-t)^{n-2}(1+st)$.

証明 $n = 4$ の場合, 補題 10.1.4 (i) と

$$\det \overline{M}_3^J = (1-t)(1+st-st^2)(1+st-st^2+st^3-s^2t^3)$$

となる番号の組 J が存在することから, 主張は従う. $n \geq 5$ の場合は補題 10.1.3 と補題 10.1.4 から明らかである. □

補題 10.1.2 と補題 10.1.5 を組み合わせることにより, 命題 10.1.1 はただちに従う.

注意 10.1.6. よく知られているように組み紐群 B_n は 2 元生成群である (例えば σ_1 と $\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}$ は 1 つの生成系となる). しかしながら, ねじれ Alexander 不変量を計算する際, この生成系に関する表示が Artin の表示 [4] よりも適しているとは一概にはいえない.

注意 10.1.7. 組み紐群 B_n の Burau 表現は $n = 3$ のとき忠実 (つまり単射準同型写像) で, $n \geq 5$ のとき忠実でないことが知られている [5], [6]. また $n = 4$ の場合は現在未解決である. 命題 10.1.1 の計算結果から, 表現の忠実性とねじれ Alexander 不変量の関連性について興味もたれるが, これについては否定的な解答が [109] で与えられている. 具体的には, 組み紐群 B_4 の忠実表現として知られている **Lawrence-Krammer 表現** ([73], [71] 参照)

$$LK : B_4 \rightarrow GL(6; \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, s^{\pm 1}])$$

に対して $\Delta_{B_4, LK}(t) = 1$ の成立が示されている.

つぎに組み紐群 B_n の Jones 表現 [49] について考えよう. $H(q, n)$ を A_{n-1} 型の岩堀-Hecke 環とする. つまり $H(q, n)$ は生成元 g_1, \dots, g_{n-1} と以下の 2 種類の関係をみたす $\mathbb{C}(q)$ 上の代数のことである:

$$\begin{aligned} g_i^2 &= (q-1)g_i + q, \\ g_i g_{i+1} g_i &= g_{i+1} g_i g_{i+1}, \\ g_i g_j &= g_j g_i \quad (|i-j| \geq 2). \end{aligned}$$

ただし q はパラメーターである. このとき対応 $\sigma_i \mapsto g_i$ は組み紐群 B_n から岩堀-Hecke 環 $H(q, n)$ への群準同型写像を定める. Jones は [49] においてパラメーター q が 1 に近いとき, 単純 $H(q, n)$ 加群 (あるいは B_n の 2 次既約表現) は n 箱の Young 図形と 1 対 1 対応にあることを考察している. さらにそれらの分岐則 (既約表現への分解の仕方) は, 対称群 \mathfrak{S}_n に対するものと一致することもわかる (以上のことは, 正確には, q が 0 もしくは 1 のべき根でなければ成立する). これらの表現を組み紐群の **Jones 表現** とよぶ.

さて, ここで 5 箱までの Young 図形を記しておこう (図 10.1). 行と列の対称性による表現と Young 図形の対応の不定性をなくすために, ここでは $(2) = \square\square$ を対称群 \mathfrak{S}_2 の自明表現と定めることにする. 一般に記号 (n_1, \dots, n_r) によって, 上から順に n_1, \dots, n_r 箱ずつ並んだ $n = \sum_i n_i$ 箱の Young 図形を表すことにする. また, 異なる行を結んでいる線分は表現の制限を表している. つまり B_n の既約表現を B_{n-1} に制限した際の既約分解を表している.

例 10.1.8. B_n の 1 次元表現 $\rho = (n)$ は

$$\rho(\sigma_i) = q \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

で与えられる. このとき対応するねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{B_n, \rho}(t) = \begin{cases} \frac{1-qt+q^2t^2}{1-qt} & (n=3, 4) \\ \frac{1}{1-qt} & (n \geq 5) \end{cases}$$

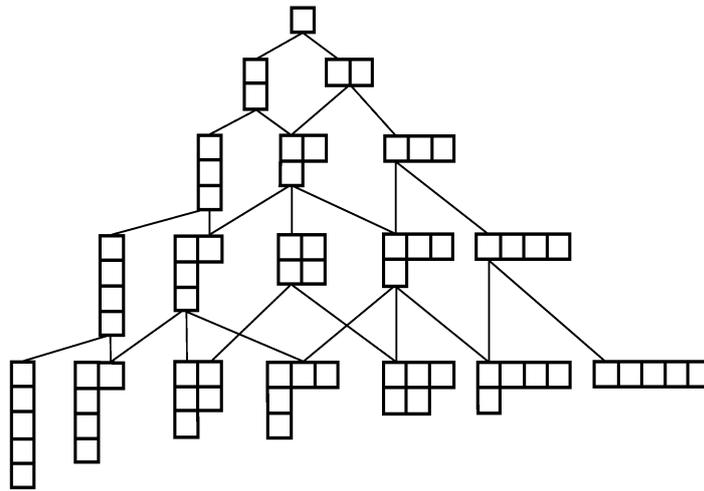


図 10.1 Jones 表現の既約分解

となる. また $\rho(\sigma_i) = -1$ によって定まる Young 図形が対称な 1 次元表現 $\rho = (1, \dots, 1)$ に対して, 同様の計算から

$$\Delta_{B_n, \rho}(t) = \begin{cases} \frac{1+t+t^2}{1+t} & (n=3, 4) \\ 1 & (n \geq 5) \end{cases}$$

を得る.

注意 10.1.9. 対称群の既約表現とそれらの Young 図形による分類については, 例えば [22] を参照のこと.

さて Jones 表現に対する興味深い性質として, ねじれ Alexander 不変量の対称性を示そう. Young 図形 Y に対する岩堀-Hecke 環 $H(q, n)$ の既約表現を π_Y で表し, ρ_Y で組み紐群 B_n に対する表現を表すことにする. つまり B_n と $H(q, n)$ の各生成元に対して

$$\rho_Y(\sigma_i) = \pi_Y(g_i) \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

をみたすとする. さらに Young 図形 Y の行と列を入れかえることによって得られる対称な Young 図形を Y' で表すことにする. このとき Young 図形 Y と Y' の対称性は岩堀-Hecke 環 $H(q, n)$ の自己同型写像 $g_i \mapsto -qg_i^{-1}$ に対応しているので ([49] Note 4.6 参照),

$$\rho_{Y'}(\sigma_i) = \pi_{Y'}(g_i) = -q\pi_Y(g_i)^{-1}$$

が成り立つことがわかる. よって

$$\begin{aligned} \Phi'(\sigma_i) &:= (\rho_{Y'} \otimes \alpha)(\sigma_i) \\ &= -qt\pi_Y(g_i)^{-1} \\ &= (-q^{-1}t^{-1}\pi_Y(g_i))^{-1} \end{aligned}$$

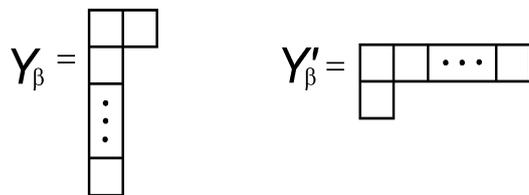


図 10.2 Burau 表現とその共役表現

が成り立つ. この等式から, Φ' を用いて定まるねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{B_n, \rho_{Y'}}(t)$ は, 環準同型写像

$$\sigma_i \mapsto -q^{-1}t^{-1}\pi_Y(g_i)$$

から定まるねじれ Alexander 不変量に, εt^e の形の元をかけることを除いて一致することがわかる. ただし, ε は Laurent 多項式環 $\Lambda_q = \mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ の単元であり, e は整数を表す. さらに, この環準同型写像は $\Phi(\sigma_i) = t\pi_Y(g_i)$ に対して変換 $t \mapsto -q^{-1}t^{-1}$ を施したものに他ならない. 以上の議論からつぎが示された.

