# 非線形分散型波動方程式の大域解析

高岡秀夫
神戸大学大学院理学研究科

## 1　はじめに

自然界の現象を記述するものに非線形の偏微分方程式が用いられることが多い．分散的な波動現象を記述する非線形偏微分方程式は非線形分散型波動方程式（単に分散型方程式ともいう）と呼ばれ，非線形 Schrödinger 方程式，Korteweg-de Vries (K-dV) 方程式，非線形 Klein-Gordon 方程式，Zakharov 方程式，Benjamin-Ono 方程式などが含まれる．これら非線形分散型波動方程式は分散性と非線形性とが作用する波束の発展を記述する方程式である．

**分散性 •••** 振動数（波数）の大きい波ほど速く広がる

**非線形性 •••** 非線形相互作用により，波束を持つ波の重ね合わせから波の集約・発散といった現象が誘起される

非線形分散型方程式の研究においては，分散性と非線形性の相互作用によって波動の特異性の伝播がどのように非線形発展していくか，それを解析して理解することが目的となる．この講演では,「フーリエ空間における波数間相互作用の解析 §4」と「 時空間によるエネルギー集約の解析 §5」の二つをキーワードとして，非線形分散型波動方程式の大域解析について幾つかの話題を紹介したい．

### 1.1　分散性・非線形性

次の K-dV 方程式を引合に出して分散性と非線形性との性質を簡単に説明したい．

$$\partial_t u(t,x) + \partial_{xxx} u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

K-dV 方程式は完全可積分系の方程式として知られ，分散性と非線形性の共存がうまく釣り合い，一定波形を保ちながら進行するソリトン解のような特殊な波束の発展を記述することもあり，種々な物理現象とも関連する方程式である．

K-dV 方程式に対する線形方程式 $\partial_t u(t,x) + \partial_{xxx} u(t,x) = 0$ の一般解は，振動数 $\xi$ の平面波 $e^{ix\xi+it\xi^3}$ に振幅を掛けた波束の重ね合わせ（フーリエ積分）で書ける．このとき，上の平面波は物理空間において位相速度 $-\xi^2$ で進み，振動数 $\xi$ が大きいほど空間について激しく振動しながら負の方向に広がる**（分散性）**．また，非線形方程式 $\partial_t u(t,x)+u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0$ の一般解は適当な関数 $f$ を用いて $u(t,x) = f(x-u(t,x))$ の解として与えることができる．このとき，波は $u(t,x)$ の大きさに応じて異なる位相速度を持つので，その特徴を使ってある時刻・空間点において波が集約し発散を起こす状況を構成できる**（非線形性）**．

### 1.2 分散型方程式の解の性質 ··· 平滑化効果

上の平面波の振動の様子を見る限り, 波の減衰や平滑化効果に関する情報は期待できない．平滑化効果は放物型方程式に顕著に現れる性質で，初期値が滑らかでなくとも時間を発展させると解の滑らさが評価されるという現象である．このことは熱方程式 $\partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0$ に対する振動数 $\xi$ の解 $e^{ix\xi-t\xi^2}$ が時間発展において減衰振動しながら散逸することからも分かる．また振動数が高いほど速く減衰することから，波数が高いところはある程度無視可能である．強いて言うならば，波数空間において考える限り，放物型方程式は有界の波数空間（離散的波空間では有限次元）であるが分散型方程式は無限の波数空間の問題として捉える必要があると言えるかもしれない．この点が放物型方程式と本質的に違う性質であり，分散型方程式を扱う上で数学的に難しいところである．

## 2 基本的な問題と研究方法

時間発展の偏微分方程式（発展方程式）において基本的な問題は初期値問題が数学的にどのように解けるかということと，その解の振る舞いを調べることである．なお初期値に対して解が存在し，一意に定まり，初期値と解の対応が連続的，つまり初期値の変化に対する依存性が安定なとき，初期値問題は適切という (cf. [7, 8])．ある時間区間において適切性が成り立つ場合を時間局所適切といい，解の集約・発散などの現象がおこらず無限時間において適切性が成り立つ場合を時間大域適切という．この講演では非線形 Schrödinger 方程式，特に空間次元が 3 次元の場合に対して，どのような関数空間で解けるか**（初期値問題の大域適切）**，その解の漸近的な振る舞い**（解の散乱問題）**について幾つか紹介したい．

