2016年3月17日 筑波大学

日本数学会 2016年 年会 総合講演

ガンマ類とグロモフ・ウィッテン理論

入谷　寛

京都大学大学院理学研究科

目次

§1. Eulerのガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^x \frac{dt}{t}$$

この積分は$\mathrm{Re}(x) > 0$で収束.

- 自然数nに対して$\Gamma(1+n) = n!$
- 関数等式$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ により複素平面上の有理型関数に解析接続される.
- $x = 0, -1, -2, -3, \ldots$ で1位の極，それ以外では正則.

無限積展開 (Weierstrass)

$$\Gamma(1+x) = e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x/n}}{1+\frac{x}{n}}$$

$\gamma := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)$ はオイラー定数.

テイラー展開

$$\frac{e^{x/n}}{1+\frac{x}{n}} = \exp\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{x^k}{n^k}\right) \text{ を用いて}$$

$$\Gamma(1+x) = \exp\left(-\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) x^k\right)$$

ここで $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ はRiemannゼータ関数の値.

相補公式

$$\Gamma(1+x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

無限積展開から従う.

$$\begin{aligned}
\Gamma(1-x)\Gamma(1+x) &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x/n}}{1-\frac{x}{n}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x/n}}{1+\frac{x}{n}} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{x^2}{n^2}} \\
&= \frac{\pi x}{\sin \pi x}
\end{aligned}$$

ガンマ類：

- (概)複素多様体 X の特性類.
- ガンマ関数 $\Gamma(1+x)$ の Taylor 展開で定義される超越的なコホモロジー類.
- ループ空間を使った幾何学的解釈を持つ.

定義：接束の全 Chern 類を(仮想的に)分解する：

$$c(TX) = (1+\delta_1)(1+\delta_2)\cdots(1+\delta_n) \in H^*(X)$$

このとき

$$\widehat{\Gamma}_X := \Gamma(1+\delta_1)\Gamma(1+\delta_2)\cdots\Gamma(1+\delta_n)$$

は Taylor 展開により $\delta_1, \ldots, \delta_n$ の対称べき級数となり，X のコホモロジー類を定める．これをガンマ類と呼ぶ.

$\Gamma(1+x)$ の Taylor 展開を使うと,

$$\widehat{\Gamma}_X = \exp\left(-\gamma c_1(X) + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \zeta(k)(k-1)!\,\mathrm{ch}_k(TX)\right)$$

と展開できる. ここで $\mathrm{ch}_k(TX) \in H^{2k}(X,\mathbb{Q})$ は TX の k 次の Chern 指標である.

- $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, ...
- $\zeta(3)$ は無理数 (Apéry)
- $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \ldots$ の生成する $\mathbb{Q}$ ベクトル空間は無限次元 (Rivoal)

例：

複素射影直線 $\mathbb{CP}^1$

$$\widehat{\Gamma}_{\mathbb{CP}^1} = 1 - 2\gamma[\mathrm{pt}]$$

3 次元 Calabi-Yau 多様体 X

$$\widehat{\Gamma}_X = 1 - \frac{\pi^2}{6} c_2(X) - \zeta(3) c_3(X)$$

Calabi-Yau orbifold $\mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ ($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は対角作用)

$$\widehat{\Gamma}_{\mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})} = \mathbf{1} \oplus \Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right)^3 \mathbf{1}_{\frac{1}{3}} \oplus \Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)^3 \mathbf{1}_{\frac{2}{3}}$$

($\mathbf{1}_{\frac{1}{3}}$, $\mathbf{1}_{\frac{2}{3}}$ は orbifold コホモロジーにおける twisted sector.)

ループ空間を使った解釈

$LX = \mathrm{Map}(S^1, X)$: 自由ループ空間
$X \subset LX$: 定数ループのなす空間(X と同一視される)
$\mathcal{N} \to X$: X の LX における法束

定数ループに近いループの Fourier 展開：

$$\gamma(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{2\pi \mathtt{i} n t}, \quad \gamma_0 \in X, \quad \gamma_n \in T_{\gamma_0} X \ (n \neq 0)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{N} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} TX \otimes e^{2\pi \mathtt{i} n t} = \underbrace{\mathcal{N}_+}_{\text{正部分}} \oplus \underbrace{\mathcal{N}_-}_{\text{負部分}}$$

