p進コホモロジーとラングランズ対応

東京大学 カブリ数物連携宇宙研究機構

阿部 知行

ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1} \frac{1}{n^s}$$

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

（オイラー）

- 素数の分布の情報が含まれている
- ゼータ関数の一般化やその亜種がしばしば極めて重要な役割を果たす

リーマン予想

$\zeta(s)$ は複素数平面全体に解析接続される

（リーマン）

リーマン仮説

$$\zeta(s) = 0$$

となる$s \in \mathbb{C}$ は

$$s = -2, -4, -6, \ldots$$

または

$$s = \frac{1}{2} + \alpha i, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

である.

ゼータ関数の幾何学化

オイラーの積表示：

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

リーマンのゼータ関数は $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ のゼータ関数だと考える

$X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ とおくと

$$\zeta(s) = \prod_{x \in |X|} \frac{1}{1-(\#k(x))^{-s}}$$

極大イデアルの集合

(p)

剰余体の元の個数

$\#\mathbb{Z}/(p) = p$

ゼータ関数の幾何学化

Xを$\mathbb{Z}$上有限型なスキームとする

$$\zeta_X(s) := \prod_{x \in |X|} \frac{1}{1-(\#k(x))^{-s}}$$

特に$\mathbb{F}_q$上有限型だった場合：

$\#k(x) = q^{\deg(x)}$と書けることに注意すると

$$Z(X,t) := \prod_{x \in |X|} \frac{1}{1-t^{\deg(x)}}$$

$$\zeta_X(s) = L(X, q^{-s})$$

ゼータ関数の幾何学化

$$X(\mathbb{F}_{q^n}) := \left\{(t_1, \ldots, t_d) \in X \mid t_i \in \mathbb{F}_{q^n}\right\}$$

とおくと，少しトリッキーだが簡単な計算で

$$Z(X,t) = \exp\Bigl(\sum_{n\geq 1} \#X(\mathbb{F}_{q^n}) \cdot \frac{t^n}{n}\Bigr)$$

であることがわかる．つまり，点の個数を数える数列に対する母関数であるといえる．

ヴェイユ予想

ヴェイユ予想（定理）

Xを滑らかで完備な$\mathbb{F}_q$上の代数多様体とする．このとき次が成立する：

1. $Z(X,t)$は有理関数である
2. $Z(X,t)$は関数等式を満たす
3. $Z(X,t) = \dfrac{P_1(t)\dots P_{2d-1}}{P_0(t)\dots P_{2d}}$

   で$P_i(\alpha)=0$とすれば$|\alpha| = q^{i/2}$となる様に書ける（リーマン予想類似）

ヴェイユの戦略

特異コホモロジーのような位相的なコホモロジー論が有限体上の多様体に対しても存在すれば予想が従うだろう

X: 代数多様体 ⟹ $H^*(X)$: 次数付きベクトル空間

さらに反変関手性を持つ：

$f: X \to Y$ ⟹ $f^*: H^*(Y) \to H^*(X)$

これだけではただのコホモロジー論だが，さらに“位相的”なので

$$\#\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Tr}\big(f^* : H^*(X)\big)$$

（レフシェッツ不動点定理型）

が成立することを言う

ヴェイユの戦略

正標数体上の幾何学には特徴的な自己射がある

$$
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\quad F \quad} & X \\
(t_1, \ldots, t_d) & \longmapsto & (t_1^q, \ldots, t_d^q)
\end{array}
$$

特にF^nで固定されている点が$X(\mathbb{F}_{q^n})$であることが分かり，レフシェッツ不動点定理を用いることで

$$Z(X,t) = \prod \det(1 - F^* \cdot t : H^i(X))^{(-1)^{i+1}}$$

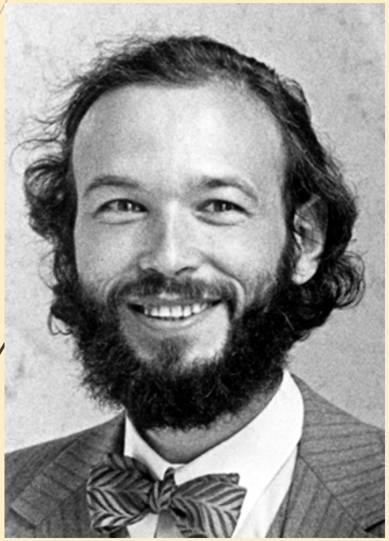
リーマン予想類似に関しては，ホッジ理論のような理論があれば導かれることをセールが指摘した．

