2017年9月12日

Well-Posedness and Smoothing Effect for Nonlinear Dispersive Equations

堤 誉志雄(京都大学理学研究科），

共同研究者： 宮路智行(明治大学），岸本展(RIMS)

1 Introduction

- 3階非線形Schrödinger方程式 (3rd Order NLS)

$$\partial_t u - \partial_x^3 u + i\alpha\partial_x^2 u + i|u|^2 u = 0, \tag{1}$$

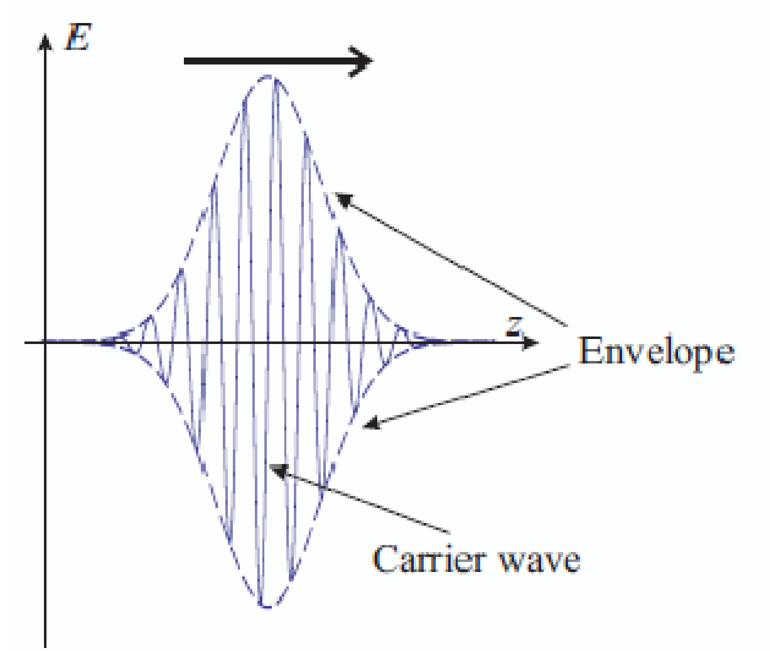
$$t \in [-T, T],\ x \in \mathbf{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z},$$

$$u(0, x) = u_0(x),\ x \in \mathbf{T}, \tag{2}$$

$u : [-T, T] \times \mathbf{T} \to \mathbf{C}$; ゆっくり変化する電場の包絡線(緩慢包絡線近似
$E = \frac{1}{2}[e^{-i\omega t}u(t, x) + C.C.],\ \ \omega > 0$は十分大),
$i = \sqrt{-1}, \quad T > 0, \quad \alpha$; 実分散定数,

$$2\alpha/3 \notin \mathbf{Z}. \qquad \text{(NR)}$$

Pulse with slowly varying envelope in photonic crystal fiber



V. Agrawal, *"Nonlinear Fiber Optics "*, Fourth Edition, Acadmic Press, 2007.

問題1：初期値問題(1)-(2) は，Sobolev空間 H^s, $s < 0$ で適切か？(スケール不変な空間: $\dot{H}^{-1}$, Fujita-Kato, 1964)

H^s における初期値問題の局所適切性(LWP)：

(i)（解の存在） 初期値 $u_0 \in H^s$ に対し，ある $T > 0$ と解 $u \in C([-T, T]; H^s)$ が存在.

(ii) （一意性）解が存在するなら，初期値 $u_0 \in H^s$ に対し，解が一意に定まる.

(iii) （連続依存性）u_n, u はそれぞれ初期値 u_{0n}, u_0 の解，$\|u_{0n} - u_0\|_{H^s} \to 0 \implies \|u_n - u\|_{C([-T', T']; H^s)} \to 0$ $(0 < T' < T)$.