定理 10.1.10. 対称な Young 図形 Y と Y' に対して, 単元 εt^e ($\varepsilon \in \Lambda_q^\times, e \in \mathbb{Z}$) 倍を除いて

$$\Delta_{B_n, \rho_{Y'}}(t) = \overline{\Delta_{B_n, \rho_Y}(t)}$$

が成り立つ. ただし, $\bar{\cdot}: \Lambda_q[t, t^{-1}] \rightarrow \Lambda_q[t, t^{-1}]$ は変換 $t \mapsto -q^{-1}t^{-1}$ から誘導される対合を表す.

Burau 表現 β は Young 図形 $Y_\beta = (2, 1, \dots, 1)$ に対応することが知られている ([49] Note 5.7 参照). よって命題 10.1.1 と定理 10.1.10 からつぎの系が得られる (図 10.2).

系 10.1.11. $\Delta_{B_n, Y_\beta}(t) = 1$ ($n \geq 4$).

つぎに Jones 表現に対する基本的な性質として, 表現の分岐則に対応したねじれ Alexander 不変量の振る舞いを記述する.

補題 10.1.12. \tilde{Y} を $n+1$ 箱 Young 図形とし, Y_1, \dots, Y_l を \tilde{Y} から 1 箱とり除いて得られる n 箱 Young 図形とする. このとき

$$\Delta_{B_n, \tilde{Y}}(t) = \prod_{k=1}^l \Delta_{B_n, Y_k}(t)$$

が成り立つ.

証明 表現 $\rho_{\tilde{Y}}$ に付随した B_{n+1} の Alexander 行列を \tilde{M} で表す. $\rho_{\tilde{Y}}$ の B_n への制限は $\rho_{Y_1}, \dots, \rho_{Y_l}$ の直和なので, 部分 Alexander 行列 $\tilde{M}|_{B_n}$ は行列としての直和分解をもつことがわかる. よって, ねじれ Alexander 不変量の定義から主張は従う. \square

* 問題 10.1.13. 補題 10.1.12 と同じ仮定のもとで, $\Delta_{B_{n+1}, \tilde{Y}}(t)$ はある Laurent 多項式 $A(t)$ を用いて

$$\Delta_{B_{n+1}, \tilde{Y}}(t) = A(t) \prod_{k=1}^l \Delta_{B_n, Y_k}(t)$$

の形に表されることを示せ (9.2 節参照).

最後に 5 箱までの Young 図形に対するねじれ Alexander 不変量を計算する. $n = 3, 4$ に対しては図 10.1 よりほとんどすべての岩堀-Hecke 環表現は本質的に Burau 表現であることがわかる. よって命題 10.1.1, 例 10.1.8 および系 10.1.11 により, この場合の計算は完了している. 実際 Young 図形 $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ に対応する B_4 の 2 次元既約表現は $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ を経由するので, それらのねじれ Alexander 不変量は一致する.

例 10.1.14. Young 図形 $Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ に対する計算を行う. この場合 B_5 の各生成元の像はつぎの各行列で与えられる [72]:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{q} & 0 & 0 & \sqrt{q} \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, & \sigma_2 &\mapsto \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{q} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{q} & -1 & \sqrt{q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{q} & \sqrt{q} & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{q} & -1 \end{pmatrix}, & \sigma_4 &\mapsto \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{q} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q} & 0 & -1 & \sqrt{q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

直接計算から, ねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{B_5, Y}(t) = \frac{1}{(1+t)(1-qt)}$$

となる. 定理 10.1.10 から, Y と対称な Young 図形 Y' に対して, $\Delta_{B_5, Y'}(t)$ はこの有理関数に一致することがわかる.

例 10.1.15. つぎに Young 図形 $Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ について計算する. この場合, 行列表現は以下のとおりである:

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \sqrt{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{q} & -1 & \sqrt{q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{q} & -1 & 0 & \sqrt{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \sqrt{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{q} & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 \mapsto \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{q} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 10.1.14 と同様の計算から、ねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{B_5, Y}(t) = \frac{1}{(1+t)^3(1-qt)^3}$$

で与えられる. Young 図形 Y は行と列の入れかえに関して対称なので, この有理関数は変換 $t \mapsto -q^{-1}t^{-1}$ のもとで不変である.

10.2 ねじれ Lefschetz ゼータ関数

この節では S^1 上の曲面束 (写像トーラス) のねじれ Alexander 不変量が曲面の自己同型写像のねじれ Lefschetz ゼータ関数として解釈できることを述べる. 詳しくは [48] を参照のこと.

コンパクト連結多様体 X 上の連続写像 $f: X \rightarrow X$ を考える. このとき f の写像トーラス M_f とは, $X \times \mathbb{R}$ において $(x, s+1)$ と $(f(x), s)$ を同一視することによって得られる商空間を表す. 写像トーラス M_f 上には自然な半流れ (semi-flow)

$$\varphi: M_f \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M_f, \quad \varphi_u(x, s) = (x, s+u) \quad (u \geq 0)$$

が存在する (ただし, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ である). X 上の点 x と正数 $r > 0$ は M_f 内に軌道曲線 (orbit curve)

$$\varphi_{(x,r)} = \{\varphi_u(x)\}_{0 \leq u \leq r}$$

を定める. ここで, X を切断 $X \times 0 \subset M_f$ と同一視すると, 写像 $f: X \rightarrow X$ はちょうど半流れ φ の反復写像 (return map) であることがわかる.

$x \in X$ の時間 1 の軌道曲線 $\varphi_{(x,1)}$ が M_f における閉曲線であるとき x を f の固定点 (fixed point) という. f の固定点からなる集合を $\text{Fix}(f)$ で表し, 固定点集合 (fixed point set) とよぶ. 2つの閉曲線 $\varphi_{(x,1)}$ と $\varphi_{(y,1)}$ が M_f 内で自由ホモトピック (free homotopic) であるとき固定点 $x, y \in X$ は同じ固定点類 (fixed point class) に属するという. 各固定点類 \mathfrak{x} は固定点集合 $\text{Fix}(f)$ の孤立部分集合なので, その指数 $\text{ind}(\mathfrak{x}, f) \in \mathbb{Z}$ が定義される (指数の定義については, 例えば [38] を参照のこと).

これらの諸概念は以下のように周期的軌道類 (periodic orbit class) に一般化される. f の周期点集合 (periodic point set) を

$$\text{PP}(f) = \{(x, n) \in X \times \mathbb{N} \mid x = f^n(x)\}$$

で表す ($n = 1$ の場合が上述の固定点集合である). つまり, 時間 n の軌道曲線 $\varphi_{(x,n)}$ が M_f 内の閉曲線であるとき $(x,n) \in \text{PP}(f)$ (これは $x \in \text{Fix}(f^n)$ と同値) となる. 2 つの閉曲線 $\varphi_{(x,n)}$ と $\varphi_{(y,n)}$ が M_f 内で自由ホモトピックであるとき, $x, y \in \text{Fix}(f^n)$ は同じ位数 n の周期的軌道類 (periodic orbit class of order n) に属するという. したがって位数 1 の周期的軌道類とは固定点類に他ならないことがわかる. また, 位数 n の周期的軌道類 $\mathfrak{o}^{(n)}$ は $\text{Fix}(f^n)$ の孤立部分集合なので, 固定点指数 (fixed point index) $\text{ind}(\mathfrak{o}^{(n)}, f^n) \in \mathbb{Z}$ が定義される.

