標準環有限生成定理 (Finite generation theorem of canonical rings)

川又 雄二郎（東大数理）

2008 年 3 月 24 日

1　前文

この講演の目的は Birkar-Cascini-Hacon-McKernan [3] による標準環の有限生成定理の紹介をすることにある．証明は極小モデルプログラムを使用する代数的なものである．Siu [19] による複素解析的な方法については解説しない．たとえば Paun [15] を見られたい．なお, [9] にはもう少し詳しい解説がある．

体 k 上の滑らかな射影的代数多様体 X とその上の Cartier 因子 D を与える．対応する可逆層は $\mathcal{O}_X(D)$ であらわす．正則切断全体のなす k ベクトル空間 $H^0(X,D)$ を求めることは代数幾何学の重要な問題である．Riemann-Roch の定理は, $\sum_{p=0}^{\dim X}(-1)^p \dim H^p(X,D)$ の値を与えてくれる．その代わりに, section ring

$$R(X,D)=\sum_{m=0}^{\infty} H^0(X,mD)$$

を考えたのが Zariski [20] である．section ring には次数つき k 代数の構造が入る．たとえば, D が豊富因子であるならば, section ring は k 上有限生成な次数つき環になる．

多様体 X に付属して自然についてくる可逆層として, 標準因子 K_X に対応した標準層 $\mathcal{O}_X(K_X)=\Omega_X^{\dim X}=\det\,\Omega_X^1$ がある．$R(X,K_X)$ は標準環と呼ばれる．これは双有理不変量である; 滑らかな射影的代数多様体の間

の双有理写像 $\alpha : X \dashrightarrow X'$ は自然な環同型 $\alpha_* : R(X, K_X) \to R(X', K_{X'})$ を誘導する. **有限生成定理**の主張は以下のとおりである:

定理 1.1. 基礎体 k の標数が 0 であるならば, 任意の滑らかな射影的代数多様体 X に対して, その標準環 $R(X, K_X)$ は k 上有限生成な次数つき環である.

X の次元が 2 以下であるならば, この主張は任意の標数の基礎体に対して正しい. 正標数で 3 次元以上の場合にはまだ予想である. 以下では, 基礎体 k の標数は常に 0 であると仮定する.

生成元の次数を抑えることは 2 次元以下では可能であると思われるが, 3 次元の多様体を考えると, いくらでも高い次数の生成元が必要になるような例がある.

同じように自然に見える反標準環 $R(X, -K_X)$ は実はそれほどよい対象ではない. すでに 2 次元で, 反標準環が有限生成にならないような線織曲面の例がある (Sakai [16]). 反標準環は双有理不変量でもない.

X が必ずしも射影的とは限らないような滑らかな完備代数多様体である場合にも, そのような多様体は滑らかな射影的代数多様体と双有理同値であるので, 標準環の双有理不変性を使えば有限生成定理が成立する. しかし, 極小モデル理論の対象は射影的代数多様体に限られるので, この原稿では射影的代数多様体のみを扱う.

極小モデル理論を使う証明は基本的に数学的帰納法による. まず次元に関する帰納法があり, さらに細かい帰納法がたくさん必要である. そのほかの特徴として, 次の節で説明するように

- log version であること
- 相対的であること

がある. これらの特徴もまた証明の遂行には不可欠である.

極小モデル理論の主要な課題であった有限生成予想は証明されてしまったわけだが, まだ残っている重要な予想がある:

- フリップの終息予想 (一般の場合). 一般型ではないような代数多様体に対する極小モデルの存在を示すために必要である.
- abundance 予想. これができて初めて代数多様体の分類定理が完成する.

[3] は,「境界が巨大な場合の直線的な極小モデル・プログラム」ではフリップが終息することを証明している. 一般的な設定でのフリップの終息予想については [1] などを参照. 境界が巨大な場合には, abundance 予想は「固定点自由化定理」に帰着される ([10]). abundance 予想を示すためには,「非消滅定理」と「延長定理」を拡張して証明することが必要になる (最終節参照, cf. [14]).

