

# 非等方的平均曲率一定曲面の幾何

## 滑らかな Wulff 図形とその仲間達

小磯 深幸 (九州大学)\*

### 概 要

曲面の各点の向きに依存して決まる非等方的表面エネルギーの臨界点である非等方的平均曲率一定曲面を、微分幾何的立場から紹介する。また、軸対称なエネルギー汎関数に対し、非等方的平均曲率一定回転面の表現公式を与え、平行な二平面上に自由境界を持つ曲面に対するエネルギー極小解を決定する。

## 1. 序

物理法則の多くは「ある物理量の積分の値が極小となる状態」として表現することができる。これは「変分原理」と呼ばれ、このような積分(以下ではエネルギーと呼ぶ)の極値についての問題は「変分問題」と呼ばれる。曲面に対する変分問題で最も古くから研究されているものとしては、極小曲面と平均曲率一定曲面(以下、CMC 曲面と記す。CMC は constant mean curvature の略である。)がある。前者は面積(汎関数)の臨界点、後者は「曲面が囲む体積を変えない」変分に対する面積の臨界点であり、Lagrangeにより変分問題についての一般論が初めて展開された18世紀後半より現在に至るまで、時代により程度の差はあるが、概ね途切れることなく活発に研究されてきた。

極小曲面、CMC 曲面は、それぞれ、石鹸膜、シャボン玉の数学モデルと称されることがあり、その数学的な理論は、数学だけでなく、物理学を始めとするさまざまな分野の研究にも応用されている。ところで、たとえば結晶のように異方性を持つ物質の形状については、より一般の、エネルギー密度が表面の法線方向に依存するような「非等方的表面エネルギー」を考えることが有用であろう。物理的にも自然な変分問題は、「体積一定」なる付加的条件のもとでの非等方的表面エネルギーの臨界点についての研究であると思われる。解は非等方的平均曲率一定(constant anisotropic mean curvature, 以下、CAMC と記す)曲面と呼ばれ、極小曲面や CMC 曲面の一般化となっている。より一般に、エネルギーに重力による影響を加えることもできるが、ここでは、 $(n+1)$ 次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^{n+1}$  内の CAMC 超曲面に話題を限ることにする。

さて、変分問題の解は、対応するエネルギーの極小値を与えるとき、安定であるといわれる。問題の性質からも応用の観点からも、解の安定性を研究することは自然であろう。解の安定性や一意性についての研究は、位相空間論、関数解析、偏微分方程式論等の発展に負うところが多く、20世紀以降の研究課題であり、と

本研究は科研費(課題番号:22654009)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 49Q10, 53C42

キーワード: Wulff 図形, 非等方的平均曲率

\* 〒819-0395 福岡市西区元岡 744 九州大学 大学院数理学研究院

e-mail: koiso@math.kyushu-u.ac.jp

web: <http://www.math.kyushu-u.ac.jp/>

りわけ安定性についてはおおむね1970年代半ば以降に発展してきた比較的新しい研究分野である。また、現在、解空間の構造を解明する核ともなる解の分岐についての研究が、さまざまな観点から進展中である。本講演では、CAMC曲面についての最近の微分幾何学的な研究を中心に、今後の課題をも含めて解説したい。

なお、関連分野について少し触れておく。曲面の非等方性は形態形成に重要な役割を果たすという事情もあり、非等方的曲率流の研究が、近年、学際的に行われている (cf. [7])。また、後述する Wulff 図形 (非等方的表面エネルギーに対する等周問題の解) や Winterbottom 図形 (非等方的表面エネルギーに対する自由境界問題の解) についての、確率論の立場からの研究や応用も盛んである ([2],[1],[4],[3],[6])。

## 2. 非等方的表面エネルギーと Wulff 図形

$S^n = \{\nu \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |\nu| = 1\}$  を  $\mathbf{R}^{n+1}$  の単位球面とし、 $\gamma: S^n \rightarrow \mathbf{R}^+$  を正値  $C^\infty$  級関数とする。 $\mathbf{R}^{n+1}$  にはめ込まれた向き付け可能な超曲面 (以下では簡単に超曲面という)  $X: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  を考え、その Gauss 写像 (単位法ベクトル場) を  $\nu: \Sigma \rightarrow S^n$  で表す。このような  $X$  に対して定義される汎関数

$$\mathcal{F}(X) := \int_{\Sigma} \gamma(\nu) d\Sigma \quad (1)$$

を考える。ただしここで、 $d\Sigma$  は  $X$  によって誘導される  $\Sigma$  の ( $n$ 次元) 体積要素である。このような汎関数は非等方的表面エネルギーのモデルとしてしばしば利用される ([24],[25])。  $\mathbf{R}^{n+1}$  内の同じ ( $n+1$ ) 次元体積  $V$  を囲む「閉超曲面」の中で、 $\mathcal{F}$  の最小解  $W(V)$  が (平行移動を除き) ただ一つ存在し、凸であることが知られている ([22])。ただしここで、「閉超曲面」という言葉は、正の Lebesgue 測度をもつ集合の境界という意味で使っている。したがって、 $W(V)$  は汎関数  $\mathcal{F}$  に対する等周問題の解である。

