

美の背後に潜む数理

日本数学会市民講演会

平成24年3月25日

東京理科大学

秋山仁

○ 数理と美

Martin Gardner (Scientific American)

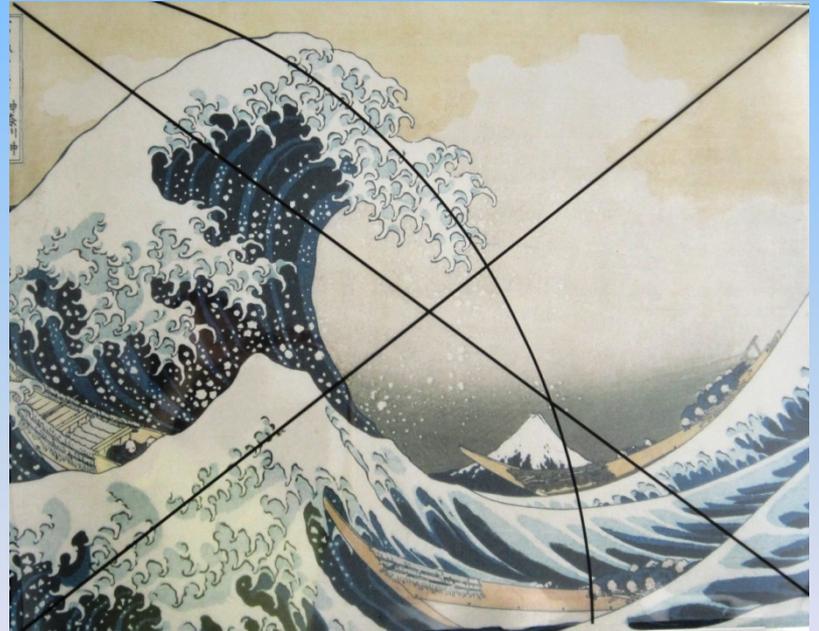
“in many cases a dull proof can be supplemented by a geometric analogue so simple and beautiful that the truth of a theorem is almost seen at a glance.”

Paul Halmos speaking of Solomon Lefshetz,

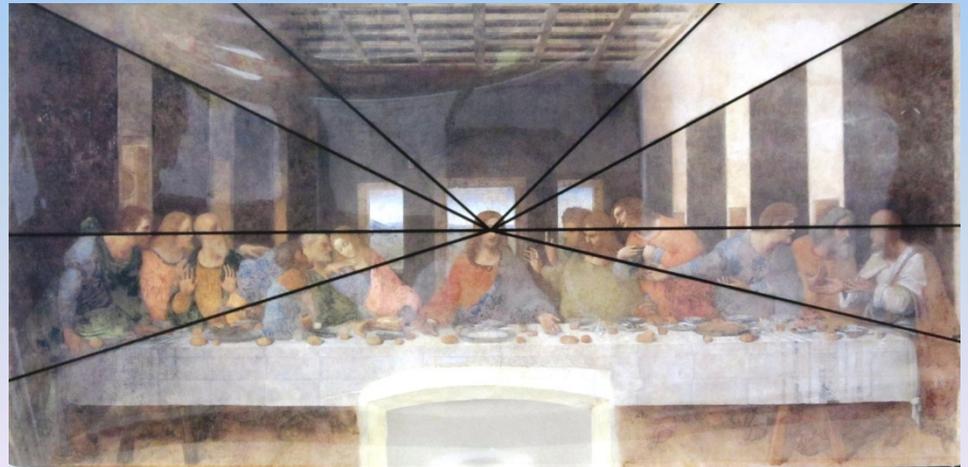
“He saw mathematics not as logic but as pictures. Speaking of what it takes to be a mathematician, he stated: “To be a scholar of mathematics you must be born with the ability to visualize”

(Scientific American)

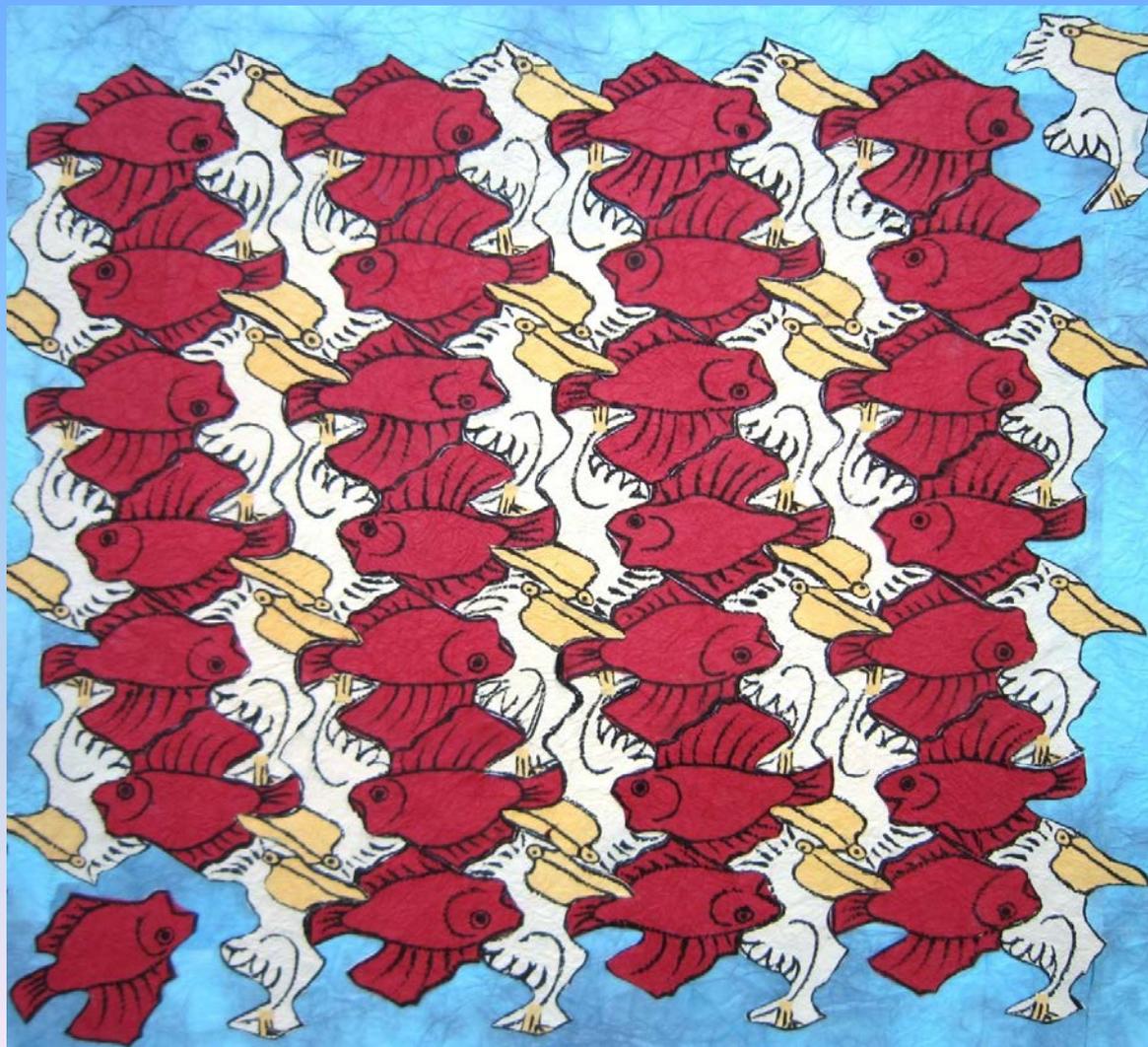
葛飾北齋の作品



レオナルド・ダ・ヴィンチの作品



エッシャー風貼り絵



デューラー (Dürer) の作品



I どの多面体が均衡であるか?

この節では、 n 次元単位球に内接する n 次元多胞体について考える。 $(n \geq 2)$

(参考)