2　2 次元の場合

2 次元の場合の証明を復習すると, なぜ極小モデルが必要かということと, またなぜ log version になるかということがわかる.

標準環 $R(X, K_X)$ の k 上の超越次数は高々 $\dim X + 1$ となることが容易にわかる. そこで,

$$\kappa(X) = \begin{cases} \text{trans.deg } R(X, K_X) - 1 & R(X, K_X) \neq k \text{ の場合} \\ -\infty & R(X, K_X) = k \text{ の場合} \end{cases}$$

によって X の小平次元を定義する.

$\dim X = 2$ かつ $\kappa(X) = 2$ の場合には, Mumford [13] が有限生成定理を証明した. 概略は以下のとおりである.

代数曲面 X 上にある $\mathbf{P}^1$ と同型な曲線 C は, その法束 $N_{C/X}$ の次数が -1 であるとき (-1)-曲線と呼ぶ. Castelnuovo の収縮定理によれば, もうひとつの滑らかな射影的代数曲面 X' への双有理射 $\alpha : X \to X'$ で, C を一点につぶし, そのほかの部分には手をつけないようなものが存在する. X を X' に置き換えて, まだ (-1)-曲線があればこれもつぶす. このようなことを繰り返すと, もう (-1)-曲線を含まないような代数曲面, すなわち**極小モデル** X_m が得られる.

次に, (-2)-曲線, つまり $\mathbf{P}^1$ と同型で, その法束 $N_{C/X}$ の次数が -2 であるような曲線をつぶす. この場合には, Artin の収縮定理によって, すべての (-2)-曲線をいっぺんにつぶすような 双有理射 $\beta : X_m \to X_c$ が存在する. ただし, ここで X_c は一般的には特異点を持った射影的代数曲面になり, **標準モデル**と呼ばれる.

大事なことは, 以上の操作によって標準環が不変なことである:

$$R(X, K_X) \cong R(X_m, K_{X_m}) \cong R(X_c, K_{X_c}).$$

X_c は正規特異点を持つが, 標準因子の定義はこの場合にも自然に拡張され, 標準環 $R(X_c, K_{X_c})$ が同様に定義できる. K_{X_c} は豊富因子であるので, 標準環は有限生成であることがわかる.

三つの標準因子 K_X, K_{X_m}, K_{X_c} は比較することができる. Castelnuovo の収縮写像 $\alpha : X \to X'$ に対しては, $K_X = \alpha^* K_{X'} + C$ が成り立ち, また, Artin の収縮写像 $\beta : X_m \to X_c$ に対しては, $K_{X_m} = \beta^* K_{X_c}$ が成り立つ. すなわち, 極小モデルにいたるプロセスは標準因子を減少させ, 極小モデルから標準モデルにいたるプロセスは標準因子を一定に保つ. この事実は高次元への一般化でのキーポイントになる. 極小モデルとは, 標準因子が最小になる双有理モデルと定義するのである. 極小モデル X_m が滑らかであることは, 2 次元の末端特異点が滑らかであることと対応し, 標準モデル X_c の持つ特異点は標準特異点である.

$\dim X = 2$ かつ $\kappa(X) = 1$ の場合には, 小平の楕円曲面論 [11] を使うと有限生成定理が証明できる. この過程で log が自然に出てくる.

この場合, 滑らかな射影的代数曲線への全射 $f : X \to S$ で, 一般ファイバーが楕円曲線になるようなものが存在する. X を極小モデルに取り替えておくと, 小平の標準因子公式

$$K_X = f^*(K_S + B)$$

が成立する. ここで, $B = \sum_i b_i B_i$ は正の有理数 b_i を係数とする因子 ($\mathbf{Q}$-因子) である. 点 $B_i \in S$ はその上のファイバー $f^{-1}(B_i)$ が特異ファイバーになるような点であり, 小平による特異ファイバーの分類によって係数 b_i が決定される.

対 (S, B) の標準環は

$$R(S, K_S + B) = \sum_{m=0}^{\infty} H^0(S, \llcorner m(K_S + B) \lrcorner)$$

で定義される. ここで, B の係数は整数ではないので, 対応する可逆層を構成するために整数部分をとっている. 同型

$$R(X, K_X) = R(S, K_S + B)$$

が得られ, $K_S + B$ が S 上の豊富 $\mathbf{Q}$-因子であることから有限生成定理が従う.