X の点 v をとり, v が 0-セルの 1 つとなるような X のセル分解 $\{e_j^d\}_{j,d}$ をとる. ただし, $e_1^d, \dots, e_{j_d}^d$ で X の d -セル全体を表すことにする. このセル分解は普遍被覆 \tilde{X} 上の $G = \pi_1(X)$ 不変なセル分解へもち上がる. 各 e_j^d に対してもち上げ \tilde{e}_j^d を 1 つずつえらぶと, \tilde{X} の胞体的鎖複体に対する $\mathbb{Z}G$ 基底が得られる. また一般性を失うことなく, f は胞体的写像と仮定してよい. このとき各次元 d において, f のもち上げである胞体的写像 \tilde{f} は, これらの基底に関して $\mathbb{Z}G$ 行列 \tilde{F}_d を定める. つまり

$$\tilde{f}(\tilde{e}_i^d) = \sum_j a_{ij} \tilde{e}_j^d \quad (a_{ij} \in \mathbb{Z}G)$$

によって行列 $\tilde{F}_d = (a_{ij})$ を定める.

さて, 写像トーラス $M_f = X \times \mathbb{R} / \sim$ の基本群

$$\Gamma = \pi_1(M_f) = \langle g_i, h \mid g_i h = h f_*(g_i), g_i \in G \rangle$$

の表現 $\rho: \Gamma \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$ が与えられているとする. ただし \mathbb{F} は標数 0 の体とする. これを \mathbb{Q} 上の群環に拡張した写像も同じ記号 $\rho: \mathbb{Q}\Gamma \rightarrow M(n; \mathbb{F})$ で表す. このとき $f: X \rightarrow X$ のねじれ Lefschetz 数 (twisted Lefschetz number) を

$$L_\rho^{(k)}(f) = \sum_{\mathfrak{o}^{(k)}} \text{ind}(\mathfrak{o}^{(k)}, f^k) \text{tr}([\varphi_{(x,k)}]^\rho) \in \mathbb{F}$$

によって定める. ここで $[\varphi_{(x,k)}]$ は閉曲線 $\varphi_{(x,k)}$ の Γ における共役類を表し, $\gamma^\rho = \rho(\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$) とする. とくに f^k のすべての固定点が孤立しているとき

$$L_\rho^{(k)}(f) = \sum_{(x,k) \in \text{PP}(f)} \text{ind}(x, f^k) \text{tr}(\varphi_{(x,k)}^\rho) \in \mathbb{F}$$

となることがわかる. このときねじれ Lefschetz 数 $L_\rho^{(k)}(f)$ はつぎの跡公式 (trace formula) をもつ:

$$\begin{aligned} L_\rho^{(k)}(f) &= \sum_d (-1)^d \text{tr} \left((h \tilde{F}_d)^k \right)^\rho \\ &= \sum_d (-1)^d \text{tr} \left((h \tilde{F}_d)^\rho \right)^k. \end{aligned}$$

さて, $f : X \rightarrow X$ のねじれ **Lefschetz ゼータ関数** (twisted Lefschetz zeta function) $\zeta_\rho(f)$ を形式的べき級数

$$\zeta_\rho(f) = \exp \left(\sum_k L_\rho^{(k)}(f) \frac{t^k}{k} \right) \in \mathbb{F}[[t]]$$

によって定義する. このとき $\zeta_\rho(f)$ は定数項 1 をもつので, 形式的べき級数環 (formal power series ring) $\mathbb{F}[[t]]$ の乗法的部分群 $1 + t\mathbb{F}[[t]]$ に入ることがわかる.

注意 10.2.1. $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ かつ $\rho : \Gamma \rightarrow GL(1; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} - \{0\}$ が 1 次元自明表現のとき, $L_\rho^{(n)}(f)$ は古典的な Lefschetz 数に一致し, 上記跡公式は Lefschetz 数に対して成り立つものと同値となる. このとき $\zeta_\rho(f)$ は Weil [122] による Lefschetz ゼータ関数に一致する.

定理 10.2.2. ねじれ Lefschetz ゼータ関数 $\zeta_\rho(f)$ は \mathbb{F} 上の有理関数であり

$$\zeta_\rho(f) = \prod_d \det \left(I - t(h\tilde{F}_d)^\rho \right)^{(-1)^{d+1}} \in \mathbb{F}(t)$$

が成り立つ.

証明 行列の $\exp \operatorname{tr}$ を $\log \det$ におきかえることにより

$$\begin{aligned} \zeta_\rho(f) &= \exp \left(\sum_k L_\rho^{(k)}(f) \frac{t^k}{k} \right) \\ &= \exp \left(\sum_k \sum_d (-1)^d \operatorname{tr} \left((h\tilde{F}_d)^\rho \right)^k \frac{t^k}{k} \right) \\ &= \exp \left(\sum_d (-1)^{d+1} \left(- \sum_k \frac{1}{k} \operatorname{tr} \left(t(h\tilde{F}_d)^\rho \right)^k \right) \right) \\ &= \exp \left(\sum_d (-1)^{d+1} \log \det \left(I - t(h\tilde{F}_d)^\rho \right) \right) \\ &= \prod_d \det \left(I - t(h\tilde{F}_d)^\rho \right)^{(-1)^{d+1}} \end{aligned}$$

となることがわかる. □

ねじれ Lefschetz ゼータ関数に対するつぎのホモトピー不変性は, Nielsen 固定点理論 (Nielsen fixed point theory) のホモトピー不変性と同様に示される ([47] 定理 I.4.5 参照).

定理 10.2.3. f と f' がホモトピー同値ならば $\zeta_\rho(f) = \zeta_\rho(f')$ が成り立つ.

このことから, つぎの系 (**Lefschetz 固定点定理**のねじれ版) が得られる.

系 10.2.4. $f: X \rightarrow X$ が周期点をもたない写像 $g: X \rightarrow X$ にホモトピックならば、任意の表現 $\rho: \pi_1(M_f) \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$ に対して $\zeta_\rho(f) = 1$ が成り立つ。

さて、以上のことを境界を 1 つもつコンパクト曲面 $X = \Sigma$ および同相写像 $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ に対して適用する。写像トーラス M_f の基本群 $\Gamma = \pi_1(M_f)$ はつぎの群表示をもつ:

$$\Gamma = \langle x_1, \dots, x_{2g}, h \mid x_i h = h f_*(x_i), 1 \leq i \leq 2g \rangle \quad (10.1)$$

ただし x_1, \dots, x_{2g} は曲面群 $\pi_1(\Sigma) = F_{2g}$ の生成元を表す。このときつぎが成り立つ。

定理 10.2.5. $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ のねじれ Lefschetz ゼータ関数は M_f のねじれ Alexander 不変量と一致する。つまり任意の表現 $\rho: \Gamma \rightarrow GL(n; \mathbb{F})$ に対して

$$\zeta_\rho(f) = \Delta_{\Gamma, \rho}(t)$$

が成り立つ。

証明 [15] で示されているように、直接計算から

$$\tilde{F}_0 = I, \quad \tilde{F}_1 = D = \left(\frac{\partial f_*(x_i)}{\partial x_j} \right)$$

であることがわかる。このとき定理 10.2.2 より

$$\zeta_\rho(f) = \frac{\det(I - t(hD)^\rho)}{\det(I - th^\rho)}$$

となる。一方、 Γ の表示 (10.1) に対するねじれ Alexander 不変量が上式に一致することは、9.1 節と同様の計算からわかる (確かめよ)。□

とくに ρ が非可換 $SL(2; \mathbb{F})$ 表現の場合、命題 8.1.2 と同様の議論から、定理 10.2.5 の系としてつぎが成り立つことがわかる。

系 10.2.6. 写像トーラス M_f の任意の非可換表現 $\rho: \pi_1(M_f) \rightarrow SL(2; \mathbb{F})$ に対して、ねじれ Lefschetz ゼータ関数 $\zeta_\rho(f)$ は \mathbb{F} 上の多項式になる。

* **問題 10.2.7.** 系 10.2.6 を示せ ([61] を参照のこと)。

10.3 結び目, 絡み目の Morse 理論と Alexander 多項式

Morse 理論は幾何学, トポロジーの様々な場面において顔をだす大切な理論である。その基本的なアイデアや概念は参考文献 [78] や [80] をみていただくことにし、本節では Novikov [94] によって創始された **多重値 Morse 理論** を結び目と絡み目に適用することを

考える. 現在も研究が進んでいる分野であるが, これまでに得られた結果やその証明のアイデアを紹介することにする. より詳しく知りたい読者には, [98], [99] の一読をお勧めする.