グロタンディークとドリーニュとヴェイユ予想の解決

アレクサンダー・グロタンディーク
（1928～2014）

- ヴェイユの提起したコホモロジーを構成し，エタール・コホモロジーと命名
- その帰結としてヴェイユ予想のリーマン予想類似以外を解く
- それらを解くばかりでなく，関手的な視点に立った壮大な一般化をする

グロタンディークとドリーニュとヴェイユ予想の解決



ピエール・ドリーニュ
（1944～）

- リーマン予想類似を解決
- 数論幾何的手法を様々な数論の問題に応用し，グロタンディークの構築した道具をなくてはならないものにした

新たな問題

ヴェイユ予想はエタール・コホモロジーを用いて解かれた

エタール・コホモロジー論は p とは異なる素数 ℓ を固定すると構成される

X: 代数多様体 ⇒ $H^*_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$: $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間

ヴェイユ予想を解くコホモロジー論が無数に存在

それらの間の関係はどうなっている？

新たな問題

ラングランズの哲学に触発され，ドリーニュは以下を予想する

予想（ドリーニュ）

Xを正規な多様体とし，ℓ を p とは異なる素数とする．$\mathcal{F}$ を X上の行列式有限かつ既約な滑らかな ℓ 進層とする．

1. pとℓとは異なる素数 ℓ' を取ると，Xの各閉点でフロベニウス固有値が一致するような ℓ'進層が存在する．

2. クリスタリン同志が存在する．

その後の進展

- 多様体が曲線で階数が1の場合はいずれも類体論から出る.

以下はℓ'同志に関する結果

- 多様体が曲線で階数が2の場合はドリンフェルトが証明. シュトゥカというベクトル束の組とその間のある種の射から構成されたデータのモジュライ空間を用いる.
- 多様体が曲線で階数が一般の場合はラフォルグがドリンフェルトのアイディアを洗練させることで示した.
- 多様体が滑らかの場合はラフォルグの結果に帰着させることでドリンフェルトとドリーニュが示した.

p進コホモロジー論

複素数体上 位相的	解析的	正標数体上 位相的	解析的
特異・ コホモロジー	ド・ラーム・ コホモロジー	エタール・ コホモロジー	リジッド・ コホモロジー
局所系	可積分接続付き ベクトル束	滑らかなℓ進層	過収束Fアイソ クリスタル
構成可能層	$\mathscr{D}$加群	ℓ進構成可能層	数論的$\mathscr{D}$加群

p進コホモロジー論

ド・ラーム・コホモロジーの類似の理論を作りたい

k：標数 p の体

X：k 上の多様体

$$H^*_{\mathrm{dR}}(X) := H^*(X, \Omega^\bullet_X)$$

k ベクトル空間になる

$$Z(X,t) = \prod \det(1 - F^* \cdot t : H^i(X))^{(-1)^{i+1}}$$

これでは Z 関数を捉えることは出来ない！

p進コホモロジー論

R: 混標数の完備離散付置環で剰余体が k

運良く以下の様な $\mathscr{X}$ が取れたとする：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathscr{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] & \mathrm{Spf}(R) \end{tikzcd}$$

実際ここが固有かつ滑らかならこの定義で正しい

$$H^*_{\mathrm{rig}}(X) := H^*(\mathscr{X}, \Omega^\bullet_{\mathscr{X}}) \otimes \mathbb{Q}$$

- 持ち上げに依らないか
- 持ち上げが取れない場合はどうするか

アイソクリスタル

リジッドコホモロジーのように多様体を持ち上げて考える

$$
\begin{array}{ccc}
X & \longrightarrow & \mathscr{X} \\
\downarrow & \square & \downarrow \\
\mathrm{Spec}(k) & \longrightarrow & \mathrm{Spf}(R)
\end{array}
$$