代数幾何学の log version では, 代数多様体 X とその上の「境界」と呼ばれる $\mathbf{R}$-因子 B の組 (X, B) を対象とする. 極限操作やコンパクト性の議論を使うので, B の係数は一般に実数であるとしておく.

相対的な設定は, すでに曲面論に現れている. 代数多様体 X そのものではなく, そこからもうひとつの代数多様体への射 $f : X \to S$ を対象とする考え方が, 相対的な設定である.

(-1)-曲線を含まない代数曲面を極小モデルと呼んだ. これの相対バージョンは以下のようになる. 滑らかな代数曲面から滑らかな代数曲線への連結ファイバーを持つ射影的全射 $f : X \to S$ は, ファイバーに (-1)-曲線が含まれないとき相対的極小であるという. また, 滑らかな代数曲面から特異点を持った代数曲面への双有理射 $f : X \to S$ は, S 上の一点につぶれるような (-1)-曲線が存在しないときに極小特異点解消と呼ぶ.

こうして, 相対的設定での極小モデルが, ファイバーに含まれる曲線だけを対象とした条件によって定義される.

極小モデルは (-1) 曲線をひとつずつつぶして帰納的に構成したが, [20] で定義された Zariski 分解を使えばいっぺんに極小モデルに到達したのと同じ効果が得られる (cf. [7]). [19] の証明につながる考え方であると思われる.

3　極小モデル・プログラム

極小モデルを構成するためには, 与えられた代数多様体に含まれている余分な部分集合を特定し, これをつぶすことが必要である. 代数多様体は連立多項式系で定義されるので, 収縮写像を純粋に代数的に考えると, 非線形連立代数方程式を解くことに相当する. しかし, 因子と曲線の交差数の概念を使うと, この問題を線形空間内の錐体を使って解くことができる. これを**数値的幾何**と呼ぶ.

相対的な設定で考えて, 代数多様体の間の射影的な射 $f : X \to S$ を考える. X 上の $\mathbf{R}$-Cartier 因子とは, Cartier 因子の形式的な実係数一次結合 $D = \sum_i d_i D_i$ のことである. 二つの $\mathbf{R}$-Cartier 因子 D, D' は, f のファイバーに含まれる任意の曲線 C に対して, 交差数が一致 $(D \cdot C) = (D' \cdot C)$ するときに数値的に同値であると言う. $\mathbf{R}$-Cartier 因子の数値的同値類全体のなす集合 $N^1(X/S)$ は有限次元実線形空間になる. $N^1(X/S)$ の中に

いくつかの錐体を考える:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Amp}(X/S) & \longrightarrow & \mathrm{Nef}(X/S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Big}(X/S) & \longrightarrow & \mathrm{Psef}(X/S) \end{array}$$

第１行は順番に, 豊富 (ample) 因子, nef 因子, 第２行は巨大 (big) 因子, 擬有効 (pseudo-effective) 因子のなす錐体である. １, ３番目は開錐体で, ２, ４番目はそれぞれの閉包である. 整数係数の因子の場合には, $[D] \in \mathrm{Amp}(X/S)$ とは D が S 上相対的に豊富であることと同値である. また, $[D] \in \mathrm{Big}(X/S)$ とは trans.deg $R(X_s, D_s) = \dim X_s + 1$ と同値である. ここで $[D]$ は D の数値的同値類であり, X_s は f の一般ファイバー, D_s はそこへの制限である.

もうひとつの射影的射 $g : Y \to S$ と, 射影的全射 $h : X \to Y$ で $f = g \circ h$ となるものがあると, 単射線形写像 $h^* : N^1(Y/S) \to N^1(X/S)$ が誘導され, $h^*\mathrm{Nef}(Y/S)$ は $\mathrm{Nef}(X/S)$ の表面の一部になることが簡単にわかる. 大事なのはこの逆が成り立つ場合があることの発見である (森 [12]). 標準因子に着目すると, 錐体 $\mathrm{Nef}(X/S)$ が部分的に有限個の有理点で生成された凸錐体 (多面体錐) の形をしていて, その面たちから収縮写像が作れることが証明できる.