S^1 同変オイラー類をとる：

$$\frac{1}{e_{S^1}(\mathcal{N}_+)} = \prod_{n>0} \frac{1}{e_{S^1}(TX \otimes e^{2\pi \mathtt{i} n t})} \doteqdot \widehat{\Gamma}_X \text{ の無限積展開}$$

(注：$\prod_{n>0} \frac{1}{x+n} \sim \Gamma(1+x)$)

より正確には同変コホモロジーの生成元 z を使うと,

$$\frac{1}{e_{S^1}(\mathcal{N}_+)} \underset{\substack{\text{無限積の}\\ \text{正則化}}}{\sim} z^{-\deg/2} z^{c_1(X)} \widehat{\Gamma}_X .$$

一方で法束全体のオイラー類を正則化すると (Witten, Atiyah)

$$\frac{1}{e_{S^1}(\mathcal{N})} \underset{\text{正則化}}{\sim} \left(\frac{2\pi \mathtt{i}}{z}\right)^{\deg/2} \widehat{A}_X$$

$\widehat{A}_X$ は $\frac{x/2}{\sinh(x/2)}$ の定める特性類で Dirac 作用素の指数を与える.

$$\frac{\pi x}{\sin \pi x} = \Gamma(1-x)\Gamma(1+x) \overset{\text{対応}}{\leftrightsquigarrow} \frac{1}{e_{S^1}(\mathcal{N})} = \frac{1}{e_{S^1}(\mathcal{N}_-)} \cdot \frac{1}{e_{S^1}(\mathcal{N}_+)}$$

↑ 相補公式

↑ $\widehat{\Gamma}_X$ は $\widehat{A}_X$ の「平方根」

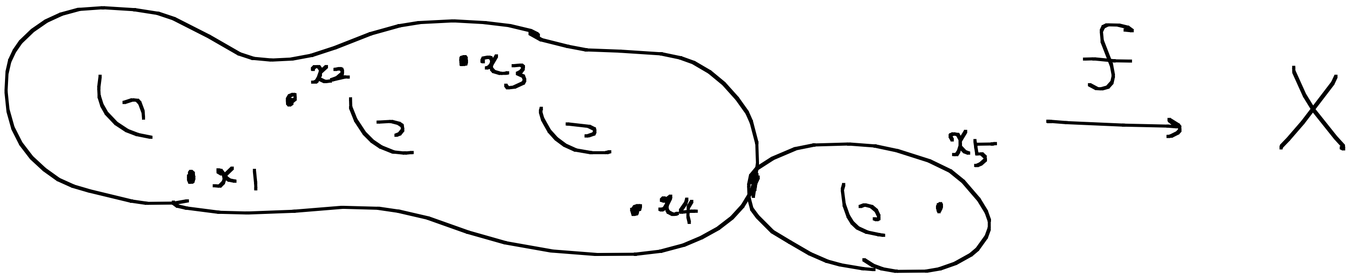
$\Longrightarrow$ $\widehat{\Gamma}_X$ は指数定理の「半分」を与える？(cf. ガンマ予想)

§2. Gromov-Witten 理論

複素(あるいはシンプレクティック)多様体 X の中の(擬)正則曲線を数える理論.

$$f\colon (\Sigma, x_1, \ldots, x_n) \to X$$

- Σ は(一般にはノードを持つかも知れない)リーマン面
- $x_1, \ldots, x_n \in \Sigma$ は名前付き点
- f は(擬)正則写像

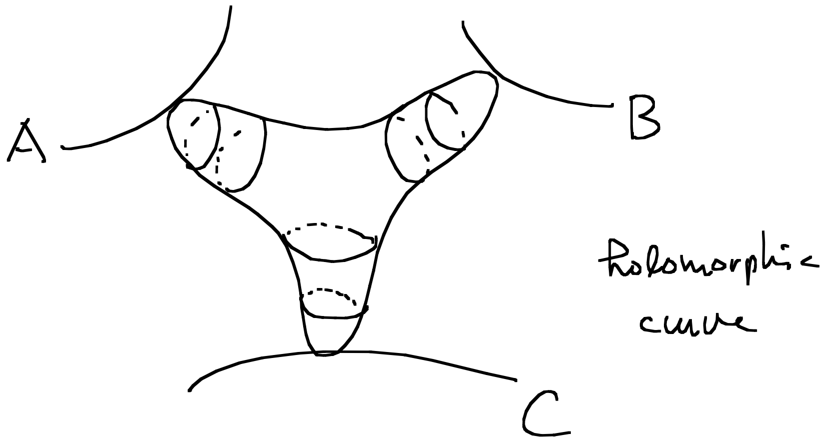


量子コホモロジー：種数0の曲線を数える.

