

形状最適化問題の正則化解法とその応用

畔上 秀幸

名古屋大学 情報科学研究科 複雑系科学専攻

日本数学会 2017 年度年会
首都大学東京 南大沢キャンパス, 2017 年 3 月 26 日

§1 はじめに

■ 生体の適応挙動



図 1.1: 針葉樹と広葉樹のあて材

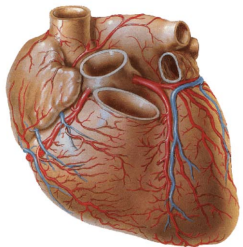
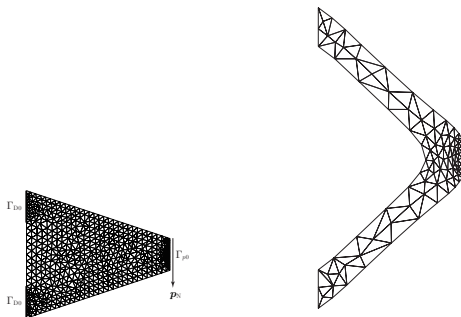


図 1.2: 心臓を取り巻く血管

■ 領域変動型形状最適化問題の数値例



(a) 初期形状と境界条件 (b) 最適化された形状

図 1.3: 2次元線形弾性体の形状最適化 (面積制約つき平均コンプライアンス最小化)[Aze16] <http://www.morikita.co.jp/books/mid/061461>

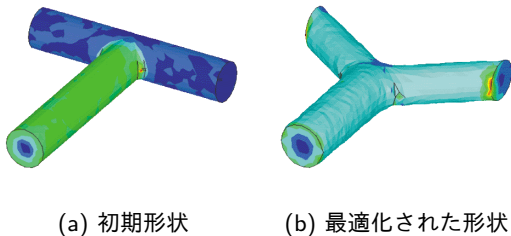


図 1.4: Stokes 流れ場の形状最適化 (体積制約つき平均流れ抵抗最小化)[KATI05]

■ 密度型位相最適化問題の数値例

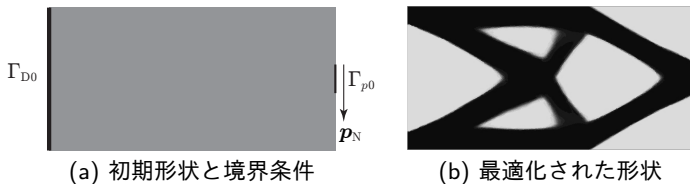


図 1.5: 2次元線形弾性体の密度型位相最適化問題に対する数値例

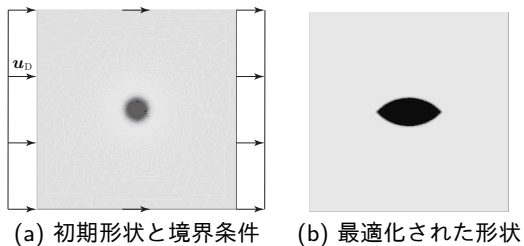


図 1.6: 2次元 Stokes 流れ場の密度型位相最適化問題に対する数値例

■ 今日の話題

形状最適化問題に関して、次のことをお話ししたい。

- ① この問題に取り組むことになった経緯
- ② 関数解析に基づいた解法の理解
- ③ 実問題への応用

§2 この問題に取り組むことになった経緯

■ ある著作との出会い

Y.C. Fung and 瀬口: 生体システムにおける力学 [FS88]



図 2.1: ウサギの胸部動脈の断面形状

「生体システムでは、応力の大きさにより成長 (Growth) と吸収 (Atrophy) が調整され、それが残留応力を変化させる。」



材料がどのように振舞えば一様な応力になるか？

■ 成長ひずみ法

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, を線形弾性体の領域, $\sigma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を相当応力あるいはひずみエネルギー密度, σ_0 を正定数とする. このとき, 非弾性の体積ひずみ

$$\mathbf{E}_B(g) = g\mathbf{I}, \quad g = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}$$

が発生したときの線形弾性変形をもとめよ. ただし, $\mathbf{I} = (\delta_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$, δ_{ij} は Kronecker デルタである. その変形で形状を更新する [Aze88].

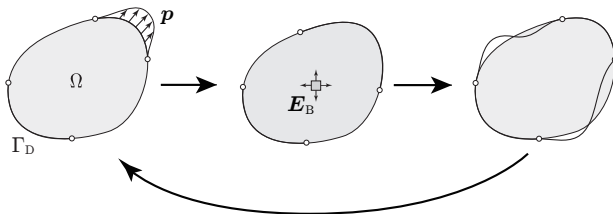
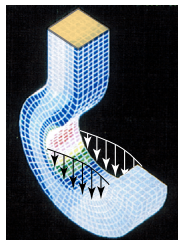
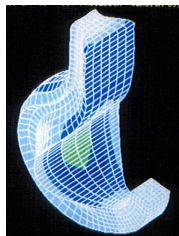


図 2.2: 成長ひずみ法



(a) 初期, 境界形状



(b) 変形後

図 2.3: 成長ひずみ法によるフックの形状更新

■ 世界に 3 人

- Myung W. Suh, et al. (Michigan U. & Ford, USA), 1989[SAM89]
Chung M. Suh (GM, Isuzu)
- C. Matteck and S. Burkhardt (Germany), 1989[MB90]
H.P. Mlejnek, et al., 1990
J. Sauter, 1991
- H. Azegami (Japan), 1988[Aze88]

■ うまくいかない例

楕円になるはずが...

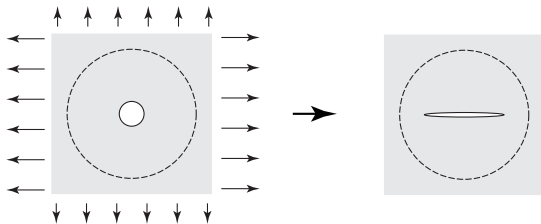


図 2.4: 孔の空いた無限平板の形状最適化

■ 成長ひずみ法の欠陥

成長ひずみ法では、任意の $\mathbf{y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ on $\Gamma_D \cup \Gamma_p$, に対して

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\varphi) \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}_B(g) \, dx$$

を満たす変位 $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ on $\Gamma_D \cup \Gamma_p$, をもとめていた。ただし, $\mathbf{S}(\mathbf{y})$, $\mathbf{E}(\mathbf{y})$ は応力とひずみテンソルである。簡単のために体積弾性率を 1 とし、物質移動の項を加えると、上式の右辺は

$$- \int_{\Omega} (g \nabla \cdot \mathbf{y} + \nabla g \cdot \mathbf{y}) \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (g \mathbf{y}) \, dx = - \int_{\partial \Omega} g \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{y} \, d\gamma$$

とかける。この問題は表面力による線形弾性問題になる。

■ 力法の提案

ある部分境界を固定して、形状微分に比例した境界力による線形弾性問題の解(変位)を使って領域を動かすことを繰り返す [Aze94].