そのために, まず log version での特異点の定義が必要になる. 正規な代数多様体 X とその上の $\mathbf{R}$-因子 B の組 (X, B) に対して, その標準因子 $K_X + B$ が局所的に極小であるという条件を考えると, いくつかの定義ができる:

$$\text{terminal} \subset \text{canonical} \subset \text{KLT} \subset \text{DLT} \subset \text{LC}.$$

初めの二つは log version 以前のものであり, $B = 0$ と仮定することが多い. KLT においては境界 B の係数は開区間 $(0, 1)$ に入り, DLT と LC では閉区間 $[0, 1]$ に入る. KLT は複素解析での L^2 条件に相当し, 自然で扱いやすいが, これだけでは不十分である. KLT に対してだけ証明される定理もあるが, DLT にしないと adjunction formula を使った次元に関する帰納法が使えないのである. LC は一般的にはあまりよい特異点ではないが, 閉じた条件であるので, コンパクト性を使った議論には有用である. こうしてすべての定義が必要になるのは煩雑であるが仕方がない.

たとえば 2 次元では, terminal は滑らか, canonical は有理 2 重点 (Du Val 特異点) であり, KLT または DLT ならば一般の商特異点を持つ. LC は単純楕円特異点や 2 次元 cusp 特異点を含む.

さらに $\mathbf{Q}$-分解的という条件を追加する．これは, 任意の因子が何倍かすると Cartier 因子になるという条件で, 高次元代数幾何学では重要である．2 次元の有理特異点はすべて $\mathbf{Q}$-分解的であるが, 3 次元以上では $\mathbf{Q}$-分解的ではない有理特異点がいくらでもある．

極小モデル・プログラムは以下の**錐体収縮定理**によって基礎付けられる ([10]):

定理 3.1. *$\mathbf{Q}$-分解的な DLT 対からの射影的射 $f : (X, B) \to S$ において, 豊富因子 H と正数 ϵ を固定する．このとき, nef 錘体 Nef(X/S) は, 点 $P = [K_X + B + \epsilon H] \in N^1(X/S)$ に立つ観察者から見ると, 有理的多面体錐に見える．さらに, このとき見ることのできるそれぞれの面に対応して, $f = g \circ h$ となるような射影的射 $g : Y \to S$ と連結なファイバーを持つ射影的全射 $h : X \to Y$ が存在する．*

前半の主張は, $\mathrm{Nef}(X/S)$ と P から生成される凸集合を Q とするとき, $Q \setminus \mathrm{Nef}(X/S)$ の閉包と $\mathrm{Nef}(X/S)$ の交わりが, 整数座標を持つ有限個の点から生成される多面体錐の表面の一部と一致するということである．$\epsilon \to 0$ の極限をとると, 可算無限個の面が現れるような例がある．後半の主張にでてくる射 h が「収縮写像」である．

一般的に言って, 以下の強弱関係がある:

$$\text{数値的幾何} < \text{微分幾何} < \text{代数幾何}$$

この 3 個が一致するときに重要な発見がある．小平の埋め込み定理は微分幾何学の positive (正定値) から代数幾何学の ample (豊富) がでることを主張する．また, 中井の判定条件は, 数値的に正であることから ample が出ることを主張する．positive を semi-positive (半正定値) に置き換えると, この 3 個は一致しなくなる:

$$\text{nef} < \text{semi-positive} < \text{semi-ample}$$

しかし, 標準因子から見て特別の場合には, これらが一致するというのが上の定理の主張であり, これが「固定点自由化定理」と呼ばれる定理の内容である．

極小モデル・プログラム (MMP) は以下のようなアルゴリズムである．$\mathbf{Q}$-分解的な DLT 対からの射影的射 $f : (X, B) \to S$ を出発点とする:

- $[K_X + B] \in \mathrm{Nef}(X/S)$ ならば, $f : (X, B) \to S$ は極小と呼ばれる．

- $[K_X + B] \notin \mathrm{Nef}(X/S)$ ならば, 収縮写像 $h : X \to Y$ が存在する.
- $\dim Y < \dim X$ ならば, $h : (X, B) \to Y$ は森ファイバー空間と呼ばれる.
- h が因子 (余次元 1 の部分多様体) をつぶすような双有理射ならば, $h : (X, B) \to (Y, h_*B)$ は因子収縮写像と呼ばれる. $g : (Y, h_*B) \to S$ は再び $\mathbf{Q}$-分解的な DLT 対からの射影的射になる.
- h が因子をつぶさないような双有理射ならば, $h : (X, B) \to (Y, h_*B)$ は小さな収縮写像と呼ばれる. このとき, もうひとつの $\mathbf{Q}$-分解的な DLT 対からの因子をつぶさないような射影的双有理射 $h' : (X', B') \to (Y, h_*B)$ で $h'_*B' = h_*B$ となるが, $\alpha = (h')^{-1} \circ h : X \dashrightarrow X'$ が同型射にならないようなものが存在する. α はフリップと呼ばれる.
- 与えられた対 (X, B) に対して, フリップを無限回繰り返すことはできない. これをフリップの終息と呼ぶ.

フリップは 3 次元以上に特有の現象で, これが高次元代数多様体論の困難でもあり, 面白いところでもある. 代数幾何学的手術とも呼ばれる. たとえば, 3 次元のフリップは, 何本かの $\mathbf{P}^1$ を切り取って, その代わりに何本かの $\mathbf{P}^1$ を貼り付けるという操作である.

フリップは存在すれば一意的であることがすぐにわかる. フリップの存在は長い間予想であったが, Hacon-McKernan [6] によって証明された. フリップの終息はまだ一般的には予想であるが, 重要な場合に Birkar-Cascini-Hacon-McKernan [3] によって証明され, その系として標準環有限生成定理が証明された.

極小モデルおよび標準モデルの定義をしておく:

定義 3.2. LC 対からの射影的射 $f : (X, B) \to S$ の**極小モデル**とは, $\mathbf{Q}$-分解的な LC 対からの射影的射 $g : (Y, C) \to S$ への双有理写像 $\alpha : X \dashrightarrow Y$ であって以下の条件を満たすものである:

1. $f = g \circ \alpha$, α は余次元 1 で全射, かつ $C = \alpha_*B$ である.
2. $[K_Y + C] \in \mathrm{Nef}(Y/C)$.

3. α でつぶれる因子にはつぶれる理由がある. つまり, このような因子に沿っては $K_X + B$ のほうが $K_Y + C$ よりも真に大きい (標準因子の比較).

さらに, **標準モデル**とは, 正規代数多様体からの射影的射 $h : Z \to S$ への連結なファイバーを持つ全射 $\beta : Y \to Z$ であって, $g = h \circ \beta$ であり, $[H] \in \mathrm{Amp}(Z/S)$ によって $[K_Y + C] = [\beta^* H]$ と表せるものである.

極小モデルはただひとつではないが, それらの標準因子はすべて同値である. 標準モデルはただひとつである.

MMP による nef 錘体の変化を見る. 因子収縮写像の場合には, 線形空間 $N^1(Y/S)$ は線形空間 $N^1(X/S)$ の次元が 1 下がった線形部分空間とみなすことができ, 錐体 $\mathrm{Nef}(Y/S)$ は錐体 $\mathrm{Nef}(X/S)$ のひとつの面となる. これに対してフリップの場合には, 二つの線形空間 $N^1(X/S)$ と $N^1(X'/S)$ は自然に同型になり, 二つの錐体 $\mathrm{Nef}(X/S)$ と $\mathrm{Nef}(X'/S)$ は収縮写像に対応する面に沿って互いに反対側に位置することになる.