$n=2$: 単位円に内接する多角形

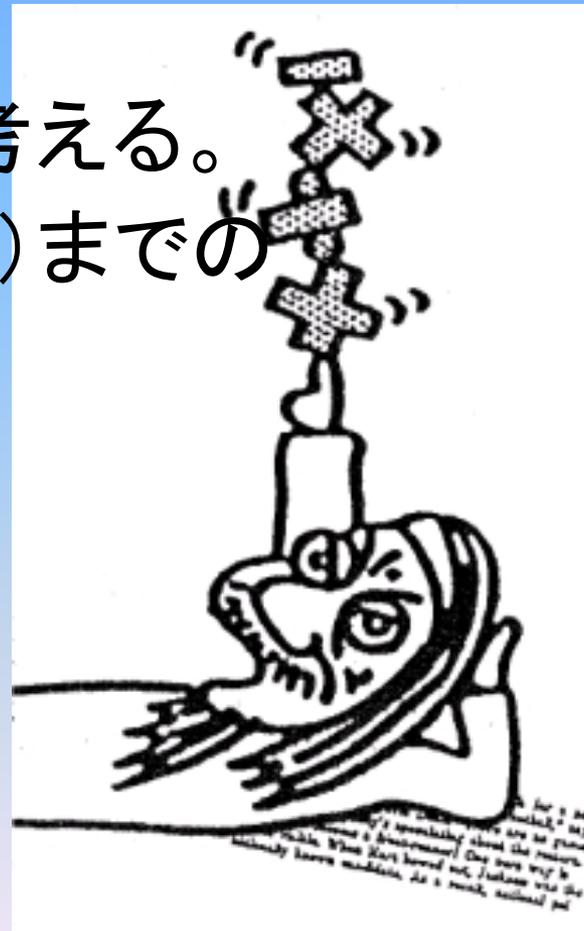
$n=3$: 単位球に内接する多面体

$n \geq 4$: n 次元単位球に内接する n 次元多胞体

よく知られている結果

単位円に内接する正 n 角形を考える。
1頂点 P_1 から他の頂点($P_2 \sim P_n$)までの
距離の積は n に等しい。

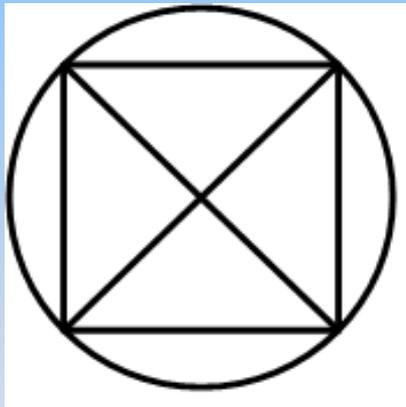
$$\prod_{i=2}^n |P_1 P_i| = n$$



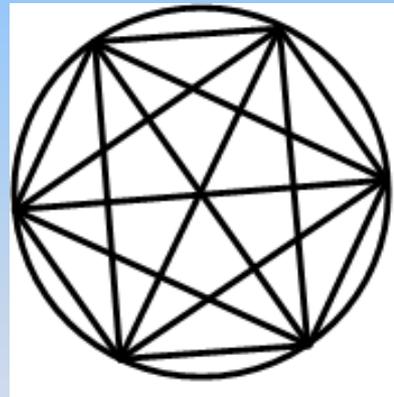
2つの頂点 P_i と P_j の間の距離を $d(i,j)$ と表す。
凸多面体 P が v 個の頂点 P_1, \dots, P_v を有するとき、
 P の **対角辺長の二乗和** $\alpha(P)$ は次のように定義される:

$$\alpha(P) = \sum (d(i, j))^2, P_i, P_j, \in V(P)$$

P:



Q:



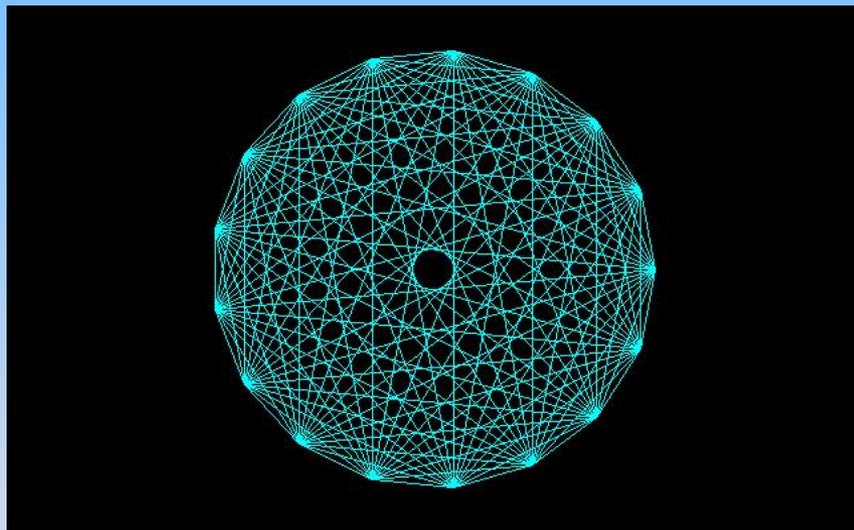
$$\alpha(P) = 4 \times (\sqrt{2})^2 + 2 \times 2^2 = 8 + 8 = 16 = 4^2$$