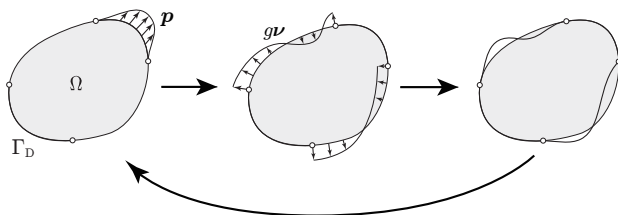


図 2.5: Dirichlet 型力法

境界に分布ばねを配置する [AT06]

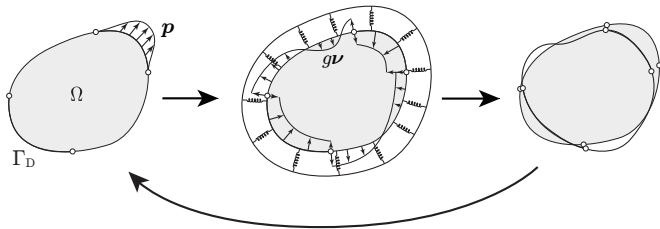


図 2.6: Robin 型力法

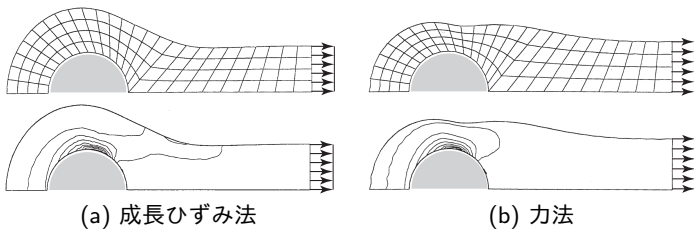


図 2.7: 連結棒の形状最適化

■ 手法の一般化

手法は関数空間 $X = H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ の勾配法である。そこで、手法を形状最適化問題に対する H^1 勾配法とよぶことにした。

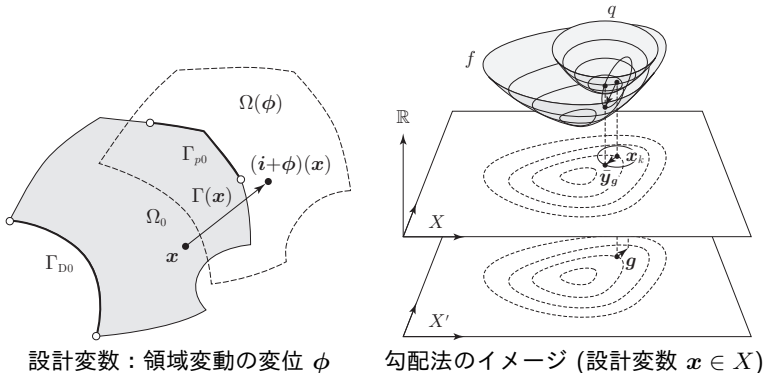


図 2.8: 領域変動型形状最適化問題に対する H^1 勾配法

■ 位相最適化問題への応用

$X = H^1(\Omega; \mathbb{R})$ とおけば H^1 勾配法は密度型位相最適化問題にも応用できる [AKT11].

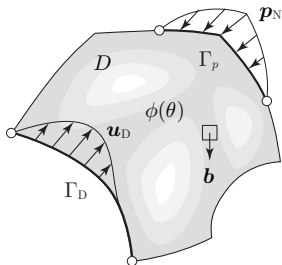
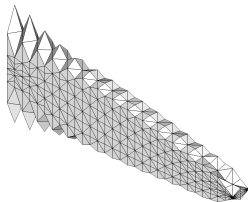


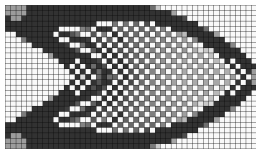
図 2.9: 密度型位相最適化問題

■ 数値不安定現象

- 境界節点を形状微分に比例して移動すると，図 2.10 (a) となる。
- 密度を密度微分に比例して変化させると図 2.10 (b) となる。



(a) 波打ち形状



(b) チェッカーボードパターン

図 2.10: 数値不安定現象



H^1 勾配法は，形状微分や密度微分を正則化する機能をもつ。

§3 関数解析に基づいた解法の理解

問題 3.1 (状態決定問題 (抽象的変分問題))

設計変数 $\theta \in \mathcal{D} \subset X$ に対して $a(\theta) : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ を強圧的かつ有界な双 1 次形式, $l(\theta)(\cdot) = \langle l(\theta), \cdot \rangle \in U'$ (U の双対空間) とするとき,

$$a(\theta)(u, v) = l(\theta)(v) \quad \forall v \in U$$

を満たす状態変数 $u \in \mathcal{S} \subset U$ を求めよ.

問題 3.2 (抽象的最適設計問題)

$$(\theta^*, u^*) = \arg \min_{(\theta, u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}} \{ f_0(\theta, u) \mid f_1(\theta, u) \leq 0, \dots, f_m(\theta, u) \leq 0, \text{ 問題 3.1} \}$$

を求めよ.