$\alpha, \beta, \gamma \in H^*(X)$: コホモロジー類
$A, B, C \subset X$: Poincaré 双対なサイクル
$(\alpha, \beta) = \int_X \alpha \cup \beta = \#(A \cap B)$: 交叉積

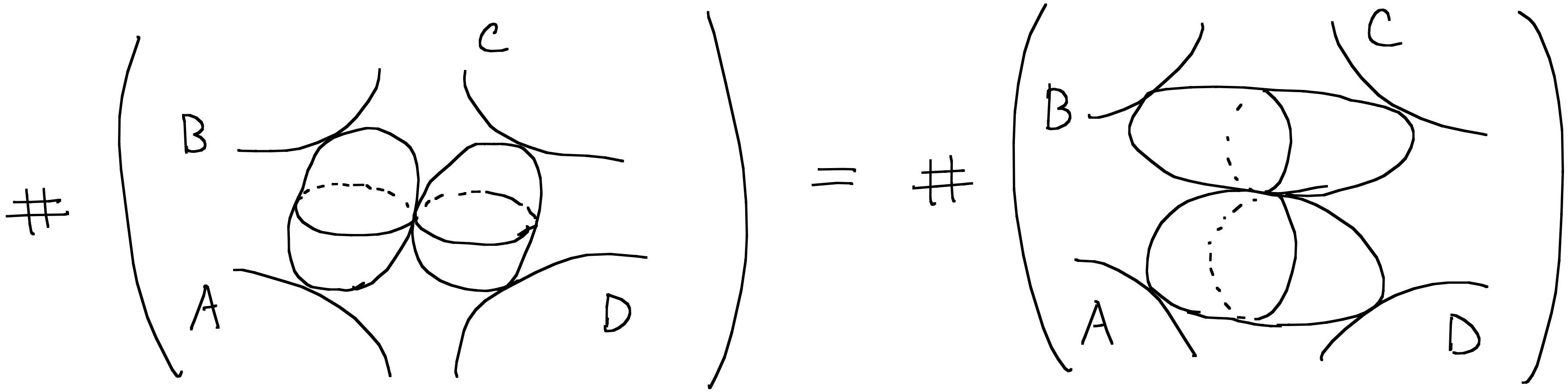
$(\alpha \star \beta, \gamma)$

$$:= \sum_{d \in H_2(X,\mathbb{Z})} \#_{\mathrm{vir}} \left\{ f : \mathbb{CP}^1 \to X : \begin{array}{l} A,\ B,\ C\ \text{と交わる} \\ \text{次数}\, d\, \text{の正則写像} \end{array} \right\} Q^d$$



量子コホモロジー環$(H^*(X)[\![Q]\!], \star)$の性質：

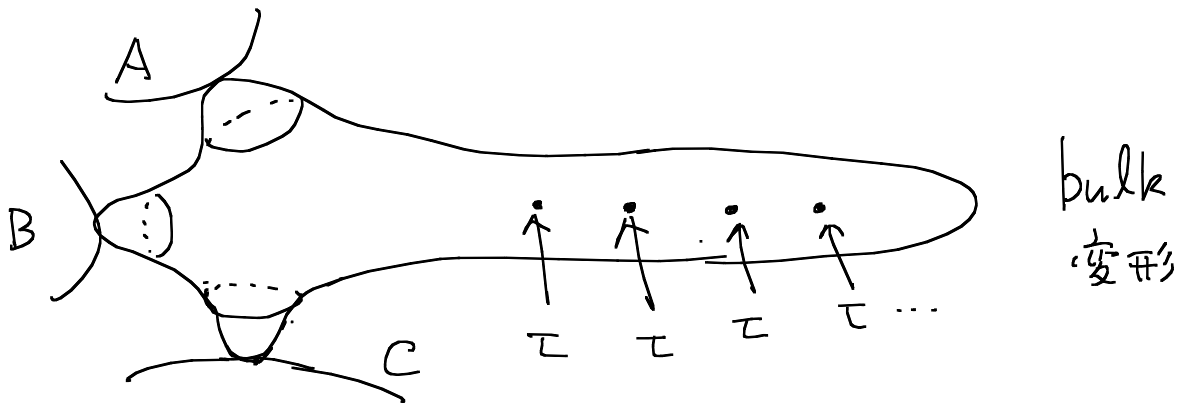
- $\star$は超可換
- $\lim_{Q\to 0} \star = \cup$. カップ積の変形.
- $\star$は結合的（WDVV方程式）