体積  $V_0 := (n+1)^{-1} \int_{S^n} \gamma(\nu) dS^n$  に対するエネルギー最小解  $W(V_0)$  を Wulff 図形と呼び、 $W$  で表す。 $W(V)$  は  $W$  に相似であり、特に  $\gamma \equiv 1$  のときは  $W$  は単位球面  $S^n$  である。

Wulff 図形  $W$  は、次のようにも特徴付けられる。 $\gamma$  を次のように自然に  $\mathbf{R}^{n+1}$  上の関数に拡張する。

$$\gamma(rX) = r\gamma(X), \quad \forall X \in S^n, \forall r \geq 0.$$

$\gamma(-X) = \gamma(X)$  が成立する時、 $\gamma$  は  $\mathbf{R}^{n+1}$  のノルムを定義する。その双対ノルム

$$\gamma^*(Y) = \sup\{Y \cdot Z \mid \gamma(Z) \leq 1\}$$

に対する単位球面

$$\{Y \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \gamma^*(Y) = 1\}$$

が Wulff 図形  $W$  と一致するのである。

さて、以下では、Wulff 図形  $W$  は滑らかな狭義凸超曲面であると仮定する。この仮定は、汎関数  $\mathcal{F}$  に対して次のような「凸性条件」を仮定することと同値で

ある.  $\gamma$  の  $S^n$  での勾配とヘシアンをそれぞれ  $D\gamma, D^2\gamma$  で表す. このとき,  $S^n$  の各点において, 行列  $D^2\gamma + \gamma 1$  が正定値であると仮定する. ただしここで,  $1$  は  $n$  次単位行列である. このとき, 汎関数  $\mathcal{F}$  は (constant coefficient) *parametric elliptic functional* と呼ばれ, 幾何学的測度論や凸解析における研究対象となっていた. 近年では, 微分幾何学, 確率論, 微分方程式などの分野でも研究が盛んになってきている.

凸性条件のもとで, Wulff 図形  $W$  は,  $\chi(\nu) = D\gamma(\nu) + \gamma(\nu)\nu$  により定義される埋め込み  $\chi: S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  の像と一致する. このとき, 点  $\chi(\nu)$  における  $W$  の外向き単位法ベクトルは  $\nu$  と一致し,  $\gamma$  は  $W$  の支持関数  $\langle \chi(\nu), \nu \rangle$  と一致する.

逆に, 任意の滑らかな狭義凸閉超曲面  $W$  を考えよう. ただし, 原点は  $W$  によって囲まれる領域の内部にあるとする.  $W$  の支持関数を  $\gamma$  とする (すなわち,  $\nu \in S^n$  に対し,  $\nu$  をその点における外向き法ベクトルにもつ  $W$  の点を  $\chi(\nu)$  とするとき,  $\gamma(\nu)$  は,  $W$  の  $\chi(\nu)$  における接超平面と原点との距離である). このとき,  $W$  は, 汎関数  $\mathcal{F}[X] = \int_{\Sigma} \gamma(\nu) d\Sigma$  に対する Wulff 図形となる.

以上より, 非等方的エネルギー密度  $\gamma$  を与えることと, Wulff 図形  $W$  を与えることは同値である.

### 3. 非等方的平均曲率と非等方的 Gauss 写像

超曲面  $X$  が囲む  $n + 1$  次元体積を保つ変分に対する汎関数  $\mathcal{F}$  の Euler-Lagrange 方程式は

$$\operatorname{div}_{\Sigma} D\gamma - nH\gamma = \text{定数} \quad (2)$$

となる. ただしここで,  $H$  ははめ込み  $X$  の平均曲率であり,  $D\gamma$  は  $\mathbf{R}^{n+1}$  での平行移動により,  $X$  に沿う接ベクトル場とみなしている. そこで,  $X$  の非等方的平均曲率 (anisotropic mean curvature)  $\Lambda$  を次のように定義する (cf. [20],[12]).

$$\Lambda := -\operatorname{div}_{\Sigma} D\gamma + nH\gamma.$$

すると,

$$\Lambda = -\operatorname{trace}_{\Sigma}(D^2\gamma + \gamma 1) \circ d\nu \quad (3)$$

となることが示せる.  $\Lambda$  が定数であるとき,  $X$  を非等方的平均曲率一定超曲面 (CAMC 超曲面) と呼ぶ. 特に  $\gamma \equiv 1$  である場合は  $\Lambda = nH$  である. 凸性条件と (3) より, 方程式 “ $\Lambda = \text{定数}$ ” は楕円型となる.