■ 密度変動型位相最適化問題

D を固定された $d \in \{2, 3\}$ 次元の有界領域とする.

$$X = H^1(D; \mathbb{R}) \supset \mathcal{D} = W^{1, \infty}(D; \mathbb{R})$$

$$U = \{u \in H^1(D; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ on } \Gamma_D\} \supset \mathcal{S} = U \cap W^{1, 2q_R}(D; \mathbb{R}) \quad (q_R > d)$$

■ 領域変動型形状最適化問題

$$X = H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \supset \mathcal{D} = W^{1, \infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$$

$$U = \{u \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ on } \Gamma_D(\phi)\} \supset \mathcal{S} = U \cap W^{1, \infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$$

■ 評価関数の Fréchet 微分

$f_i(\theta, u(\theta)) = \tilde{f}_i(\theta)$ の Fréchet 微分は

$$\tilde{f}_i'(\theta)[\vartheta] = \mathcal{L}_{i\theta}(\theta, u, v_i)[\vartheta] = \langle g_i, \vartheta \rangle \quad \forall \vartheta \in X \quad (3.1)$$

の形式で求められる。ここで、 $g_i \in X' \subset D'$ のとき、 g_i を勾配とよぶことにする。

一般に、 g_i は D には入らない。

⇒ 数値解析において不安定現象が現れる原因の一つと考えられる。

■ 評価関数の 2 階 Fréchet 微分 (Hesse 形式)

$f_i(\theta, u(\theta)) = \tilde{f}_i(\theta)$ の 2 階 Fréchet 微分は次のようにかける.

$$h_i(\theta, u, v_i)[\vartheta_1, \vartheta_2] = \mathcal{L}_{i(\theta, u, v_i), (\theta, u, v_i)}(\theta, u, v_i)[(\vartheta_1, u'_1), (\vartheta_2, u'_2)] \\ \forall (\vartheta_1, \vartheta_2) \in X^2$$

ただし, $j \in \{1, 2\}$ に対して u'_j は

$$a(\theta)(u'_j, v) = -a_\theta(\theta)(u, v)[\vartheta_j] + l_\theta(\theta)(v)[\vartheta_j]$$

を満たす. このとき, h_i が有界双線形汎関数 $\mathcal{L}^2(X \times X; \mathbb{R})$ となったとき, h_i を f_i の Hesse 形式とよぶことにする.

■ 評価関数ごとの降下方向

問題 3.3 (抽象的勾配法)

$a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を強圧的かつ有界な双 1 次形式とする. f_i の Fréchet 微分 $g_i(\theta_k) \in X'$ に対して

$$a_X(\vartheta_{g_i}, \vartheta) = -\langle g_i(\theta_k), \vartheta \rangle \quad \forall \vartheta \in X \quad (3.2)$$

を満たす $\vartheta_{g_i} \in X$ を求めよ.

問題 3.3 は次のようにもかける.

$$\vartheta_{g_i} = \arg \min_{\vartheta \in X} \left\{ q(\vartheta) = \frac{1}{2} a_X(\vartheta, \vartheta) + \langle g_0(\theta_k), \vartheta \rangle \right\}$$

定理 3.1 (抽象的勾配法)

問題 3.3 の解 ϑ_{gi} は X において一意に存在し、 $\vartheta_{gi} \in \mathcal{D}$ ならば θ における f_i の降下方向である。

密度変動型位相最適化問題と領域変動型形状最適化問題において、

$u \in \mathcal{S}$ ならば $\vartheta_{gi} \in \mathcal{D}$ が示される。

問題 3.4 (抽象的 Newton 法)

$a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を強圧的かつ有界な双 1 次形式とする. f_i の勾配 $g_i(\theta_k) \in X'$ と Hesse 形式 $h_i(\theta_k) \in \mathcal{L}^2(X \times X; \mathbb{R})$ に対して

$$h_i(\theta_k)[\vartheta_{g_i}, \vartheta] + a_X(\vartheta_{g_i}, \vartheta) = -\langle g_i(\theta_k), \vartheta \rangle \quad \forall \vartheta \in X \quad (3.3)$$

を満たす $\vartheta_{g_i} \in X$ を求めよ.

■ 抽象的最適設計問題の解法

問題 3.5 (制約つき問題に対する勾配法)

$a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を強圧的かつ有界な双 1 次形式とする。 c_a を正の定数とする。
 $g_0(\theta_k), g_{i_1}(\theta_k), \dots, g_{i_{|I_A|}}(\theta_k) \in X'$ に対して

$$q(\vartheta_g) = \min_{\vartheta \in X} \left\{ q(\vartheta) = \frac{c_a}{2} a_X(\vartheta, \vartheta) + \langle g_0(\theta_k), \vartheta \rangle \right. \\ \left. f_i(\theta_k) + \langle g_i(\theta_k), \vartheta \rangle \leq 0 \text{ for } i \in I_A(\theta_k) \right\}$$

を満たす $\theta_{k+1} = \theta_k + \vartheta_g$ を求めよ。

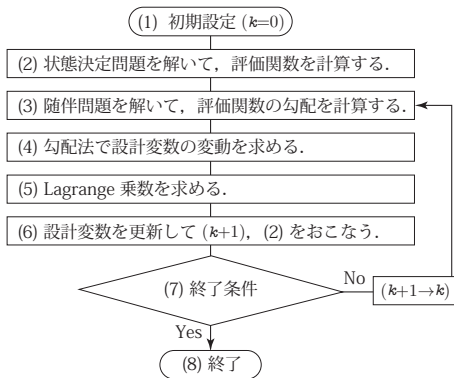


図 3.1: 制約つき問題に対する勾配法のアルゴリズム

問題 3.6 (制約つき問題に対する Newton 法)

$\theta_k \in X$ において, $\lambda_k \in \mathbb{R}^{|I_A|}$ は KKT 条件を満たすとする. $i \in I_A \cup \{0\}$ に対して $f_i(\theta_k), g_i(\theta_k) \in X'$ と $h_i(\theta_k) \in \mathcal{L}^2(X \times X; \mathbb{R})$ を既知として,

$$h_{\mathcal{L}}(\theta_k) = h_0(\theta_k) + \sum_{i \in I_A(\theta_k)} \lambda_{ik} h_i(\theta_k) \quad (3.4)$$

とおく. $a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を強圧的かつ有界な双 1 次形式とする. このとき,

$$q(\vartheta_g) = \min_{\vartheta \in X} \left\{ q(\vartheta) = \frac{1}{2} (h_{\mathcal{L}}(\theta_k)[\vartheta, \vartheta] + a_X(\vartheta, \vartheta)) + \langle g_0(\theta_k), \vartheta \rangle \right. \\ \left. + f_0(\theta_k) \mid f_i(\theta_k) + \langle g_i(\theta_k), \vartheta \rangle \leq 0 \text{ for } i \in I_A(\theta_k) \right\}$$

を満たす $\theta_{k+1} = \theta_k + \vartheta_g$ を求めよ.