## 2.1　解析方法 ··· 時間局所

関数解析的取り扱いによる偏微分方程式の解析に対しては，枠組みとなる適切な関数空間の設定と，解に関する（不等式による）評価式が必要となる．

前節において述べたように，分散型方程式においては放物型方程式のような平滑化効果は期待できない．しかしながら，時間発展に対して波が十分に分散した後は激しく振動してエネルギー散逸に類似する現象が見えるので, その振動効果をうまく解析に取り込めば平滑化効果が期待される．例えば時間変数について総和・平均操作を行うことなどが研究されている．

この研究の流れは 1970 年代の Strichartz による線形解の時間・空間変数に関する $L^p$ 型評価式，いわゆる Strichartz 評価式 (cf. [18]) に見て取れる．例えば K-dV 方程式の線形解については次の評価式が成り立つ．

$$\|u(t,x)\|_{L_t^8(L_x^8)} \le c\|u(0,x)\|_{L_x^2}, \quad \|\partial_x u(t,x)\|_{L_x^\infty(L_t^2)} \le c\|u(0,x)\|_{L_x^2}.$$

後者の評価式は Kato smoothing effect と呼ばれる．Strichartz 評価式は線形解の評価式なので，非線形項を線形方程式の摂動と見做せば非線形項の構造に因らずにある程度統一的に扱うことができ，これまで様々な方程式に応用されている (cf. [6, 16, 31])．

Strichartz 評価式は実解析学における Fourier 制限定理とも関連する分野である．Fourier 制限法による手法で非線形項を直接評価する議論として，1990 年代の Bourgain による Fourier 制限法を挙げることができる [1, 20, 21]．これは波を各モードの平面波に分解して, 時間・空間変数に関する Fourier 空間とそれに応じた Sobolev 空間を用いてその非線形相互作用を解析・評価する方法である.（他にも，平滑化効果を非線形問題に取り入れた技法として Koch-Tzvetkov によるエネルギー不等式などがある [22].）

## 2.2　解析方法 ··· 時間大域

Strichartz 評価式，Bourgain による Fourier 制限法による理論は，主として非線形項を線形解からの摂動問題として捉えるので，時間大域的な問題には不足な場合が多い．例えば，K-dV 方程式のような 2 次の非線形項に対して波の波数が大きく異なる平面波同士が非線形相互作用する場合（物理空間では単なる関数の積，波数空間では関数の合成積），波数間のエネルギー転換は非局所時間的で相互作用後の波は高周波数のモードとして出力される（線形的な取り扱いが可能）．ちなみに，近い波数間相互作用に対しては，分散効果から波数間エネルギー転換は時間スケールとして短い時間で起こる．その場合の相互作用を評価するところでは Fourier 制限法の醍醐味を堪能できる（局所平滑化効果の利用）．時間大域的な問題に対しては，このような複雑なエネルギー転換を時間大域的に統御する必要がある．

# 3　非線形 Schrödinger 方程式の局所適切・大域適切

空間 3 次元の非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^{p-1}u, \quad u(0,x) = u_0(x), \tag{1}$$

を考える．ここで， $u(t,x) : \mathbb{R}^{1+3} \to \mathbb{C}$, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ は空間変数に関するラプラシアン，$p > 1$ は非線形項の影響を与える位数である．方程式 (1) の解に対して $L^2$-保存則（電荷保存則）

$$\|u(t,x)\|_{L^2_x} = \|u_0(x)\|_{L^2_x} \tag{2}$$

とエネルギー保存則

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 + \frac{1}{p+1}|u(t,x)|^{p+1}\, dx = E(0) \tag{3}$$

