トーリックトポロジー

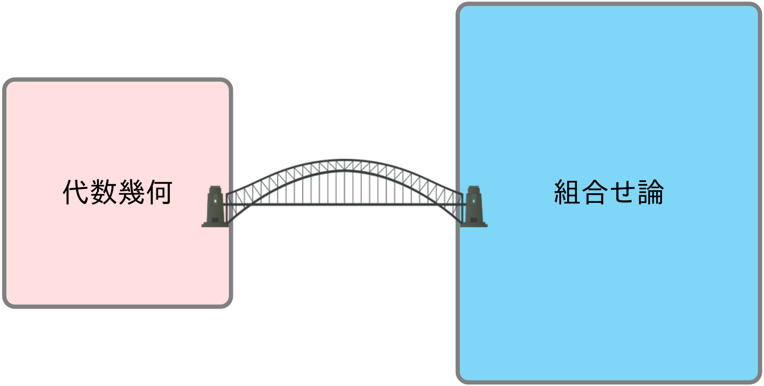
枡田　幹也

大阪市立大学

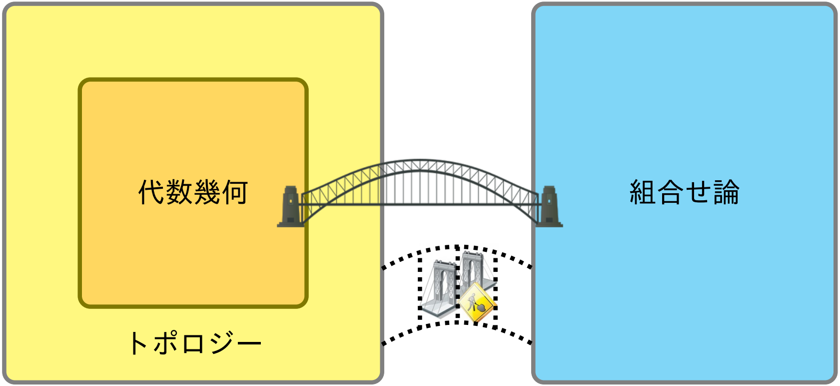
日本数学会（於，筑波大学）２０１６年３月１７日

トーリック幾何：**Demazure, Mumford,** 三宅-小田**,...** により基礎理論が構築（**1970** 年頃）

トーリック幾何：**Demazure, Mumford,** 三宅-小田,**…** により基礎理論が構築（**1970** 年頃）



トーリック幾何とトーリックトポロジー



トーリックトポロジー：**Davis-Januszkiewicz** の論文 **(1991)**
1990 年代後半から少しずつ研究が始まる**.**

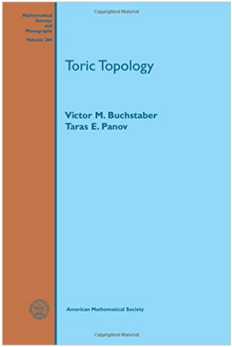
トーリックトポロジー：**Davis-Januszkiewicz** の論文 **(1991)**
1990 年代後半から少しずつ研究が始まる.

V. M. Buchstaber and T. E. Panov の２つの本
[1] 「**Torus actions and their applications in topology and combinatorics**」**Univ. Lect. 24, AMS. 2002**（約 **140** 頁）

トーリックトポロジー：**Davis-Januszkiewicz** の論文 **(1991)**
1990 年代後半から少しずつ研究が始まる.

V. M. Buchstaber and T. E. Panov の２つの本
[1] 「**Torus actions and their applications in topology and combinatorics**」**Univ. Lect. 24, AMS. 2002**（約 **140** 頁）

[2] 「**Toric Topology**」
Math. Surveys and Monographs, AMS, 2015（約 **520** 頁）



トーリック幾何との出会い（**1994** 年頃）

<u>同変 **Serre** 問題</u> **(H. Bass, 1985** 年頃**)** G 簡約複素代数群
G 表現空間 B 上の代数的 G ベクトル束 $E \to B$ は自明か.

トーリック幾何との出会い（**1994** 年頃）

同変 **Serre** 問題 **(H. Bass, 1985** 年頃**)** G 簡約複素代数群
G 表現空間 B 上の代数的 G ベクトル束 $E \to B$ は自明か**.**

$G = \{1\}$ のとき **Serre** 問題「多項式環上の有限生成射影加群は自由加群か」**.**
肯定的に解決 **(Quillen, Suslin, 1976** 年**)**

トーリック幾何との出会い（**1994** 年頃）

同変 **Serre** 問題 **(H. Bass, 1985** 年頃**)** G 簡約複素代数群
G 表現空間 B 上の代数的 G ベクトル束 $E \to B$ は自明か.

$G = \{1\}$ のとき **Serre** 問題「多項式環上の有限生成射影加群は自由加群か」.
肯定的に解決 **(Quillen, Suslin, 1976** 年**)**

【同変 **Serre** 問題の動機】 $E \to B$ が非自明なら，$E (= \mathbb{C}^n)$ 上の G 作用は表現ではない（だろう）．つまり，$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ の部分群 G で $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ に含まれないものが存在する（だろう）.

トーリック幾何との出会い（**1994** 年頃）

<u>同変 **Serre** 問題</u> **(H. Bass, 1985** 年頃**)** G 簡約複素代数群
G 表現空間 B 上の代数的 G ベクトル束 $E \to B$ は自明か.

$G = \{1\}$ のとき **Serre** 問題「多項式環上の有限生成射影加群は自由加群か」.
肯定的に解決 **(Quillen, Suslin, 1976** 年**)**

【同変 **Serre** 問題の動機】 $E \to B$ が非自明なら，$E (= \mathbb{C}^n)$ 上の G 作用は表現ではない（だろう）．つまり，$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ の部分群 G で $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ に含まれないものが存在する（だろう）.

- 反例あり **(Kraft-Schwarz, Knop, M-Petrie,...)**

トーリック幾何との出会い（**1994** 年頃）

同変 **Serre** 問題 **(H. Bass, 1985** 年頃**)** G 簡約複素代数群
G 表現空間 B 上の代数的 G ベクトル束 $E \to B$ は自明か**.**

$G = \{1\}$ のとき **Serre** 問題「多項式環上の有限生成射影加群は自由加群か」**.**
肯定的に解決 **(Quillen, Suslin, 1976** 年**)**

【同変 **Serre** 問題の動機】 $E \to B$ が非自明なら，$E(=\mathbb{C}^n)$ 上の G 作用は表現ではない（だろう）．つまり，$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ の部分群 G で $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ に含まれないものが存在する（だろう）**.**

- 反例あり **(Kraft-Schwarz, Knop, M-Petrie,...)**
- G が可換のとき肯定的 **(M-Moser-Petrie)**

トーリック幾何との出会い（**1994** 年頃）

同変 **Serre** 問題 **(H. Bass, 1985** 年頃**)** G 簡約複素代数群
G 表現空間 B 上の代数的 G ベクトル束 $E \to B$ は自明か**.**

$G = \{1\}$ のとき **Serre** 問題「多項式環上の有限生成射影加群は自由加群か」**.**
肯定的に解決 **(Quillen, Suslin, 1976** 年**)**

【同変 **Serre** 問題の動機】 $E \to B$ が非自明なら，$E (= \mathbb{C}^n)$ 上の G 作用は表現ではない（だろう）．つまり，$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ の部分群 G で $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ に含まれないものが存在する（だろう）**.**

- 反例あり **(Kraft-Schwarz, Knop, M-Petrie,...)**
- G が可換のとき肯定的 **(M-Moser-Petrie)**

G 可換 $\Longrightarrow B$ は **1** 次元表現の直和 $\Longrightarrow B//G$ トーリック

トーリック幾何との出会い（**1994** 年頃）

同変 **Serre** 問題 **(H. Bass, 1985** 年頃**)** G 簡約複素代数群
G 表現空間 B 上の代数的 G ベクトル束 $E \to B$ は自明か**.**