$\mathscr{X}$ 上の積分可能接続付きベクトル束を考える

$$\mathrm{MIC}(\mathscr{X})_{\mathbb{Q}}$$

この圏が持ち上げに依らない（つまり持ち上げどうしに標準的な同値がある）ならば$\mathrm{MIC}(X)_{\mathbb{Q}}$と書くことが出来る

アイソクリスタル

$\mathrm{MIC}(\mathscr{X})_{\mathbb{Q}}$ は意外と変なものである

$\mathscr{X} = \widehat{\mathbb{A}}^1$ ととる

$$f' = f$$

という微分方程式を考えると形式解は

$$\exp(t) := \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!}$$

しかしこの関数の収束半径は1より小さい！！

⇒ 収束半径が小さすぎると貼り合わせに依ってしまうなど不都合が起きる

⇒ $\mathrm{MIC}(\mathscr{X})_{\mathbb{Q}}$ の対象で収束半径が十分にあるものを**過収束アイソクリスタル**という

フロベニウス構造

$\mathrm{Isoc}^{\dagger}(X)$: X上の過収束アイソクリスタルの圏

この圏に数論的な情報を加える

$F\colon X\to X$ フロベニウス自己射を思い出す

引き戻しの関手を用いて

$$F^{*}\colon \mathrm{Isoc}^{\dagger}(X)\to \mathrm{Isoc}^{\dagger}(X)$$

過収束Fアイソクリスタルとは組(E,Φ)のことでEは過収束アイソクリスタル, Φは同型$F^{*}E\xrightarrow{\sim}E$である.

この構造があるとXの各閉点で(E,Φ)のフロベニウス固有値を考えることができる

主定理

定理（阿部）

X を滑らかな $\mathbb{F}_q$ 上の曲線とする．このとき次の二つの集合を考える：

- 既約かつ行列式有限な X 上の滑らかな ℓ 進層
- 既約かつ行列式有限な X 上の過収束 F アイソクリスタル

するとこの二つの集合の間に1:1対応があり，各閉点 $x \in |X|$ でのフロベニウス固有値が一致している.

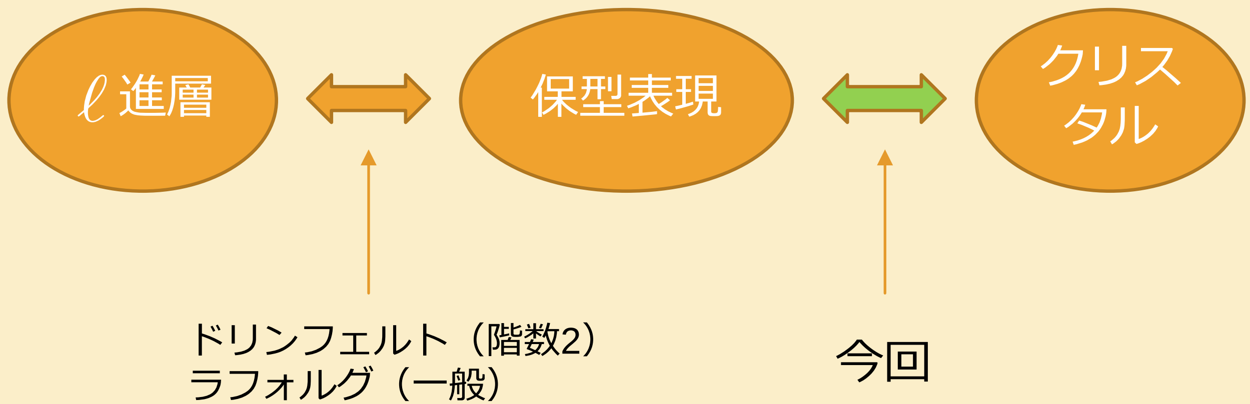
いくつかの帰結

定理（阿部-エノー，ケドラヤ）

- 滑らかな多様体とすると既約な過収束 F アイソクリスタルに対して ℓ 進同志が存在する.
- 過収束 F アイソクリスタルに対してチェボタレフ型の稠密定理が成り立つ.
- 全ての過収束 F アイソクリスタルは混である.

オリジナルのドリーニュの予想の高次元版はまだ知られていない

証明のアイディア



→ ドリンフェルト・ラフォルグのシュトゥカのモジュライ空間の相対コホモロジーを取ることで構成

← ε 因子の積公式を示し，ピアテツキー・シャピロの逆定理を適用する

6つの関手と数論的D加群

$H^*: \mathrm{Sch}(X) \to \mathrm{Vec}_K$ コホモロジー論

このコホモロジー論に対する6つの関手の枠組みとはたくさんのデータから構成される

$X \Rightarrow D(X)$: 三角圏

$\otimes, \mathcal{H}om$

$f: X \to Y$: k 上有限型のスキームの射

$f_!, f_*: D(X) \to D(Y), \qquad f^!, f^*: D(Y) \to D(X)$

$(f^*, f_*), \quad (f_!, f^!) \qquad f_! \to f_*$ etc.