Remark 1 適切性の概念・定義は，Hadamard, T. Katoによる．H^s, $s < 0$は超関数の空間であり，超関数同士の積は一般に定義されないため，非線形項$|u|^2u$の意味付けが問題となる．

- 3rd Order Lugiato-Lefever Equation

$$\partial_t u - \partial_x^3 u + i\alpha\partial_x^2 u + u + i|u|^2 u = f, \quad (3)$$
$$t > 0, \quad x \in \mathbf{T}.$$

減衰項と外力が付いた3階非線形Schrödinger方程式 (3rd Order NLS),

f ; 時間変数に依存しない外力

問題2： 方程式(3) から生成される力学系は，
グローバル・アトラクターを持つか？

- 3rd Order NLS with Raman Scatteing Term

$$\begin{aligned}\partial_t u = & \alpha_1 \partial_x^3 u + i\alpha_2 \partial_x^2 u + i\gamma_1 |u|^2 u \\ & + \gamma_2 \partial_x \left(|u|^2 u\right) - i\Gamma u \partial_x \left(|u|^2\right), \\ & t \in [-T, T], \quad x \in \mathbf{T}.\end{aligned} \tag{4}$$

α_j, γ_j, Γ; 実定数， $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\Gamma \neq 0$.
(4) の最後の項は Raman 散乱の影響を反映.

問題3：　方程式(4)の初期値問題は，Sobolev 空間H^sで適切か？

Fabio Biancalana, Heriot-Watt University (Private Communications)
This approach is universally used amongst physicists, ...

ill-posedである例：　Prandtl境界層流方程式

2 (LWP) in H^s, $s < 0$

$\langle a \rangle = 1 + |a| \ \ (a \in \mathbf{C})$,
$\tilde{f}(\tau, k)$; 両変数tとxに関するフーリエ変換,
$\hat{f}(t, k)$; 変数xだけに関するフーリエ変換,

(Modified Fourier Restriction Norm)
b, $s \in \mathbf{R}$, $u_0 \in \mathscr{D}'(\mathbf{T})$, $T > 0$.

$$Z^{s,b}(u_0) = \Big\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^2);\ f(t,x) = f(t, x + 2\pi), \\ \|f\|_{Z^{s,b}(u_0)} < \infty \Big\},$$

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{Z^{s,b}(u_0)} = \Bigg\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle k \rangle^{2s} \times \\
\times \langle \tau + k^3 - \alpha k^2 - |\hat{u}_0(k)|^2 \rangle^{2b} |\tilde{f}(\tau,k)|^2 \ d\tau \Bigg\}^{1/2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_T^{s,b}(u_0) = \{ f \in \mathscr{D}'((-T,T) \times \mathbf{T}); \\
\|f\|_{Z_T^{s,b}(u_0)} < \infty \},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{Z_T^{s,b}(u_0)} = \inf \{ \|v\|_{Z^{s,b}(u_0)} \big| \ v \in Z^{s,b}(u_0), \\
v(t) = f(t) \text{ on } (-T,T) \}.
\end{aligned}
$$

Remark 2 $u_0 = 0$のとき，$Z^{s,b}(0)$と$Z_T^{s,b}(0)$はBourgain (1993) によって導入されたフーリエ制限空間である.

Fourier Restriction Norm Method:
Bourgain (1993),
Kenig-Ponce-Vega (1993, 1996),
Short time $X^{s,b}$ $(= Z^{s,b}(0))$ sapces ;
Koch-Tzvetkov (2003), Ionescu-Kenig (2007),
U^p, V^p sapces ; Koch-Tataru (2005).

(Reduced Equation, Renormalized Equation)

$$\partial_t u - \partial_x^3 u + i\alpha\partial_x^2 u \tag{5}$$
$$+ i\Big(|u|^2 - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |u(t,x)|^2\,dx\Big)u = 0,$$
$$t \in [-T,T], \quad x \in \mathbf{T}.$$

方程式(5)は次のゲージ変換から従う.

$$v(t,x) = u(t,x)e^{\frac{i}{\pi}\int_0^t \|u(s)\|_{L^2}^2\,ds}. \tag{6}$$

式(5)左辺の非線形項を F と置き, x でフーリ

エ変換すると,

$$\widehat{F(u)}(k) = i \sum_{\substack{k=k_1+k_2+k_3,\\ (k_1+k_2)(k_2+k_3)\neq 0}} \hat{u}(k_1)\bar{\hat{u}}(k_2)\hat{u}(k_3) \\ -i|\hat{u}(k)|^2\hat{u}(k).$$

(5) を積分方程式に書き直す.