$G = \{1\}$ のとき **Serre** 問題「多項式環上の有限生成射影加群は自由加群か」**.**
肯定的に解決 **(Quillen, Suslin, 1976** 年**)**

【同変 **Serre** 問題の動機】 $E \to B$ が非自明なら，$E (= \mathbb{C}^n)$ 上の G 作用は表現ではない（だろう）**.** つまり，$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ の部分群 G で $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ に含まれないものが存在する（だろう）**.**

- 反例あり **(Kraft-Schwarz, Knop, M-Petrie,...)**
- G が可換のとき肯定的 **(M-Moser-Petrie)**

G 可換 $\Longrightarrow B$ は **1** 次元表現の直和 $\Longrightarrow B/\!/G$ トーリック

$B/\!/G$ 上のベクトル束が自明 $\overset{MMP}{\Longrightarrow} B$ 上の G ベクトル束は自明

トーリック幾何との出会い（**1994** 年頃）

同変 **Serre** 問題 **(H. Bass, 1985** 年頃**)** G 簡約複素代数群
G 表現空間 B 上の代数的 G ベクトル束 $E \to B$ は自明か.

$G = \{1\}$ のとき **Serre** 問題「多項式環上の有限生成射影加群は自由加群か」.
肯定的に解決 **(Quillen, Suslin, 1976** 年**)**

【同変 **Serre** 問題の動機】 $E \to B$ が非自明なら，$E(=\mathbb{C}^n)$ 上の G 作用は表現ではない（だろう）．つまり，$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ の部分群 G で $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ に含まれないものが存在する（だろう）.

- 反例あり **(Kraft-Schwarz, Knop, M-Petrie,...)**
- G が可換のとき肯定的 **(M-Moser-Petrie)**

G 可換 $\Longrightarrow B$ は **1** 次元表現の直和 $\Longrightarrow B/\!/G$ トーリック

$B/\!/G$ 上のベクトル束が自明 $\overset{MMP}{\Longrightarrow}$ B 上の G ベクトル束は自明
（左は **Gubelaze** によって示されていた）

トーリック幾何

トーリック多様体

定義 (トーリック多様体)

複素 n 次元正規代数多様体 X が，稠密な軌道をもつ群作用 $(\mathbb{C}^*)^n \times X \to X$ をもつとき，トーリック多様体という．

群作用は，積演算 $(\mathbb{C}^*)^n \times (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^n$ を拡張したもの．

トーリック多様体

定義 (トーリック多様体)

複素 n 次元正規代数多様体 X が，稠密な軌道をもつ群作用 $(\mathbb{C}^*)^n \times X \to X$ をもつとき，トーリック多様体という.

群作用は，積演算 $(\mathbb{C}^*)^n \times (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^n$ を拡張したもの.

- 1 次元トーリック多様体は次の３つのみ.

$$\mathbb{C}^*, \quad \mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup \{0\}, \quad \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}^* \cup \{0\} \cup \{\infty\}$$

トーリック多様体

定義 (トーリック多様体)

複素 n 次元正規代数多様体 X が，稠密な軌道をもつ群作用 $(\mathbb{C}^*)^n \times X \to X$ をもつとき，トーリック多様体という．

群作用は，積演算 $(\mathbb{C}^*)^n \times (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^n$ を拡張したもの．

- 1 次元トーリック多様体は次の３つのみ．

$$\mathbb{C}^*, \quad \mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup \{0\}, \quad \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}^* \cup \{0\} \cup \{\infty\}$$

- 2 次元トーリック多様体は，

$$1\text{ 次元の直積}, \quad \mathbb{C}P^2, \quad \mathbb{C}P^2 \# q\overline{\mathbb{C}P^2} \ (q\text{:自然数})$$

など無限に沢山ある．特異点をもつものもある．

Example (コンパクト非特異トーリック多様体)

例 1． 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$.

$(g_1, \ldots, g_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ の作用は

$$[z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}] \mapsto [g_1 z_1, \ldots, g_n z_n, z_{n+1}]$$

稠密な $(\mathbb{C}^*)^n$ 軌道はすべての座標が 0 でない点の集合.

Example (コンパクト非特異トーリック多様体)

例 1． 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$.

$(g_1,\dots,g_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ の作用は

$$[z_1,\dots,z_n,z_{n+1}]\mapsto[g_1z_1,\dots,g_nz_n,z_{n+1}]$$

稠密な $(\mathbb{C}^*)^n$ 軌道はすべての座標が 0 でない点の集合.

例 2． **Bott** 多様体 B_n.

$\mathbb{C}P^1$ 束の系列（Bott タワー）

$$B_n\xrightarrow{\mathbb{C}P^1}B_{n-1}\xrightarrow{\mathbb{C}P^1}\cdots\xrightarrow{\mathbb{C}P^1}B_2\xrightarrow{\mathbb{C}P^1}B_1\xrightarrow{\mathbb{C}P^1}B_0=\{1\text{ 点 }\}$$

$B_k=P(L_k\oplus\mathbb{C})$ 射影化， $L_k\to B_{k-1}$ は（複素）直線束.

Example (コンパクト非特異トーリック多様体)

例１． 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$.

$(g_1, \ldots, g_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ の作用は

$$[z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}] \mapsto [g_1 z_1, \ldots, g_n z_n, z_{n+1}]$$

稠密な $(\mathbb{C}^*)^n$ 軌道はすべての座標が 0 でない点の集合.

例２． **Bott 多様体 B_n.**

$\mathbb{C}P^1$ 束の系列（Bott タワー）

$$B_n \xrightarrow{\mathbb{C}P^1} B_{n-1} \xrightarrow{\mathbb{C}P^1} \cdots \xrightarrow{\mathbb{C}P^1} B_2 \xrightarrow{\mathbb{C}P^1} B_1 \xrightarrow{\mathbb{C}P^1} B_0 = \{1 \text{ 点 }\}$$

$B_k = P(L_k \oplus \mathbb{C})$ 射影化， $L_k \to B_{k-1}$ は（複素）直線束.

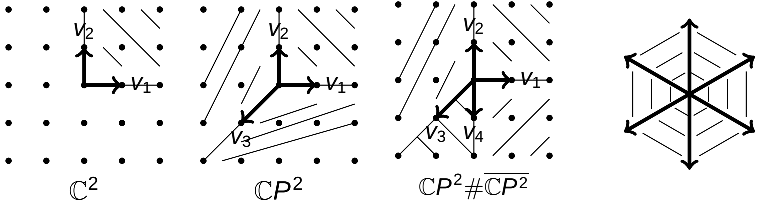
• $B_1 = \mathbb{C}P^1$， B_2 は Hirzebruch 曲面 F_a $(a \in \mathbb{Z})$.