$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{Vec}_K) \xrightarrow{\sim} D(\mathrm{Spec}(k))$

$H^*(X) \cong f_* f^*(K)$

6つの関手と数論的D加群

$\mathscr{X}$: R 上滑らかな形式的スキーム

環の層 $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ をベルテロが定義した

近傍系が取れた場合：

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]} \,\middle|\, \text{級数 } \textstyle\sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{T}^{\underline{k}} \text{ の収束半径は} > 1 \right\}$$

- 無限位数の微分作用素を含んでいるので扱いが極めて難しい.
- $\mathscr{D}$加群のアイディアを用いることでベルテロが6つの関手を構成するプログラムを提唱した.
- $\mathscr{D}$加群の理論と同じようにホロノミック加群を考えることができるが，開移入に対するホロノミック性の保存は難しい問題だった.

志甫予想の解決

定理（ケドラヤ）

U を固有的で滑らかな多様体として，E を U上の過収束 F アイソクリスタルとする．すると改変 $U' \to U$とそのコンパクト化 (X', Z')が存在して，E の引き戻しは (X', Z')の（対数的）収束アイソクリスタルとなる．

- Uが曲線の場合はクルーによって問題提起され，アンドレ，ケドラヤ，メブクにより独立に解かれた．
- Eが単根の場合は都築先生により示された．
- 一般の場合は志甫先生により予想された．
- 複素数体上の類似として望月拓郎先生の定理がある．

カロと都築の定理

定理（カロ-都築）

Xを準射影的で滑らかな多様体として，EをX上の過収束Fアイソクリスタルとする．するとEはホロノミック系になっている．

系（カロ）

埋め込み可能なスキーム（特に準射影的スキーム）に対して6つの関手が存在する．

6つの関手の構成

- ラングランズ対応の構成にはもっと一般のスキーム，さらにある種の代数的スタックの6つの関手の枠組みが必要
- 三角圏の構成は基本的には導来圏の極限を取る

X: 埋め込み可能なら $D(\mathrm{Hol}(X)) \xrightarrow{\sim} D(X)$

⇩

X：一般ならXの埋め込み可能スキームからなる開被覆$\{U_i\}$を取り，貼り合わせることで $\mathrm{Hol}(X)$ を構成する

⇩

$$D(X) := D(\mathrm{Hol}(X))$$

アイソクリスタルの対応の構成

クリスタル→保型表現

$$\varepsilon(X,\mathcal{E}) = \prod_{x\in|X|} \varepsilon_x(\mathcal{E},\omega)$$

（阿部-マルモラ）

＋

ドリーニュの帰納原理
（ピアテツキー・シャピロの逆定理を用いる）

アイソクリスタルの対応の構成

保型表現→クリスタル

$$\mathrm{Cht}_N^r \xrightarrow{f} X \times X$$

- シュトゥカのモジュライ空間（ドリンフェルト）
- 一般に代数的スタック
- 帯に短したすきに長し

$$(f_*\overline{\mathbb{Q}}_p)^{\mathrm{ss}} = \bigoplus \mathcal{E}_\pi \boxtimes \mathcal{E}_\pi^\vee \oplus (\text{ごみ})$$

- ラフォルグの議論に沿って行う
- ヘッケ対応の跡の計算は加藤-斎藤の ℓ 独立性の議論を使いラフォルグの計算に帰着させる

今後の課題

1. スロープの体系的な理解

Xを$\mathbb{F}_q$上の滑らかなスキームとする

X上の滑らかなℓ進層の任意の点でのフロベニウス固有値のℓ進絶対値は1である

一方

X上の過収束Fアイソクリスタルのフロベニウス固有値のp進絶対値は一般的に点によって異なる

$\Longrightarrow$ 超特異曲線など重要な数論的事象

今後の課題

2. ねじれ係数のp進コホモロジー論

Xを$\mathbb{F}_q$上の固有的かつ滑らかなスキームとする

⇒ クリスタリン・コホモロジーが定義され，
$\mathbb{Z}_p$上有限生成

一般的にねじれ係数のコホモロジー論は定義されていない．サイクルの理論など様々な局面で必要とされるが，今のところ対処療法的

ご清聴ありがとうございました