が成り立つ．保存則の関数空間，さらに線形方程式の解を定める発展作用素が $L^2$-ユニタリ群をなすので，初期値の関数空間としては $L^2_x$-ルベグ空間を基にして微分階数 $s$ を含む Sobolev 空間 $H^s_x$ において考えるのが自然である．

## 3.1　時間局所適切

(1) の線形 Schrödinger 方程式 $i\partial_t u + \Delta u = 0$ に対しては Strichartz 評価式

$$\|u(t,x)\|_{L^q_t(L^r_x)} \le c\|u(0,x)\|_{L^2_x}, \quad \frac{2}{q} = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right),\ 2 \le r \le \infty \tag{4}$$

が成り立つ [6, 31]．この Strichartz 評価式に現れる $L^q_t(L^r_x)$ 型ノルムを基に，時間変数 $t$ に関するノルムは有界区間に制限した適当なバナッハ空間 $S$ を定め，非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題 (1) の時間局所適切を導くことができる．例えば, 発展方程式 (1) を時間変数についての常微分方程式とみなして，初期値問題を積分方程式に書き換えた Duhamel 項に対するバナッハ空間 $S$ 上の閉じた評価式から，$1 < p \le 7/3$ において $L^2$-時間局所適切が，$1 < p \le 5$ において $H^1$-時間局所適切が得られる [6, 31]．実際には逐次近似解として解が構成される．逐次近似法を適用する上で，第一次近似, つまり初期値の大きさを制限する必要があるかもしれないが，それについては方程式 (1) を不変に保つ時空スケール変換群

$$u(t,x) \mapsto \frac{1}{\lambda^{2/(p-1)}} u\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0 \tag{5}$$

により

$$\|u_0(x)\|_{L^2_x} \mapsto \lambda^{3/2-2/(p-1)}\|u_0(x)\|_{L^2_x} \tag{6}$$

$$\|\nabla u_0(x)\|_{L^2_x} \mapsto \lambda^{3/2-2/(p-1)-1}\|\nabla u_0(x)\|_{L^2_x} \tag{7}$$

の対応があるので，$\lambda > 0$ を大きくとることにより問題の設定段階で「初期値は小さい」と仮定することができる．ただし，この議論は $p$ が等号を満たす場合 ((6) では $p = 7/3$, (7) では $p = 5$ のとき）は通用できず，一部制限した形で時間局所適切が得られる [6].

### 3.2 時間大域適切 ⋯ 保存則のクラス

解の接続問題を時間局所適切の結果に適用して時間大域的な適切性を示そうとすると，解の大きさ（この場合は $H^s_x$-ノルムの大きさ）についての先験評価式が必要となる．例えば，$L^2$-保存則 (2) からは $1 < p < 7/3$ の下で $L^2_x$-時間大域適切が得られ，エネルギー保存則 (3) 及び $L^2$-保存則 (2) からは $1 < p < 5$ の下で先験評価式

$$\|u(t,x)\|_{H^1_x} \leq C(E(0), \|u_0\|_{L^2_x})$$

を得ることができ $H^1_x$-時間大域適切を導くことができる [6, 31].

## 4 エネルギー転換と大域適切 ⋯ 保存則のクラスを超えて

分数階 Sobolev 空間 $H^s_x$ においても時間局所適切を得ることができる．例えば，$p = 3$ の場合は $s \geq 1/2$ に対して非線形 Schrödinger 方程式 (1) の $H^s_x$-時間局所適切を導くことができる．しかし，$1 > s \geq 1/2$ の Sobolev 空間 $H^s_x$ に対しては対応する方程式の保存則がないので，何かしらの考察が必要となる．特に，方程式の分散性から波のエネルギーが低周波帯から高周波帯に輸送される過程（後述の $u_{\mathrm{low}} - u_{\mathrm{low}}$ の相互作用)，他にも非線形性の影響により高周波帯から低周波帯に逆向きのエネルギーの流れ（後述の $u_{\mathrm{high}} - u_{\mathrm{high}}$ の相互作用）などの複雑なエネルギーカスケードが連続的に起こり，その転換状況を評価する必要がある．