トーリック幾何の基本定理

{ 複素 n 次元トーリック多様体 } $\overset{1:1}{\Longleftrightarrow}$ $\{\mathbb{R}^n$ 内の扇 }

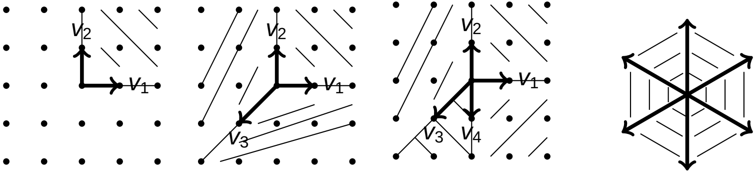
トーリック幾何の基本定理

$$\{\text{複素 } n \text{ 次元トーリック多様体}\} \overset{1:1}{\Longleftrightarrow} \{\mathbb{R}^n \text{ 内の扇}\}$$



トーリック幾何の基本定理

{ 複素 n 次元トーリック多様体 } $\overset{1:1}{\Longleftrightarrow}$ $\{\mathbb{R}^n$ 内の扇 $\}$



$\mathbb{C}^2$ $\mathbb{C}P^2$ $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$

• ルート系 A_n の **Weyl Chamber** に対応するトーリック多様体 **(Permutohedral variety)** には対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ が作用し，$\mathfrak{S}_{n+1}$ のコホモロジー表現が得られる **(Procesi, Stanley, Stembridge, ...)**

トーリック多様体 $\Longrightarrow$ 扇

以後，コンパクト（=完備）非特異の範疇で考える．

トーリック多様体 $\Longrightarrow$ 扇

以後，コンパクト（=完備）非特異の範疇で考える．

Example

$(\mathbb{C}^*)^2 \curvearrowright \mathbb{C}P^2 = X \quad [z_1, z_2, z_3] \to [g_1 z_1, g_2 z_2, z_3]$

$X_i := \{z_i = 0\}$ 不変因子， $X \setminus \bigcup_{i=1}^3 X_i = (\mathbb{C}^*)^2$ 稠密軌道

トーリック多様体 $\Longrightarrow$ 扇

以後，コンパクト（=完備）非特異の範疇で考える．

Example

$(\mathbb{C}^*)^2 \curvearrowright \mathbb{C}P^2 = X \quad [z_1, z_2, z_3] \to [g_1 z_1, g_2 z_2, z_3]$

$X_i := \{z_i = 0\}$ 不変因子， $X \backslash \bigcup_{i=1}^3 X_i = (\mathbb{C}^*)^2$ 稠密軌道

一般に，X の不変因子（余次元１）を $X_1, \ldots, X_m$ とすると

$$X \backslash \bigcup_{i=1}^{m} X_i = (\mathbb{C}^*)^n \quad \text{稠密軌道}$$

- X を特徴付けるものは，X_i たち（およびその近傍）．

不変因子 $X_1, \ldots, X_m$ から 2 つのデータを抽出する.

不変因子 $X_1, \ldots, X_m$ から 2 つのデータを抽出する.

- $K_X := \{I \subset \{1, \ldots, m\} \mid \bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset\}$ （抽象）単体複体

不変因子 $X_1, \dots, X_m$ から 2 つのデータを抽出する.

- $K_X := \{I \subset \{1, \dots, m\} \mid \bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset\}$ （抽象）単体複体
- $v_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{Z}^n$ は，$v_i(\mathbb{C}^*)$ が X_i を固定する $(+\alpha)$.

不変因子 $X_1, \ldots, X_m$ から 2 つのデータを抽出する.

- $K_X := \{I \subset \{1, \ldots, m\} \mid \bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset\}$ （抽象）単体複体
- $v_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{Z}^n$ は，$v_i(\mathbb{C}^*)$ が X_i を固定する $(+\alpha)$.

$I \in K_X$ のとき，$\{v_i \mid i \in I\}$ で錐を作る $\rightsquigarrow X$ の扇 Δ_X

扇 Δ_X は，$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ 内の n 次元以下の錐の集まり.

不変因子 $X_1, \ldots, X_m$ から 2 つのデータを抽出する.

- $K_X := \{I \subset \{1, \ldots, m\} \mid \bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset\}$ （抽象）単体複体
- $v_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{Z}^n$ は，$v_i(\mathbb{C}^*)$ が X_i を固定する $(+\alpha)$.

$I \in K_X$ のとき，$\{v_i \mid i \in I\}$ で錐を作る $\rightsquigarrow X$ の扇 Δ_X

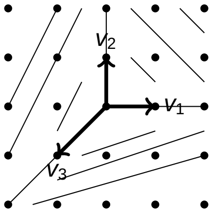
扇 Δ_X は，$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ 内の n 次元以下の錐の集まり.
Δ_X は 2 つのデータ $(K, \{v_i\}_{i=1}^m)$ を可視化したもの.

Example

$(\mathbb{C}^*)^2 \curvearrowright \mathbb{C}P^2 = X \quad [z_1, z_2, z_3] \to [g_1 z_1, g_2 z_2, z_3]$

$X_i := \{z_i = 0\}$ $(i = 1, 2, 3)$　不変因子

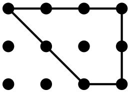
- $K_X = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}\}$
- $v_1(g) = (g, 1),\ v_2(g) = (1, g),\ v_3(g) = (g^{-1}, g^{-1})\ (g \in \mathbb{C}^*)$
  $v_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^2) = \mathbb{Z}^2.$



Pick の公式 (トーリック幾何の応用)

Pick の公式 (G. Pick, 1899)

P を格子多角形，P の内部にある格子点の数を $I(P)$，P の辺上にある格子点の数を $B(P)$ とすると，P の面積 $= I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1$



$I(P) = 1$

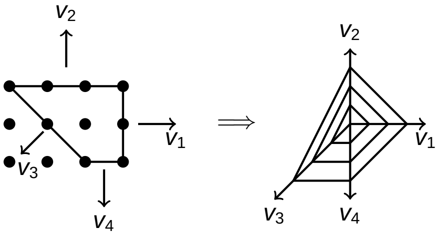
$B(P) = 8$

P の面積 $= 4$

Pick の公式 (トーリック幾何の応用)

Pick の公式 (G. Pick, 1899)

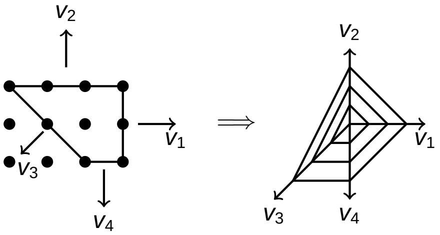
P を格子多角形，P の内部にある格子点の数を $I(P)$，P の辺上にある格子点の数を $B(P)$ とすると，P の面積 $= I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1$



Pick の公式 (トーリック幾何の応用)

Pick の公式 (G. Pick, 1899)

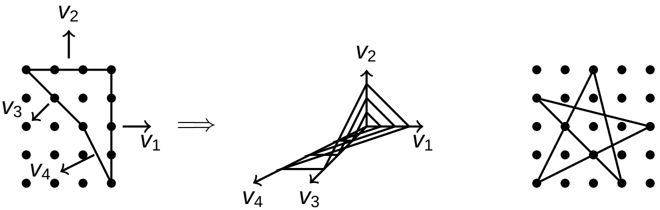
P を格子多角形，P の内部にある格子点の数を $I(P)$，P の辺上にある格子点の数を $B(P)$ とすると，P の面積 $= I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1$



$P \Longleftrightarrow$ 2 次元トーリック多様体 X とその上の豊富直線束 L.
（右から左への対応はモーメント写像）.
(X, L) に **Hirzebruch-Riemann-Roch** の定理 $\rightsquigarrow$ **Pick** の公式

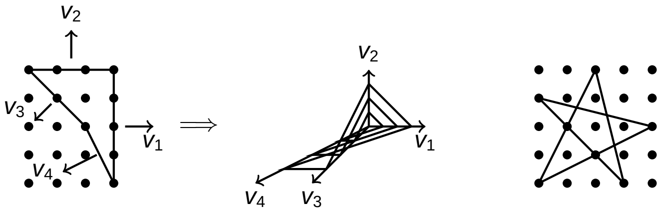
(Pick の公式) P の面積 $= I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1$

Pick の公式は P が凸でなくても成立するが，凸でないものはトーリック幾何では現れない.



(Pick の公式) P の面積 $= I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1$

Pick の公式は P が凸でなくても成立するが，凸でないものはトーリック幾何では現れない．



トーリックトポロジーの範疇では，**Pick** の公式が完全に証明でき，一般化も自然に見える．

位相的トーリック多様体

（トーリック多様体の１つのトポロジー版）

位相的トーリック多様体

定義 (位相的トーリック多様体)

実 $2n$ 次元コンパクト可微分多様体が，稠密な軌道をもつ「滑らかな」$(\mathbb{C}^*)^n$ 作用をもつとき，**位相的トーリック多様体**という（正確には,「滑らかな」$(\mathbb{C}^*)^n$ 表現を局所座標系にもつことを要求）.
（注．トーリック多様体は位相的トーリック多様体）.