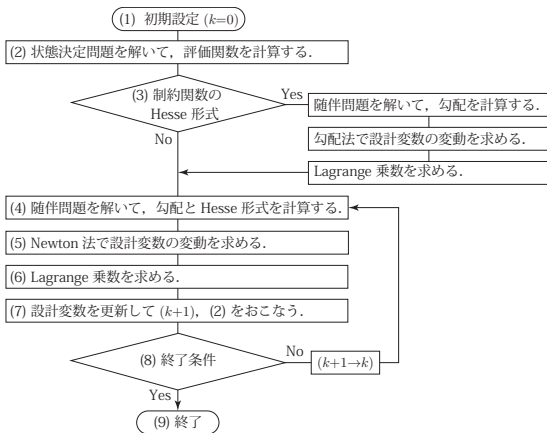


図 3.2: 制約つき問題に対する Newton 法のアルゴリズム

§4 実問題への応用

■ 音場構造連成問題の形状最適化 [NSAA08]

状態決定問題 音場と線形弾性体の Helmholtz 方程式

境界条件 調和力, Sommerfeld の放射条件

目的関数 放射音圧パワー積分

制約関数 振動固有値

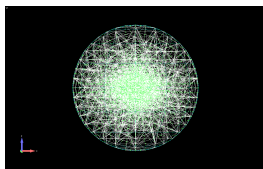
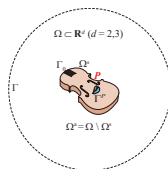


図 4.1: バイオリンの形状最適化

■ 接触圧の均一化問題 [ISAA10]

状態決定問題 大変形弾性問題

境界条件 底面固定，上端中央に集中荷重，滑り接触

目的関数 接触圧力と一定値の2乗誤差積分

制約関数 体積

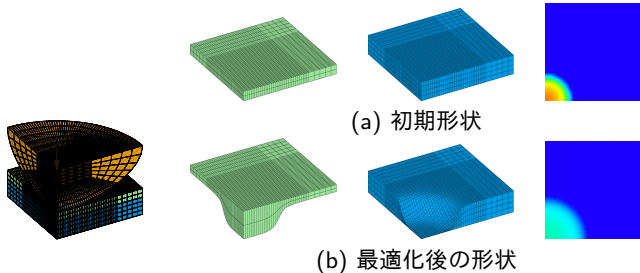


図 4.2: 接合弾性体界面の形状最適化

■ リンク機構の形状最適化問題 [AZUK13]

状態決定問題 運動制約付剛体運動

目的関数 駆動力による外力仕事

制約関数 体積

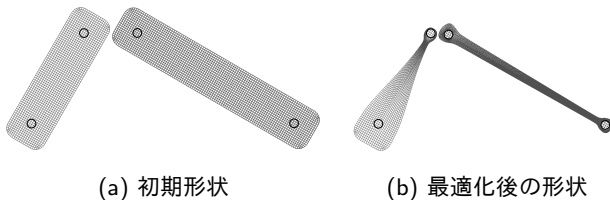


図 4.3: ピストンクランク機構の形状最適化

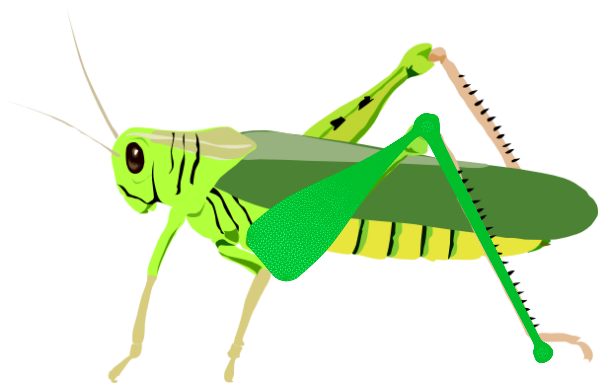
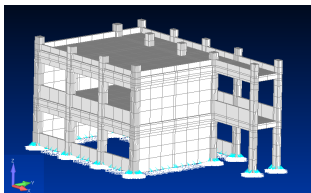


図 4.4: バッタの足？

■ 建物の欠陥同定 [TAA15]

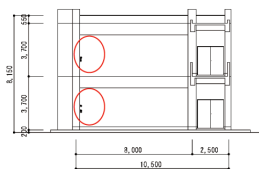


(a) 写真

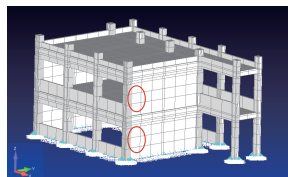


(b) 有限要素モデル

図 4.5: 実験に使われた建物



(a) 図面上 [m]



(b) 有限要素モデル上

図 4.6: 人工的に加えられた損傷の位置

表 4.1: 測定された固有振動数

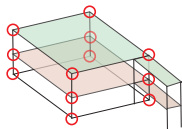


図 4.7: 常時微動の測定点

Mode	Pre [Hz]	Post [Hz]
1st	3.02	2.95
2nd	4.76	4.05
3rd	6.28	4.69
4th	7.41	6.11
5th	9.65	6.76
6th	10.10	7.39
7th	11.00	8.69
8th	11.30	9.50

状態決定問題 固有振動問題

目的関数 振動固有対の2乗誤差和

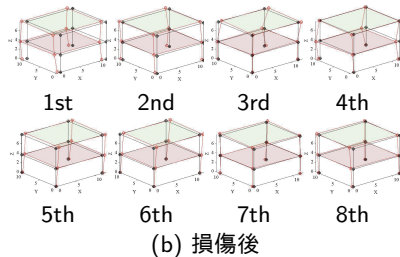
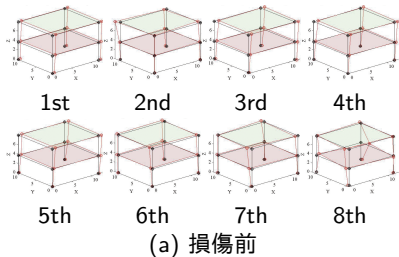