さて,  $\Lambda$  は,  $X$  と  $W$  の曲がり具合を比較する量としてとらえることもできる. このことを説明しよう. 超曲面  $X: \Sigma = \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  の Gauss 写像を  $\nu: \Sigma \rightarrow S^n$  とする. 点  $p \in \Sigma$  に対し,  $W$  上の点  $G(p)$  であって,  $\nu(p)$  が  $W$  の  $G(p)$  での外向き単位法ベクトルと一致するものが一意的に定まる. このようにして得られた写像  $G: \Sigma \rightarrow W$  を  $X$  の非等方的 Gauss 写像という. このとき,

$$\Lambda = -\operatorname{trace}(dG)$$

が成立する. よって特に, Wulff 図形の (外向き法ベクトルに対する) 非等方的平均曲率は  $-n$  である.

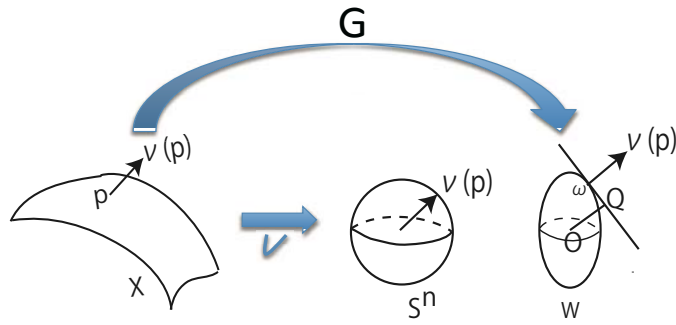


図 1: Gauss 写像  $\nu$  と非等方的 Gauss 写像  $G$ .  $\omega = G(p)$

特に  $X$  が  $\mathbf{R}^3$  内の「グラフ」である場合の  $\Lambda$  の式を与えておくのは無駄ではないだろう.  $C^\infty$  級関数  $f: D(\subset \mathbf{R}^2) \rightarrow \mathbf{R}$  のグラフ

$$X: D \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad X(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2)).$$

を考える.

$$f_i := f_{u_i}, \quad f_{ij} := f_{u_i u_j}, \quad Df := (f_1, f_2)$$

と表すことにすると,

$$\Lambda = \sum_{i,j=1,2} \gamma_{x_i x_j} \Big|_{(-Df, 1)} f_{u_i u_j}$$

が成り立つ. 特に  $\gamma(Y) \equiv |Y|$  のとき (すなわち, エネルギー汎関数  $\mathcal{F}(X)$  が通常  
の面積のとき) は,

$$\Lambda = \frac{(1 + (f_2)^2)f_{11} - 2f_1 f_2 f_{12} + (1 + (f_1)^2)f_{22}}{((f_1)^2 + (f_2)^2 + 1)^{3/2}}$$

であり, この右辺は曲面  $X$  の平均曲率  $H$  の 2 倍である.

CAMC 曲面の簡単な例をあげる.

例 3.1 (Reilly [20])  $a, b, c > 0$  とする. 楕円面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

は, 汎関数

$$\mathcal{F} = \int \sqrt{a^2 \nu_1^2 + b^2 \nu_2^2 + c^2 \nu_3^2} d\Sigma$$

の Wulff 図形である. 変換  $x' = x/a, y' = y/b, z' = z/c$  により  $\mathcal{F}$  は面積汎関数の  $abc$  倍となるから, はめ込み  $X = (x, y, z)$  が CAMC 曲面であるのは,  $(x', y', z')$  が CMC 曲面である時かつその時に限る.

#### 4. 非等方的 Delaunay 曲面

この節では、2次元曲面に話を限り、CAMC回転面を構成する。Wulff図形  $W$  が回転面の時に、 $W$  と同じ軸について対称なCAMC曲面を非等方的Delaunay曲面と呼ぶ。以下で、非等方的Delaunay曲面を  $W$  を用いて表示し、その幾何学的性質により分類する ([12])。なお、これを一般化し、 $W$  が回転面とは限らないが、 $W$  の  $(x, y)$ -平面に平行な平面に関する切り口がすべて相似である場合について、CAMC曲面の例を構成することもできる ([16])。