$$\alpha(Q) = 6 \times 1^2 + 6 \times (\sqrt{3})^2 + 3 \times 2^2 = 6^2$$

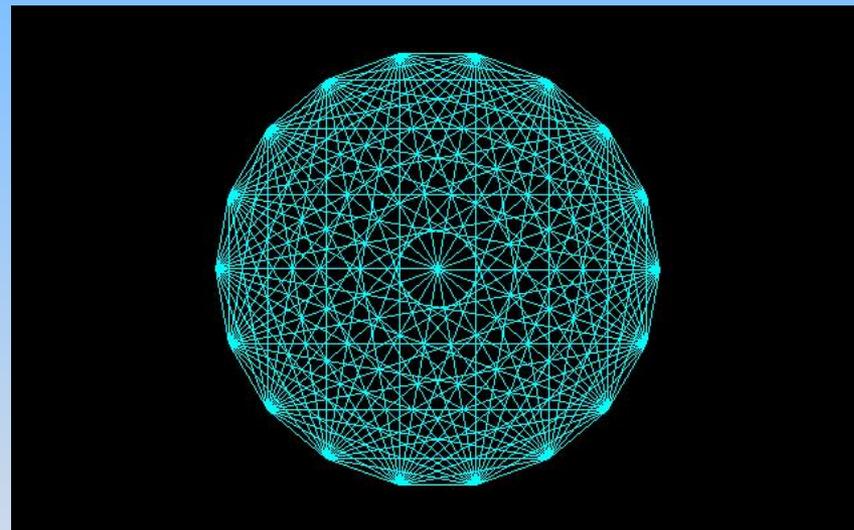
M1

$n \geq 2$ に対し、 n 次元多胞体 P が
 $\alpha(P) = v^2$ を満たすとき、 P は**均衡**で
あるという。

2次元では、たとえば、正多角形は すべて均衡である

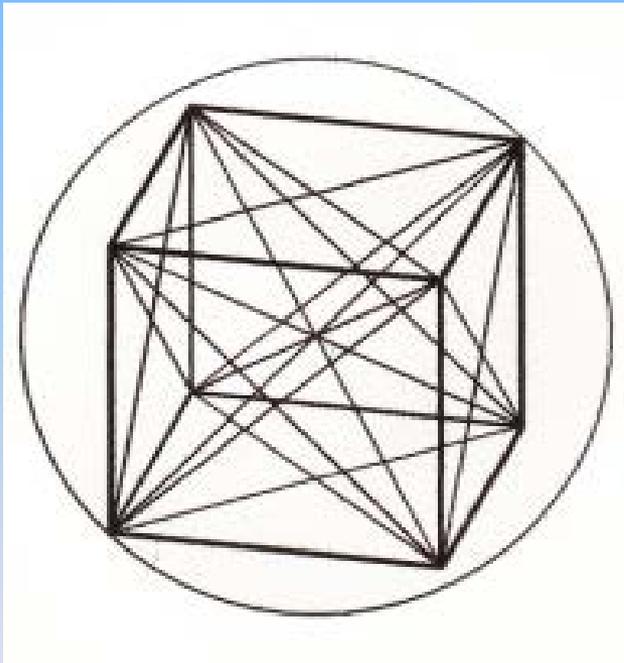


正17角形:
 $17^2 = 289$

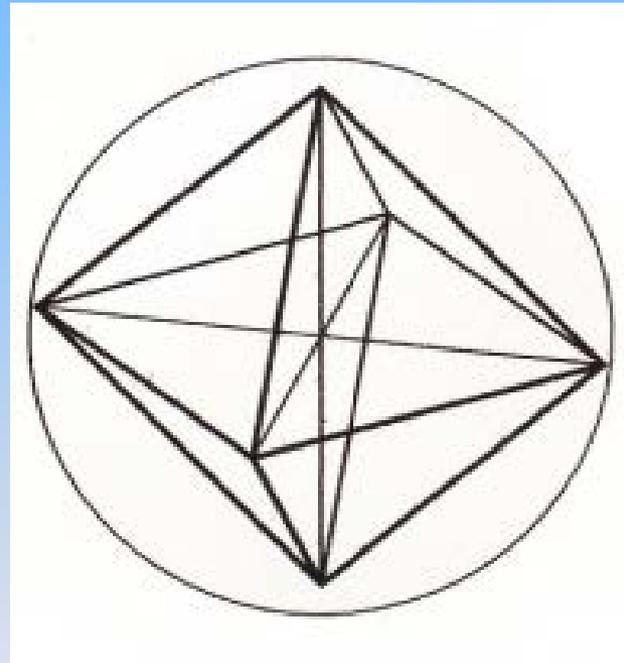


正18角形:
 $18^2 = 324$

均衡な3次元正多面体の例



$$\alpha(c) = 8^2$$

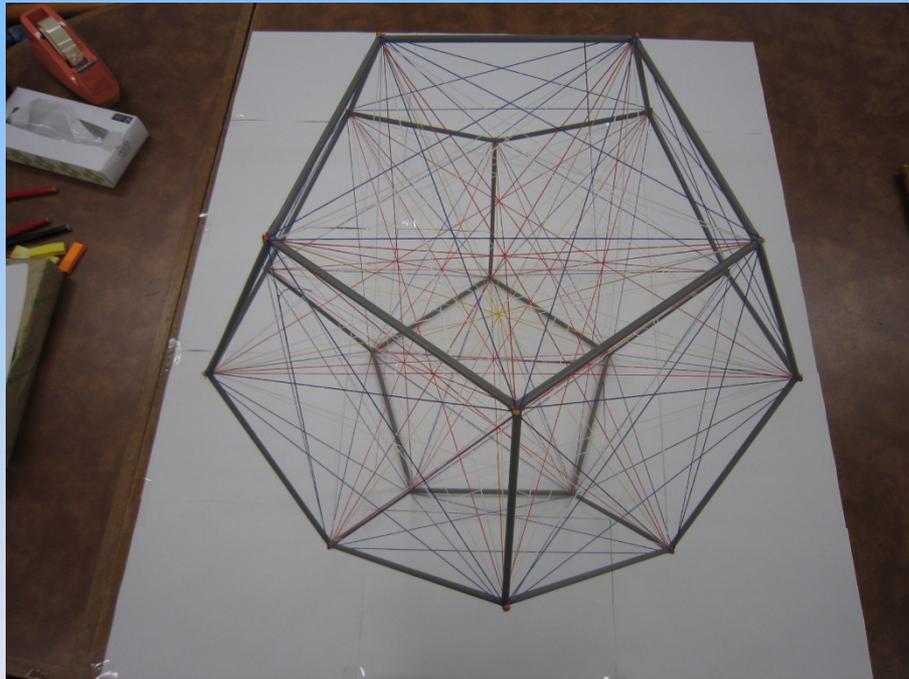


$$\alpha(o) = 6^2$$

M2

例) P が正十二面体ならば、

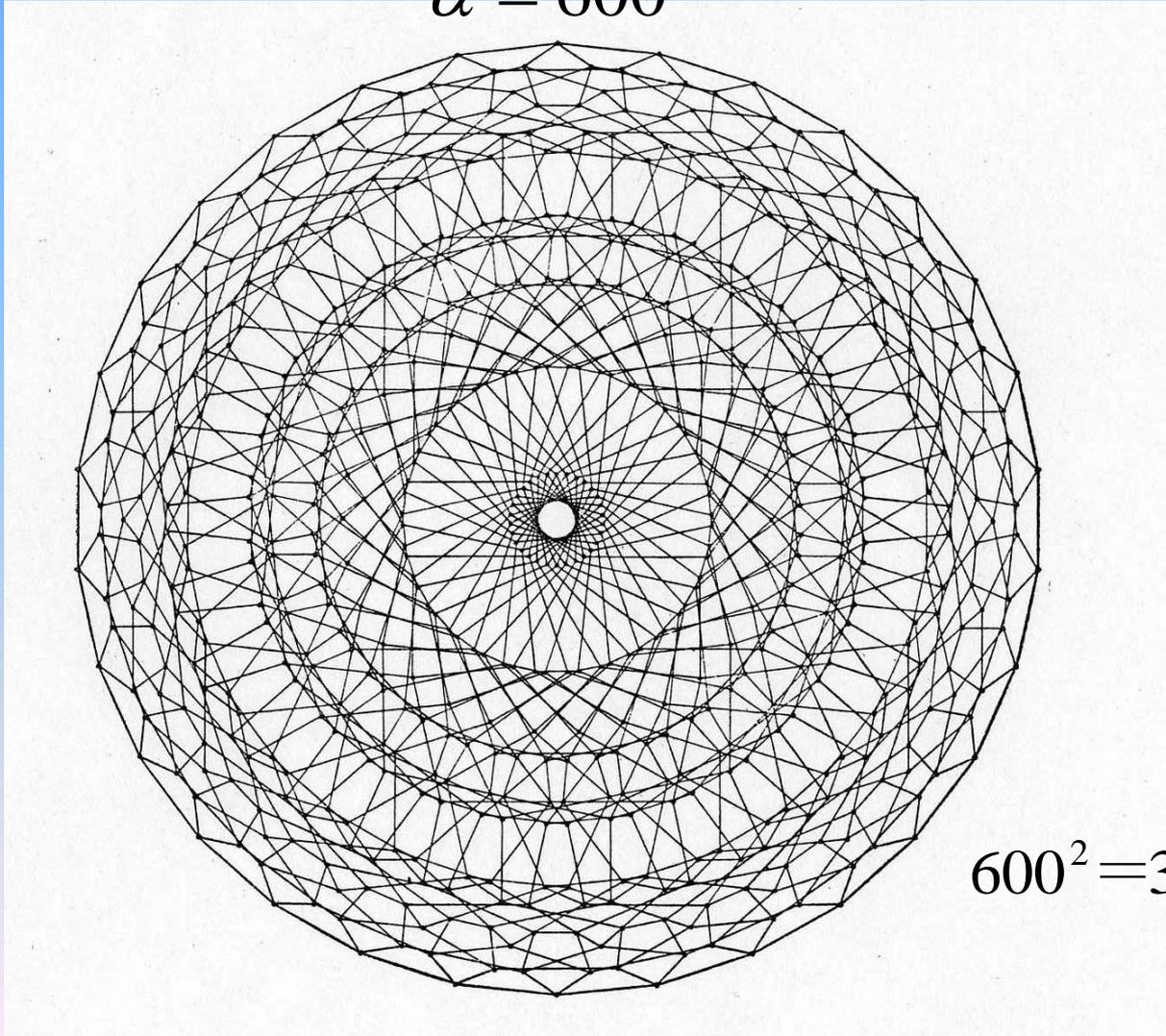
$$\alpha(P) = 20^2 = 400$$



4次元正120胞体は600個の頂点をもつ。

よって、

$$\alpha = 600^2$$



$$600^2 = 360000$$

定理 1

(Elemente Der Math., J.A. + 佐藤郁郎(2012))

n 次元単位球に内接する n 次元正多胞体 P を考える。その頂点の個数を v とおく。すると、任意の次元 n ($n \geq 2$)に対して、

$$\alpha(P) = v^2$$

すなわち、 P は均衡である。



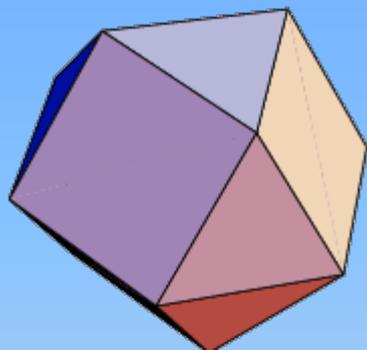
系1

Pを単位超球に内接するn次元多胞体とし、 $\sum p_j = 0$ であるとする。このとき、Pは均衡である。

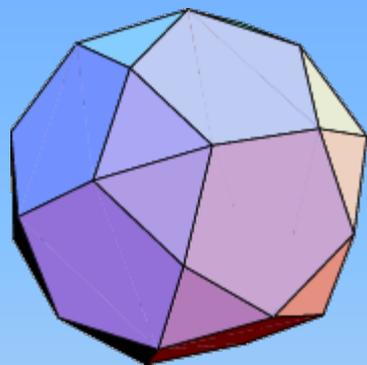
正多角形を面としてもつ均衡な3次元多面体

正多面体(5種類)	すべて
準正多面体(13種類)	すべて
アルキメデスの正角柱(無数) アルキメデスの反角柱(無数)	すべて
ジョンソン・ザルガラーの多面体 (92種類のうち8個)	J27,J34,J37,J72 J73,J74,J75,J80

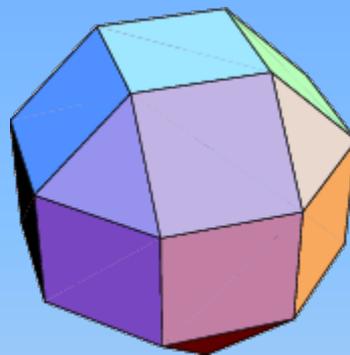
8種類の均衡なジョンソン・ザルガラーの多面体



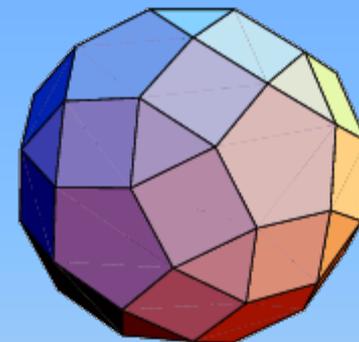
J27



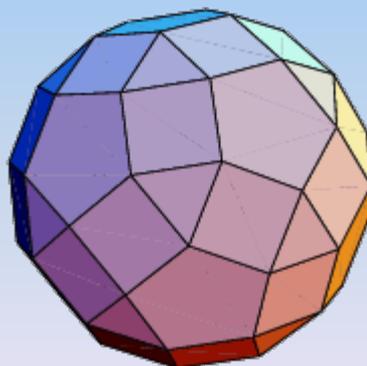
J34



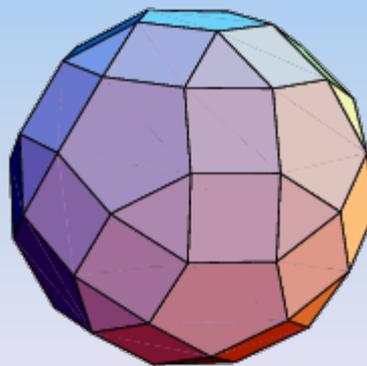
J37



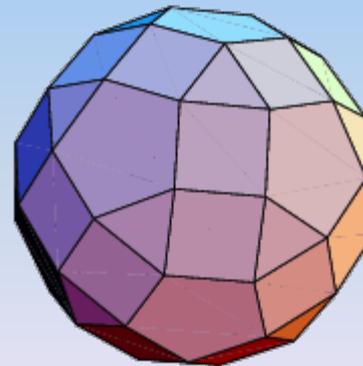
J72



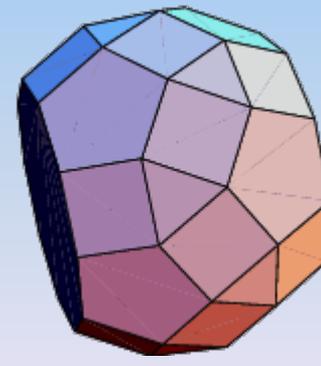
J73



J74



J75



J80

定理 2

(Elemente Der Math., J.A.+ 佐藤郁郎 (2012))

n 次元単位球に内接する n 次元多胞体 P を考える。その頂点の個数を v とし、外心と重心の間の距離を c とおく。するとすべての次元 $n(n \geq 2)$ に対して、次の事実が成立つ:

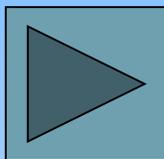
$$\alpha(P) = v^2(1 - c^2)$$



II 変身図形

変身図形の問題はH.デュードニー(Dudeney)の著したカンタベリー・パズルの中のある問題に端を発する。

CG



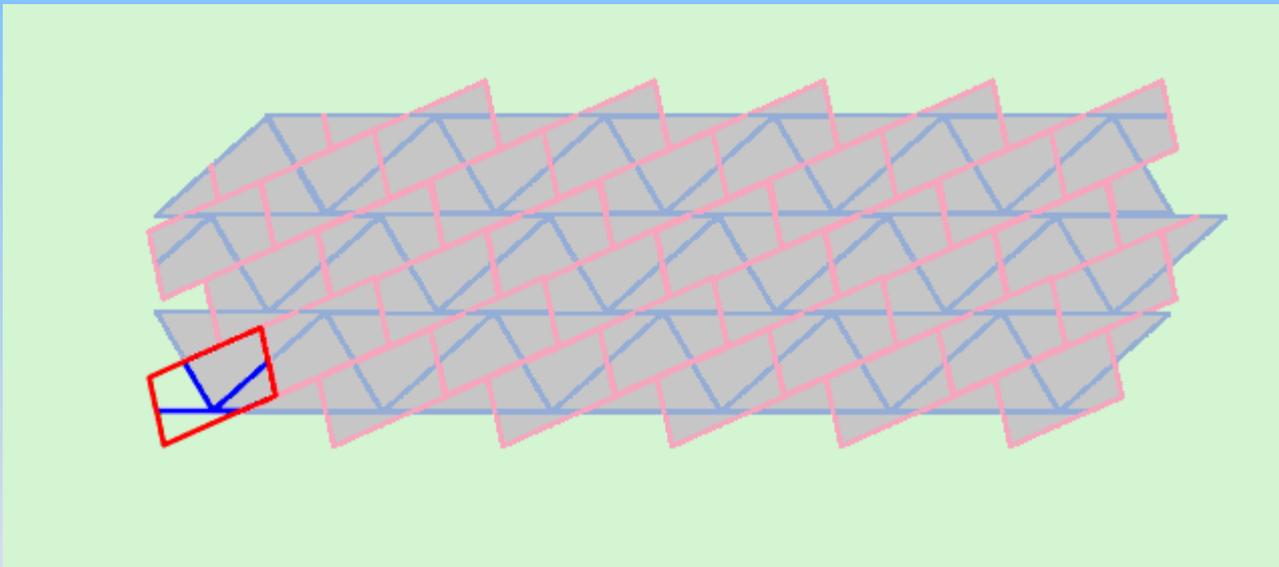
M4

P と Q を凸多角形とする。 P が Q に内外逆転変身可能であるとは、 P が有限個の断片に分割され、それらの断片がハトメで樹木状につなげ、それらを並べ替えて Q を得ることができることである。但し、

- (1) 分断線は P や Q の頂点を通らないものとし、
- (2) P の境界は Q の内部に隠れ、 Q の境界は P の内部から構成されていなければならない。

定理 3 (Algor. & Comb. 25, J.A. (2007))

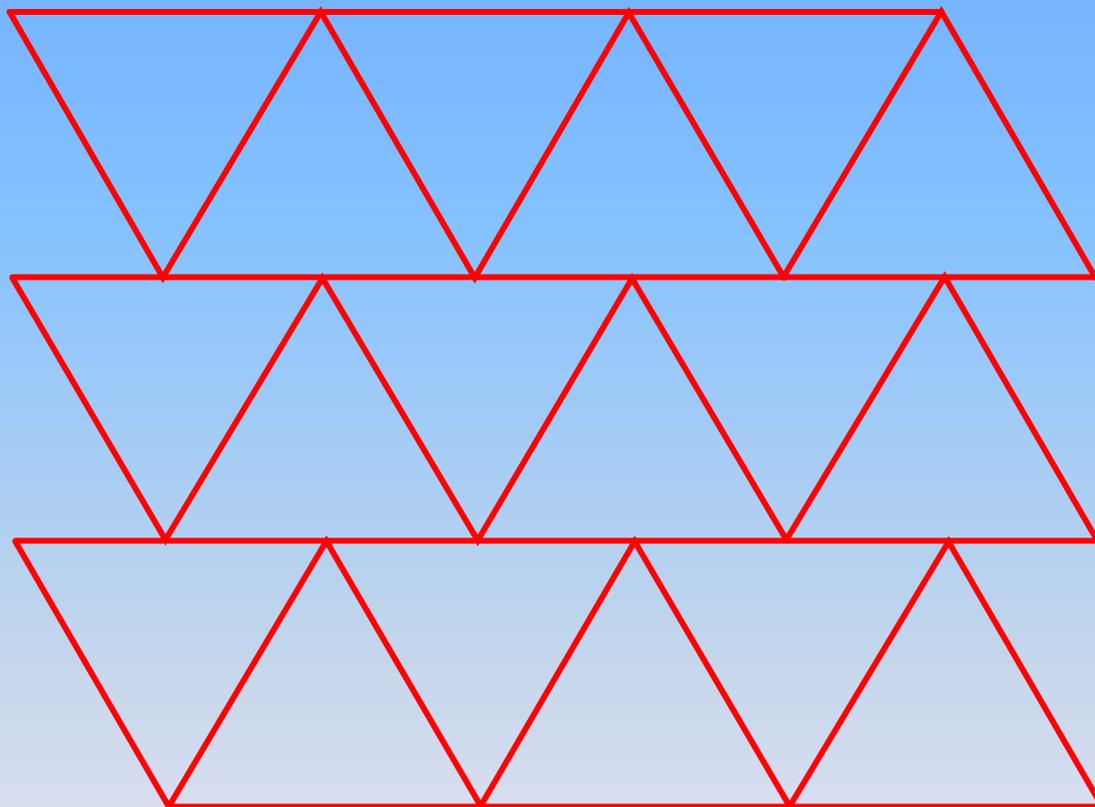
P が Q に内外逆転変身可能ならば、 P と Q は各々平行移動と180度回転のみによって平面を隙間なく敷き詰めることができる。