位相的トーリック多様体

定義 (位相的トーリック多様体)

実 $2n$ 次元コンパクト可微分多様体が，稠密な軌道をもつ「滑らかな」$(\mathbb{C}^*)^n$ 作用をもつとき，**位相的トーリック多様体**という（正確には,「滑らかな」$(\mathbb{C}^*)^n$ 表現を局所座標系にもつことを要求）.
（注．トーリック多様体は位相的トーリック多様体）.

「代数的」と「滑らか」の差.

$$「代数的」\quad \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z} \tag{1}$$

位相的トーリック多様体

定義 (位相的トーリック多様体)

実 $2n$ 次元コンパクト可微分多様体が，稠密な軌道をもつ「滑らかな」$(\mathbb{C}^*)^n$ 作用をもつとき，**位相的トーリック多様体**という（正確には,「滑らかな」$(\mathbb{C}^*)^n$ 表現を局所座標系にもつことを要求）.
（注．トーリック多様体は位相的トーリック多様体）.

「代数的」と「滑らか」の差.

$$\text{「代数的」}\quad \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z} \tag{1}$$

一方，$\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_{>0} \times S^1$（**Lie** 群として）より，

$$\text{「滑らか」}\mathrm{Hom}_{smth}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{Z} \quad (re^{i\theta} \to r^{b}(e^{i\theta})^{v}) \tag{2}$$

代数的なものは $b = v$. (1) の $\mathbb{Z}$ は (2) の $\mathbb{C} \times \mathbb{Z}$ に対角的に入る.

トーリック多様体から扇を定めた方法と同様にして，位相的トーリック多様体 X に対して「位相的扇」が定まる．

トーリック多様体から扇を定めた方法と同様にして，位相的トーリック多様体 X に対して「位相的扇」が定まる．

不変因子 $X_1, \dots, X_m$ から２つのデータを抽出する．
- $K_X := \{I \subset [m] = \{1, \dots, m\} \mid \bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset\}$ （抽象）単体複体
- $v_i \in \mathrm{Hom}_{smth}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{C}^n \times \mathbb{Z}^n$ は， $v_i(\mathbb{C}^*)$ は X_i を固定 $(+\alpha)$.

$I \in K_X$ のとき，$\{v_i \mid i \in I\}$ で錐を作る $\rightsquigarrow X$ の「位相的扇」Δ_X
位相的扇は，$(\mathbb{C}^n \times \mathbb{Z}^n) \otimes \mathbb{R}$ 内の n 次元以下の錐の集まり．

トーリック多様体から扇を定めた方法と同様にして，位相的トーリック多様体 X に対して「位相的扇」が定まる．

不変因子 $X_1,\dots,X_m$ から２つのデータを抽出する．

- $K_X := \{I \subset [m] = \{1,\dots,m\} \mid \bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset\}$ （抽象）単体複体
- $v_i \in \mathrm{Hom}_{smth}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{C}^n \times \mathbb{Z}^n$ は， $v_i(\mathbb{C}^*)$ は X_i を固定 $(+\alpha)$.

$I \in K_X$ のとき，$\{v_i \mid i \in I\}$ で錐を作る $\rightsquigarrow X$ の「位相的扇」Δ_X

位相的扇は，$(\mathbb{C}^n \times \mathbb{Z}^n) \otimes \mathbb{R}$ 内の n 次元以下の錐の集まり．

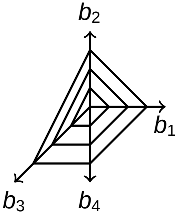
定理 (Ishida-Fukukawa-M, 2013)

$\{$ 実 $2n$ 次元位相的トーリック多様体 $\}$ $\overset{1:1}{\Longleftrightarrow}$ $\{n$ 次元位相的扇 $\}$

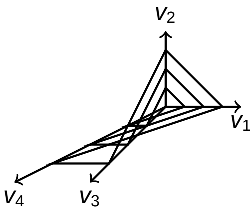
位相的扇 Δ_X は $\mathrm{Hom}_{smth}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{C}^n \times \mathbb{Z}^n$ に定義.

位相的扇 Δ_X は $\mathrm{Hom}_{smth}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{C}^n \times \mathbb{Z}^n$ に定義.

- Δ_1: Δ_X を $\mathbb{R}^n (\subset \mathbb{C}^n)$ へ射影したもの（通常の扇）
- Δ_2: Δ_X を $\mathbb{Z}^n$ へ射影したもの (多重扇）



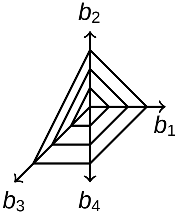
Δ_1



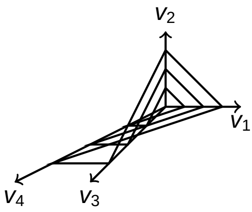
Δ_2

位相的扇 Δ_X は $\mathrm{Hom}_{smth}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{C}^n \times \mathbb{Z}^n$ に定義.

- Δ_1: Δ_X を $\mathbb{R}^n (\subset \mathbb{C}^n)$ へ射影したもの（通常の扇）
- Δ_2: Δ_X を $\mathbb{Z}^n$ へ射影したもの (多重扇)



Δ_1

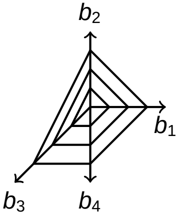


Δ_2

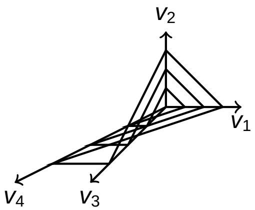
Δ_X は本質的に２つの扇 (Δ_1, Δ_2).　X がトーリック多様体の場合，$\Delta_1 = \Delta_2$.

位相的扇 Δ_X は $\mathrm{Hom}_{smth}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{C}^n \times \mathbb{Z}^n$ に定義.

- Δ_1: Δ_X を $\mathbb{R}^n (\subset \mathbb{C}^n)$ へ射影したもの（通常の扇）
- Δ_2: Δ_X を $\mathbb{Z}^n$ へ射影したもの (多重扇）



Δ_1



Δ_2

Δ_X は本質的に2つの扇 (Δ_1, Δ_2).　X がトーリック多様体の場合，$\Delta_1 = \Delta_2$.
Δ_1 が（錐に交わりがない）通常の完備扇 $\Longleftarrow X$ がコンパクト，ハウスドルフ

実４次元のトーリック多様体の微分同相類は

$$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1, \quad \mathbb{C}P^2 \# q\overline{\mathbb{C}P^2} \ (q \geq 0)$$

位相的トーリック多様体の微分同相類は，上記に以下が加わる．

$$p\mathbb{C}P^2 \# q\overline{\mathbb{C}P^2} \ (p \geq 2, \ q \geq 0).$$

実４次元のトーリック多様体の微分同相類は

$$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1, \quad \mathbb{C}P^2 \# q\overline{\mathbb{C}P^2} \ (q \geq 0)$$

位相的トーリック多様体の微分同相類は，上記に以下が加わる．

$$p\mathbb{C}P^2 \# q\overline{\mathbb{C}P^2} \ (p \geq 2, \ q \geq 0).$$

Example ($\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ の局所座標系の変換関数)