Wulff図形  $W \subset \mathbf{R}^3$  の、内向き法ベクトルに対する主曲率を  $\mu_1, \mu_2$  で表す。 $X: \Sigma^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  は非等方的平均曲率一定  $= \Lambda$  のはめ込みとし、そのGauss写像を  $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$  とする。点  $p \in \Sigma$  に対し、 $W$  上の点  $G(p)$  であって、 $\nu(p)$  が  $W$  の  $G(p)$  での外向き単位法ベクトルと一致するものが一意的に定まる。このようにして得られた写像  $G: \Sigma \rightarrow W$  が  $X$  の非等方的Gauss写像であった。

$C$  を曲面  $X$  上の曲線、 $p$  を  $C$  上の点とする。 $C$  の  $p$  での接方向は、 $W$  の点  $G(p)$  における  $\mu_j$  に対応する接方向と一致するとする。 $C$  の点  $p$  における法曲率を  $h_{jj}$  で表すと、

$$\Lambda = h_{11}/\mu_1 + h_{22}/\mu_2 \quad (4)$$

が成り立つ。すなわち、 $\Lambda$  は「重み付き主曲率の和」である。

さて今、非等方的表面エネルギー密度  $\gamma$  は回転対称と仮定する。 $\gamma = \gamma(\nu_3)$  とおいて一般性を失わない。このとき、対応するWulff図形  $W$  もまた、 $x^3$  座標軸に関して回転対称である。(ある種のnematic液晶は、このようなエネルギーを持つということである。)

非等方的 Delaunay 曲面  $\Sigma$  を

$$X(s, \theta) = (x(s) \cos \theta, x(s) \sin \theta, z(s))$$

と表そう。ただしここで、 $(x(s), z(s))$  は  $X$  の母線の弧長による表示であり、 $x(s) \geq 0$  ( $\forall s$ ) と仮定する。母線の向きを適当に与えることにより、 $\nu$  は曲面の「外向き」単位法ベクトルを与えるとしてよい。 $X$  の点に対して、非等方的Gauss写像  $G$  によって  $W$  の点を対応させると、これらの点において外向き法ベクトルは互いに一致する。この対応のもとで、方程式“ $\Lambda = \text{定数}$ ”を積分することにより、

$$2\mu_2^{-1}xz' + \Lambda x^2 = c. \quad (5)$$

ここで  $c$  は(積分)定数である。 $-\mu_2 = -v_\sigma/u = -z'/u$  より、(5) は

$$2ux + \Lambda x^2 = c. \quad (6)$$

これを  $x$  について解けば、 $X$  の母線  $(x, z)$  の、Wulff図形  $W$  の母線による表示が得られる。それによって、非等方的 Delaunay 曲面はすべて完備であり、次の6つのクラスに分類されることがわかる (図2. [12])。)

(I-1) 平面 ( $\Lambda = 0$ ),      (I-2) 非等方的 catenoid ( $\Lambda = 0$ )

- (II-1) Wulff 図形 (の平行移動と相似) ( $\Lambda \neq 0$ ),      (II-2) 円柱 ( $\Lambda \neq 0$ )  
 (II-3) 非等方的 unduloid ( $\Lambda \neq 0$ ): 自己交差を持たない周期的曲面  
 (II-4) 非等方的 nodoid ( $\Lambda \neq 0$ ): 自己交差を持つ周期的曲面



図 2: 非等方的 Delaunay 曲面. 左から, 非等方的 catenoid, Wulff 図形, 円柱, 非等方的 unduloid, 非等方的 nodoid.

次の表現公式は, CAMC 曲面の研究 [13]-[16] において, 本質的に用いられた.

**定理 4.1** ([12])  $W$  を回転対称な非等方的表面エネルギー  $\mathcal{F}$  に対する Wulff 図形とし,  $\sigma \mapsto (u(\sigma), v(\sigma)), \sigma \in (-\infty, \infty)$  を  $W$  の母線の弧長表示とする.  $X(s, \theta) = (x(s)e^{i\theta}, z(s))$  を非等方的平均曲率  $\Lambda \leq 0$  のはめ込みとし,  $X$  の Gauss 写像は  $W$  のそれと  $s = s(\sigma)$  において一致するとする. このとき,  $X$  は次で与えられる.

(i)  $X$  が非等方的 catenoid のとき,

$$x = c/(2u) \quad (7)$$

ただしここで,  $c$  は非零定数である.

(ii)  $X$  が非等方的 unduloid のとき,

$$x = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + \Lambda c}}{-\Lambda} \quad (8)$$

ただしここで,  $c > 0, \Lambda < 0$  であり,  $x = x(u(\sigma))$  は  $\{\sigma | u \geq \sqrt{-\Lambda c}\}$  において定義される.