図 4.8: 測定された固有モード

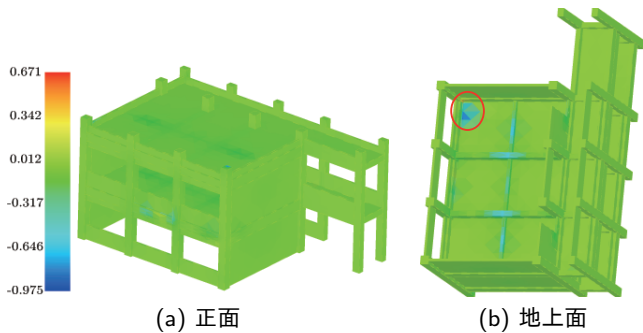


図 4.9: 実験結果から同定された健全率

■ ブレーキ鳴き現象に対する形状最適化 [SA14]

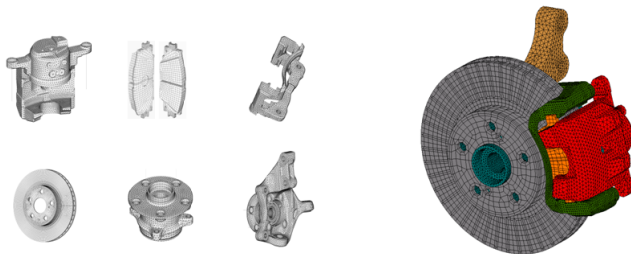


図 4.10: 車両のブレーキ部品

状態決定問題 固有振動問題

目的関数 複素固有値の実部

制約関数 パッドの体積

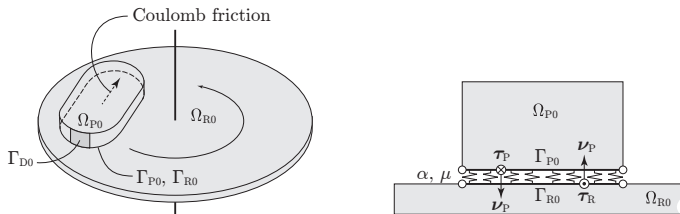
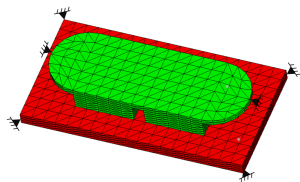
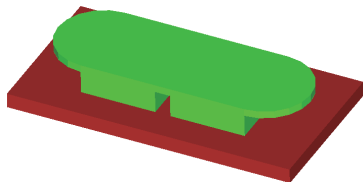
(a) ロータとパッドの領域 Ω_{R0} と Ω_{P0} (b) 摩擦境界 Γ_{R0} と Γ_{P0}

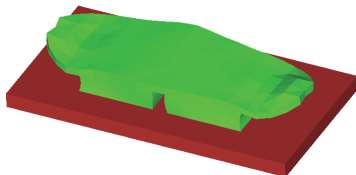
図 4.11: ブレーキモデル [SA13]



有限要素モデル



(a) 初期形状



(b) 最適化後の形状

図 4.12: 形状比較

表 4.2: 複素固有値の変化

初期形状			最適形状		
k	Re	Im	k	Re	Im
1	-1.692E+01	8.022947E+03	1	-1.647E+01	7.745197E+03
2	-1.444E+01	9.438261E+03	2	-1.765E+01	1.027973E+04
3	8.613E+00	1.249724E+04	3	-1.163E+01	1.110440E+04
4	-2.944E+01	1.437360E+04	4	-3.048E+01	1.503565E+04
5	-5.783E+01	1.629984E+04	5	-4.185E+01	2.092213E+04
6	-5.356E+01	2.168113E+04	6	-5.070E+01	2.186379E+04
7	-5.195E+01	2.394771E+04	7	-6.588E+01	2.671747E+04
8	-6.593E+01	2.573753E+04	8	-7.522E+01	2.756015E+04
9	-6.325E+01	2.711726E+04	9	-7.540E+01	3.137934E+04
10	-6.896E+01	2.893466E+04	10	-7.658E+01	3.320161E+04

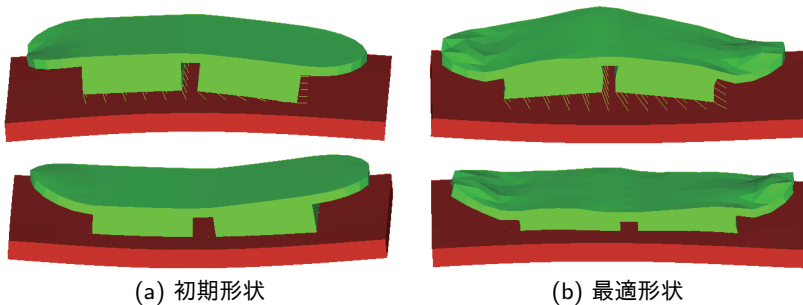


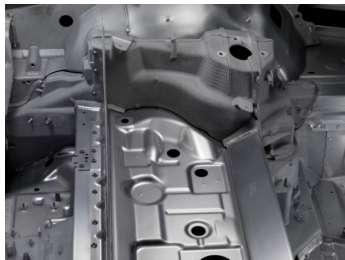
図 4.13: 3 次固有振動モードの比較

■ シェル構造におけるビードの形状最適化 [SA14]

シェル構造に設けられた小さな高さの凸凹は**ビード**とよばれる。



(a) 自動車のホワイトボディ



(b) ビード構造

図 4.14: ビード付きのシェルモデル

状態決定問題 Mindlin-Reissner の板理論による線形弾性問題
 目的関数 平均コンプライアンス

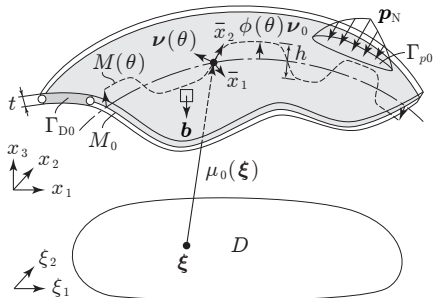


図 4.15: ビード付きのシェルモデル

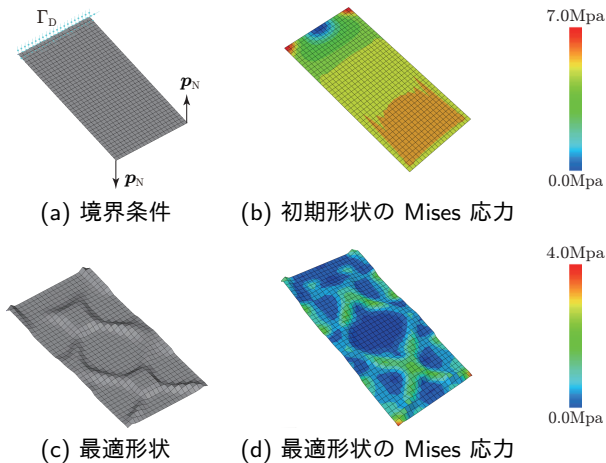


図 4.16: ねじり荷重をうける片持ちシェルの形状最適化結果

■ 流れ場の安定性向上のための形状最適化 [NA16]