４つの $\mathbb{C}^2$ の貼り合わせ

$$\begin{array}{ccc}
(x_1, x_2) = (w_1^{-1}, w_1^{-1}\bar{w}_1 w_2) & \longleftarrow & (w_1, w_2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(x_1\bar{x}_2, \bar{x}_2^{-1}) = (\bar{w}_1^{-1}\bar{w}_2, \bar{w}_1 w_1^{-1}\bar{w}_2^{-1}) & \longleftarrow & (w_1 w_2^{-1}, w_2^{-1}) \\
\| & & \| \\
(\bar{y}_1^{-1}, \bar{y}_1 y_1^{-1} y_2) & & (y_1, y_2)
\end{array}$$

注意 (局所座標系の変換関数)

トーリック多様体は
「幾つかの $\mathbb{C}^n$ をローラン単項式を成分とする関数で貼り合わせたもの」

注意 (局所座標系の変換関数)

トーリック多様体は
「幾つかの $\mathbb{C}^n$ をローラン単項式を成分とする関数で貼り合わせたもの」

Example ($\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$ の局所座標系の変換関数)

４つの $\mathbb{C}^2$ の貼り合わせ

$$\begin{array}{ccc}
(x_1,x_2)=(w_1^{-1},w_1w_2) & \longleftarrow & (w_1,w_2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(x_1,x_2^{-1})=(w_1^{-1},w_1^{-1}w_2^{-1}) & \longleftarrow & (w_1,w_2^{-1}) \\
\| & & \| \\
(y_1^{-1},y_1^{-1}y_2) & & (y_1,y_2)
\end{array}$$

コホモロジー剛性問題

コホモロジー環

X：トーリック多様体，$\dim_{\mathbb{C}} X = n$
$\Delta_X = (K_X, \{v_i\}_{i=1}^m)$：$X$ の扇
　　ここで，K_X は（抽象）単体複体，$v_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{Z}^n$
$\mu_1, \dots, \mu_m$：不変因子 $X_1, \dots, X_m$ のポアンカレ双対，$H^2(X)$ の元.

コホモロジー環

X：トーリック多様体，$\dim_{\mathbb{C}} X = n$
$\Delta_X = (K_X, \{v_i\}_{i=1}^m)$：$X$ の扇
　　ここで，K_X は（抽象）単体複体，$v_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{Z}^n$
$\mu_1, \dots, \mu_m$：不変因子 $X_1, \dots, X_m$ のポアンカレ双対，$H^2(X)$ の元.

関係式 1. $I \notin K_X$（つまり $\bigcap_{i\in I} X_i = \emptyset$）ならば $\prod_{i\in I} \mu_i = 0$.

コホモロジー環

X：トーリック多様体， $\dim_{\mathbb{C}} X = n$
$\Delta_X = (K_X, \{v_i\}_{i=1}^m)$： X の扇
　　ここで，K_X は（抽象）単体複体，$v_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{Z}^n$
$\mu_1, \dots, \mu_m$：不変因子 $X_1, \dots, X_m$ のポアンカレ双対，$H^2(X)$ の元.

関係式 1．$I \notin K_X$（つまり $\bigcap_{i\in I} X_i = \emptyset$）ならば $\prod_{i\in I} \mu_i = 0$.

関係式 2．$\sum_{i=1}^m \langle u, v_i\rangle \mu_i = 0 \quad (\forall u \in \mathbb{Z}^n)$.

コホモロジー環

X：トーリック多様体，$\dim_{\mathbb{C}} X = n$
$\Delta_X = (K_X, \{v_i\}_{i=1}^m)$：$X$ の扇
ここで，K_X は（抽象）単体複体，$v_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{Z}^n$
$\mu_1, \dots, \mu_m$：不変因子 $X_1, \dots, X_m$ のポアンカレ双対，$H^2(X)$ の元.

関係式 1．$I \notin K_X$（つまり $\bigcap_{i\in I} X_i = \emptyset$）ならば $\prod_{i\in I} \mu_i = 0$.

関係式 2．$\sum_{i=1}^m \langle u, v_i\rangle \mu_i = 0 \quad (\forall u \in \mathbb{Z}^n)$.

定理 (Danilov-Jurkiewicz)

$H^*(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\mu_1, \dots, \mu_m]/(\mathcal{I} + \mathcal{J})$.
$\mathcal{I}$ は関係式 1 で，$\mathcal{J}$ は関係式 2 で生成されるイデアル

コホモロジー環

X：トーリック多様体，$\dim_{\mathbb{C}} X = n$
$\Delta_X = (K_X, \{v_i\}_{i=1}^m)$：$X$ の扇
ここで，K_X は（抽象）単体複体，$v_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{Z}^n$
$\mu_1, \ldots, \mu_m$：不変因子 $X_1, \ldots, X_m$ のポアンカレ双対，$H^2(X)$ の元．

関係式 1．$I \notin K_X$（つまり $\bigcap_{i \in I} X_i = \emptyset$）ならば $\prod_{i \in I} \mu_i = 0$．

関係式 2．$\sum_{i=1}^m \langle u, v_i \rangle \mu_i = 0 \quad (\forall u \in \mathbb{Z}^n)$．

定理 (Danilov-Jurkiewicz)

$H^*(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\mu_1, \ldots, \mu_m]/(\mathcal{I} + \mathcal{J})$.
$\mathcal{I}$ は関係式 1 で，$\mathcal{J}$ は関係式 2 で生成されるイデアル

注意：上の定理は，位相的トーリック多様体に対しても成立する．

コホモロジー剛性問題

X, Y: トーリック多様体

$$X \cong Y \text{ (代数多様体として)} \Longleftrightarrow \Delta_X \cong \Delta_X$$

コホモロジー剛性問題

X, Y: トーリック多様体

$$X \cong Y \text{ (代数多様体として)} \Longleftrightarrow \Delta_X \cong \Delta_X$$

一般に，トーリック多様体の可微分多様体としての分類は，代数多様体としての分類より弱い．

コホモロジー剛性問題

X, Y: トーリック多様体

$$X \cong Y \text{ (代数多様体として)} \iff \Delta_X \cong \Delta_X$$

一般に，トーリック多様体の可微分多様体としての分類は，代数多様体としての分類より弱い．

Example (Hirzebruch 曲面 F_a $(a \in \mathbb{Z})$)

1. F_a と F_b が代数多様体として同型 $\iff |a| = |b|$.
2. F_a と F_b が可微分多様体として同型 $\iff a \equiv b \pmod 2$.

さらに，$a \equiv b \pmod 2 \iff H^*(F_a;\mathbb{Z}) \cong H^*(F_b;\mathbb{Z})$

コホモロジー剛性問題

X, Y: トーリック多様体

$$X \cong Y \text{ (代数多様体として)} \Longleftrightarrow \Delta_X \cong \Delta_X$$

一般に，トーリック多様体の可微分多様体としての分類は，代数多様体としての分類より弱い．

Example (Hirzebruch 曲面 F_a ($a \in \mathbb{Z}$))

1. F_a と F_b が代数多様体として同型 $\Longleftrightarrow |a| = |b|$.
2. F_a と F_b が可微分多様体として同型 $\Longleftrightarrow a \equiv b \pmod 2$.