(iii)  $X$  が非等方的 nodoid のとき,

$$x = \frac{u + \sqrt{u^2 + \Lambda c}}{-\Lambda} \quad (9)$$

ただしここで,  $c < 0, \Lambda < 0$  であり,  $x = x(u(\sigma))$  は  $\{-\infty < \sigma < \infty\}$  において定義される.

上のすべての場合において,  $z$  は次で与えられる.

$$z = \int^u v_u x_u du \quad (10)$$

逆に, 上で定義された Wulff 図形  $W$  に対し,  $x$  及び  $z$  を (i)-(iii), (10) によって定義すると,  $X(s, \theta) = (x(s)e^{i\theta}, z(s))$  は非等方的 Delaunay 曲面である.

**命題 4.1** ([16]) 非等方的 Delaunay 曲面  $X : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  の非等方的 Gauss 写像  $G : \Sigma \rightarrow W$  は, 調和写像である. 特に,  $X$  が非等方的 catenoid または Wulff 図形の場合は,  $G$  は  $\pm$  holomorphic である.

## 5. 第 1 及び第 2 変分公式と安定性の定義

はめ込み  $X : \Sigma = \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  に対し,  $\mathcal{F}(X) = \int_{\Sigma} \gamma(\nu) d\Sigma$  であった.  $X$  が「囲む」代数的  $(n+1)$ 次元体積を

$$V(X) := \frac{1}{n+1} \int_{\Sigma} \langle X, \nu \rangle d\Sigma$$

によって定義する. ここで,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathbf{R}^{n+1}$  の標準的な内積を表す.

$X_{\epsilon} = X + (\xi + \psi\nu)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  を  $X$  のコンパクトな台を持つ変分とする. ここに,  $\xi, \psi\nu$  は, それぞれ, 変分ベクトル場の接成分, 法成分である.

補題 5.1  $\mathcal{F}$  と  $V$  の第 1 変分は次で与えられる.

$$\partial_{\epsilon}\mathcal{F}|_{\epsilon=0} := \left. \frac{d\mathcal{F}(X_{\epsilon})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = - \int_{\Sigma} \Lambda\psi d\Sigma, \quad \partial_{\epsilon}V|_{\epsilon=0} = \int_{\Sigma} \psi d\Sigma \quad (11)$$

ここで,  $\Lambda = -\operatorname{div}_{\Sigma} DF + nHF$  は  $X$  の非等方的平均曲率である.

次の結果は, CAMC 曲面の安定性の研究において基本的な役割を果たす.

命題 5.1 ([12])  $X$  の非等方的平均曲率が定数であると仮定する.  $X$  のコンパクトな台を持つ変分  $X_{\epsilon} = X + (\xi + \psi\nu)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  に対し, 非等方的平均曲率  $\Lambda$  の第 1 変分は次で与えられる.

$$\partial_{\epsilon}\Lambda|_{\epsilon=0} = L[\psi] \quad (12)$$

ただしここで,  $L$  は自己共役作用素

$$L[\psi] := \operatorname{div}(A\nabla\psi) + \langle Adv, d\nu \rangle \psi, \quad A := (D^2F + F1)|_{\nu}$$

である. もしも変分  $X_{\epsilon}$  が体積を保つならば,

$$\partial_{\epsilon\epsilon}^2\mathcal{F}|_{\epsilon=0} := \left. \frac{d^2\mathcal{F}(X_{\epsilon})}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = - \int_{\Sigma} \psi L[\psi] d\Sigma \quad (13)$$

となる.

すなわち,  $X$  が CAMC のとき, 囲む体積を保ちコンパクトな台を持つ変分  $X_{\epsilon}$  に対し,  $\mathcal{F}$  の第 2 変分  $\partial_{\epsilon\epsilon}^2\mathcal{F}|_{\epsilon=0}$  は,  $X$  の変分ベクトル場  $\partial X_{\epsilon}/\partial\epsilon|_{\epsilon=0}$  の法成分にのみ依存する. そこで,

$$I[\psi] = - \int_{\Sigma} \psi L[\psi] d\Sigma \quad (14)$$

とおく.

定義 5.1  $X : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  は CAMC で,  $\Sigma$  はコンパクトとする.  $X$  の境界を固定し「囲む体積」を保つ任意の変分  $X_{\epsilon}$  に対して  $\mathcal{F}$  の第 2 変分  $\partial_{\epsilon\epsilon}^2\mathcal{F}|_{\epsilon=0}$  が非負のとき,  $X$  は安定であるという.

定義 5.2  $X : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  は CAMC で,  $\Sigma$  は完備とする.  $X$  の任意の相対コンパクト領域  $\Omega$  に対して  $X|_{\Omega}$  が安定であるとき,  $X$  は安定であるという.