エネルギー転換評価については Bourgain による切断的方法 [2, 27] もあるが，方程式の構造を反映してより評価の精密化を施した次のエネルギー量を考える [5, 10]

$$\widetilde{E}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\nabla I u(t,x)|^2 + \frac{1}{4}|Iu(t,x)|^4 \, dx, \quad p = 4. \tag{8}$$

ここで，$I : H_x^s \to H_x^1$ は 空間変数について滑らかな Fourier 掛算作用素，時間変数に由来するパラメータをかけて定義され，低周波帯では恒等作用素として，高周波帯では $s-1$ 階の積分作用素として働く．きちんと述べると，Fourier 変換を用いて

$$\widehat{Iu(t,\cdot)}(\xi) = m_N(\xi)\widehat{u(t,\cdot)}(\xi), \quad m_N(\xi) = m(\xi/N) \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

$|\xi| \le 1$ において $m(\xi) = 1$, $|\xi| \ge 2$ において $m(\xi) = |\xi|^{s-1}$ で定義される．$N$ は時間変数に由来するパラメータで，波数帯分離を定める値として導入する．このとき

$$\|u(t,x)\|_{H_x^s} \le C(\widetilde{E}(t), \|u(t,x)\|_{L_x^2}, N)$$

が成り立ち，$\widetilde{E}(t)$ を大域的に評価することにより解の $H_x^s$-先験評価式を得ることができる．

波数空間において，関数を低周波帯 (low), 高周波帯 (high) によって分解すると

$$u = u_{\mathrm{low}} + u_{\mathrm{high}},$$

(8) の右辺第一項 $\nabla Iu$ について，低周波帯では $\nabla u_{\mathrm{low}}$ であり，高周波帯では $N^{1-s}|\nabla|^s u_{\mathrm{high}}$ を意味している．なお，波数の大きく異なる波の相互作用（$u_{\mathrm{low}} - u_{\mathrm{high}}$ の相互作用）によるエネルギー転換は少ないので，エネルギー輸送は $u_{\mathrm{low}} - u_{\mathrm{low}}$ の共振から高周波帯に移行されるところと，$u_{\mathrm{high}} - u_{\mathrm{high}}$ の共振から低周波帯に移行されるところで起こる．ただし，$L^2$-保存則 (2) やエネルギー保存則 (3) の場合とは異なり，エネルギー量 $\widetilde{E}(t)$ は保存されないので $H_x^s$-先験評価として時間変数に対して増大を込めて評価される．実際には, $\widetilde{E}(t)$ を時間微分して, 方程式 (1) を代入することによって

$$\frac{d}{dt}\widetilde{E}(t) = -\Re\int_{\mathbb{R}^3} \overline{I\partial_t u}(I(|u|^2u) - |Iu|^2 Iu)\,dx$$

が成り立ち（$H_x^1$-エネルギー $E(t)$ では $I =$ 恒等作用素なので右辺は 0 となる），右辺を交換演算子及び Strichartz 評価式によって評価し

$$\widetilde{E}(t_2) - \widetilde{E}(t_1) \le |t_2 - t_1|^{-\delta} C(\|u(t_1,x)\|_{H_x^s}),$$

$(t_2 \gg t_1,\ \delta > 0)$ の形の評価式を得ることができる．通常の時間局所適切の証明は $\delta = 0$ の場合なので，それを時間区間において時間大域的に反復適用したのではエネルギーの一様評価ができないが，$\delta > 0$ の場合は丁度 $\sum_{k=1}^K 1/L^\delta \le 1$ (任意の $K$ （解の存在時間）に対して $L > K^{1/\delta}$ （反復法を適用する局所解の存在時間）を取る）に対応する計算からエネルギー $\widetilde{E}(t)$ に関する定量的な評価式を導くことができる．$\delta$ の大きさによって先験評価可能な微分階数 $s$ の適用範囲が決まり，例えば $p = 3$ の場合は $s > 5/6$ において時間大域適切が得られている [9].