$((A * B) * C, D) \qquad (A * (B * C), D)$

大量子コホモロジー環 $(H^*(X)[\![Q]\!], \star_\tau)$

- $\star$ はコホモロジーのパラメータ $\tau \in H^*(X)$ によってさらに変形でき，大量子積 $\star_\tau$ を与える．（$\star = \star_0$）
- $\star_\tau$ も超可換かつ結合的
- Q, τ に関する収束性は不明だが，以下仮定する．
- コホモロジー環 $H^*(X)$ 上の「Frobenius 多様体」の構造



量子微分方程式 (量子接続)

量子積$\star_\tau$は自明束

$H^*(X) \times (H^*(X) \times \mathbb{P}^1_z) \to H^*(X) \times \mathbb{P}^1_z$ 上に有理型平坦

接続∇を定める．(Q方向にもあるが省略)

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau^i}} = \frac{\partial}{\partial \tau^i} + \frac{1}{z}(\phi_i \star_\tau)$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{z^2}(E \star_\tau) + \frac{1}{z}\mu$$

ここで$\{\phi_i\}$は$H^*(X)$の斉次基底，$\tau = \sum_i \tau^i \phi_i \in H^*(X)$,

$$E := c_1(X) + \sum (1 - \tfrac{1}{2}\deg \phi_i)\tau^i \phi_i$$

はEulerベクトル場，$\mu(\phi_i) := (\frac{1}{2}\deg \phi_i - \frac{\dim X}{2})\phi_i$.

微分方程式の簡単な考察から，∇ の任意の平坦切断 $s(\tau, z)$ はあるコホモロジー類 ϕ に対して

$$s(\tau, z) \sim e^{-\tau/z} z^{-\mu} z^{c_1(X)} \phi \quad \text{as } \mathrm{Re}(\textstyle\int_d \tau) \to -\infty$$

なる漸近挙動を持つことが分かる．すなわち，

$$\text{平坦切断 } s(\tau, z) \overset{1\text{対}1}{\Longleftrightarrow} \text{コホモロジー類 } \phi \in H^*(X)$$

定義(I, Katzarkov-Kontsevich-Pantev): ガンマ構造とは位相的ベクトル束の K 群の元 $\mathcal{E} \in K^0(X)$ に対してコホモロジー類

$$(2\pi)^{-n/2}\widehat{\Gamma}_X(2\pi\mathtt{i})^{\deg/2}\,\mathrm{ch}(\mathcal{E})$$

に対応する ∇-平坦切断 $s_{\mathcal{E}}(\tau, z)$ を対応させる写像である．

指数定理の「平方根」

ガンマ類が $\widehat{A}$ 類（あるいは Todd 類）の「平方根」であることと，Hirzebruch-Riemann-Roch の定理から次が分かる.

$$\left(s_{\mathcal{E}}(\tau, e^{-\pi \mathtt{i}} z), s_{\mathcal{F}}(\tau, z)\right) = \chi(\mathcal{E}, \mathcal{F})$$

ただし右辺はオイラー標数

$$\chi(\mathcal{E}, \mathcal{F}) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim \mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathbb{Z}$$

ガンマ構造は平坦切断の空間に整格子 (integral lattice) を定めている.

今までの定義は全く形式的なもので，これからだけではガンマ構造の必然性は分からない．($\widehat{A}$類の平方根のとり方には無数の不定性がある)

しかし，様々な例で観察されている不思議な現象：

- ガンマ構造は大域的なモノドロミーに対して不変
- Stokes構造との整合性(Hertling-Sevenheck, KKP, ガンマ予想(Galkin-Golyshev-I))
- Gromov-Witten理論の関手性を説明する（後述）

§3. Hodge理論的ミラー対称性

シンプレクティック幾何（量子接続）の定める(一般化された意味での)Hodge構造が，対応する複素幾何の定めるHodge構造と同型である，とする主張.