第1, 第2変分公式を用いて次が示せる.

補題 5.2  $X : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  は CAMC で,  $\Sigma$  はコンパクトとする.  $X$  が安定であることと,

$$\int_{\Sigma} \psi \, d\Sigma = 0 \quad (15)$$

を満たすすべての  $\psi \in C_0^\infty(\Sigma)$  に対して  $I[\psi] \geq 0$  が成り立つことは同値である.

これが成り立つことは, 条件 (15) が, 対応する変分が「囲む体積を保つ」という条件に対応し,  $I[\psi]$  が  $\mathcal{F}$  の第2変分に対応することから自然であろう.

## 6. CAMC 閉超曲面に対する一意性定理

CAMC 曲面の具体例の構成は容易ではない. 最近, CAMC 閉超曲面 (コンパクトで境界のない超曲面) に対する一意性について, 著しい進展があった.

定理 6.1 (B. Palmer 1998 [19])  $\mathbf{R}^{n+1}$  内の, 安定な CAMC 閉超曲面は, (平行移動と相似を除き) Wulff 図形のみである.

定理 6.2 (Y. He, H. Li, H. Ma, J. Ge 2009 [8])  $\mathbf{R}^{n+1}$  内の CAMC 閉超曲面で自己交差を持たないものは, (平行移動と相似を除き) Wulff 図形のみである.

定理 6.3 (M. Koiso and B. Palmer 2010 [17])  $\mathbf{R}^3$  内の CAMC 閉曲面であって種数 0 のものは, (平行移動と相似を除き) Wulff 図形のみである.

定理 6.1, 6.2, 6.3 は, CMC (超) 曲面に対してはすでに知られていた結果である. CMC 版に対する証明は, それぞれ複数種類知られているが, そのうちで良く知られているものとしては, 定理 6.2 については CMC 超曲面の超平面に対する鏡映と元の超曲面に対して (楕円型方程式の解に対する) 比較定理を用いるもの, 定理 6.3 については複素関数論を使うものがある. これらは一般の CAMC 超曲面に対して拡張することができないため, CAMC 版の証明は懸案の事項であった. 最近, 困難が克服されて, 上述のように完全な形の結果が証明された. 特に, 定理 6.3 の証明は, 曲面上の曲率線族の特異点 (非等方的臍点) における指数 (index) の評価を用いるものであり, より一般の曲面に対しても一般化できると思われる.

注意 6.1 任意の  $g \in \mathbf{N}$  に対し,  $\mathbf{R}^3$  内のコンパクトで境界のない CMC 曲面であって種数  $g$  のものが存在する.  $g = 1$  の場合は, H. Wente によって初めてこのような例が構成され (1984 [23]),  $g \geq 2$  の場合は, N. Kapouleas によって初めてこのような例が構成された ( $g \geq 3$ : 1990 [9],  $g = 2$ : 1995 [10]). CAMC 版についての対応する結果は, 特殊な場合を除き, まだない.

[9] における構成法は次のとおり. まず, いくつかの同じ定平均曲率をもつ回転面をつなぎ, つなぎ目 (は滑らかでない) を除いて平均曲率一定の, 欲しい種数を持つ閉曲面を作る. それを全体に少し変形して滑らかな CMC 閉曲面を作る.

CAMC の場合は, まず, 「いくつかの同じ非等方的平均曲率をもつ CAMC 回転面をつなぐ」という段階で困難が生じる. 非等方的平均曲率は, 曲面の平行移動



により不変であるが、回転すると一般には不変でない。そのため、既知のCAMC曲面片を自由な位置に移動・回転させてつなぐという操作ができないのである。

## 7. 安定性の判定

今、 $X : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  はCAMCで、 $\Sigma$ はコンパクトとする。  $X$ の安定性を判定したい。非等方的エネルギー汎関数 $\mathcal{F}$ の第2変分公式(13)に鑑み、次の固有値問題を考える。

$$L[\psi] = -\lambda\psi, \quad \psi \in C_0^\infty(\Sigma) \quad (16)$$

(16)の固有値はすべて実数であり、加算無限個の単調非減少列を成す。それを、 $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ と表す。負の固有値の個数(重複度も数える)を、 $X$ のMorse指数といい、 $\text{Ind}(X)$ で表す。 $\text{Ind}(X)$ は、境界を固定し、汎関数 $\mathcal{F} + \Lambda V$ を減少させる変分ベクトル場の成す空間の次元である。したがって、(16)の固有値だけから $X$ の安定性を判定することはできないが、下に述べるような判定法がある。