段付き Poiseuille 流れ場において、定常流から非定常流に移る**臨界 Reynolds 数** Re_c は 40 あたりであると報告されている。

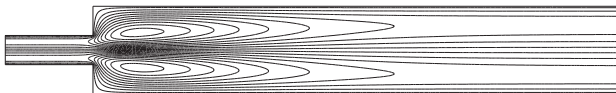
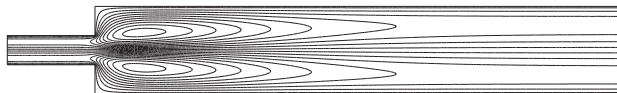


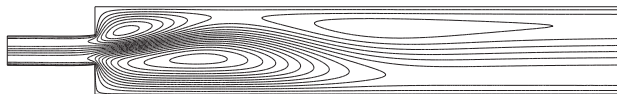
図 4.17: 段付き Poiseuille 流れ場

状態決定問題 定常 Navier-Stokes 問題とかく乱固有値問題

目的関数 かく乱固有値実部



(a) 初期形状



(b) 最適形状

図 4.18: 段付き Poiseuille 流れ場 (初期領域において $Re = 45$)

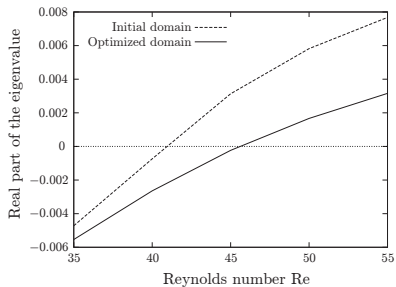


図 4.19: Reynolds 数に対する固有値の実部最大値の推移

■ 静電タッチセンサの形状最適化問題

指の検出感度を最大にしたい [SMFA16].



図 4.20: タッチパネル

状態決定問題 検出体のある静電場とない静電場

目的関数 電場差の H^1 ノルム

制約関数 検出電極の体積

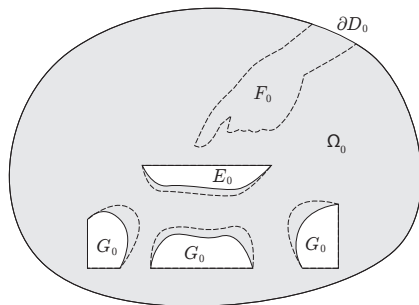
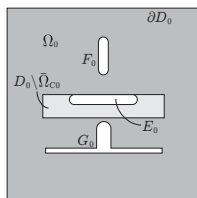
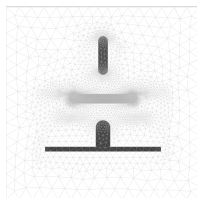


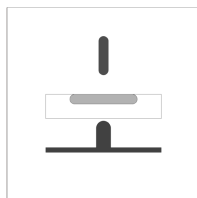
図 4.21: 初期静電場 $\Omega_0 = D_0 \setminus (\bar{E}_0 \cup \bar{G}_0)$



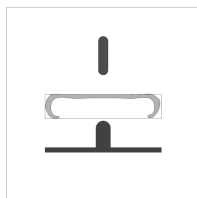
(a) 問題設定



(b) 有限要素モデル

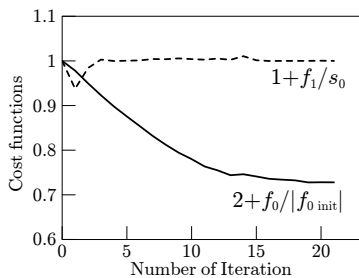


(c) 初期形状

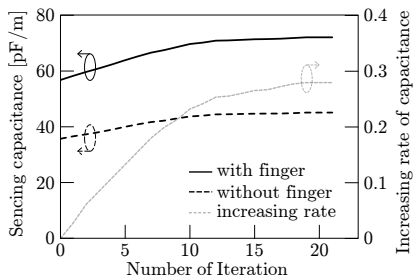


(d) 最適化後の形状

図 4.22: 突き出た接地電極のある 2 次元静電場の形状最適化結果



(a) 評価関数



(b) 性能

図 4.23: 形状変動に対する繰返履歴

■ 導波管ハイパスフィルタの形状最適化問題

ある周波数以上の信号を伝搬したい [SA16].



図 4.24: 導波管ハイパスフィルタ

状態決定問題 電磁場周波数応答問題

目的関数 入力ポートの重みつき消費電力

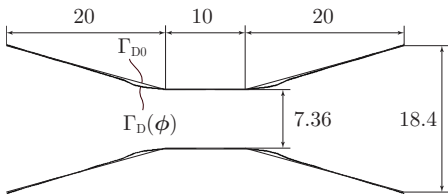
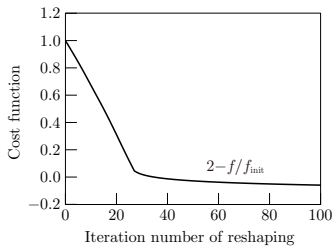


図 4.25: 円筒導波管の初期と最適化された断面形状 (単位: mm)