通常, Morse 関数は可微分多様体から \mathbb{R} への写像のことであるが, ここでは絡み目補空間から S^1 への Morse 写像を考える. Morse 写像とは, その特異点がすべて Morse 型になっている写像のことを表す. 値域が通常の Morse 関数とは異なるが, 理論全体として通常の Morse 理論のアナロジーができる.

以下, L はすべて向きづけられた絡み目を表すこととし, $C(L) = S^3 - L$ とおくことにする.

定義 10.3.1. Morse 写像 $f : C(L) \rightarrow S^1$ が正則であるとは, L の各成分 L_i が以下の条件をみたす近傍 $S^1 \times D^2$ をもつことである.

- (i) $L_i = S^1 \times \{0\}$;
- (ii) $f|_{S^1 \times (D^2 - \{0\})} \rightarrow S^1$ は $(x, y) \rightarrow y/|y|$ で与えられる.

注意 10.3.2. 以下では, Morse 写像は常に正則なものと仮定し, $m_p(f)$ で f の指数 p の特異点の個数を表すことにする. 絡み目補空間 $C(L)$ は 3 次元多様体であるので, $p \geq 4$ のとき $m_p(f) = 0$. ゆえに考察する対象は $p \leq 3$ の場合である. とくに f が特異点をもたない場合, すなわち $m_p(f) = 0$ ($p = 0, 1, 2, 3$) のとき, L はファイバー絡み目である.

さて, \mathbb{Z} -係数 Laurent 多項式環 $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ を拡大した $\hat{\Lambda} = \mathbb{Z}((t)) = \mathbb{Z}[[t]][t^{-1}]$ を考えよう. ここで,

$$\hat{\Lambda} = \mathbb{Z}((t)) = \mathbb{Z}[[t]][t^{-1}] = \left\{ \sum_{n=0}^k a_n t^{-n} \mid a_n \in \mathbb{Z}[[t]] \right\},$$

$$\text{ただし } \mathbb{Z}[[t]] = \left\{ a_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n t^n \mid a'_n \in \mathbb{Z} \right\}$$

であるので, $\hat{\Lambda}$ は $\{n \leq 0 \mid b_n \neq 0\}$ が有限個であるべき級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n t^n$ ($b_n \in \mathbb{Z}$) のなす環である. $\hat{\Lambda}$ は主イデアル整域となり, **Novikov 環** とよばれている.

以下で扱う (コ) ホモロジーは, すべて \mathbb{Z} -係数とする. 絡み目 L の各成分 L_i のメリディアン $\mu_i \in H_1(C(L))$ に対し, $\xi_L(\mu_i) = 1$ をみたすコホモロジー類 $\xi_L \in H^1(C(L))$ が一意的に存在する. この ξ_L に付随した無限巡回被覆を $C(L)_{\infty} \rightarrow C(L)$ と書くことにする. 多重値 Morse 理論を述べるには, $H_*(C(L)_{\infty})$ の代わりに $\hat{H}_*(L) = H_*(C(L)_{\infty}) \otimes_{\Lambda} \hat{\Lambda}$ を考察するのが適している.

注意 10.3.3. ホモロジー $\widehat{H}_*(L)$ を **Novikov ホモロジー** とよぶ. このホモロジーは Morse 理論を利用して構成される Morse ホモロジーの観点から考察するのが通常である. Morse ホモロジーについては, [39] に解説があるので参考のこと.

$\widehat{b}_i(L)$ を $\widehat{H}_i(L)$ の $\widehat{\Lambda}$ 上の階数とし, $\widehat{q}_i(L)$ を $\widehat{H}_i(L)$ のねじれ部分の生成元の最小数とすると, つぎの不等式が成立する [98]. これは閉多様体に対する Morse の不等式, Novikov の不等式 [94] に対応する.

命題 10.3.4.

$$m_i(f) \geq \widehat{b}_i(L) + \widehat{q}_i(L) + \widehat{q}_{i-1}(L).$$

そこで, $\widehat{b}_i(L), \widehat{q}_i(L)$ について調べよう.

補題 10.3.5. $\widehat{H}_0(L) = 0$, すなわち $\widehat{b}_0(L) = \widehat{q}_0(L) = 0$.

証明 $H_0(C(L)_\infty) = \mathbb{Z}$ かつ $t \in \Lambda$ は自明に作用する. つまり, $1 - t = 0$. $1 - t$ は $\widehat{\Lambda}$ で可逆であるので, $\widehat{H}_0(L) = 0$ となる. \square

補題 10.3.6. $\widehat{b}_i(L) = \widehat{b}_{3-i}(-L)$ かつ $\widehat{q}_i(L) = \widehat{q}_{3-i-1}(-L)$. ただし, $-L$ は L の各成分の向きを逆にしたものである.

証明 [96] Section 3 を参照. そこでは閉多様体について考察がなされているが, L の正則近傍の境界であるトーラスの Novikov ホモロジーは消えているので, 同様のことが成立する. \square

補題 10.3.7. $\widehat{q}_2(L) = 0$.

証明 補題 10.3.5, 10.3.6 より $\widehat{q}_2(L) = \widehat{q}_0(-L) = 0$. \square

また, つぎの補題が成立する. 証明については [98] を参照のこと.

補題 10.3.8. $\widehat{b}_1(L) = \widehat{b}_2(L)$.

以上の補題より, 命題 10.3.4 の評価式の中で本質的な部分はずぎの評価式になることがわかる.

系 10.3.9. $m_1(f) \geq \widehat{b}_1(L) + \widehat{q}_1(L)$, $m_2(f) \geq \widehat{b}_1(L) + \widehat{q}_1(L)$.

さて, $\widehat{\Lambda}$ が主イデアル整域であることから, 後述の補題 10.3.11 を使うことにより, $\widehat{H}_1(L)$ はつぎの巡回加群の直和分解をもつ. ただし, $\Delta_L^k(t)$ は k 番目 Alexander 多項式 (注意 4.3.9 参照) を表し, $\Delta_L^m(t) = 1, 0/0 = 0$ と約束する.

補題 10.3.10.

$$\widehat{H}_1(L) \cong \bigoplus_{k=1}^{m-1} \widehat{\Lambda}/\gamma_k \widehat{\Lambda},$$

ここで, $\gamma_k = \Delta_L^k(t)/\Delta_L^{k+1}(t)$ であり, 任意の k に対して $\gamma_{k+1}|\gamma_k$ が成り立つ.

とくに結び目 $K \subset S^3$ の場合, $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{m-1} = \Delta_K(t)$ (K の Alexander 多項式) となる (定理 6.3.4 参照).

補題 10.3.11. 任意の $a, b \in \Lambda$ に対して, $\gcd_\Lambda(a, b) = \gcd_{\widehat{\Lambda}}(a, b)$.

以上の考察からつぎの定理 [98] が導かれる.

定理 10.3.12. 向きづけられた絡み目 $L \subset S^3$ に対して

- (i) $\widehat{b}_1(L)$ は 0 になる $\Delta_L^k(t)$ の個数と一致する.
- (ii) $\widehat{q}_1(L)$ は 0 でなく, かつ モニックでない γ_k の個数に一致する.

注意 10.3.13. (i) 絡み目でなく結び目 K のときは, $\widehat{b}_1(K) = 0$ になる [74]. $\widehat{b}_1(L) \neq 0$ となるのは, 例えば, 分離している絡み目の場合がある.