P: 青い三角形, Q: 赤い四角形

PがQに内外逆転変身可能なとき、
定理3は「Pを分割してQを得る方法」を示唆している。

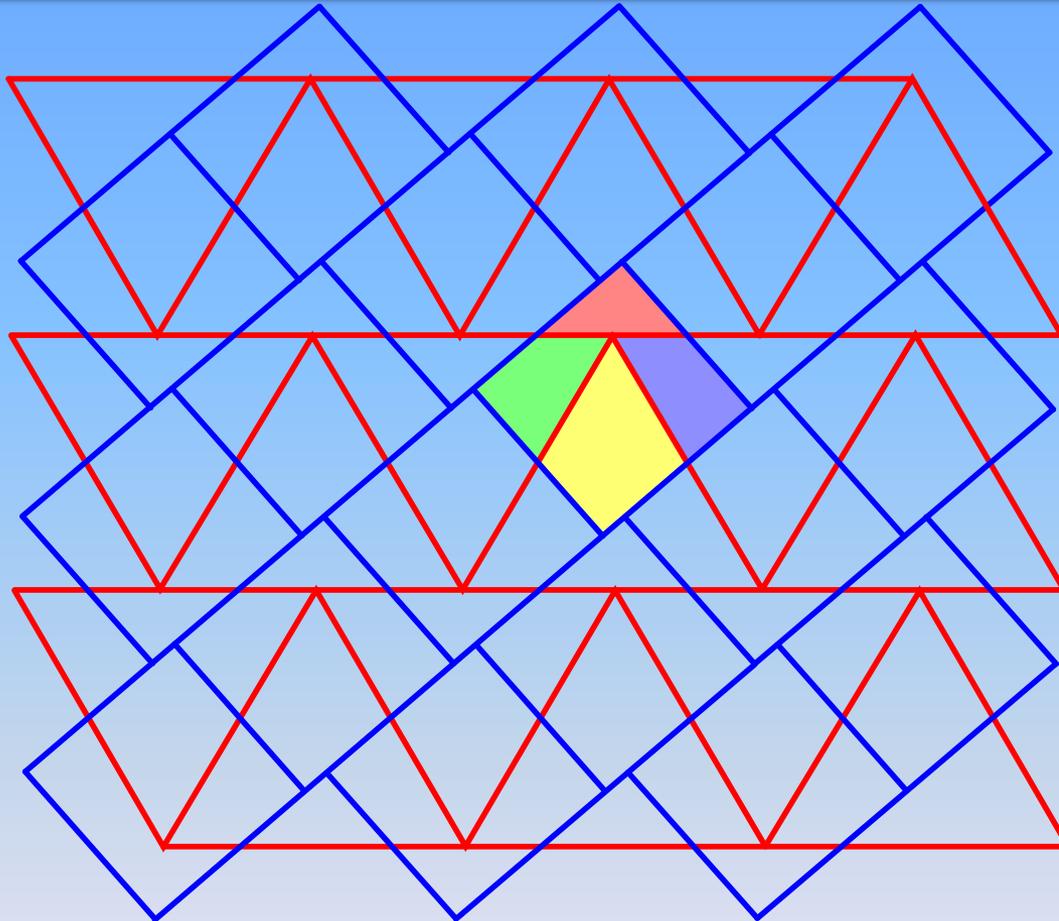
α による平面充填



β による平面充填

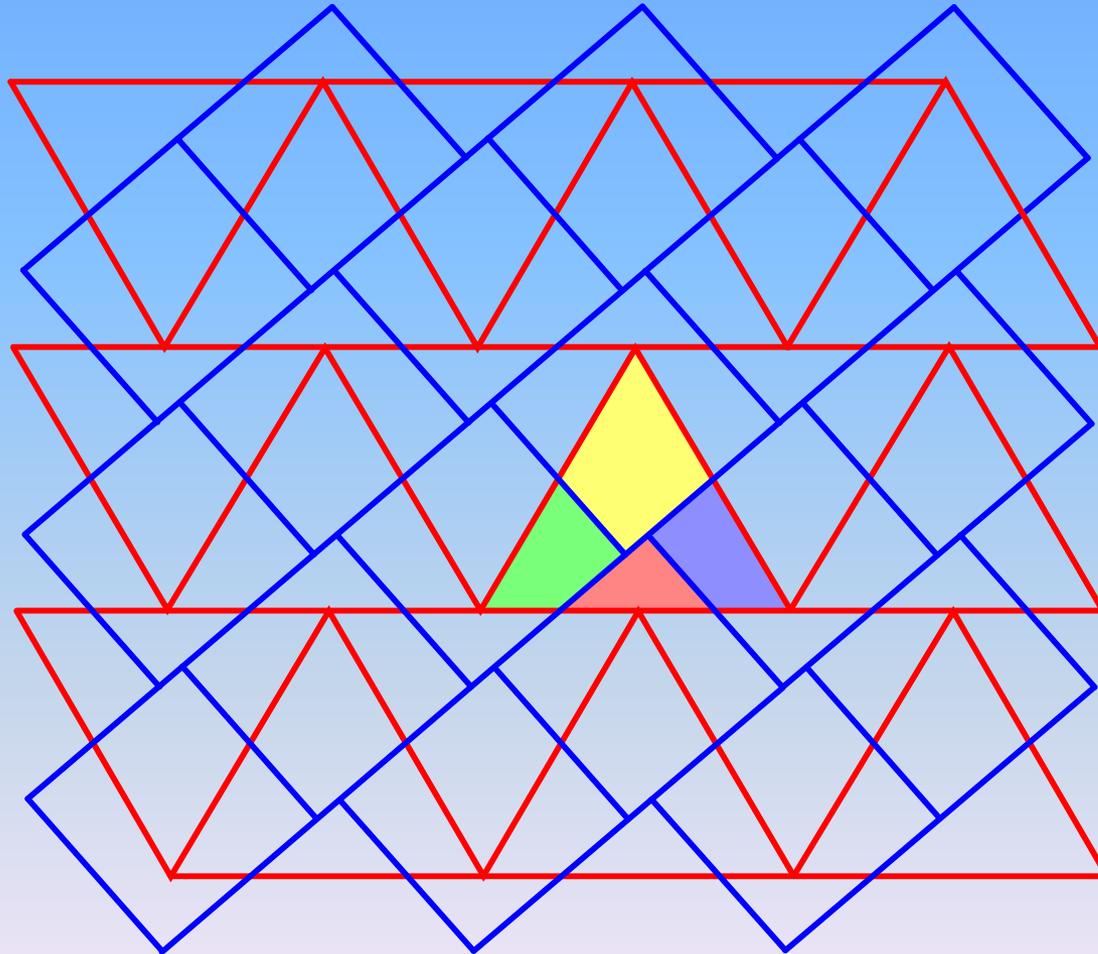


α による平面充填 + β による平面充填



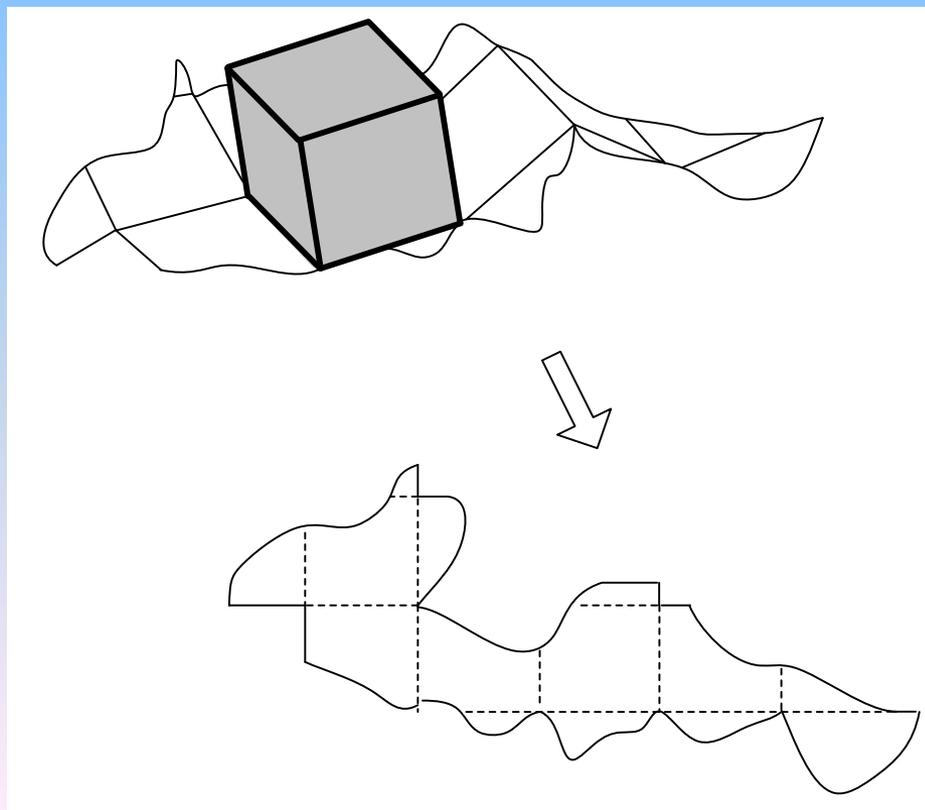
M6

α による平面充填 + β による平面充填



Ⅲ タイル製造器

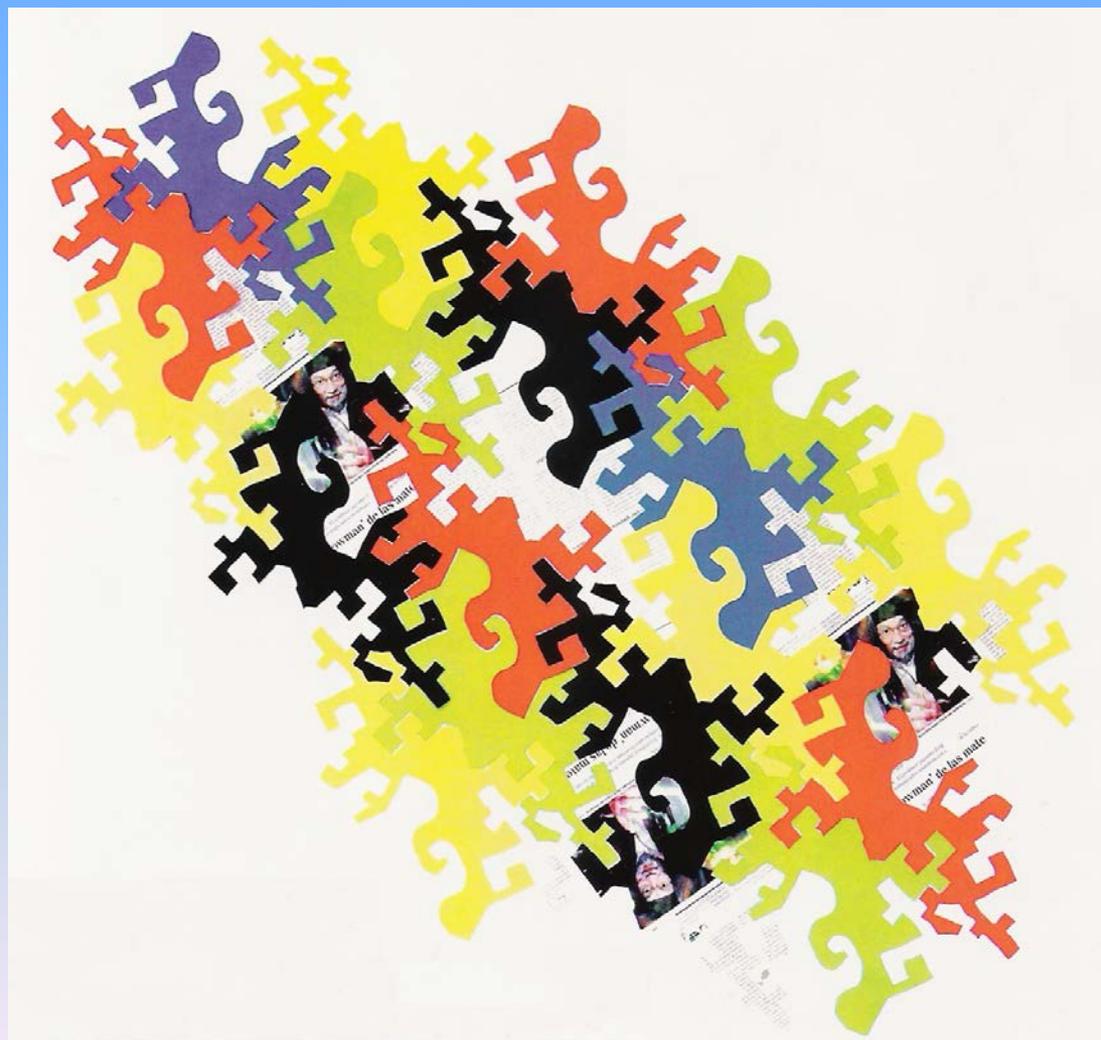
多面体の**ネット**とは多面体の表面を切り開くことによって得られる連結平面図形のことである。