Calabi-Yau多様体$(c_1(X)=0)$の場合.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Calabi-Yau 多様体 } X & \overset{\text{ミラー}}{\longleftrightarrow} & \text{Calabi-Yau 多様体 } \check{X} \\
H^{p,p}(X) & \cong & H^{p,n-p}(\check{X}) \\
\bigoplus_p H^{p,p}(X)\text{上の} & \cong & \bigoplus_p H^{p,n-p}(\check{X})\text{上の} \\
\text{量子接続} & & \text{Gauss-Manin 接続} \\
\text{ガンマ構造} & \overset{?}{\cong} & \text{整格子 } H^n(\check{X},\mathbb{Z})
\end{array}
$$

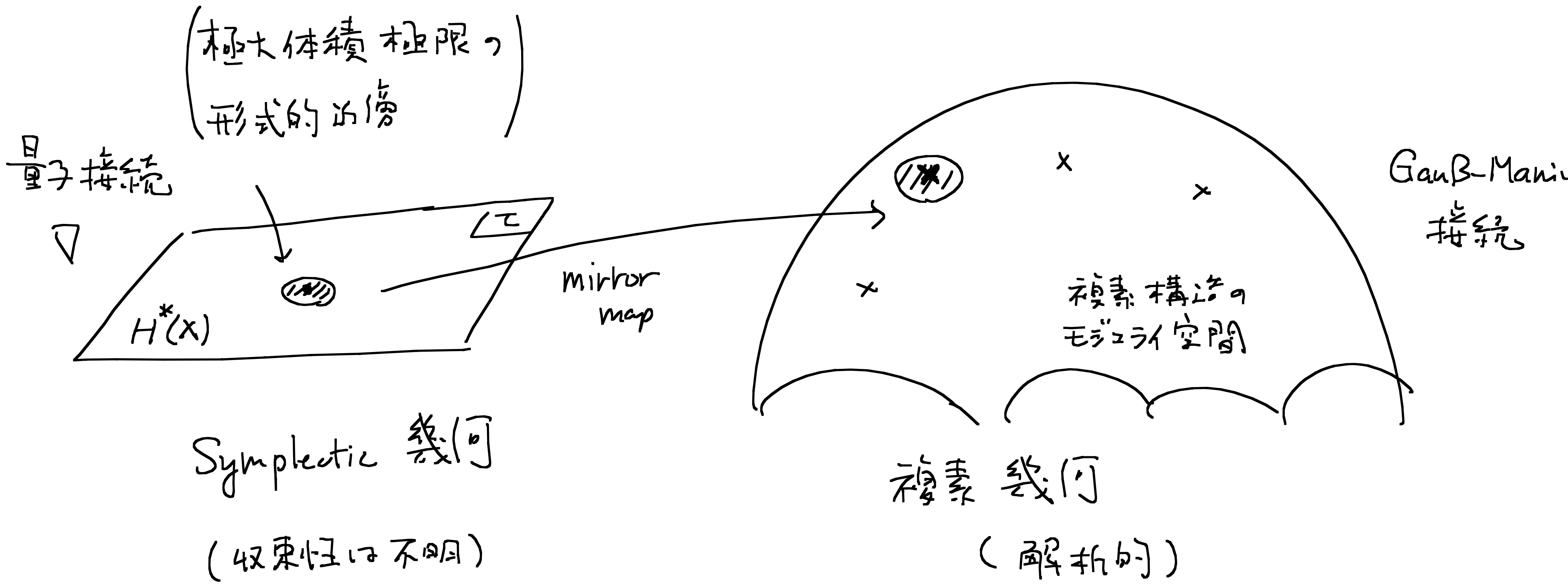
§3. Hodge理論的ミラー対称性

シンプレクティック幾何（量子接続）の定める(一般化された意味での)Hodge構造が，対応する複素幾何の定めるHodge構造と同型である，とする主張.

Fano 多様体$(c_1(X) > 0)$の場合.

Fano多様体 X	$\xleftrightarrow{\text{ミラー}}$	Landau-Ginzburg 模型
		$f\colon \check{X} \to \mathbb{C}$
$H^*(X)$	$\cong$	$\mathcal{O}_{\check{X}}/(\partial f)$: ヤコビ環
量子接続	$\cong$	振動積分$\int e^{f/z}\omega$の生成する D加群
ガンマ構造	$\overset{?}{\cong}$	整格子 $H^n(\check{X}, \{\mathrm{Re}(f) \ll 0\}, \mathbb{Z})$

モジュライ空間の比較：



(極大体積極限の形式的近傍)
量子接続
∇
τ
$H^*(X)$
mirror map
Gauß-Manin 接続
複素構造のモジュライ空間
Symplectic 幾何
(収束性は不明)
複素幾何
(解析的)

定理(– '09, '11) トーリック軌道体およびその中の完全交差 X に対するミラー対称性の下で，ガンマ構造はミラーの整格子と (ほぼ) 一致している.