(ii) ファイバー結び目 K の場合, $m_1(f) = 0$ なので $\widehat{q}_1(K) = 0$. すなわち, γ_k はすべてモニックになる. つまり, この定理は定理 9.1.1 の一般化になっている.

例 10.3.14. アニュラスを 1 回ひねったものを A_1 とする (図 10.3). このとき A_1 の境界は Hopf の絡み目 L_1 になっている (図 1.1 (c) 参照). ただし, いまの場合, 各成分は A_1 から導かれる向きをもっている. $H_1(C(L_1)_\infty) = \Lambda/(1-t)\Lambda$ となるが, $1-t$ は $\widehat{\Lambda}$ の単元なので, $\widehat{b}_1(L_1) = \widehat{q}_1(L_1) = 0$ となる. 実際, この絡み目はファイバー絡み目である.

例 10.3.15. 図 10.3 の右図にあるように 2 回ひねった帯を A_2 とする. この境界になっている絡み目を L_2 とすると, $\widehat{H}_1(L_2) = \widehat{\Lambda}/2(1-t)\widehat{\Lambda}$ となるので, $\widehat{b}_1(L_2) = 0, \widehat{q}_1(L_2) = 1$ を得る.

問題 10.3.16. 例 10.3.14, 10.3.15 を一般化して, L_n に対して $\widehat{b}_1(L_n), \widehat{q}_1(L_n)$ を求めよ.

注意 10.3.17. 図 10.3 において, 絡み目の各成分の向きは本質的である. これらを逆にしたものはトーラス絡み目になる. トーラス絡み目はファイバー絡み目である.

問題 10.3.18. 図 10.4 のプレッツェル絡み目 L の $\widehat{b}_1(L), \widehat{q}_1(L)$ を求めよ.

一般に Morse 関数に対応してハンドル分解が存在する. 本節で述べた Morse 写像 $C_L \rightarrow S^1$ に対応するハンドル分解が [27], [28] で述べられている. そこでの手法を使えば,

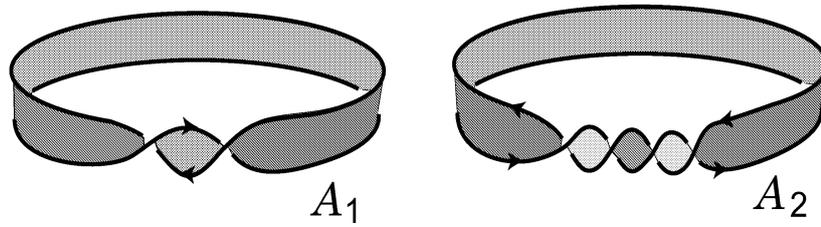


図 10.3

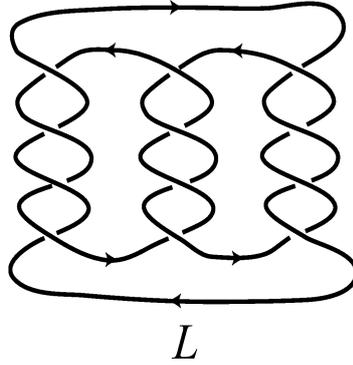


図 10.4 プレッツェル絡み目

例 10.3.15 で紹介した例について $m_1(f) = m_2(f) = 1$ となる Morse 写像 f が存在することがわかり，系 10.3.9 の等号成立が確認できる．同様に 10 交点以下の素な結び目については，すべて等号成立することが [28] で調べられている．一方でどのような f をとっても，系 10.3.9 の等号が成立しないような結び目，絡み目の例も存在する．例えば，樹下-寺阪の結び目や Conway 結び目 (図 1.19) の Alexander 多項式は 1 であるので (問題 4.3.5)，それぞれ $\hat{b}_1 = \hat{q}_1 = 0$ となるが，定理 9.1.1 より，ともにファイバー結び目ではない．

本節で述べた結果の‘ねじれ版’が [29], [32], [97] にあるので，興味のある読者は参照されたい．

10.4 コンピュータを使った計算について

ここではコンピュータを用いたねじれ Alexander 不変量の計算について紹介する．結び目 K が何らかの形 (正則表示, 組み紐表示など) で与えられたとする．線形表現の次元 n と環 R を指定したうえで K のねじれ Alexander 不変量を計算するためには，大まかにいってつぎのような 3 つのステップが必要である．

- (1) 結び目群 $G(K)$ の Wirtinger 表示を求める．
- (2) その表示を使って $G(K)$ の表現 $G(K) \rightarrow GL(n; R)$ を具体的にみつける．
- (3) 得られた表現を用いてねじれ Alexander 不変量の計算を実行する．

この中で一番困難な部分は、2番目の結び目群の線形表現を見つけるステップである。以下では体 \mathbb{F} 上の $SL(2; \mathbb{F})$ 表現の場合に限って話を進めよう。

結び目群に限らず群の有限表示が与えられたとき、その線形表現を見つけるのは一般的に難しい問題である。実際、表現全体 (あるいは表現の共役類全体) の空間は、表現の定義されている体 \mathbb{F} 上の多項式方程式系の零点集合 (代数的集合) となる。多くの場合、定義方程式を具体的に書き下すことはやさしい。群の生成元の行き先を行列で表し、各関係子の行き先が単位行列になるという条件を書き下すことにより方程式系が得られる。一般にコンピュータを用いれば、数値的に方程式系の解をみつけて表現の近似を構成することも可能である。しかしながら厳密に方程式系の解を求め、結び目群の表現を構成することは一般的には不可能である。ただし標数 p の素体 \mathbb{F}_p 上の線形表現の場合には、

- 表現する群 $SL(2; \mathbb{F}_p)$ が有限群,
- Wirtinger 表示の生成元は有限個で互いに共役である

という2つの理由から、つぎのようにして表現を具体的に求めることができる。

- (1) $SL(2; \mathbb{F}_p)$ の元を列挙し共役類に分割する。
- (2) $SL(2; \mathbb{F}_p)$ の共役類を1つ指定する。
- (3) $G(K)$ の Wirtinger 表示のすべての生成元の行き先を指定した共役類の中から選ぶ。
- (4) 関係子がみたされるか確認する。みたされなければ表現ではないので、つぎに進む。
- (5) すべての共役類に対して上の操作をくり返す。

これらはねじれ Alexander 不変量の計算と併せて複数の研究者により実装されている。本書における計算例においても児玉宏児によるプログラム KNOT [68], 鈴木正明のプログラムおよび堀江啓一によるプログラム DoctorK [44], [45] を利用している。

児玉の KNOT には結び目理論を研究するためのさまざまな機能が実装されている。本来は Linux 上で動作するプログラムであるが、Windows, Mac OS 上への移植も行われている。機能をねじれ Alexander 不変量の計算に限って説明すると、まずマウスを用いて結び目の正則表示を入力する。するとその正則表示に対応する結び目群の Wirtinger 表示が得られる。つづいて体の標数 p を指定すると $SL(2; \mathbb{F}_p)$ 表現をすべて求め、それに対するねじれ Alexander 不変量の分子を計算する。結び目群から対称群への表現を求め、基底の置換から定まる対称群の線形表現と組み合わせて得られる表現に対しても、ねじれ Alexander 不変量の計算が実行できる。

鈴木は Mathematica を用いたプログラム、堀江の DoctorK はいずれもねじれ Alexander 不変量の計算に特化したプログラムである。鈴木は Mathematica のプログラムでは、結び目の入力を和田による n-data [118] で行う。n-data は結び目の正則表示を記号列で表したものである。n-data を与えて標数 p を指定すると、 $SL(2; \mathbb{F}_p)$ 表現をすべて求め、それに対応したねじ