さらに，$a \equiv b \pmod 2 \Longleftrightarrow H^*(F_a; \mathbb{Z}) \cong H^*(F_b; \mathbb{Z})$

コホモロジー剛性問題

(位相的) トーリック多様体 X, Y に対して，

$$H^*(X; \mathbb{Z}) \cong H^*(Y; \mathbb{Z}) \Longrightarrow X \cong Y \text{（微分）同相?}$$

単体的凸多面体，単体的セル球面の面数の特徴づけ

(トーリック幾何，トーリックトポロジーの応用)

単体的凸多面体の面数

P： n 次元 単体的 凸多面体

$f_i = f_i(P)$： P の i 次元面の数, $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$: P の f**-vector**

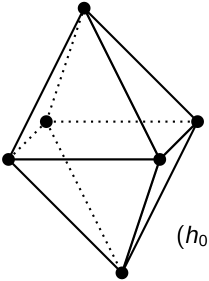
単体的凸多面体の面数

P ： n 次元 単体的 凸多面体

$f_i = f_i(P)$ ： P の i 次元面の数, $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$: P の f**-vector**

P の h**-vector** $(h_0, h_1, \dots, h_n)$ を次で定める.

$$(t-1)^n + f_0(t-1)^{n-1} + \cdots + f_{n-1} = h_0 t^n + h_1 t^{n-1} + \cdots + h_n$$



$$f_0 = 6,\ f_1 = 12,\ f_2 = 8$$

$$(t-1)^3 + 6(t-1)^2 + 12(t-1) + 8 = t^3 + 3t^3 + 3t + 1$$

$(h_0, h_1, h_2, h_3) = (1, 3, 3, 1)$ $(\mathbb{C}P^1)^3$ とベッチ数が一致

g-定理 (Billera-Lee, Stanley, 1980 年頃)

整数ベクトル $(h_0, \ldots, h_n)$ $(h_0 = 1)$ が n 次元単体的凸多面体 P の h-vector となる必要十分条件は次の 3 つが成立すること.

1. $h_i = h_{n-i}$ $(\forall i)$ (Dehn-Sommerville relations)
2. $1 = h_0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_{[n/2]}$
3. $h_{i+1} - h_i \leq (h_i - h_{i-1})^{\langle i \rangle}$ $(1 \leq i \leq [n/2] - 1)$

g-定理 (Billera-Lee, Stanley, 1980 年頃)

整数ベクトル $(h_0,\dots,h_n)$ $(h_0=1)$ が n 次元単体的凸多面体 P の h-vector となる必要十分条件は次の 3 つが成立すること.

1. $h_i = h_{n-i}$ $(\forall i)$ (Dehn-Sommerville relations)
2. $1 = h_0 \le h_1 \le \cdots \le h_{[n/2]}$
3. $h_{i+1} - h_i \le (h_i - h_{i-1})^{\langle i\rangle}$ $(1 \le i \le [n/2]-1)$

証明 (必要条件, Stanley).
$P \Longrightarrow$ 扇 $\Longrightarrow$ 射影的トーリック多様体（軌道体）X.

鍵になる事実 $h_i(P) = b_{2i}(X)$.

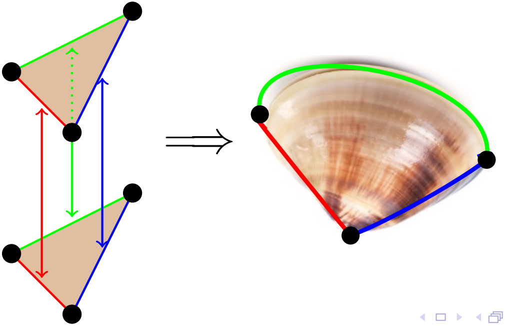
(1) $\Longleftarrow$ Poincaré 双対性 (トポロジー)
(2) $\Longleftarrow$ 強 Lefschetz 定理 (代数幾何)
(3) $\Longleftarrow$ Macaulay の定理 (可換代数)

単体的セル球面（トーリックトポロジーに現れる）
CW 複体 K の各セルが単体で，K の実現が $(n-1)$ 次元球面のとき，
$(n-1)$ 次元単体的セル球面 という．
$f_i = f_i(K)$: K の i 単体の数． f**-vector** $\rightsquigarrow$ h**-vector**

単体的セル球面（トーリックトポロジーに現れる）
CW 複体 K の各セルが単体で，K の実現が $(n-1)$ 次元球面のとき，
$(n-1)$ 次元単体的セル球面 という．
$f_i = f_i(K)$: K の i 単体の数． f**-vector** $\rightsquigarrow$ h**-vector**

Example (2 つの 2 単体を境界で貼り合せた単体的セル球面)

$(f_0, f_1, f_2) = (3, 3, 2) \rightsquigarrow (h_0, h_1, h_2, h_3) = (1, 0, 0, 1)$. S^6 のベッチ数と一致
$[(t-1)^3 + f_0(t-1)^2 + f_1(t-1) + f_2 = h_0t^3 + h_1t^2 + h_2t + h_3]$



定理 (Stanley 1991, M 2005)

整数ベクトル $(h_0, \ldots, h_n)$ $(h_0 = 1)$ が $(n-1)$ 次元単体的セル球面の h-vector となる必要十分条件は次の 3 つが成立すること.

1. $h_i = h_{n-i}$ $(\forall i)$ (Dehn-Sommerville relations)
2. $h_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n-1)$
3. もしある i に対して $h_i = 0$ ならば, $\sum_{i=0}^{n} h_i$ は偶数.

定理 (Stanley 1991, M 2005)

整数ベクトル $(h_0,\dots,h_n)$ $(h_0=1)$ が $(n-1)$ 次元単体的セル球面の h-vector となる必要十分条件は次の 3 つが成立すること.

1. $h_i = h_{n-i}$ $(\forall i)$ (Dehn-Sommerville relations)
2. $h_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n-1)$
3. もしある i に対して $h_i = 0$ ならば, $\sum_{i=0}^{n} h_i$ は偶数.

$(1,0,1,0,1)$ は **(3)** をみたさないが $(1,0,2,0,1)$ はみたす.

定理 (Stanley 1991, M 2005)

整数ベクトル $(h_0, \ldots, h_n)$ $(h_0 = 1)$ が $(n-1)$ 次元単体的セル球面の h-vector となる必要十分条件は次の 3 つが成立すること.

1. $h_i = h_{n-i}$ $(\forall i)$ (Dehn-Sommerville relations)
2. $h_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n-1)$
3. もしある i に対して $h_i = 0$ ならば, $\sum_{i=0}^{n} h_i$ は偶数.

$(1, 0, 1, 0, 1)$ は **(3)** をみたさないが $(1, 0, 2, 0, 1)$ はみたす.

<u>必要条件の幾何学的説明</u>.

定理 (Stanley 1991, M 2005)

整数ベクトル $(h_0,\dots,h_n)$ $(h_0=1)$ が $(n-1)$ 次元単体的セル球面の h-vector となる必要十分条件は次の 3 つが成立すること.

1. $h_i = h_{n-i}$ $(\forall i)$ (Dehn-Sommerville relations)
2. $h_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n-1)$
3. もしある i に対して $h_i = 0$ ならば, $\sum_{i=0}^n h_i$ は偶数.

$(1,0,1,0,1)$ は **(3)** をみたさないが $(1,0,2,0,1)$ はみたす.

必要条件の幾何学的説明. $(n-1)$ 次元単体的セル球面 K に対し,

(a) $h_i(K) = b_{2i}(M)$, $H^{odd}(M)=0$

(b) $w(M) = \prod_i (1+\mu_i)$ $\quad (\mu_i \in H^2(M;\mathbb{Z}/2))$

をみたす $2n$ 次元 (トーラス) 多様体 M が存在するとすると,

定理 (Stanley 1991, M 2005)

整数ベクトル $(h_0, \dots, h_n)$ $(h_0 = 1)$ が $(n-1)$ 次元単体的セル球面の h-vector となる必要十分条件は次の 3 つが成立すること.

1. $h_i = h_{n-i}$ $(\forall i)$ (Dehn-Sommerville relations)
2. $h_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n-1)$
3. もしある i に対して $h_i = 0$ ならば, $\sum_{i=0}^n h_i$ は偶数.

$(1,0,1,0,1)$ は **(3)** をみたさないが $(1,0,2,0,1)$ はみたす.

<u>必要条件の幾何学的説明</u>. $(n-1)$ 次元単体的セル球面 K に対し,

(a) $h_i(K) = b_{2i}(M)$, $H^{odd}(M) = 0$

(b) $w(M) = \prod_i (1+\mu_i)$ $\quad (\mu_i \in H^2(M; \mathbb{Z}/2))$

をみたす $2n$ 次元 **(**トーラス）多様体 M が存在するとすると, **(a)** $\Longrightarrow$ **(1), (2)**.