**補足.** K-dV 方程式に対してはデルタ関数を含む超関数のクラスで時間大域適切が得られている [10].

上の議論では解の $H_x^s$-ノルムについて不等式を用いて上から評価されている．$H_x^s$-ノルムが真に増大しているかは良く分からないが，その肯定的な結果として空間次元 2 次元の場合の周期境界条件 Schrödinger 方程式の結果がある [15]. 波数空間において非線形相互作用が波数間共鳴（非線形項と線形項との振動数が共鳴する現象）する状況を人工的に構成し，その共鳴場の時間発展増大を与えている (cf. [12, 14]).

# 5　時空評価式による解の集約と散乱問題

解の時間無限大における挙動において，非線形相互作用に入射した波が線形解として放出され広がっていく散乱状態を考える．このとき，非線形 Schrödinger 方程式 (1) の解はある線形 Schrödinger 方程式の解に漸近的に収束する．散乱問題とは大雑把に言えば，非線形問題と線形問題との漸近的対応を調べることである [26, 24, 32].

解が散乱しない場合は，解の有限時間爆発 [17] や非線形相互作用に入射した波が線形解として広がらずソリトン解（基本的に非線形 Schrödinger 方程式の解）のような物理空間・波数空間において集約することがありうる．散乱状態を実現するには，少なくともこれらの可能性を排除する評価式が必要となる．

## 5.1　$p < 5$ の場合

非線形 Schrödinger 方程式 (1) に対する散乱問題は次の Morawetz 評価式によって $7/3 < p < 5$ の範囲で得られている [16].

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t,0)|^2\,dt + \int_{\mathbb{R}^{1+3}} \frac{|\not\nabla_x u(t,x)|^2}{|x|} + \frac{|u(t,x)|^{p+1}}{|x|}\,dxdt \le C(\|u_0\|_{H_x^1}). \tag{9}$$

ここで, $\not\nabla_x$ は $\nabla$ の動径方向成分を除いた角度方向成分を表す．左辺第三項から

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(t,x)|^{p+1}}{|x|}\,dx$$

の時間可積分性が得られ，例えば原点 $x = 0$ の周りで解の時間減衰を与えることができる．なお，方程式 (1) は空間変数の平行移動に対して不変なので分母を $|x| \mapsto |x-a|$ と取り替えることにより，上の事実は原点とは限らなくとも任意の点 $a$ の近傍で成り立つ．ただし，空間局所化した解の時間減衰が得られても，時間の経過とともに互いに影響を受けて波の集約が発生するかもしれないので，これだけで解の散乱は結論付けできない．空間局所化された波の相互作用についても時間減衰評価を行う必要があ

り，その際に時空スケール変換群 (5) を用いると波の大きさの集約を物理空間における時空スケールの集約に互いに翻訳することができる（制限 $p < 5$ が本質的に必要）．この性質とエネルギー保存則を使うと, 時空間において波の集約は有限箇所であることを証明することができるので, 十分時間が経てば散乱現象が導ける．

上の Morawetz 評価式は $|x||u(t,x)|^2$ をエネルギー密度に持つ分布関数の時間変分を調べることによって得られる．相互作用型エネルギー密度 $|x-y||u(t,x)|^2|u(t,y)|^2$ の分布を考えることにより，次の相互作用型 Morawetz 評価式が示される [11, 13]．

$$\int_{\mathbb{R}^{1+3}} |u(t,x)|^4\, dxdt \le C(\|u_0\|_{H^1_x}). \tag{10}$$

この評価式から $\|u(t,x)\|_{L^4_x}$ の時間 $L^4_t$-可積分性が得られる．通常の Morawetz 評価式 (9) に対し，(10) は空間局所的な解の時間減衰のみならず，波の相互作用が時間減衰するという情報も含んでいるので，これまでの証明を幾ばくか容易にできる．実際，Strichartz 評価式 (4) と (10) とを組み合わせるだけで散乱が得られる．

## 5.2　エネルギー臨界型 $p = 5$ の場合

時空スケール変換群 (5) によるデータ集約不変 (7) があるので，Morawetz 評価式を含めて全ての評価は時空スケール変換群の下で不変な枠組みで取り扱う必要がある（さもないと例えば $0 < 0$ のような不等式が現れる）．