$$\hat{u}(t,k) = e^{-it(k^3-\alpha k^2)}\hat{u}_0(k) \\ -i\int_0^t e^{-i(t-r)(k^3-\alpha k^2)}\widehat{F(u)}(r,k)\ dr. \tag{7}$$

- Local Well-Posedness (LWP)

$$
\begin{aligned}
&(\text{共鳴関数})\quad \Phi(k_1,k_2,k_3)\\
:=&3(k_1+k_2)(k_2+k_3)(k_3+k_1-2\alpha/3)\\
=&(\tau+k^3-\alpha k^2)-(\tau_1+k_1^3-\alpha k_1^2) \qquad (8)\\
&-(\tau_2+k_2^3+\alpha k_2^2)-(\tau_3+k_3^3-\alpha k_3^2).
\end{aligned}
$$

但し，$k=k_1+k_2+k_3$, $\tau=\tau_1+\tau_2+\tau_3$ とする．等式(8)は３つの波が相互作用し１つの波が生成される非線形過程を表している (Four-Wave Mixing).

等式 $k=k_1+k_2+k_3$ と(NR)から，$|k|$ が十分大きな $k\in\mathbf{Z}$ に対して

$$\exists c>0;\ |\Phi|\geq c|k||k_1+k_2||k_2+k_3|. \qquad (9)$$

$\Phi=0$ となる周波数の組 (k_1,k_2,k_3) は共鳴周波数と呼ばれる．非線形項 F のフーリエ変換を見ると，和は $(k_1+k_2)(k_2+k_3)\neq 0$ で取っているから，仮定(NR)の下唯一の共鳴周波数は

$$(k_1,k_2,k_3)=(k,-k,k)$$

(Degenerate Four-Wave Mixing).

即ち，共鳴項は $-i|\hat{u}(k)|^2\hat{u}(k)$ として現れる．この項を，Sobolev 空間 H^s ノルムで評価することを考える．$s \in \mathbf{R}$ に対し，

$$\left| \langle k \rangle^s |\hat{u}(k)|^2 \hat{u}(k) \right| \leq \left(\langle k \rangle^{s/3} |\hat{u}(k)| \right)^3.$$

閉じた不等式を得るためには，

$$s \geq s/3 \iff s \geq 0.$$

即ち，H^s, $s \geq 0$ において，(5) の Cauchy 問題は（LWP) となる．そこで，方程式(5) を直接

解くのではなく，更に非線形項を変形する．

$$\widehat{G(u)}(k) := \widehat{F(u)}(k) + i|\hat{u}_0(k)|^2 \hat{u}(k)$$
$$= -i\Big(|\hat{u}(k)|^2 - |\hat{u}_0(k)|^2\Big)\hat{u}(k) + (\text{summation})$$

と置き，方程式(5)を積分方程式に書き直す．

$$\hat{u}(t,k) = e^{-it(k^3-\alpha k^2+|\hat{u}_0(k)|^2)}\hat{u}_0(k) \qquad (10)$$
$$-i\int_0^t e^{-i(t-r)(k^3-\alpha k^2+|\hat{u}_0(k)|^2)}$$
$$\times \widehat{G(u)}(r,k)\ dr.$$

Theorem 1 (Miyaji-Y.T, 2017) $2\alpha/3 \notin \mathbf{Z}$, $s > -1/6$.
(i) The Cauchy problem (5) and (2) is (LWP) in H^s.
(ii) $u_0 \in H^s$, η with $0 < \eta < 1 + 6s$. Then, the solution u on $[-T, T]$ given by (i) satisfies

$$\sup_{t\in[-T,T]} \Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}} \langle k \rangle^{1+6s-\eta} \Big| \, |\hat{u}(t,k)|^2 - |\hat{u}_0(k)|^2 \, \Big| \Big) < \infty, \quad (11)$$

$$u \in Z_T^{s,1/2}, \; G(u) \in Z_T^{s,-1/2}(u_0). \quad (12)$$

Remark 3 (i) $0 > s > -1/4$とする．十分小さな$\eta > 0$に対して$(1+6s-\eta)/2 > s$であるから，Theorem 1 (ii) (11) は平滑化効果を意味している．平滑化効果により，解の一意性や初期値に関する連続依存性が従う．二つの解に対し，退化共鳴項$i|\hat{u}(t,k)|^2\hat{u}(t,k)$ (degenerate four-wave mixing) の差を評価する方法としては，この種の平滑化効果を適用する方法しか今の所知られていない．