定理 (Stanley 1991, M 2005)

整数ベクトル $(h_0,\dots,h_n)$ $(h_0=1)$ が $(n-1)$ 次元単体的セル球面の h-vector となる必要十分条件は次の 3 つが成立すること．

1. $h_i = h_{n-i}$ $(\forall i)$ (Dehn-Sommerville relations)
2. $h_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n-1)$
3. もしある i に対して $h_i = 0$ ならば，$\sum_{i=0}^n h_i$ は偶数.

$(1,0,1,0,1)$ は **(3)** をみたさないが $(1,0,2,0,1)$ はみたす.

<u>必要条件の幾何学的説明</u>．$(n-1)$ 次元単体的セル球面 K に対し，

(a) $h_i(K) = b_{2i}(M)$,　$H^{odd}(M) = 0$

(b) $w(M) = \prod_i (1+\mu_i)$　$(\mu_i \in H^2(M;\mathbb{Z}/2))$

をみたす $2n$ 次元 (トーラス）多様体 M が存在するとすると，**(a)** $\Longrightarrow$ **(1), (2)**.
(3) は次より従う.

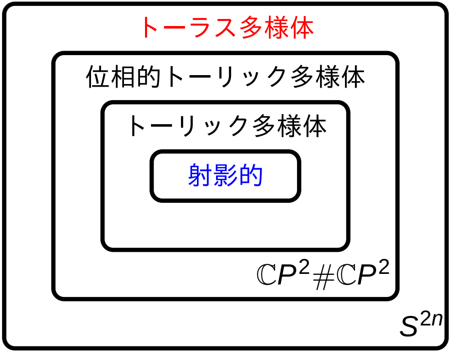
$$\sum_{i=1}^n h_i(K) = \sum_{i=1}^n b_{2i}(M) = \chi(M) \equiv w_{2n}(M) \pmod 2.$$

$\{$ 単体的凸多面体 **(の境界)**$\}$ $\subset$ $\{$ 単体的球面 $\}$ $\subset$ $\{$ 単体的セル球面 $\}$

• 単体的球面 **(**$=$ 球面の三角形分割**)** の単体の数の特徴づけは，未解決.
特に,「単体的凸多面体と同じ必要条件が成立するか」は，懸案の問題.

$\{$ 単体的凸多面体 **(の境界)** $\} \subset \{$ 単体的球面 $\} \subset \{$ 単体的セル球面 $\}$

• 単体的球面 **(**$=$ 球面の三角形分割**)** の単体の数の特徴づけは，未解決**.**
特に**,**「単体的凸多面体と同じ必要条件が成立するか」は，懸案の問題**.**



トーリックトポロジーにおけるその他の話題

座標部分空間配置のトポロジー

K: $\{1, 2, \dots, m\}$ の部分集合からなる（抽象）単体複体,

$$U(K) := \mathbb{C}^m \backslash \bigcup_{I \notin K} L_I$$

ここで，$L_I = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid z_i = 0 \quad \forall i \in I\}$, 座標部分空間.

座標部分空間配置のトポロジー

K: $\{1, 2, \dots, m\}$ の部分集合からなる（抽象）単体複体,

$$U(K) := \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{I \notin K} L_I$$

ここで，$L_I = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid z_i = 0 \quad \forall i \in I\}$, 座標部分空間.
（注意．$U(K)$ は（位相的）トーリック多様体の構成に現れる.）

座標部分空間配置のトポロジー

K: $\{1, 2, \dots, m\}$ の部分集合からなる（抽象）単体複体,

$$U(K) := \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{I \notin K} L_I$$

ここで，$L_I = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid z_i = 0 \quad \forall i \in I\}$, 座標部分空間.
（注意．$U(K)$ は（位相的）トーリック多様体の構成に現れる.）
K が簡単な場合でも $U(K)$ のトポロジーは一般に複雑.

座標部分空間配置のトポロジー

K: $\{1, 2, \dots, m\}$ の部分集合からなる（抽象）単体複体,

$$U(K) := \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{I \notin K} L_I$$

ここで，$L_I = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid z_i = 0 \quad \forall i \in I\}$, 座標部分空間.
（注意. $U(K)$ は（位相的）トーリック多様体の構成に現れる.）
K が簡単な場合でも $U(K)$ のトポロジーは一般に複雑.

1. $K = \{\{1\}, \{2\}\}$ の場合 $(m = 2)$
$$U(K) = \mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 = z_2 = 0\} \simeq S^3 \text{ は容易.}$$
2. $K = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ の場合 $(m = 3)$
$$U(K) = \mathbb{C}^3 \setminus \Big(\{z_1 = z_2 = 0\} \cup \{z_1 = z_3 = 0\} \cup \{z_2 = z_3 = 0\}\Big)$$
$$\simeq S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^4 \vee S^4 \quad \text{は容易ではない}$$ **(Grbić-Theriault).**

座標部分空間配置のトポロジー

K: $\{1, 2, \dots, m\}$ の部分集合からなる（抽象）単体複体,

$$U(K) := \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{I \notin K} L_I$$

ここで，$L_I = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid z_i = 0 \quad \forall i \in I\}$, 座標部分空間.

（注意．$U(K)$ は（位相的）トーリック多様体の構成に現れる.）

K が簡単な場合でも $U(K)$ のトポロジーは一般に複雑.

1. $K = \{\{1\}, \{2\}\}$ の場合 $(m = 2)$

$$U(K) = \mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 = z_2 = 0\} \simeq S^3 \text{ は容易.}$$

2. $K = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ の場合 $(m = 3)$

$$U(K) = \mathbb{C}^3 \setminus \Big(\{z_1 = z_2 = 0\} \cup \{z_1 = z_3 = 0\} \cup \{z_2 = z_3 = 0\}\Big)$$
$$\simeq S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^4 \vee S^4 \quad \text{は容易ではない}$$ **(Grbić-Theriault).**

(Buchstaber-Panov，Bahri-Bendersky-Cohen-Gitler, 入江-岸本 **, ...)**

Moment-angle 多様体

典型例

$$\mathbb{C}^{n+1} \supset S^{2n+1} \to S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n/T^n = n \text{ 単体}$$

S^{2n+1} は n 単体に付随する **momen-angle** 多様体.

Moment-angle 多様体

典型例

$$\mathbb{C}^{n+1} \supset S^{2n+1} \to S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n/T^n = n \text{ 単体}$$

S^{2n+1} は n 単体に付随する **momen-angle** 多様体.

一般に，n 次元単純凸多面体 $Q \rightsquigarrow \mathcal{Z}_Q$（**Moment-angle** 多様体）.

Moment-angle 多様体

典型例

$$\mathbb{C}^{n+1} \supset S^{2n+1} \to S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n/T^n = n \text{ 単体}$$

S^{2n+1} は n 単体に付随する **momen-angle** 多様体.

一般に，n 次元単純凸多面体 $Q \rightsquigarrow \mathcal{Z}_Q$（**Moment-angle** 多様体）.

$\mathcal{Z}_Q$ は次の性質をもつ **(**m は Q の余次元 1 の面数**).**

Moment-angle 多様体

典型例

$$\mathbb{C}^{n+1} \supset S^{2n+1} \to S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n/T^n = n \text{ 単体}$$

S^{2n+1} は n 単体に付随する **momen-angle** 多様体.

一般に，n 次元単純凸多面体 $Q \rightsquigarrow \mathcal{Z}_Q$（**Moment-angle** 多様体）.

$\mathcal{Z}_Q$ は次の性質をもつ (m は Q の余次元 1 の面数).

1. $m+n$ 次元コンパクト可微分多様体

Moment-angle 多様体

典型例

$$\mathbb{C}^{n+1} \supset S^{2n+1} \to S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n/T^n = n \text{ 単体}$$

S^{2n+1} は n 単体に付随する **momen-angle** 多様体.