れ Alexander 不変量を分母，分子それぞれにわけて計算を実行する。

堀江のプログラムは Java で実装されているため，Java がインストールされていればプラットフォームを問わずに作動する。出力は鈴木プログラムと同様であるが，入力はいちおうマウスによる正則表示あるいは n-data の両方で行うことができる。

またこれらとは別に，Stefan Friedl によるプログラム KnotTwister [18] も公開されている。これは Windows 上で作動するプログラムで，入力はいちおう組み紐表示あるいは Wirtinger 表示を与えることで行う。ただし 11 交点以下の結び目やその他のいくつかの例に関しては組み紐表示をデータとしてよび出すだけでよい。このプログラムは対称群を経由した結び目群の線形表現を求め，それに対応したねじれ Alexander 不変量の計算から，種数の下からの評価とファイバー性 (正確には非ファイバー性) の判定を行う。

参考文献

- [1] C. Adams, *The Knot Book. An elementary introduction to the mathematical theory of knots.* W. H. Freeman and Company, New York, 1994 (または金信訳「結び目の数学」培風館, 1998).
- [2] M. Akaho, *An estimate of genus of links*, *J. Knot Theory Ramifications* **8** (1999), 405–414.
- [3] J. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **30** (1928), 275–306.
- [4] E. Artin, *Theory of braids*, *Ann. of Math.* **48** (1947), 101–126.
- [5] S. Bigelow, *The Burau representation is not faithful for $n = 5$* , *Geom. Topol.* **3** (1999), 397–404.
- [6] J. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, *Annals of Math. Studies* **82**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1974.
- [7] W. Burau, *Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen*, *Abh. Math. Sem. Hanischen Univ.* **11** (1936), 171–178.
- [8] G. Burde, *Darstellungen von Knotengruppen*, *Math. Ann.* **173** (1967), 24–33.
- [9] G. Burde and H. Zieschang, *Knots (Second edition)*, *de Gruyter Studies in Mathematics*, 5. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2003.
- [10] J. C. Cha, *Fibred knots and twisted Alexander invariants*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), 4187–4200.
- [11] J. I. Cogolludo and V. Florens, *Twisted Alexander polynomials of plane algebraic curves*, [math.GT/0504356](https://arxiv.org/abs/math.GT/0504356).
- [12] P. E. Conner, *Transformation groups on a $K(\pi, 1)$* , *Michigan Math. J.* **6** (1959), 413–417.
- [13] R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Ginn and Co. 1963, or *Grad. Texts Math.* 57, Springer-Verlag, 1977 (または寺阪一野口訳「結び目理論入門」岩波書店, 1967).

- [14] G. de Rham, *Introduction aux polynomes d'un nœud*, Enseignement Math. **13** (1968), 187–194.
- [15] E. Fadell and S. Husseini, *The Nielsen number on surfaces*, Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis (eds S. P. Singh et al.) Contemp. Math. **21** (1983), 59–98.
- [16] R. H. Fox, *Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring*, Ann. of Math. **57** (1953), 547–560.
- [17] R. H. Fox and J. W. Milnor, *Singularities of 2-spheres in 4-spaces and cobordism of knots*, Osaka J. Math. **3** (1966), 257–267.
- [18] S. Friedl, KnotTwister, <http://math.rice.edu/~friedl/>
- [19] S. Friedl and T. Kim, *The Thurston norm, fibered manifolds and twisted Alexander polynomials*, to appear in Topology.
- [20] S. Friedl and T. Kim, *Twisted Alexander norms give lower bounds on the Thurston norm*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.
- [21] S. Friedl and S. Vidussi, *Twisted Alexander polynomials and symplectic structures*, math.GT/0604398.
- [22] W. Fulton and J. Harris, Representation Theory. A First Course. Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [23] D. Gabai, *Foliations and genera of links*. Topology **23** (1984), 381–394.
- [24] D. Gabai, *Detecting fibred links in S^3* , Comment. Math. Helv. **61** (1986), 519–555.
- [25] D. Gabai, *Genera of the alternating links*, Duke Math. J. **53** (1986), 677–681.
- [26] P. Gilmer, *Ribbon concordance and a partial order on S -equivalence classes*, Topology Appl. **18** (1984), 313–324.
- [27] H. Goda, *Heegaard splitting for sutured manifolds and Murasugi sum*, Osaka J. Math. **29** (1992), 21–40.
- [28] H. Goda, *On handle number of Seifert surfaces in S^3* , Osaka J. Math. **30** (1993), 63–80.
- [29] H. Goda, *Circle valued Morse theory for knots and links*, to appear in Clay Math. Proc.
- [30] H. Goda, T. Kitano and T. Morifuji, *Reidemeister torsion, twisted Alexander polynomial and fibered knots*, Comment. Math. Helv. **80** (2005), 51–61.
- [31] H. Goda and T. Morifuji, *Twisted Alexander polynomial for $SL(2, \mathbb{C})$ -representations and fibered knots*, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. **25** (2003), 97–101.
- [32] H. Goda and A. Pajitnov, *Twisted Novikov homology and circle-valued Morse*

- theory for knots and links*, Osaka J. Math. **42** (2005), 557–572.
- [33] C. Gordon, *Ribbon concordance of knots in the 3-sphere*, Math. Ann. **257** (1981), 157–170.
- [34] C. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 371–415.
- [35] J. Elisenda Grigsby, *Knot Floer homology in cyclic branched covers*, math.GT/0507498.
- [36] R. Hartley, *Knots with free period*, Canad. J. Math. **33** (1981), 91–102.
- [37] R. Hartley, *Identifying non-invertible knots*, Topology **22** (1983), 137–145.
- [38] 服部晶夫, 位相幾何学, 岩波書店, 2002.
- [39] 服部晶夫, 多様体のトポロジー, 岩波書店, 2003.
- [40] J. A. Hillman, *The Torres conditions are insufficient*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **89** (1981), 19–22.
- [41] J. A. Hillman, *New proofs of two theorems on periodic knots*, Arch. Math. (Basel) **37** (1981), 457–461.
- [42] J. Hillman, Algebraic Invariants of Links, Series on Knots and Everything, 32. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002.
- [43] J. A. Hillman, C. Livingston and S. Naik, *Twisted Alexander polynomial of periodic knots*, Algebr. Geom. Topol. **6** (2006), 145–169.
- [44] K. Horie, *A twisted Alexander invariant associated to an $SL_2(\mathbb{F}_p)$ -representation of a link and its computation*, 東京工業大学理学部情報科学科学士論文, 2005.
- [45] K. Horie, DoctorK, <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kehorie/>
- [46] N. Jacobson, Basic Algebra I, Second edition. W. H. Freeman and Company, New York, 1985.
- [47] B. Jiang, *Lectures on Nielsen fixed point theory*, Contemp. Math. **14** (1983), Amer. Math. Soc. Providence.
- [48] B. Jiang and S. Wang, *Twisted topological invariants associated with representations*, in Topics in Knot Theory, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 399, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1993, 211–227.
- [49] V. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. of Math. **126** (1987), 335–388.
- [50] T. Kanenobu, *The augmentation subgroup of a pretzel link*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **7** (1979), 363–384.
- [51] 加藤十吉, 組合せ位相幾何学, 岩波講座基礎数学, 1976.
- [52] A. Kawauchi, *The invertibility problem on amphicheiral excellent knots*, Proc.

- Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **55** (1979), 399–402.
- [53] A. Kawauchi (ed), *A Survey of Knot Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.
- [54] 河内明夫, *線形代数からホモロジーへ*, 培風館, 2000.
- [55] S. Kinoshita and H. Terasaka, *On unions of knots*, Osaka Math. J. **9** (1957), 131–153.
- [56] P. Kirk and C. Livingston, *Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson-Gordon invariants*, Topology **38** (1999), 635–661.
- [57] P. Kirk and C. Livingston, *Twisted knot polynomials: inversion, mutation and concordance*, Topology **38** (1999), 663–671.
- [58] T. Kitano, *Reidemeister torsion of the figure-eight knot exterior for $SL(2, \mathbb{C})$ -representations*, Osaka J. Math. **31** (1994), 523–532.
- [59] T. Kitano, *Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion*, Pacific J. Math. **174** (1996), 431–442.
- [60] T. Kitano and T. Morifuji, *Divisibility of twisted Alexander polynomials and fibered knots*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **4** (2005), 179–186.
- [61] T. Kitano and T. Morifuji, *On a twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, preprint 2006.
- [62] T. Kitano and M. Suzuki, *A partial order in the knot table*, Experiment. Math. **14** (2005), 385–390.
- [63] T. Kitano and M. Suzuki, *A partial order in the knot table II*, preprint 2006.
- [64] T. Kitano and M. Suzuki, *Twisted Alexander polynomials and the existence of a surjective homomorphism between knot groups*, in preparation.
- [65] T. Kitano, M. Suzuki and M. Wada, *Twisted Alexander polynomial and surjectivity of a group homomorphism*, Algebr. Geom. Topol. **5** (2005), 1315–1324.
- [66] E. Klassen, *Representations in $SU(2)$ of the fundamental groups of the Whitehead link and doubled knots*, Forum Math. **5** (1993), 93–109.
- [67] T. Kobayashi, *Uniqueness of minimal genus Seifert surfaces for links*, Topology Appl. **33** (1989), 265–279.
- [68] K. Kodama, KNOT, <http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kodama/knot.html>
- [69] K. Kodama and M. Sakuma, *Symmetry groups of prime knots up to 10 crossings*, Knots 90 (Osaka, 1990), de Gruyter, Berlin, 1992, 323–340.
- [70] 河野俊丈, *曲面の幾何構造とモジュライ*, 日本評論社, 1997.
- [71] D. Krammer, *The braid group B_4 is linear*, Invent. Math. **142** (2000), 451–486.
- [72] A. Lascoux and M. P. Schützenberger, *Polynomes de Kazhdan-Lusztig pour les grassmanniennes*, Astérisque **87–88** (1981), 249–266.

- [73] R. J. Lawrence, *Homological representations of the Hecke algebra*, Comm. Math. Phys. **135** (1990), 141–191.
- [74] A. Lazarev, *The Novikov homology in knot theory*, (Russian) Mat. Zametki **51** (1992), 53–57, 144; translation in Math. Notes **51** (1992), 259–262.
- [75] W. B. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, 175. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [76] X. S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **17** (2001), 361–380.
- [77] C. N. Little, *Non alternate \pm knots*, Edinb. Trans. **39** (1900), 771–778.
- [78] 松本幸夫, *Morse 理論の基礎, 現代数学の基礎*, 岩波書店, 1997.
- [79] J. Milnor, *A duality theorem for Reidemeister torsion*, Ann. of Math. **76** (1962), 137–147.
- [80] J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies, No. 51 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963.
- [81] J. Milnor, *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 358–426.
- [82] J. Milnor, *Infinite cyclic coverings*, Topology of Manifolds (Michigan Univ., E. Lansing, Mich., 1967), 115–133. Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass.
- [83] K. Miyazaki, *Ribbon concordance does not imply a degree one map*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 1055–1058.
- [84] T. Morifuji, *A twisted invariant for finitely presentable groups*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **76** (2000), 143–145.
- [85] T. Morifuji, *Twisted Alexander polynomial for the braid group*, Bull. Austral. Math. Soc. **64** (2001), 1–13.
- [86] T. Morifuji, *A Torres condition for twisted Alexander polynomials*, to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.
- [87] M. Morishita, *On certain analogies between knots and primes*, J. Reine Angew. Math. **550** (2002), 141–167.
- [88] 森田康夫, *代数概論*, 裳華房, 1987.
- [89] K. Murasugi, *On a certain subgroup of the group of an alternating link*, Amer. J. Math. **85** (1963), 544–550.
- [90] K. Murasugi, *On a certain numerical invariant of link types*, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 387–422.
- [91] K. Murasugi, *On periodic knots*, Comment. Math. Helv. **46** (1971), 162–174.
- [92] 村杉邦男, *結び目理論とその応用*, 日本評論社, 1993.
- [93] L. Neuwirth, *Knot Groups*, Annals of Mathematics Studies, No. 56 Princeton

- University Press, Princeton, N.J. 1965.
- [94] S. P. Novikov, *Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **260** (1981), 31–35.
- [95] 落合豊行, 山田修司, 豊田英美子, コンピュータによる結び目理論入門, 数理情報科学シリーズ, 牧野書店, 1996.
- [96] A. Pajitnov, *On the sharpness of inequalities of Novikov type for manifolds with a free abelian fundamental group*, (Russian) Mat. Sb. **180** (1989), 1486–1523; translation in Math. USSR-Sb. **68** (1991), 351–389.
- [97] A. Pajitnov, *Novikov homology, twisted Alexander polynomials and the Thurston cones*, math.GT/0406498.
- [98] A. Pajitnov, L. Rudolf and K. Weber, *The Morse-Novikov number for knots and links*, (Russian) Algebra i Analiz **13** (2001), 105–118; translation in St. Petersburg Math. J. **13** (2002), 417–426.
- [99] A. Ranicki, *Circle valued Morse theory and Novikov homology*, Topology of high-dimensional manifolds, No. 1, 2 (Trieste, 2001), 539–569.
- [100] R. Riley, *Nonabelian representations of 2-bridge knot groups*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **35** (1984), 191–208.
- [101] D. Rolfsen, *Knots and Links*, AMS Chelsea Publishing, 2003.
- [102] M. Sakuma, *On the polynomials of periodic links*, Math. Ann. **257** (1981), 487–494.
- [103] H. Seifert, *Über das Geschlecht von Knoten*, Math. Ann. **110** (1934), 571–592.
- [104] D. Silver and S. Williams, *Crowell's derived group and twisted polynomials*, math.GT/0506339.
- [105] D. Silver and S. Williams, *Twisted Alexander polynomials detect all knots*, math.GT/0604084.
- [106] J. Stallings, *On fibering certain 3-manifolds*, 1962 Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961) 95–100 Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [107] J. Stallings, *Constructions of fibred knots and links*, Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2, 55–60, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978.
- [108] K. Sugiyama, *A topological L-function for a threefold*, preprint, 2004.
- [109] M. Suzuki, *Twisted Alexander polynomial for the Lawrence-Krammer representation*, Bull. Austral. Math. Soc. **70** (2004), 67–71.

- [110] 鈴木晋一, 結び目理論入門, サイエンス社, 1991.
- [111] P. G. Tait, *Scientific papers*. Vol. I, Cambridge: University Press. XIV + 498 S. 4°. (1898).
- [112] H. Tietze, *Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten*, *Monatsh. Math. u. Phys.* **19** (1908), 1-118.
- [113] G. Torres, *On the Alexander polynomial*, *Ann. of Math.* **57** (1953), 57–89.
- [114] H. Trotter, *Periodic automorphisms of groups and knots*, *Duke Math. J.* **28** (1961), 553–558.
- [115] H. Trotter, *Homology of group systems with applications to knot theory*, *Ann. of Math.* **76** (1962), 464–498.
- [116] V. Turaev, *Introduction to Combinatorial Torsions*, *Lectures in Mathematics ETH Zürich*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- [117] V. Turaev, *Torsions of 3-dimensional Manifolds*, *Progress in Mathematics*, 208, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [118] M. Wada, *Coding link diagrams*, *J. Knot Theory Ramifications* **2** (1993), 233–237.
- [119] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, *Topology* **33** (1994), 241–256.
- [120] M. Wada, *Parabolic representations of the groups of mutant knots*, *J. Knot Theory Ramifications* **6** (1997), 895–905.
- [121] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of generalized free products. I, II*, *Ann. of Math. (2)* **108** (1978), 135–204.
- [122] A. Weil, *Numbers of solutions of equations in finite field*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 497–508.
- [123] A. Weil, *Remarks on the cohomology of groups*, *Ann. of Math. (2)* **80** (1964), 149–157.
- [124] W. Whitten, *Knot complements and groups*, *Topology* **26** (1987), 41–44.
- [125] Y. Yamaguchi, *A relationship between a zero of acyclic Reidemeister torsion and non acyclic Reidemeister torsion*, [math.GT/0512267](https://arxiv.org/abs/math.GT/0512267).
- [126] Y. Yamaguchi, *The limit values of the non-abelian twisted Reidemeister torsion associated to knots*, [math.GT/0512277](https://arxiv.org/abs/math.GT/0512277).
- [127] 山崎圭次郎, 環と加群, 岩波書店, 1977.