mKdV； Takaoka-Tsutsumi (2004),
Nakanishi-Takaoka-Tsutsumi (2010),
Molinet-Pilod-Vento (2016),
4th order NLS； T. Oh-Y. Wang (2017).
(ii) (12) から，非線形項 $F(u)$ は

$$\widehat{F(u)}(t,k) = \widehat{G(u)}(t,k) - i|\hat{u}_0(k)|^2 \hat{u}(t,k),$$
$$G : Z_T^{s,1/2}(u_0) \ \to \ Z_T^{s,-1/2}(u_0), \text{連続}$$

として意味を持つ.

- Nonuniqueness of Solutions

空間$C^{-1}([-1,1];H^s)$は，$L^1((-1,1);H^s)$に次のノルムを入れた空間とする.

$$\begin{aligned}&\|f\|_{C^{-1}([-1,1];H^s)}\\&= \sup_{t\in[-1,1]}\left\|\int_0^t e^{-t'(\partial_x^3-i\alpha\partial_x^2)}f(t')\ dt'\right\|_{H^s}.\end{aligned}$$

$\mathscr{C}^{-1}([-1,1];H^s)$；上のノルムにおける$L^1((-1,1);H^s)$の完備化,

$\mathscr{L}(L^2, L^2)$；$L^2(\mathbf{T})$ から $L^2(\mathbf{T})$ への有界線形作用素全体,

Theorem 1と対照的に，解が補助空間 $Z_T^{s,1/2}(u_0)$ に属さないなら，解の一意性は成立しない.

Theorem 2 (Miyaji-Y.T, 2017) $s < 0$, $3b + s > 0$. Then, $\exists$ nontrivial solution u of (5) and (2) with $u_0 = 0$ such that

$$u \in C([-1, 1]; H^s),$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} F(\chi_n u) \in \mathscr{C}^{-1}([-1,1]; H^s), \tag{13}$$

$$u \notin Z_1^{s,b}(0). \tag{14}$$

但し，$\{\chi_n\}$ は $L^2(\mathbf{T})$ 上のフーリエ掛け算作用素列で，各々の表象が有限な台を持ちかつ $\chi_n \to I$ strongly in $\mathscr{L}(L^2, L^2)$ を満たす．さらに，(13) の極限は $\{\chi_n\}$ の選び方によらない．

証明は，(14) を除けば，２次元非圧縮性 Euler 方程式に対する Schnirelman (1997)，および 3 次 NLS に対する Christ (2005) と同じである．

Remark 4 (i) $u(0)=0$だから，Theorem 2によって与えられた解に対しては，$F(u)=G(u)$が成立している．従って，(13)から次が従う．

$$\exists \lim_{n\to\infty} G(\chi_n u) \in Z_1^{s,-1}(0).$$

一方で，Theorem 1によって与えられる解uは，もっと強い性質(12) $G(u)\in Z_T^{s,-1/2}(u_0)$を満たす．Christは，Theorem 2で与えられる解を “weak solution in the extended sense” と呼んでいる．非線形項は滑らかな近似解の極限

としてのみ意味を持つ．弱解をどのように意味付けするかは，非線形項をどのように意味付けするかという問題である．

3 Global attractor of 3rd order Lugiato-Lefever equation

$$\partial_t u - \partial_x^3 u + i\alpha\partial_x^2 u + u + i|u|^2 u = f, \quad \text{(3LL)}$$
$$t > 0,\ x \in \mathbf{T} \quad (\alpha \in \mathbf{R};\ \text{constant}).$$

- 3つの保存量
  減衰項と外力項がない場合に，(3LL) は質量，運動量およびエネルギー保存則を持つ．

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2},$$

$$\operatorname{Im}(\partial_x u(t), u(t)) = \operatorname{Im}(\partial_x u_0, u_0),$$

$$\operatorname{Im}(\partial_x^2 u(t), \partial_x u(t)) + \alpha\|\partial_x u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^4}^4$$

$$= \operatorname{Im}(\partial_x^2 u_0, \partial_x u_0) + \alpha\|\partial_x u_0\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^4}^4.$$

Remark 5 エネルギー汎関数の主部（最高階の微分を持つ項）は<u>正定値でない</u>! そのため, 使える保存量は質量 (L^2) 保存だけであるため,

グローバル・アトラクターは $L^2(\mathbf{T})$ 空間で作らなければならない.