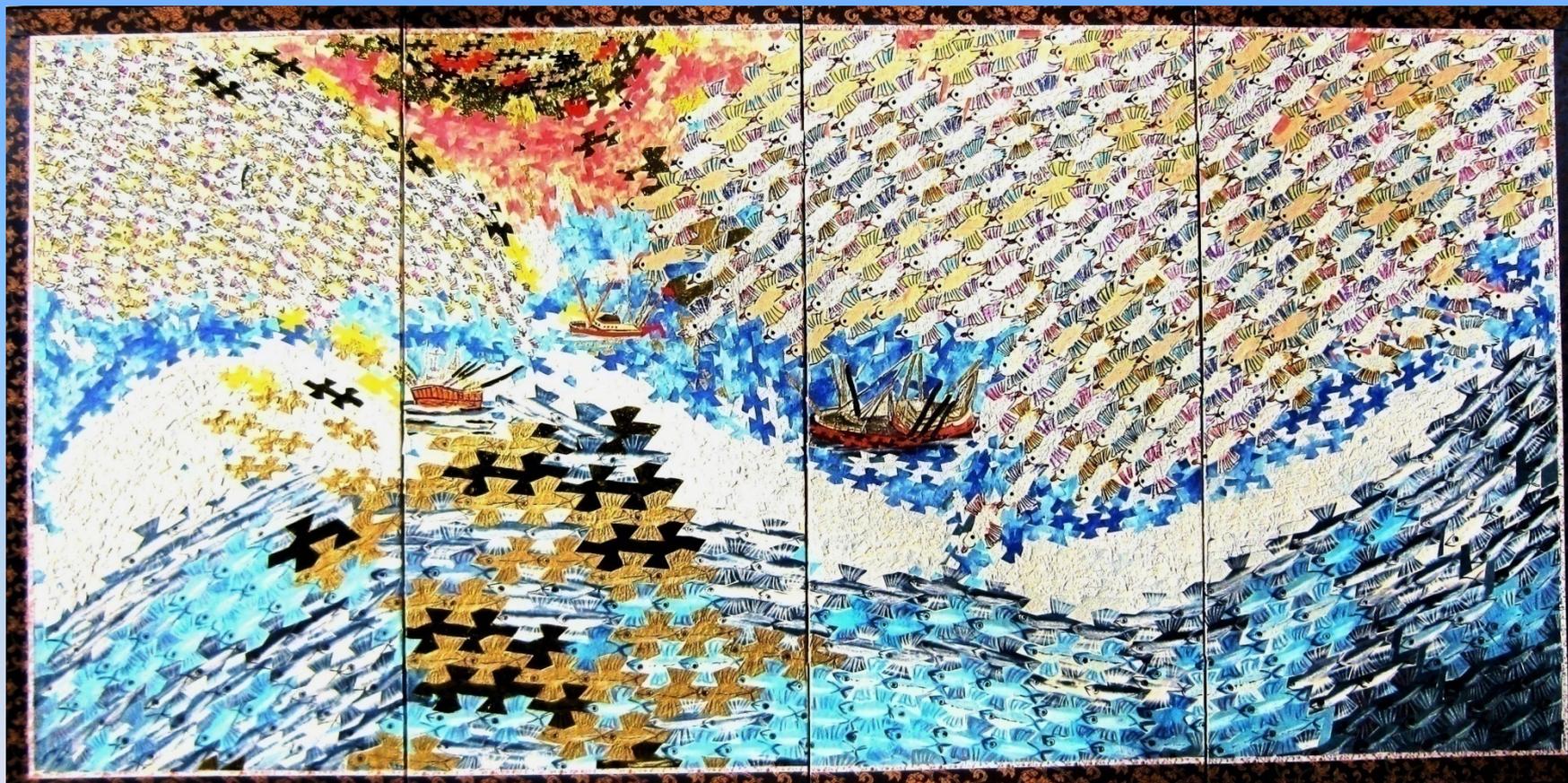
多面体 P のすべてのネットが平面を敷詰めるとき、 P は**タイル製造器**であるという。

定理 4 (Amer. Math. Monthly, J.A.(2007))
正四面体は**タイル製造器**である

定理4を応用したタイル張り作品



定理4を応用したタイル張り作品



IV 平行多面体の元素数

多面体の集合 Σ と Ω を考える。

Σ のどの多面体も、 Ω に属する有限個の多面体の面と面を張り合わせて作れるとき、 Ω を Σ の元素集合と言い、 $E(\Sigma)$ と書く。

$$\forall P \in \Sigma, \quad P = \bigcup n_i \sigma_i$$

ただし、 $n_i \in \mathbb{Z}$, $\sigma_i \in \Omega$.

Σ の**元素数** $e(\Sigma)$ とは、 Σ の**元素集合の要素数**のうち**最小のもの**である。

$$e(\Sigma) = \min_{\Omega \in E(\Sigma)} |\Omega|,$$

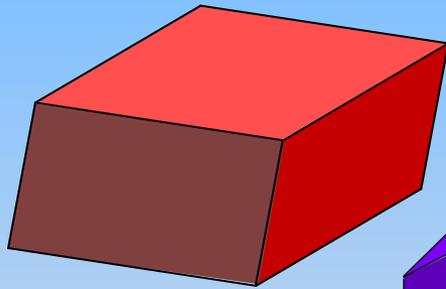
元素集合の要素のことを元素という。

平行多面体

平行多面体は以下の5つの族から成る(Fedorov)。

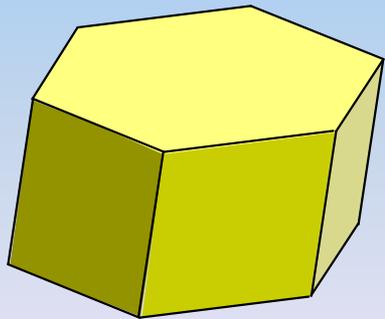
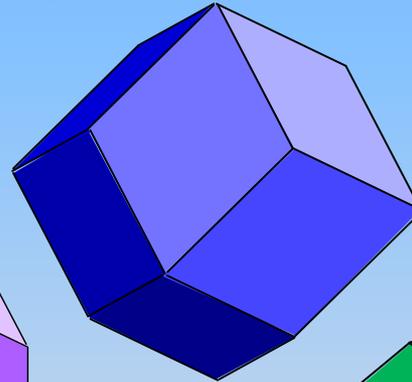
平行六面体

Parallelepiped(PP)



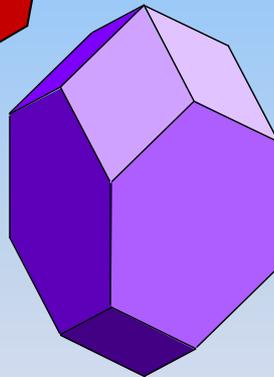
菱形十二面体

Rhombic Dodecahedron (RD)



斜六角柱

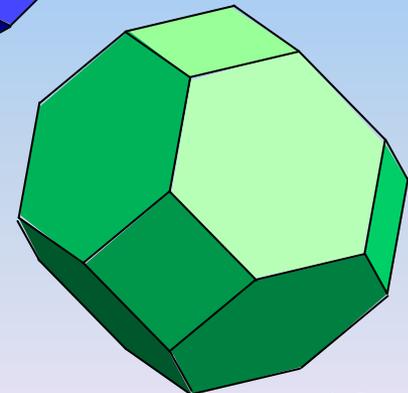
Hexagonal Prism(HP)



長菱形十二面体

Elongated Rhombic

Dodecahedron(ERD)



切頂八面体

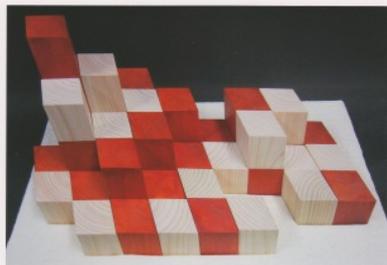
Truncated Octahedron(TO)