$\Sigma$ から $\mathbf{R}^{n+1}$ へのはめ込みの一助変数族 $\{X_t\}_t$  ( $X_0 = X$ ) に対し、

$$\Lambda(t) := X_t \text{ の非等方的平均曲率}, \quad V(t) := V(X_t)$$

とおく。

**定理 7.1 (安定性の判定. Maddocks, Vogel, Koiso[11])**  $X$  はCAMCとする。

(I)  $\lambda_1 \geq 0$ ならば、 $X$ は安定である。

(II)  $\lambda_1 < 0 \leq \lambda_2$ とする。 $X$ の境界を保つ変分 $X_t$ で、 $\Lambda'(0) = \text{定数} \neq 0$ なるものが存在する時、

(i)  $\Lambda'(0)V'(0) \geq 0$ ならば、 $X$ は安定である。

(ii)  $\Lambda'(0)V'(0) < 0$ ならば、 $X$ は不安定である。

このような変分が存在しないならば、 $X$ は不安定である。

(III)  $\lambda_2 < 0$ ならば、 $X$ は不安定である。

(12)より、定理7.1を応用するには、(16)の固有値の評価、及び、 $L[\psi] = \text{定数}$ となる $\psi \in C_0^\infty(\Sigma)$ を求める必要があることがわかる。一般に、これらは困難であるが、問題の幾何学的性質から、次の有用な結果が導かれる。

**補題 7.1** CAMC超曲面 $X$ のGauss写像 $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n+1}) : \Sigma^n \rightarrow S^n$ について、

$$L[\nu_j] = 0, \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (17)$$

また、 $X$ の支持関数 $q := \langle X, \nu \rangle$ について、

$$L[q] = -\Lambda, \quad \Lambda \text{ は } X \text{ の非等方的平均曲率}. \quad (18)$$

この補題は、次のようにして示される。 $X$ の平行移動 $X_t := X + tC$  ( $C$ は定ベクトル)は非等方的平均曲率を保つから、(12)により、変分ベクトル場の法成分 $\nu_C := \langle \nu, C \rangle$ は $L[\nu_C] = 0$ を満たす。 $C = (1, 0, \dots, 0)$ 等ととることにより、(17)がわかる。また、 $X$ の相似変形 $X_t := (1+t)X$ に対して、 $\Lambda(t) = \Lambda(0)/(1+t)$ だから、再び(12)により、(18)がわかる。

## 8. ある自由境界問題

この節では、 $\mathbf{R}^3$  内の平行な二平面に自由境界を持つ曲面に対する  $\mathcal{F}$  の変分問題を考え、安定解の決定がどの位なされているかを紹介する。結果の証明には、定理 4.1 及び定理 7.1 を本質的に用いる。

$\gamma$  は回転対象と仮定する。  $\gamma = \gamma(\nu_3)$  としてよい。このとき、Wulff 図形  $W \subset \mathbf{R}^3$  も回転面である。平行な二平面

$$\Pi_0 := \{z = z_0\}, \quad \Pi_1 := \{z = z_1\} \quad (z_0 < z_1)$$

で囲まれる閉領域を  $\Omega := \{z_0 \leq z \leq z_1\}$  とする。

埋め込み  $X : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (\Omega, \Pi_0 \cup \Pi_1)$  に対し、 $X$  のエネルギーを次で定義する。

$$\mathcal{E}[X] := \mathcal{F}[X] + \omega_0 \mathcal{A}_0[X] + \omega_1 \mathcal{A}_1[X] \quad (19)$$

ここで、 $\omega_i$  は定数、 $\mathcal{A}_i[X]$  は  $X(\partial\Sigma)$  が囲む  $\Pi_0 \cup \Pi_1$  の領域の面積であり、 $\omega_i \mathcal{A}_i[X]$  は濡れエネルギー (wetting energy) と呼ばれる。

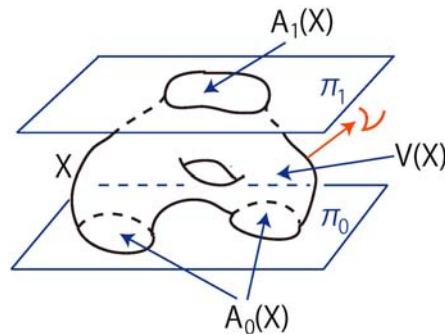


図 3: 自由境界問題

$X(\Sigma) \cup \Pi_0 \cup \Pi_1$  が囲む体積を保つ  $X$  の変分に対する  $\mathcal{E}$  の臨界点を capillary surface と呼ぶことにする。  $X$  が capillary surface であるのは、 $X$  の各  $\Pi_i$  との接触角が定数、かつ  $X$  が CAMC であるときである。 Alexandrov 鏡映法を用いることにより、capillary surface は  $z$  軸に関する回転面、すなわち、非等方的 Delaunay 曲面であることがわかる。