- 目標: 3階Lugiato-Lefever方程式(3LL)によって生成される流れ（解）に対し，L^2 空間においてグローバル・アトラクターの存在を示せ.

- グローバル・アトラクター (Global attractor)
$(X, \|\cdot\|)$; Banach space,
$S : X \times [0, \infty) \to X$; semiflow
(continuous mapping from $X \times [0, \infty)$ to X with semi-gruop properties

$S(t+s) = S(t)S(s)$, $t, s \geq 0$ and $S(0) = Id$),
$A \subset X$; compact set.
The set A is said to be global (or universal) attractor for S if A satisfies

$$(i)(\text{invariant}) S(t)A = A, \quad t > 0,$$

$$(ii)(\text{unifrom attraction})$$

$$\forall D \subset X,\ bounded$$

$$\implies d(S(t)D, A) \to 0\ (t \to \infty),$$

$$d(S(t)D, A) = \sup_{v \in D} \inf_{w \in A} \|S(t)v - w\|.$$

Remark 6 散逸的非線形発展方程式に対し，もしグローバル・アトラクターが存在すれば，それによってすべての解の時間大域挙動を特徴付けることができる.

Theorem 3 (Miyaji-Y.T, 2016) Assume $2\alpha/3 \notin \mathbf{Z}$ and $f \in L^2(\mathbf{T})$. Let $S: (u_0, t) \mapsto u(t)$ be the solution semiflow associated with (3LL). Then, $\exists$ unique global attractor $\mathcal{A} \subset L^2$ for S.

Remark 7 (3LL)のCauchy問題に対し，L^2空

間における時間大域的適切性はStrichartz評価式から直ちに従う.

- 既知の結果
(damped and forced NLS)
◦ Ghidaglia (1988), Abounouh (1993), Xiaoming Wang (1995), $X = H^1$, (strong topology), J.M. Ball's argument
◦ Molinet (2009), cubic NLS, $X = L^2$, (strong topology), J.M. Ball's argument to a limit equation

- グローバル・アトラクター存在証明の方針
(1) L^2 空間において吸引域 (absorbing set) の存在を示す．（この部分は，L^2 不等式から従うので容易である.）
(2) 解軌道が L^2 空間において前コンパクトであることを示す．（Duhamel 項，即ち，非線形項の正則性を詳細に調べなければならない.）

Remark 8 解軌道が前コンパクトであることの証明は，以下の二つに大別できる.

(a) 方程式の平滑化効果を用いて，コンパクト

性を示す．（非線形放物型方程式で有効な論法）
(b) 弱位相でグローバル・アトラクターの存在を証明し，その上の方程式を考えることにより，実は強位相でのグローバル・アトラクターになっていることを示す．（John M. Ball および Molinet の論法，平滑化効果がないある種の方程式に適用可能）
Molinet の論法は方程式 (3LL) に適用できるが，Theorem 3 の証明から以下の主張が従う．

$$\exists s > 0;\ u, \mathrm{sol.\,of}\ \text{(3LL)},\ u(0) = u_0 \in L^2$$

$$\Longrightarrow \ u(t) - V(t)u_0 \in H^s, \ \mathcal{A} \subset H^s,$$

$$\inf_{w \in \mathcal{A}} \big\| (u(t) - V(t)u_0) - w \big\|_{H^s} \to 0 \quad (t \to \infty),$$

$$V(t)u_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-t(i(k^3 - \alpha k^2)+1)+ikx}$$

$$\times e^{-i\int_0^t \|u(s)\|_{L^2}^2 ds + i\int_0^t |\hat{u}(s,k)|^2 ds} \hat{u}_0(k).$$

これは解の滑らかでない部分は時間とともに指数減衰し，滑らかな部分だけ残ることを意味している．(Asymptotic Smoothing)

4 Ill-posedness of 3rd order NLS with Raman scattering

$$\begin{aligned}\partial_t u =& \alpha_1 \partial_x^3 u + i\alpha_2 \partial_x^2 u + i\gamma_1 |u|^2 u \\ & + \gamma_2 \partial_x\big(|u|^2 u\big) - i\Gamma u \partial_x\big(|u|^2\big), \quad (15) \\ & t \in [-T, T], \quad x \in \mathbf{T}.\end{aligned}$$

α_j, γ_j $(j = 1, 2)$, Γ; 実定数, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\Gamma \neq 0$, $T > 0$.