M1

これら五種類の族に属する立体は、どれも平行移動のみで空間を隙間なく詰め込むことができる、すなわち、空間充填立体である。

平行多面体による空間充填

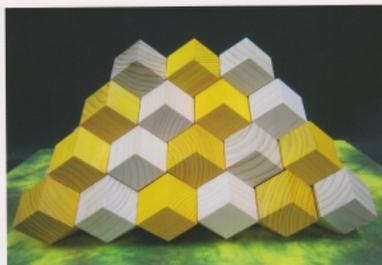
③ 秋（紅葉山）



④ 晩秋（収穫）



① 春（菜の花畑）



② 初夏（目に青葉）



⑤ 冬（流水）

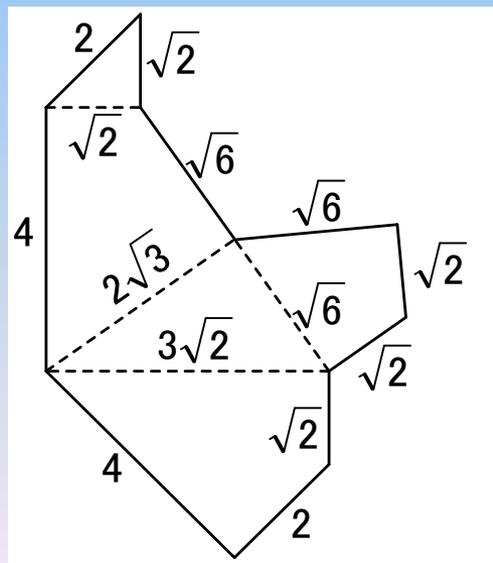
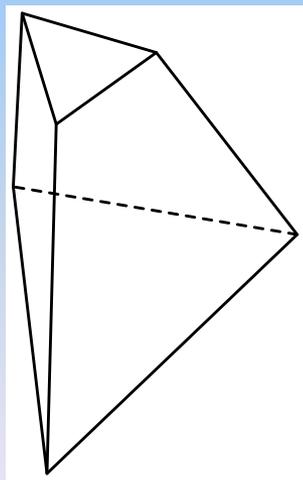
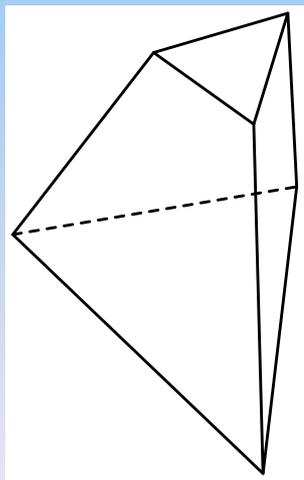


平行多面体の元素

定理 5 (to appear in “Intuitive Geom”. J.A. + 小林みどり + 中川宏 + 中村義作 + 佐藤郁郎)

平行多面体の5つの族の元素数は1である。すなわち、すべての平行多面体(の標準形)は下図の五面体(ペンタドロン)の面と面を貼り合せて作ることができる。

ペンタドロン



演示

M2

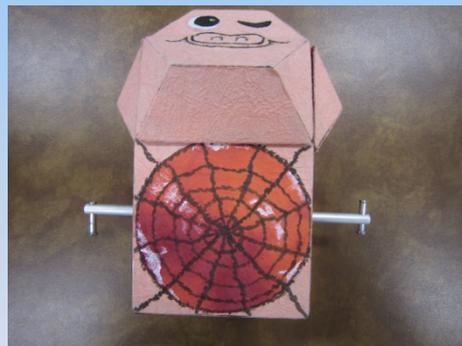
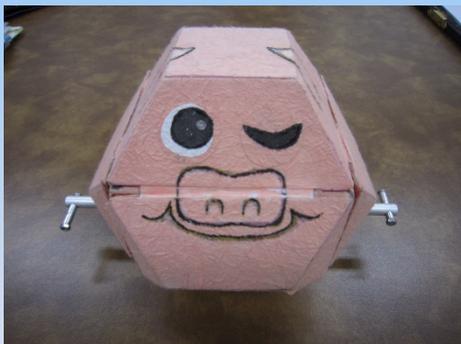
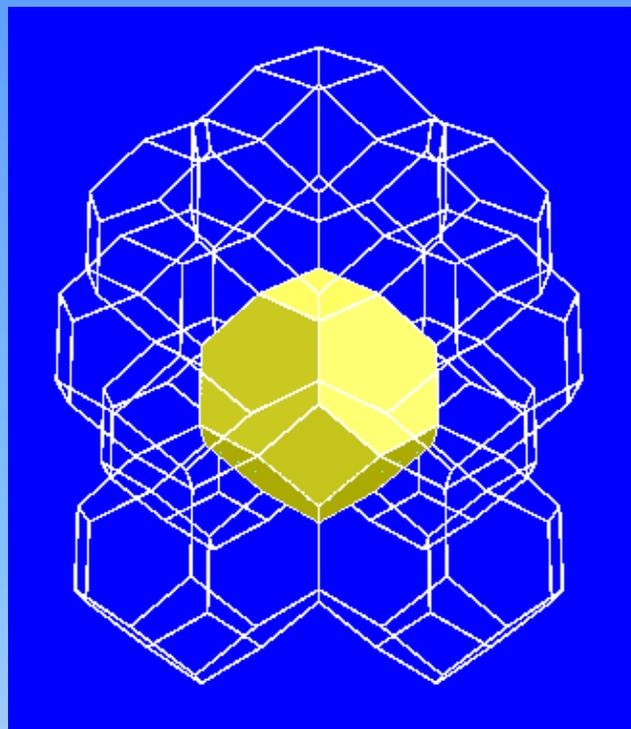
M3

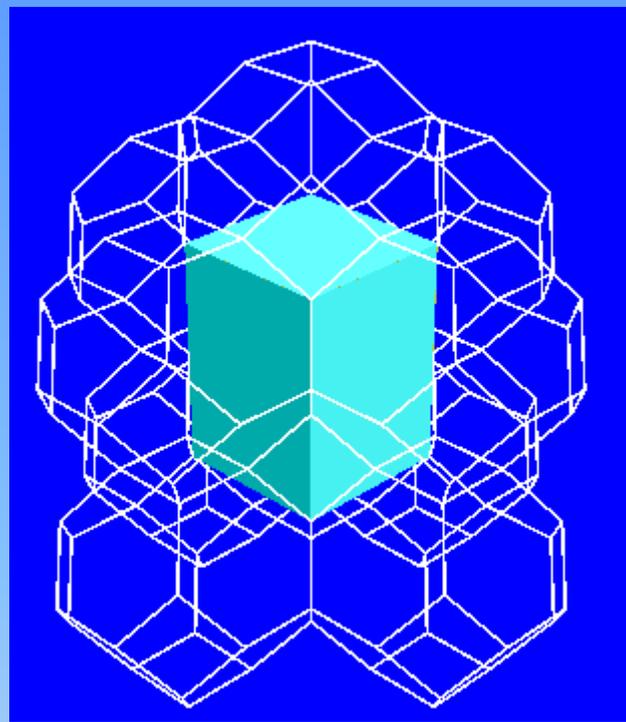
V 変身立体

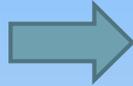
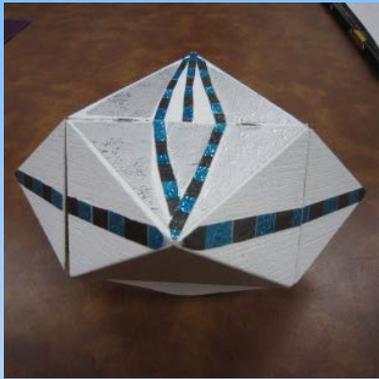
変身図形と同様の定義を多面体にも適用し、多面体の表裏逆転変身問題を考える。

定理 6 (To appear in “Proc. of the XIV Spanish Conf. on Comp. Geom.” J.A. + 佐藤郁郎 + 成暁宇)

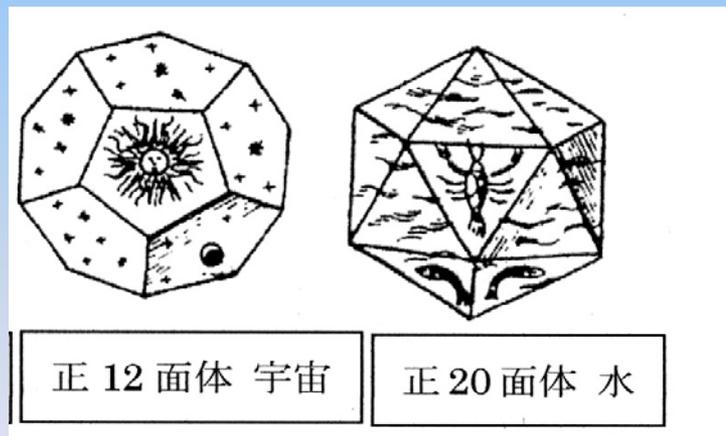
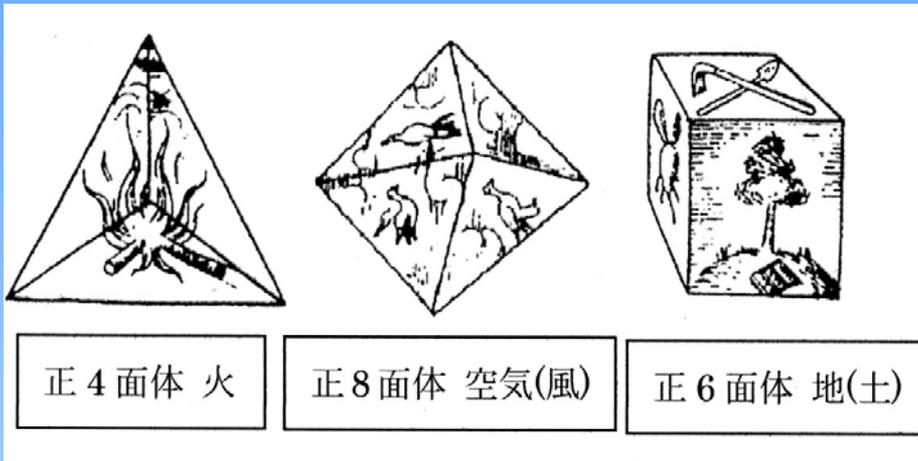
五種類の平行多面体の族をそれぞれ F_1 (平行六面体)、 F_2 (六角柱)、 F_3 (切頂八面体)、 F_4 (菱形十二面体)、 F_5 (長菱形十二面体) で表す。任意の $i, j (1 \leq i, j \leq 5)$ に関して、表裏逆転変身可能な多面体の対 $P \in F_i$ と $Q \in F_j$ が存在する。