一般に，n 次元単純凸多面体 $Q \rightsquigarrow \mathcal{Z}_Q$（**Moment-angle** 多様体）.

$\mathcal{Z}_Q$ は次の性質をもつ **(**m は Q の余次元 1 の面数**)**.

1. $m+n$ 次元コンパクト可微分多様体
2. $\mathbb{C}^m$ 上の実 2 次式で定義される.

Moment-angle 多様体

典型例

$$\mathbb{C}^{n+1} \supset S^{2n+1} \to S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n/T^n = n \text{ 単体}$$

S^{2n+1} は n 単体に付随する **momen-angle** 多様体.

一般に，n 次元単純凸多面体 $Q \rightsquigarrow \mathcal{Z}_Q$（**Moment-angle** 多様体）.

$\mathcal{Z}_Q$ は次の性質をもつ **(**m は Q の余次元 1 の面数**)**.

1. $m+n$ 次元コンパクト可微分多様体
2. $\mathbb{C}^m$ 上の実 2 次式で定義される.
3. $\mathcal{Z}_Q$ または $\mathcal{Z}_Q \times S^1$ は，ケーラーでない複素構造をもつ.

(López de Medrano, Verjovsky, Bosio, Meersseman, ...)

実トーリック多様体

トーリック多様体の実点集合を実トーリック多様体という.
典型例は, $\mathbb{C}P^n$ 内の $\mathbb{R}P^n$.

実トーリック多様体

トーリック多様体の実点集合を実トーリック多様体という.
典型例は，$\mathbb{C}P^n$ 内の $\mathbb{R}P^n$.

- 実トーリック多様体は単連結ではない.

実トーリック多様体

トーリック多様体の実点集合を実トーリック多様体という．
典型例は，$\mathbb{C}P^n$ 内の $\mathbb{R}P^n$．

- 実トーリック多様体は単連結ではない．

Example (実 Bott 多様体 M_n)

$\mathbb{R}P^1$ 束の系列（実 Bott タワー）

$$M_n \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_{n-1} \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} \cdots \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_1 \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_0 = \{\text{ 1 点 }\}$$

$M_k = P(L_k \oplus \mathbb{R})$ 射影化，　$L_k \to M_{k-1}$ は（実）直線束．

実トーリック多様体

トーリック多様体の実点集合を実トーリック多様体という．
典型例は，$\mathbb{C}P^n$ 内の $\mathbb{R}P^n$．

- 実トーリック多様体は単連結ではない．

Example (実 Bott 多様体 M_n)

$\mathbb{R}P^1$ 束の系列（実 Bott タワー）

$$M_n \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_{n-1} \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} \cdots \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_1 \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_0 = \{ \text{1 点} \}$$

$M_k = P(L_k \oplus \mathbb{R})$ 射影化， $L_k \to M_{k-1}$ は（実）直線束．

- $M_1 = \mathbb{R}P^1 = S^1$， M_2 はトーラスか Klein の壺．

実トーリック多様体

トーリック多様体の実点集合を実トーリック多様体という．
典型例は，$\mathbb{C}P^n$ 内の $\mathbb{R}P^n$．

- 実トーリック多様体は単連結ではない．

Example (実 Bott 多様体 M_n)

$\mathbb{R}P^1$ 束の系列（実 Bott タワー）

$$M_n \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_{n-1} \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} \cdots \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_1 \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_0 = \{\ 1\text{点}\ \}$$

$M_k = P(L_k \oplus \mathbb{R})$ 射影化，　$L_k \to M_{k-1}$ は（実）直線束．

- $M_1 = \mathbb{R}P^1 = S^1$，$M_2$ はトーラスか Klein の壺．
- M_n は平坦リーマン多様体．

実トーリック多様体

トーリック多様体の実点集合を実トーリック多様体という.
典型例は，$\mathbb{C}P^n$ 内の $\mathbb{R}P^n$.

- 実トーリック多様体は単連結ではない.

Example (実 Bott 多様体 M_n)

$\mathbb{R}P^1$ 束の系列（実 Bott タワー）

$$M_n \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_{n-1} \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} \cdots \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_1 \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_0 = \{\ 1\text{点}\ \}$$

$M_k = P(L_k \oplus \mathbb{R})$ 射影化，$L_k \to M_{k-1}$ は（実）直線束.

- $M_1 = \mathbb{R}P^1 = S^1$，$M_2$ はトーラスか Klein の壺.
- M_n は平坦リーマン多様体.
- M_n 達は $\mathbb{Z}/2$ 係数コホモロジー環で区別される (Kamishima-M).

実トーリック多様体

トーリック多様体の実点集合を実トーリック多様体という.
典型例は，$\mathbb{C}P^n$ 内の $\mathbb{R}P^n$.

- 実トーリック多様体は単連結ではない.

Example (実 Bott 多様体 M_n)

$\mathbb{R}P^1$ 束の系列（実 Bott タワー）

$$M_n \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_{n-1} \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} \cdots \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_1 \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_0 = \{\ 1\text{点}\ \}$$

$M_k = P(L_k \oplus \mathbb{R})$ 射影化， $L_k \to M_{k-1}$ は（実）直線束.

- $M_1 = \mathbb{R}P^1 = S^1$， M_2 はトーラスか Klein の壺.
- M_n は平坦リーマン多様体.
- M_n 達は $\mathbb{Z}/2$ 係数コホモロジー環で区別される (Kamishima-M).

実トーリック多様体は **aspherical** 多様体の具体例を沢山提供.

結び

「よい」空間 X がトーラス群 T 作用をもつとき，

$$\text{制限写像}: H_T^*(X) \to H_T^*(X^T) \quad \text{は単射}$$

が強力な事実．像は，**Goresky-Kottwitz-MacPherson** の結果（**GKM** 理論）より計算可能．**(**トーリック多様体に限らず，グラスマン多様体，旗多様体，**Schubert variety**，**Hessenberg variety** などにも適用できる**)**.

結び

「よい」空間 X がトーラス群 T 作用をもつとき，

$$制限写像: H_T^*(X) \to H_T^*(X^T) \quad は単射$$

が強力な事実．像は，**Goresky-Kottwitz-MacPherson** の結果（**GKM** 理論）より計算可能．**(**トーリック多様体に限らず，グラスマン多様体，旗多様体，**Schubert variety**，**Hessenberg variety** などにも適用できる**)**.

トーリックトポロジーとは？

結び

「よい」空間 X がトーラス群 T 作用をもつとき,

$$\text{制限写像}: H_T^*(X) \to H_T^*(X^T) \quad \text{は単射}$$

が強力な事実．像は，**Goresky-Kottwitz-MacPherson** の結果（**GKM** 理論）より計算可能．**(**トーリック多様体に限らず，グラスマン多様体，旗多様体，**Schubert variety**，**Hessenberg variety** などにも適用できる**)**.

トーリックトポロジーとは？

(1) トーラス群が作用する（多様体に限らない）よい空間を通して，幾何，代数，組合せ論などの異なる数学分野を繋ぐ架け橋

結び

「よい」空間 X がトーラス群 T 作用をもつとき,

$$\text{制限写像}: H_T^*(X) \to H_T^*(X^T) \quad \text{は単射}$$

が強力な事実．像は，**Goresky-Kottwitz-MacPherson** の結果（**GKM** 理論）より計算可能．**(**トーリック多様体に限らず，グラスマン多様体，旗多様体，**Schubert variety**，**Hessenberg variety** などにも適用できる**)**.

トーリックトポロジーとは？

(1) トーラス群が作用する（多様体に限らない）よい空間を通して，幾何，代数，組合せ論などの異なる数学分野を繋ぐ架け橋

(2) 面白い具体例を豊富に提供する場