解が球対称の場合，つまり $u(t,x)$ が $x$ について $|x|$ の関数で与えられるときは Morawetz 評価式を時空スケール不変型に修正することによって解の散乱を得ることができる [4]. 球対称解の場合，波の集約が起こる時は原点であることが知られている．空間局所化された集約の相互作用は考えなくてよいが，時空スケール不変型 Morawetz 評価式からは $p < 5$ の場合のような解の時間減衰が直接は得られない（時間の経過とともに，原点で波の集約が現れては消え，さらに ⋯ ）．実際には空間局所化された波の集約を解から分離するという大操作を行うことによって証明することができる．

一般の場合にも解の散乱を得ることができる [13]．ただし 時空スケール不変型 Morawetz 評価式を使ったのでは解の時間減衰が得られないので，今回は相互作用型 Morawetz 評価式を修正する．例えば時空スケール不変な次の評価式を使う．

$$\int |u_{\mathrm{high}}(t,x)|^4\, dxdt \le C(E(0))N^{-3} \tag{11}$$

ここで $N$ は波数帯分離を定めるパラメータを表す．しかしこの場合，波の集約は原点とは限らないので $p < 5$ の場合と同様に空間局所化された波の相互作用を調べる必要がある．物理空間における解析は困難なので，実際には波の集約を波数空間で議論する．(11) は高周波帯の解の時間減衰を評価するところで必要となる．だが，物理空間か

ら波数空間に問題を移行したところで，今度は波数空間で局所化された波が時間経過とともに相互作用してエネルギー転換を行う可能性があり，それが本質的な問題である．実際には，$L^2$-保存則 (2) を基にエネルギー量 (8) に対応した

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}^3} |u_{\mathrm{high}}(t,x)|^2 \, dx$$

にエネルギー転換理論を適用して波数間相互作用を定量的に評価する．ここでは 波の大きさの集約を波数空間におけるスケールの集約に翻訳する上で，(6) が時空スケール不変でないことが重要な役割をなす．あとは波数空間おいて局所化された集約を波数空間において解から分離することにより解の散乱を示すことができる．

**補足.** §4 のエネルギー転換理論と Morawetz 型評価式 (9), (10) とを組み合わせて，解の $H^s_x$-散乱が得られる [3, 11].

相互作用型 Morawetz 型評価式 (10) は，エネルギー密度関数に現れる $|x|$ がラプラシアンの性質 $\Delta\Delta|x| = 4\pi^2\delta$ を満たすことから構成されるので, 空間次元が 2 次元以下では適用できない．空間次元 1 次元，2 次元の場合の散乱問題は時間変数にも依存する形でエネルギー密度関数を考えることによって解決されている [23]．空間次元 $d$ が 4 以上の場合，$1 + 4/d < p \leq 1 + 4/(d-2)$ での散乱が得られている [16, 25, 28, 29]. $d \geq 3$ の場合，球対称解に限れば $p = 1 + 4/d$ での散乱が示されているが, 一般の場合は良く分かっていない [30].

# 参考文献


[1] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, Schrödinger equations, The periodic KdV equation*, Geom. Funct. Anal., 3 (1993), 107-156, 209-262.

[2] J. Bourgain, *Refinements of Strichartz' inequality and applications to 2D-NLS with critical non-linearity*, Int. Math. Research Notices, 5 (1998), 253-283.

[3] J. Bourgain, *Scattering in the energy space and below for 3D NLS*, J. Anal. Math., 75 (1998), 267-297.

[4] J. Bourgain, *Global wellposedness of defocusing critical nonlinear Schrödinger equation in the radial case*, J. Amer. Math. Soc., 12 (1999), 145-171.

[5] J. Bourgain, *A remark on normal forms and the I-method for periodic NLS*, J. Anal. Math., 94 (2004), 125-157.

[6] T. Cazenave and F.B. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation*, Non. Anal. TMA, 14 (1990), 807-836.