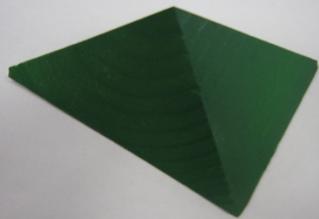
VI 正多面体の元素数



(図は『形の科学百科事典』から引用)

定理 7 (Geom.Dedicata.(2010), J.A.+佐藤郁郎)

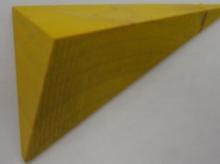
Π を五種類の正多面体の集合とする。 Π の元素数は4である。正四面体 (*regular tetrahedron*)、エクイヘプタ (*equihepta*)、黄金四面体 (*golden tetra*)、屋根型多面体 (*roof*)をそれぞれ σ_1 、 σ_2 、 σ_3 、 σ_4 と表す。すると $\Phi = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ は Π の元素集合であり、これら4つの元素による各々の正多面体の構成は次の表のようになる。



σ_1



σ_2



σ_3



σ_4

表: 正多面体の構成

正多面体	元素による構成
正4面体	σ_1
正6面体 (立方体)	$\sigma_1 \cup 4(\sigma_2 \cup 3\sigma_3) = \sigma_1 \cup 4\sigma_2 \cup 12\sigma_3$
正8面体	$8(\sigma_2 \cup 3\sigma_3) = 8\sigma_2 \cup 24\sigma_3$
正12面体	$\sigma_1 \cup 4\sigma_2 \cup 12\sigma_3 \cup 6\sigma_4$
正20面体	$8\sigma_2$

この証明ではデーノン不変量の概念を用いる。

φ を \mathbb{R} から \mathbb{Q} への \mathbb{Q} -線型写像で $\varphi(1) = 1$ を満たすとする。

また f を \mathbb{R} から \mathbb{R} への \mathbb{Q} -線型写像 $f(\pi) = 0$ を満たすとする。

\mathbb{R} から \mathbb{Q} への \mathbb{Q} -線型写像は \mathbb{R} の \mathbb{Q} -基底における関数値が決まれば一意に定まることに注意せよ。 P の各辺を e_1, e_2, \dots, e_n で表し、それぞれの辺 e_i に対応する二面角を δ_i と表す。

ここで、 P のデーノン不変量を、次のように定義する。

$$f_\varphi(P) := \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) f(\delta_i).$$

f_φ の値は写像 φ と f に依存する。

定理 A (M.デーノン) P が有限個の多面体 A_1, A_2, \dots, A_s に分割できるとき、任意の \mathbb{Q} -線型写像 φ と f に関して、

$$f_\varphi(P) = f_\varphi(A_1) + \dots + f_\varphi(A_s).$$

証明のあらすじ

- (1) この証明は背理法による。すべての正多面体が3種類の多面体 A_1 、 A_2 、 A_3 によって構成できると仮定する。ここで正4面体を T 、正6面体を C 、正8面体を O 、正12面体を D 、正20面体を I で表す。
- (2) 任意の \mathbb{Q} -線型写像 φ と f に関して $f_\varphi(T)$ 、 $f_\varphi(D)$ 、 $f_\varphi(I)$ は \mathbb{Q} -線型独立である。
- (3) T 、 D 、 I の二面角をそれぞれ τ 、 δ 、 η と表す。その値はそれぞれ $\arccos(1/3)$ 、 $\arccos(-\sqrt{5}/5)$ 、 $\arccos(-\sqrt{5}/3)$ である。ここで τ 、 δ 、 η 、 π が \mathbb{Q} -線型独立であることを示す。

(4) (3)より、 \mathbb{Q} -線型写像 φ と f を次のように定義できる。

$$f_{\varphi}(T) = n_T \times \tau$$

$$f_{\varphi}(D) = n_D \times \delta$$

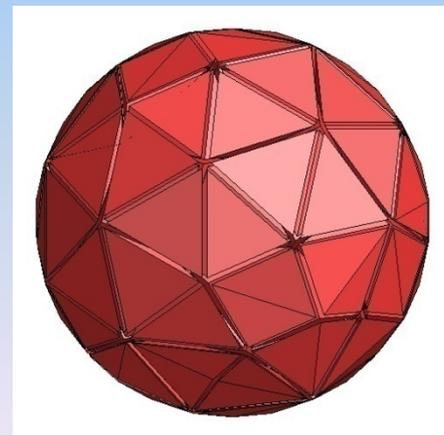
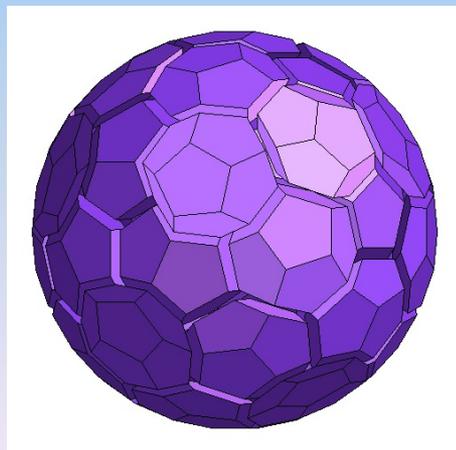
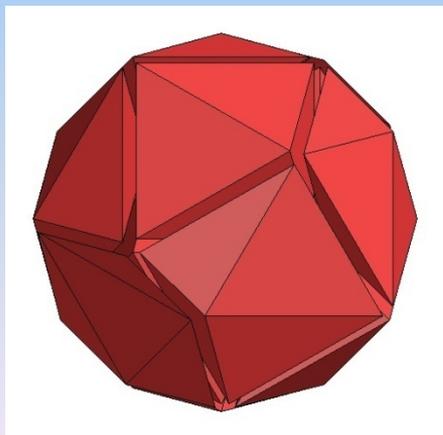
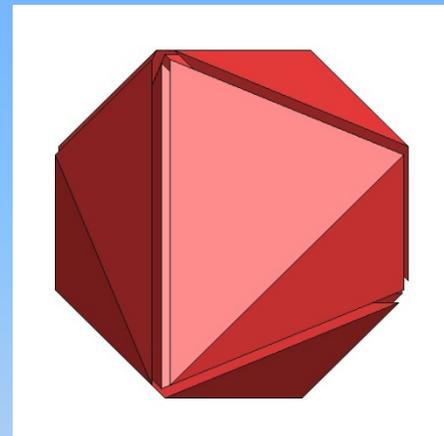
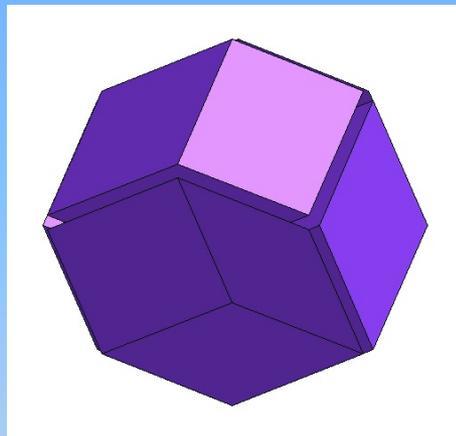
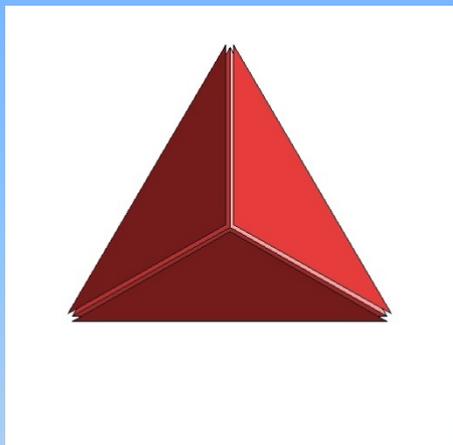
$$f_{\varphi}(I) = n_I \times \eta,$$

ただし、 n_T 、 n_D 、 n_I は自然数。

(5) (4)の式から、 $f_{\varphi}(T)$ 、 $f_{\varphi}(D)$ 、 $f_{\varphi}(I)$ は \mathbb{Q} -線型従属で、 τ 、 δ 、 η が \mathbb{Q} -線型独立であるという先の結論と矛盾する。

n次元正多胞体の集合 Π_n の元素数

4次元正多胞体 Π_4



Π_n をすべての正 n -多胞体の集合とする。

定理 8 (Geom.Dedicata.(2011), J.A. +一松信+佐藤郁郎)

正4-多胞体の元素数は4であり、 $n \geq 5$ に対して、 n -正多胞体 Π_n の元素数は3である。

次元 n	n -正多胞体の個数	元素数 $e(\Pi_n)$
2	∞	∞
3	5	4
4	6	4
≥ 5	3	3