(a) 評価関数の更新履歴

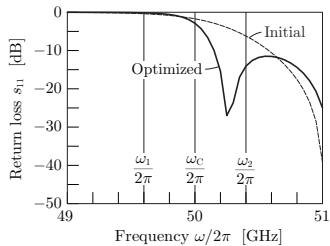
(b) リターンロス s_{11}

図 4.26: 円筒導波管の形状最適化結果

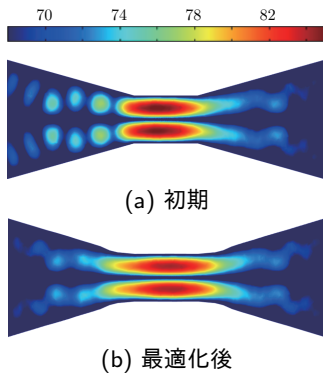


図 4.27: 50.2 GHz における電場の強さ [dBV/m]

■ 特発性側弯症の最適治療部位の同定 [TAM+01]

状態決定問題 椎体の成長による弾性体の座屈固有値問題

目的関数 座屈固有値

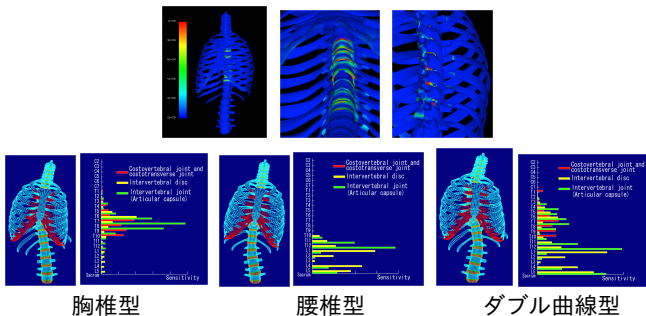


図 4.28: 座屈係数の形状勾配

■ モーフィングによる患者モデルの作成 [SA05]

状態決定問題 大変形弾性問題

目的関数 医用画像参照点における変位の2乗誤差和

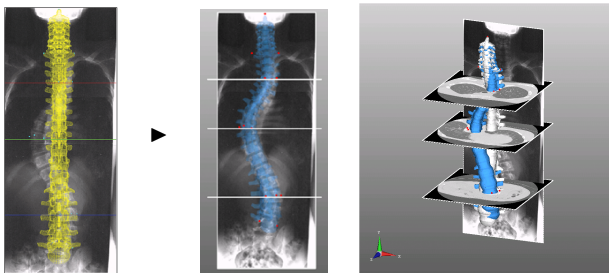


図 4.29: モーフィングによる患者モデルの作成

■ フィッティングによる患者モデルの作成 [SA05]

状態決定問題 弾性問題

目的関数 符号付距離関数の積分

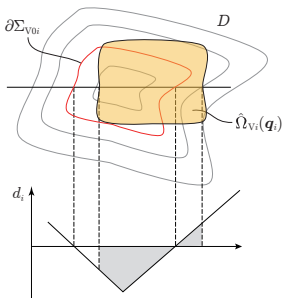


図 4.30: 符号付距離関数

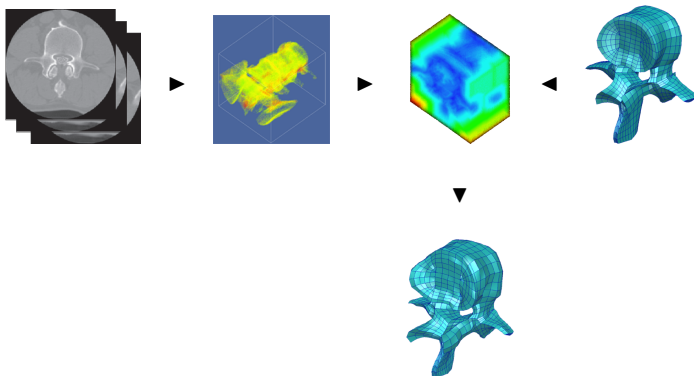


図 4.31: フィッティングによる患者モデルの作成

■ 形状観測に基づく筋活動の同定 [出口 17]

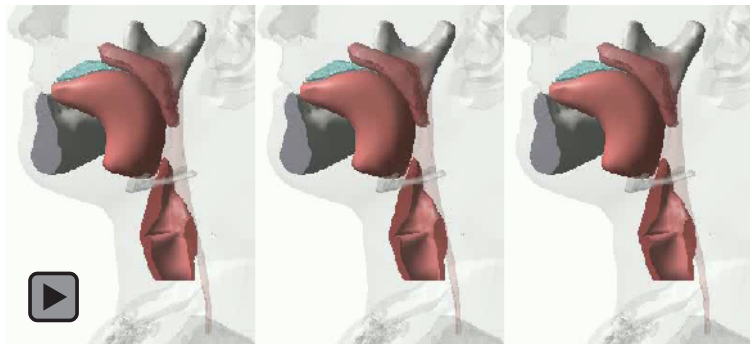
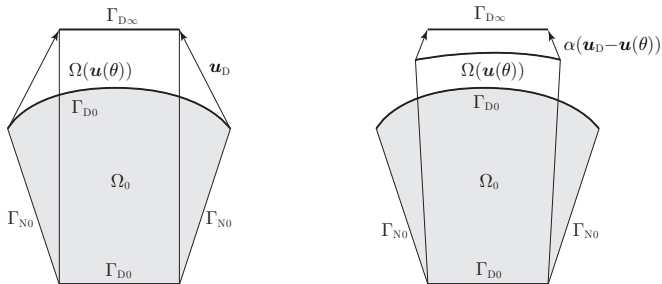


図 4.32: 嚥下運動のシミュレーション [菊地貴博 (武蔵野赤十字病院) 提供]

筋境界の時間変化が与えられたとき、筋の内部の伸縮運動を求めたい。

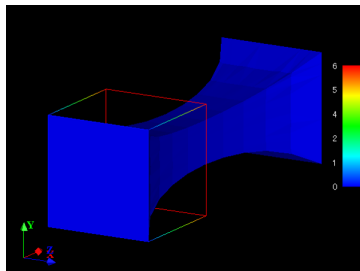
状態決定問題 大変形弾性問題

目的関数 強制変位がした仕事量 / 変位の2乗誤差積分

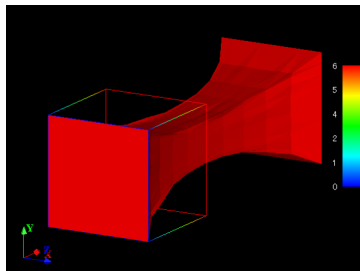


強制変位 u_D (Γ_{D0}) による変形 Γ_{D0} 上の境界力 $\alpha(u_D - u)$ による変形

図 4.33: 舌の2次元モデル



初期変形



最適化後の変形

図 4.34: 筋の伸び率

5 まとめ

- ① 素朴な成長則による形状更新法を思いついた。その不完全性を修正した先に関数空間上の勾配法と Newton 法があった。
- ② 評価関数の勾配は設計変数の許容集合にはない。 H^1 勾配法と H^1 Newton 法は、勾配を既知関数とする楕円型偏微分方程式の解を探索ベクトルにおく方法である。
- ③ 研究室の学生や興味をもってくれた若い研究者によって、次々に新しい問題が解けるようになってきている。