(15)の右辺最後の項がRaman散乱の影響を表す.

Theorem 4 (Kishimoto-Y.T, 2017)
$2\alpha_2/3\alpha_1 \notin \mathbf{Z}$ $(\alpha_1 \neq 0)$, $1 \leq s_1 \leq s < s_1 + 1$.
Then, $\exists u_0 \in H^s(\mathbf{T})$ such that for any $T > 0$ the Cauchy problem of (15) with $u(0) = u_0$ has no solution $u \in C([0,T); H^{s_1}(\mathbf{T}))$ on $[0,T)$, nor solution $u \in C((-T,0]; H^{s_1}(\mathbf{T}))$ on $(-T,0]$.

Remark 9 (i) $\mathbf{T}$の代わりに$\mathbf{R}$上で初期値問題

を考えると，(LWP)が成立することが知られている(Hayashi and Ozawa (1994), Chihara (1994)). $\mathbf{T}$と$\mathbf{R}$の相違は，ラプラシアンのスペクトルが離散であるか連続であるかの相違となる.
(ii) 解の存在しない初期値ではなく，“norm inflation” を引き起こす初期値列なら，C^∞級から選べる. (Kishimoto-Tsutsumi, 2017)

- Observation on structure of Raman scattering term

L^2 ノルム保存（質量保存則）より，

$$
\begin{aligned}
\partial_t u + ia\partial_x u = \alpha_1 \partial_x^3 u + i\alpha_2 \partial_x^2 u \\
+ i\gamma_1 |u|^2 u + \ i\gamma_2 \partial_x \bigl(|u|^2 u\bigr) \\
+ \frac{\Gamma}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} e^{-ikx} \sum_{(k_1+k_2)(k_2+k_3)\neq 0} \\
\times (k_1+k_2)\hat{u}(k_1)\hat{\bar{u}}(k_2)\hat{u}(k_3) \\
- \frac{\Gamma}{2\pi}\Bigl(\sum_{k_2\in\mathbf{Z}} k_2|\hat{u}(k_2)|^2\Bigr)u, \ t\in[-T,T], \ x\in\mathbf{T},
\end{aligned}
\tag{16}
$$

但し，

$$a = \frac{\Gamma}{2\pi}\|u_0\|_{L^2}^2.$$

(16) 左辺はCauchy-Riemann型の楕円型作用.

$$\text{Cauchy-Riemann作用素} + \text{非線形平滑化効果}$$
$$\Longrightarrow \ \text{Theorem 4}$$

Remark 10 (i) 楕円型方程式の正則性定理から，Theorem 4 は出ない.
(ii) 最近，Tsugawa は，ある種の非線形性が放物型タイプの平滑化効果を生み出すことを示し

た．（“parabolic smoothing effect”）別の見方をすると，この概念は初期値問題の非適切性の証明に役立つことが予想される．

(iii) 解析関数の空間で解を求めることは可能 (Cauchy-Kowalevsky 型の定理).

非適切性に関しては，共同研究者 岸本展氏の一般講演（９月１３日午前函数方程式論分科会）

未解決問題

(1) $2\alpha/3 \in \mathbf{Z}$のときは？
(2) 退化共鳴項$i|\hat{u}(k)|^2\hat{u}$を処理する方法は？
smoothing effectは適切に使い切れているか？
（特に，二つの解の差を評価するとき.）
(3) ３次非線形性でなく，２次非線形性に対する共鳴項を処理する方法は？
(4) $\mathbf{T}$でなく，$\mathbf{R}$のときは？
(5) 初期値問題の数学的な非適切性と物理現象の関係は？

Thank you for your attention!