背景：

- Horja 氏の計算：ミラーの Calabi-Yau 多様体 $\check{X}$ の Gauss-Manin 接続の「コーニフォールド点」でのモノドロミーを計算し，モノドロミーが「ガンマ級数解」を使うと $\mathbb{Z}$ 上定義されることを観察（さらに導来圏との関係も）.
- 細野忍氏の予想：ミラー Calabi-Yau 多様体 $\check{X}$ の周期が「ガンマ級数解」によって与えられる.
- Borisov-Horja の計算：「ガンマ級数解」の解析接続が導来圏 $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ の Fourier-Mukai 変換と関係する.

§4. Gromov-Witten 理論の間の関係

複素多様体 X_1, X_2 の間の双有理写像 $\varphi\colon X_1 \dashrightarrow X_2$ がクレパント変換(あるいは K 同値) であるとは，次の図式を可換にする滑らかな多様体 Z からの射影的な双有理射 $p_i\colon Z \to X_i$, $i = 1, 2$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\exists p_1"'] \arrow[dr, "\exists p_2"] & \\ X_1 \arrow[rr, dashed, "\varphi"'] & & X_2 \end{tikzcd}$$

が存在して $p_1^* K_{X_1} = p_2^* K_{X_2}$ が成り立つこと．ただし $K_X = \bigwedge^{\mathrm{top}} T^* X$ は標準束.

Atiyah flop

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1,-1) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 2} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 2} \arrow[dl] \\
 & \{xy = zw\} \subset \mathbb{C}^4 &
\end{tikzcd}
$$

p_i は片方の $\mathbb{P}^1$ をつぶす写像

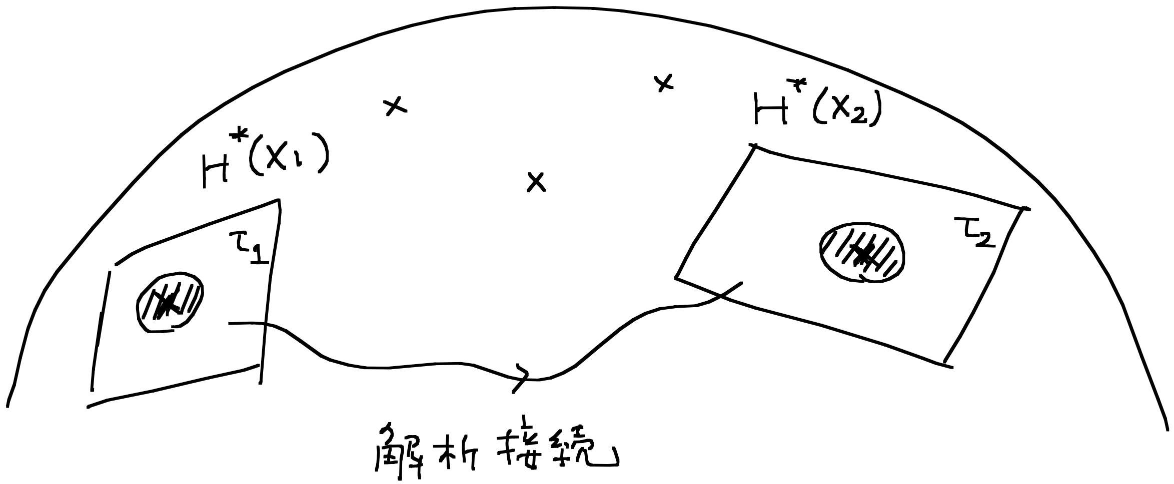
クレパント解消

$$
\begin{tikzcd}
& {[\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})]} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "\pi"'] & & {[\mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})]} \arrow[dl] \\
& \mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) &
\end{tikzcd}
$$

π は $\mathbb{P}^2$ をつぶす写像で，クレパント解消の条件
$\pi^* K_{\mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})} = K_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)}$ を満たす.

Y. Ruanの予想. X_1とX_2がクレパント変換でつながる複素多様体(あるいは軌道体) のとき，X_1の量子コホモロジーとX_2の量子コホモロジーはパラメータに関する解析接続の下で同型である.

$$\left(H^*(X_1),\ \star_{\tau_1} \right) \cong \left(H^*(X_2),\ \star_{\tau_2} \right)$$



次数付きベクトル空間としての同型は知られている(安田健彦).