ご教示いただいた先生方

- 菊地文雄先生
- 海津 聰 先生
- 田端正久先生
- 大塚厚二先生
- 木村正人先生
- 田上大助先生



- ① 最適設計の基礎
- ② 最適化理論の基礎
- ③ 数理計画法の基礎
- ④ 変分原理と関数解析の基礎
- ⑤ 偏微分方程式の境界値問題
- ⑥ 数値解析の基礎
- ⑦ 抽象的最適設計問題
- ⑧ 密度変動型の位相最適化問題
- ⑨ 領域変動型の形状最適化問題

図 5.1: 形状最適化問題, 畔上秀幸, 森北出版

参考文献

- [AKT11] H. Azegami, S. Kaizu, and K. Takeuchi.
Regular solution to topology optimization problems of continua.
[JSIAM Letters](#), Vol. 3, pp. 1–4, 1 2011.
- [AT06] H. Azegami and K. Takeuchi.
A smoothing method for shape optimization: Traction method using the Robin condition.
[International Journal of Computational Methods](#), Vol. 3, No. 1, pp. 21–33, 3 2006.
- [Aze88] H. Azegami.
A proposal of a shape-optimization method using a constitutive equation of growth: In the case of a static elastic body (in Japanese).
[Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A](#), Vol. 54, No. 508, pp. 2167–2175, 12 1988.

参考文献 (cnt.)

- [Aze94] H. Azegami.
A solution to domain optimization problems (in Japanese).
Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A,
Vol. 60, No. 574, pp. 1479–1486, 6 1994.
- [Aze16] 畔上秀幸.
形状最適化問題.
森北出版, 東京, 10 2016.
- [AZUK13] H. Azegami, L. Zhou, K. Umemura, and N. Kondo.
Shape optimization for a link mechanism.
Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 48, No. 1, pp. 115–125, 2
2013.

参考文献 (cnt.)

- [FS88] Y. C. Fung and Y. Seguchi.
Mechanics applied to living systems (in Japanese).
[Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers](#), Vol. 88, pp. 290–296,
1988.
- [ISAA10] T. Iwai, A. Sugimoto, T. Aoyama, and H. Azegami.
Shape optimization problem of elastic bodies for controlling contact pressure.
[JSIAM Letters](#), Vol. 2, pp. 1–4, 1 2010.
- [KATI05] E. Katamine, H. Azegami, T. Tsubata, and S. Itoh.
Solution to shape optimization problems of viscous flow fields.
[International Journal of Computational Fluid Dynamics](#), Vol. 19, No. 1, pp.
45–51, 1 2005.

参考文献 (cnt.)

- [MB90] C. Matteck and S. Burkhardt.
A new method of structural shape optimization based on biological growth.
International Journal of Fatigue, Vol. 12, No. 3, pp. 185–190, 1990.
- [NA16] T. Nakazawa and H. Azegami.
Shape optimization of flow field improving hydrodynamic stability.
Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 33, No. 1, pp. 167–181, 2 2016.
- [NSAA08] Y. Nakamura, K. Shintani, T. Aoyama, and H. Azegami.
Shape optimization problem for acoustic musical instruments (in Japanese).
In Proceedings of the 2008 Annual Meeting of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 297–298, 9 2008.

参考文献 (cnt.)

- [SA05] R. Sasaoka and H. Azegami.
Construction of finite-element models conforming to prescribed boundary shapes.
Transactions of Japan Society for Computational Engineering and Science, No. 200500002, pp. 1–6, 1 2005.
(Paper No.200500002 published January 21, 2005).
- [SA13] K. Shintani and H. Azegami.
Shape optimization for brake squeal.
In Proceedings of the 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-10), pp. 1–10, 5 2013.
- [SA14] K. Shintani and H. Azegami.
Shape optimization for suppressing brake squeal.
Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 50, No. 6, pp. 1127–1135, 5 2014.

参考文献 (cnt.)

- [SA16] M. Satake and H. Azegami.
Shape optimization of waveguide filter.
[JSIAM Letters](#), Vol. 8, pp. 33–36, 6 2016.
- [SAM89] M. W. Suh, W. J. Anderson, and J. P. McDonald.
Application of geometric strain method to shape optimization of spring retainer redesign.
In C. A. Brebbia and S. Hernandez, editors, [Computer Aided Optimization Design of Structures: Recent advances](#), pp. 189–198. Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, Southampton, Boston, 6 1989.
- [SMFA16] M. Satake, N. Maeda, S. Fukui, and H. Azegami.
Shape optimization of an electrostatic capacitive sensor.
[Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics](#), Vol. 33, pp. 599–619, 12 2016.

参考文献 (cnt.)

- [TAA15] T. Tago, T. Aoki, and H. Azegami.
Identification of building damage using vibrational eigenvalue and eigenmode pairs.
[Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics](#), Vol. 32, No. 2, pp. 297–313, 6 2015.
- [TAM⁺01] K. Takeuchi, H. Azegami, S. Murachi, J. Kitoh, Y. Ishida, N. Kawakami, and M. Makino.
Study on treatment with respect to idiopathic scoliosis: Sensitivity analysis based on buckling theory.
[JSME International Journal, Series C](#), Vol. 44, No. 4, pp. 1059–1064, 12 2001.
- [出口 17] 出口秀輝, 羽生圭吾, 道脇幸博, 菊地貴博, 神谷哲, 畔上秀幸.
形状観測に基づく筋活動の同定.
日本応用数理学会 2017 年 研究部会連合発表会, 電気通信大学, 2017.03.06, 3 2017.