MMP の各ステップにおいては, nef 錘体の面を選択して, 対応する収縮写像をとることが必要である. 選択の任意性を小さくするものとして, **直線的な極小モデル・プログラム** (英語では MMP with scaling) という特別なタイプの MMP を考えることができる:

- もうひとつの正係数を持つ $\mathbf{R}$-因子 H をとり, $(X, B + H)$ が DLT でしかも $[K_X + B + H] \in \mathrm{Nef}(X/S)$ となるようにする.
- $t_0 = \min\{t \mid [K_X + B + tH] \in \mathrm{Nef}(X/S)\}$ として, 点 $[K_X + B + t_0 H]$ を含むような $\mathrm{Nef}(X/S)$ の面をひとつ選び, これに対応した収縮写像によって MMP を行う.

因子収縮写像またはフリップのあとで得られる新しい対に対する t_0 の値は, 同じかまたは小さくなる. $t_0 = 0$ となれば極小モデルに到達したことになる. 直線的な MMP に対応する nef 錘体の列は, 点 $[K_X + B]$ と点 $[K_X + B + H]$ を結ぶ線分上に並ぶことになり, 一般の MMP よりも直線的に目標を目指すので, 確実に目標に到達することが期待される.

4 主要定理

Hacon-McKernan [6] の主定理は, Birkar-Cascini-Hacon-McKernan [3] によって証明された次元に関する帰納法的な結果とあわせると, 以下のよ

うに述べることができる:

定理 4.1. *MMP における小さな収縮写像には, 常にフリップが存在する.*

証明には Shokurov [17] のアイディアと多重微分形式の**延長定理** (cf. [18], [8]) が有効に用いられる (cf. [4]).

[3] では, 特別な場合の極小モデルの存在が証明された ([2] も参照):

定理 4.2. *KLT 対からの射影的射* $f : (X, B) \to S$ *において,* $[B] \in Big(X/S)$ *と仮定する. このとき, 以下が成り立つ:*

- $[K_X + B] \in Psef(X/S)$ *ならば, 対* (X, B) *の極小モデルが存在する.*
- $[K_X + B] \notin Psef(X/S)$ *ならば, 余次元 1 で全射となるような双有理写像* $\alpha : X \dashrightarrow Y$ *と森ファイバー空間* $g : (Y, \alpha_* B) \to Z$ *が存在する.*

証明は, 与えられた対に対する MMP におけるフリップの終息を示すものではなく, もう少し回りめぐった方法による.

固定点自由化定理と Fujino-Mori [5] の結果とあわせると, 標準環の有限生成定理が系として従う.

[3] では, 極小モデルの存在定理とともに, 次元に関する帰納法の過程で以下の定理が重要な鍵になる.

定理 4.3 (非消滅定理). *KLT 対からの射影的射* $f : (X, B) \to S$ *において,* $[B] \in Big(X/S)$ *かつ* $[K_X + B] \in Psef(X/S)$ *と仮定する. このとき, 有効な (つまり, 係数が正または 0 の)* $\mathbf{R}$*-因子* D *が存在して,* $[K_X + B] = [D]$ *となる.*

さらに以下の定理が証明できる:

定理 4.4 (多面体分割定理). *KLT 対からの射影的射* $f : (X, \bar{B}) \to S$ *と, 互いに共通の既約成分を持たない* $\mathbf{Q}$*-Cartier 因子* $B_1, \ldots, B_l$ *を与える.* l *次元実線形空間の中の閉集合*

$$V' = \{B = \sum_{i=1}^{k} b_i B_i \,|\, 0 \leq b_i \leq 1, (X, B) \text{ は } LC, [K_X + B] \in Psef(X/S)\}$$

と, ある有限個の有理点の凸閉包 V'' *の交わりを* $V = V' \cap V''$ *とする.* $B \in V$ *ならば* $f : (X, B) \to S$ *の極小モデルおよび標準モデルが存在すると仮定する. このとき:*

(I) 互いに交わりのない有限分割 $V = \coprod_{j=1}^{l} V_j$ および正規代数多様体からの射影的射 $h_j : Z_j \to S$ への有理写像 $\gamma_j : X \dashrightarrow Z_j$ であって, 以下の条件を満たすものが存在する*:*