[7] M. Christ, J. Colliander and T. Tao, *Asymptotics, frequency modulation, and low-regularity illposedness of canonical defocussing equations*, Amer. J. Math., 125 (2003), 1235–1293.

[8] M. Christ, J. Colliander and T. Tao, *Low-regularity ill-posedness for nonlinear Schrödinger and wave equations*, preprint.

[9] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation*, Math Res. Lett., 9 (2002), 659-682.

[10] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Sharp global well-posedness results for periodic and non-periodic KdV and modified KdV on* $\mathbb{R}$ *and* $\mathbb{T}$, J. Amer. Math. Soc., 16 (2003), 705–749

[11] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Global existence and scattering for rough solutions of a nonlinear Schrödinger equation on* $\mathbb{R}^3$, Comm. Pure Appl. Math., 57 (2004), 987–1014.

[12] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Symplectic non-squeezing of the Korteweg-de Vries flow*, Acta Math., 195 (2005), 197–252.

[13] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Global well-posedness and scattering in the energy space for the critical nonlinear Schrödinger equation in* $\mathbb{R}^3$, accepted in Anal. Math.

[14] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Resonant decompositions and the I-method for cubic nonlinear Schrödinger on* $\mathbb{R}^2$, accepted in Discrete Cont. Dynam. Systems.

[15] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Weak turbulence for 2d periodic cubic defousing NLS*, in prepareation.

[16] J. Ginibre and G. Velo, *Scattering theory in the energy space for a class of non-linear Schrödinger equations*, J. Math. Pures Appl., 64 (1985), 363-401.

[17] R. T. Glassey, *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger operators*, J. Math. Phys., 8 (1977), 1794-1797.

[18] M. Keel and T. Tao, *Endpoint Strichartz estimates*, Amer. J. Math., 120 (1998), 955-980

[19] C. E. Kenig and F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case*, Invent. Math., 166 (2006), 645–675.

[20] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, J. Amer. Math. Soc., 9 (1996), 573-603

[21] S. Klainerman and M. Machedon, *Space-time estimates for null forms and the local existence theorem*, Comm. Pure Appl. Math., 46 (1993), 1221-1268.

[22] H. Koch and N. Tzvetkov, *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono equation in* $H^s(\mathbb{R})$, Internat. Math. Res. Notices, 26 (2003), 1449–1464.

[23] K. Nakanishi, *Energy scattering for non-linear Klein-Gordon and Schrödinger equations in spatial dimensions 1 and 2*, J. Funct. Anal., 169 (1999), 201-225.

[24] 中西 賢次, 非線形分散波動の漸近解析, 数学, 59 (2007), 337–352.

[25] E. Ryckman and M. Visan, *Global well-posedness and scattering for the defocusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in* $\mathbb{R}^{1+4}$, Amer. J. Math., 129 (2007), 1-60.

[26] 小澤 徹, 非線型シュレディンガー方程式の散乱理論, 数学, 50 (1998), 337–349.

[27] H. Takaoka, *Global well-posedness for the Kadomtsev-Petviashvili II equation*, Discrete Cont. Dynam. Systems, 6 (2000), 483-499.

[28] T. Tao, *Global well-posedness and scattering for the higher-dimensional energy-critical nonlinear Schrödinger equation for radial data*, New York J. Math., 11 (2005), 57–80

[29] T. Tao and M. Visan, *Stability of energy-critical nonlinear Schrödinger equations in high dimensions*, Electron. J. Differential Equations, 2005, No. 118, 28 pp.

[30] T. Tao, M. Visan and X. Zhang, *Global well-posedness and scattering for the defocusing mass-critical nonlinear Schrödinger equation for radial data in high dimensions*, Duke Math. J., 140 (2007), 165–202.

[31] Y. Tsutsumi, *$L^2$-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*, Funk. Ekva., 30 (1987), 115-125.

[32] 堤 誉志雄, 非線形波動方程式の解の大域存在と爆発, 数学, 53 (2000), 139–156.