索引

- Eilenberg-MacLane 空間, 35
 aspherical, 35
 跡公式, 164
 Alexander 行列, 42, 46, 90
 Alexander 多項式, 19, 22, 29, 42, 48
 Alexander 多項式の次数, 24
- 位数, 164
 位数イデアル, 54, 75, 79
 1次元球面, 36, 64
 岩堀-Hecke 環, 159
- S-同値, 6, 21
- order, 75
- 可換表現, 111
 可逆, 146
 下交点, 2
 可約表現, 111, 125
 絡み数, 17
 絡み目群, 9
 Galois 群, 148
 Galois 自己同型写像, 153
- 軌道曲線, 163
 樹下-寺阪の結び目, 15, 24, 44, 98, 100, 170
 基本公式, 35
 既約表現, 111
 Casson-Gordon 不変量, 149
 極小元, 146
 局所系, 62
 極大樹, 67
- 組み紐群, 96, 97, 155
 Crowell の導来群, 130
 群環, 33
- 形式的べき級数, 165
 形式的べき級数環, 165
 $K(\pi, 1)$ -空間, 35
 k 番目 Alexander 多項式, 43, 48, 168
 k 番目多変数 Alexander 多項式, 47
- 交代結び目, 9, 129
 交点, 2
 交点数, 2
- 固定点, 163
 固定点指数, 164
 固定点集合, 163
 固定点類, 163
 固有な写像, 142
 Conway 多項式, 27, 29
 Conway の結び目, 15, 24, 44, 98, 100, 170
 コンコードダンス, 143, 149
 コンコードダンス群, 149
- Seifert 行列, 20
 Seifert 曲線, 4
 Seifert 曲面, 4
 Seifert 形式, 87
 サテライト結び目, 118
 Zariski 接空間, 120
 三葉結び目, 3, 13, 15, 24, 84, 96, 101, 112, 116, 129, 151
- 指数, 163
 次数, 1
 自明な絡み目, 2
 自明な結び目, 2
 写像トーラス, 163
 周期, 141
 周期的軌道類, 164
 周期的結び目, 141, 150
 周期点集合, 163
 自由周期, 154
 自由積, 141
 自由な Seifert 曲面, 6, 100
 自由微分, 34
 自由ホモトピック, 163
 縮約, 63
 種数, 5
 上交点, 2
 剰余有限, 144
 Jones 表現, 159
- 随伴表現, 120
 スケイン関係式, 27
 スケイン図形, 27
 スケイン木図表, 29
 スパイン, 6, 100
 スライス結び目, 71, 149
- 正 5 面体群, 153

- 正則, 6, 7, 167
 正則 S -同値, 7
 正則 Seifert 曲面, 6, 100, 104
 正則射影, 1
 正則なスパイン, 6
 正則表示, 2
 正則 1-ハンドル, 7, 104
 正則 1-ハンドル縮小, 7
 正の交点, 17
 成分数, 1
 ゼータ関数, 96
 積公式, 65
- 双対空間, 60
 双対鎖複体, 61
 双対語, 101
 双対性, 60, 67
 双対表現, 116
 素体, 97
 素な結び目, 3, 129
- 対称性, 70, 160
 多重値 Morse 理論, 166
 多重点, 1
 多変数 Alexander 多項式, 47, 70
 単純, 159
 単純ホモトピー同値, 63, 67
 単純ホモトピー不変量, 63
- 忠実, 159
- Tietze 変換, 14, 43
 degree 1 写像, 142
- トーション, 56
 トーラス絡み目, 7, 169
 トーラス分解, 65
 トーラス結び目, 7, 16, 44, 151
 特異点, 167
 DoctorK(堀江氏による計算プログラム), 171
 de Rham の定理, 51
 Torres 条件, 49, 121, 150
- Nielsen 固定点理論, 165
 2 橋結び目, 136
 2 次元トーラス, 37, 40, 64
- Noether 加群, 76
 Noether 環, 77
 ねじれ Alexander 加群, 102
 ねじれ Alexander 群, 131
 ねじれ Alexander 多項式, 102
 ねじれ Alexander 不変量, 93, 100, 103
 ねじれポテンシャル関数, 107
 ねじれ Lefschetz 数, 164
 ねじれ Lefschetz ゼータ関数, 165
- KNOT(児玉氏による計算プログラム), 171
- KnotTwister(Friedl 氏による計算プログラム), 172
 Novikov 環, 167
 Novikov の不等式, 168
 Novikov ホモロジー, 168
- 8 の字結び目, 3, 15, 24, 44, 45, 129, 132
 パラボリック表現, 97
 半順序, 144
 半流れ, 163
 反復写像, 163
- Wirtinger 表示, 14
 非可換表現, 111
 微分, 34
 表現行列, 54, 76
 非輪状, 56
 非輪状鎖複体, 56
 非輪状表現, 62
- ファイバー絡み目, 8, 167
 ファイバー結び目, 127, 146, 151
 ブーケ, 6
 Fox の自由微分, 35
 負の交点, 17
 普遍微分, 34
 Burau 表現, 96, 97, 156, 161
 プレッツェル絡み目, 169
 分岐則, 159, 161
 分離している絡み目, 25
- ベンディング, 121
- 胞体的, 37, 62
 Hopfian, 144
 Hopf の絡み目, 3, 13, 14, 169
 ホモロジートーション, 80, 115
 Borromean 絡み目, 15, 48
 Whitehead 群, 67
 Whitehead double, 119
- Magnus 表現, 156
- ミュータント, 100
- 無限巡回被覆空間, 40
 結び目群, 9
 結び目群のコホモロジー群, 52
 村杉合同式, 151
- メリディアン, 7, 19
- Morse 関数, 143, 167
 Morse 写像, 167
 Morse の不等式, 168
 Morse ホモロジー, 168
 モニック多項式, 128
- Young 図形, 159

有限 CW 複体, 61

有限体, 100

Reidemeister 移動, 2

Reidemeister トーション, 55, 63, 79

Laplace 展開, 139

リボンコンコーダンス, 143

Lefschetz 固定点定理, 165

Lefschetz 数, 165

Lefschetz ゼータ関数, 165

連結和, 3

Lawrence-Krammer 表現, 159

ロンジチュード, 7

1-ハンドル, 5

1-ハンドル拡大, 5

1-ハンドル縮小, 6

北野 晃朗 (きたの てるあき)

創価大学工学部

情報システム工学科

〒 192-8577

東京都八王子市丹木町 1-236

kitano@soka.ac.jp

合田 洋 (ごうだ ひろし)

東京農工大学大学院共生科学技術研究院

論理表現科学部門

〒 184-8588

東京都小金井市中町 2-24-16

goda@cc.tuat.ac.jp

森藤 孝之 (もりふじ たかゆき)

東京農工大学大学院共生科学技術研究院

論理表現科学部門

〒 184-8588

東京都小金井市中町 2-24-16

morifuji@cc.tuat.ac.jp