1. 閉包 $\bar{V}_j$ は有限個の有理点の凸閉包になる*.*

2. $B \in V_j$ ならば, (X, B) の標準モデルは γ_j になる*.*

(II) 互いに交わりのない有限分割 $V_j = \coprod_k W_{jk}$ が存在して, 任意の双有理射 $\alpha : X \dashrightarrow Y$ に対して, $W = \{B \in V \mid \alpha$は$(X, B)$ の極少モデル$\}$ とおくと*,*

1. ある j が存在して $W \subset \bar{V}_j$*.*

2. もしも $W \cap V_{j'} \neq \emptyset$ ならば, ある k が存在して $W \cap V_{j'} = W_{j',k}$*.*

3. $\bar{W}_{j',k}$ は有限個の有理点の凸閉包になる*.*

系として, 極少モデルと標準モデルの存在を仮定するときに, 直線的 MMP におけるフリップの列が終息することが証明される.

参考文献

[1] Valery Alexeev, Christopher Hacon and Yujiro Kawamata. *Termination of (many) 4-dimensional log flips.* Invent. Math. **168** (2007), no. 2, 433–448.

[2] Caucher Birkar. *On existence of log minimal models.* arXiv:0706.1792.

[3] Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher D. Hacon and James McKernan. *Existence of minimal models for varieties of log general type.* math.AG/0610203.

[4] Alessio Corti et. al. *Flips for 3-folds and 4-folds.* Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications **35**, Oxford University Press, 2007, 200 pages.

[5] Osamu Fujino and Shigefumi Mori. *A canonical bundle formula.* J. Differential Geom. **56** (2000), no. 1, 167–188.

[6] Christopher Hacon and James McKernan. *On the existence of flips.* math.AG/0507597.

[7] Yujiro Kawamata. *The Zariski decomposition of log-canonical divisors.* in Algebraic Geometry Bowdoin 1985, Proc. Symp. Pure Math. **46** (1987), Amer. Math. Soc., 425–433.

[8] Kawamata, Yujiro. *On the extension problem of pluricanonical forms.* math.AG/9809091, Contemporary Math. **241**(1999), 193–207.

[9] Yujiro Kawamata. *Finite generation of a canonical ring.* to appear in Proceedings of 'Current Developments in Mathematics 2007'.

[10] Yujiro Kawamata, Katsumi Matsuda and Kenji Matsuki. *Introduction to the minimal model program.* in Algebraic Geometry Sendai 1985, Advanced Studies in Pure Math. **10** (1987), Kinokuniya and North-Holland, 283–360. http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/ kawamata/index.html

[11] Kunihiko Kodaira. *On compact analytic surfaces. II, III.* Ann. of Math. (2) **77** (1963), 563–626; ibid. **78**(1963), 1–40.

[12] Shigefumi Mori. *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective.* Ann. of Math. (2) **116** (1982), no. 1, 133–176.

[13] David Mumford. *The canonical ring of an algebraic surface.* Appendix to [20]. Ann. of Math. (2) **76** (1962), 612–615.

[14] Noboru Nakayama. *Zariski-decomposition and abundance.* MSJ Memoirs **14**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004. xiv+277 pp. ISBN: 4-931469-31-0.

[15] Mihai Paun. *Closed positive currents and finiteness properties of the canonical ring.* to appear in Proceedings of 'Current Developments in Mathematics 2007'.

[16] Fumio Sakai. *Anti-Kodaira dimension of ruled surfaces.* Sci. Rep. Saitama Univ. Ser. A **10**(1982), no. 2, 1–7.

[17] V. V. Shokurov. *Prelimiting flips.* Tr. Mat. Inst. Steklova **240** (2003), Biratsion. Geom. Linein. Sist. Konechno Porozhdennye Algebry, 82–219; translation in Proc. Steklov Inst. Math. **240** (2003), no. 1, 75–213.

[18] Yum-Tong Siu. *Invariance of plurigenera.* Invent. Math. **134** (1998), no. 3, 661–673.

[19] Yum-Tong Siu. *A general non-vanishing theorem and an analytic proof of the finite generation of the canonical ring.* math.AG/0610740.

[20] Oscar Zariski. *The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface.* Ann. of Math. (2) **76** (1962), 560–615.