量子接続を使った「functorialな」予想

(1) 上の状況で，X_1 の量子接続と X_2 の量子接続は解析接続の下で同型になる.

(2) さらに解析接続によって X_1 のガンマ構造は X_2 のガンマ構造と一致する．またガンマ構造の間の同一視は K 群の間の「ある自然な」Fourier-Mukai変換 $K^0(X_1) \cong K^0(X_2)$ によって与えられる.

注：K 群の間の同一視は解析接続の道に依存する，と考えられる.

トーリック軌道体：

複素ベクトル空間$\mathbb{C}^m$のトーラス$K \cong (\mathbb{C}^\times)^r$によるGIT商として得られる空間で，高々（有限群の）商特異点のみを持つもの.

$$X_\theta = [\mathbb{C}^m /\!/_\theta K] = [(\mathbb{C}^m \setminus \{\text{座標部分空間の和}\})/K]$$

ここで$\theta \in \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C}^\times)$は安定性条件.

例：重み付き射影空間（$w_i \in \mathbb{Z}_{>0}$）

$$\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_m) = (\mathbb{C}^m \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$$

ここで$\mathbb{C}^\times$は重み$(w_1, \ldots, w_m)$により$\mathbb{C}^m$に作用する.

安定性条件θがある余次元１の「壁」を超えるとき，X_θは不連続に変化し，双有理変換$\varphi\colon X_{\theta_1} \dashrightarrow X_{\theta_2}$でつながる.

例 : $\mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ のクレパント解消

$K = \mathbb{C}^\times \curvearrowright \mathbb{C}^4$: 重み $(1,1,1,-3)$ で作用させる

$\theta \in \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C}^\times) = \mathbb{Z}$: 安定性条件

1. $\theta > 0$ のとき :

$$\left[((\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{C})/\mathbb{C}^\times\right] = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)$$

2. $\theta < 0$ のとき :

$$\left[(\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^\times)/\mathbb{C}^\times\right] = \left[\mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\right]$$

- $\theta = 0$ のときはcoarse moduli space $\mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ (affine 代数商) に対応する.
- Atiyah flop のときも同様な記述ができる.

定理(Coates-I-Jiang '14) GIT 安定性条件の変動から誘導されるトーリック軌道体の完全交差の間のクレパント変換 $\varphi\colon X_1 \dashrightarrow X_2$ に対して上の予想は成立する.

- 予想を成立させるFourier-Mukai 変換は導来同値 $D^b_{\mathrm{coh}}(X_1) \cong D^b_{\mathrm{coh}}(X_2)$(Kawamata, Halpern-Leistner, Ballard-Favero-Katzarkov) から来ている.
- Coates, Corti, Tseng 氏らとの研究で得られた，トーリック軌道体（とその中の完全交差）に対するミラー定理を本質的に使う.
- この結果はBorisov-Horja による解析接続の結果の一般化を与えている.

高種数におけるクレパント変換予想

高種数の Gromov-Witten 理論のクレパント変換の下での関係はより複雑.

Fourier-Mukai 変換 $U: K^0(X_1) \to K^0(X_2)$ を (Givental の枠組みにより) 量子化した変換 $\widehat{U}$ によって生成母関数が移りあう，と予想される.

$$\mathcal{Z}_{X_2} \propto \widehat{U} \mathcal{Z}_{X_1}$$

定理(Coates-I '14) GIT 安定性条件の変動から誘導される，コンパクト弱 Fano トーリック軌道体の間のクレパント変換 $\varphi: X_1 \dashrightarrow X_2$ に対して高種数でのクレパント変換予想が成立する.

他の関連する話題：

- LG/CY 対応とOrlovの圏同値(Chiodo-Ruan-I)，LGモデルに一般化されたGromov-Witten理論(FJRW理論，GLSM理論)の間の「クレパント変換予想」
- ガンマ予想：Stokes構造との整合性，Dubrovin 予想，導来圏の半直交分解と量子接続の間の関係
- 同変量子コホモロジーにおけるガンマ構造：関数等式$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$の与えるガンマ類の対称性を「実現」する同変パラメータに関するシフト作用素 (Okounkov-Pandharipande, Braverman-Maulik-Okounkov)

どうもありがとうございました.