**定義 8.1 capillary surface**  $X$  が安定であるとは、体積を保ち、境界条件を満たす  $X$  の任意の変分に対し、 $\mathcal{E}$  の第 2 変分が非負の時をいう。

**定理 8.1 (W. L. Winterbottom, 1967 [24].** 支持曲面が一平面の場合) Wulff 図形 (の相似) の部分集合で  $\Pi_0$  上に自由境界をもつものは、 $\Pi_0$  上に自由境界をもつ曲面の中で、「体積一定」のもとでの (平行移動を除き) 一意的なエネルギー最小解を与える。

注意 8.1 連結な (滑らかとは限らない) 曲面 (曲線) 上に自由境界を持つ曲面 (曲線) に対する, 本節と同様の変分問題のエネルギー最小解を Winterbottom 図形と呼ぶことがあるようである.

capillary surface  $X$  が,  $\Pi_0, \Pi_1$  の両方に空でない境界成分をもつとき, 「 $X$  は  $\Pi_0, \Pi_1$  を張る」と言うことにする.

定理 8.2 (Wulff 図形のエネルギー最小性, K-P 2007 [14]) Wulff 図形 (の相似) の  $\Pi_0, \Pi_1$  を張る部分は,  $\Pi_0 \cup \Pi_1$  上に自由境界をもつ曲面の中で, 「体積一定」のもとでの (平行移動を除き) 一意的なエネルギー最小解を与える.

ところが, Wulff 図形の部分集合を考えるだけでは, 任意の初期条件  $\mathcal{F}, V, z_1 - z_0, \omega_0, \omega_1$  に対する capillary surface は得られない. そこで我々は, すべての CAMC 曲面について考察する.

なお, 先行研究としては次のものがある.  $\gamma \equiv 1$  で  $\omega = 0$  の場合が Athanassenas ('87), Vogel ('87) により,  $\gamma \equiv 1$  で  $\omega_i \neq 0$  の場合が, Vogel ('89), Finn and Vogel ('92), Zhou ('93, '95) により研究された. また, 非等方の場合, 支持曲面が一つの平面の場合が, Winterbottom ('67) や Taylor, Morgan 他によって研究された. さて今, 簡単のため,  $W$  に対する ( $\gamma$  に対する) 次の条件を仮定する.

(W1)  $W$  は滑らかな凸閉曲面で,  $z$  軸に関して軸対称.

(W2)  $W$  は平面  $z = 0$  に関して対称.

(W3)  $W$  の母線の曲率 ( $> 0$ ) は,  $\{z \geq 0\}$  において,  $z$  に関して単調非減少.

注意 8.2 CMC の場合は, (W1)-(W3) は満たされる.

以下では  $\omega_0 = \omega_1 =: \omega$  と仮定する.  $\omega \geq 0$  の場合には, 安定な capillary surface の幾何学的な特徴付け, 存在と一意性に関する結果が得られた.

定理 8.3 (安定解の特徴付け K-P 2006 [13], 2007 [14]) (i)  $\omega = 0$  のとき, 安定な capillary surface は, 十分短い円柱と Wulff 図形の上または下半分に相似な曲面である.

(ii)  $\omega > 0$  のとき, 安定な capillary surface  $X$  の Gauss 曲率は正である.  $X$  の境界成分の個数が 1 の時は,  $X$  は  $W$  の一部であり, 境界成分の個数が 2 の時は,  $X$  は水平面に関して対称である.

注意 8.3  $X$  を, 半径  $R$ , 高さ  $h$  の円柱とする.  $X$  が安定であるのは,  $\mu_1(0)|\Lambda|/R \leq (\pi/h)^2$  の時かつその時に限る.

Wulff 図形  $W$  の点の  $z$  座標の最大値を  $\bar{\omega}$  で表す.

定理 8.4 (安定解の存在と一意性, K-P 2007 [15])  $0 \leq \omega \leq \bar{\omega}$  と仮定する. ある  $V_0 = V_0(h, \omega) > 0$  が存在して,

(i)  $V < V_0$  ならば, 体積  $V$ , 高さ  $h$  の安定な capillary surface が (平行移動を除き) 一意的に存在し,  $W$  の部分集合に相似である.

(ii)  $V_0 \leq V$  ならば, 体積  $V$ , 高さ  $h$  の安定な capillary surface であって  $\Pi_0, \Pi_1$  を張るものが (平行移動を除き) 一意的に存在する.

注意 8.4 capillary surface の境界成分の個数は, (i) は 1, (ii) は 2 である.

注意 8.5  $V_0$  は, 幾何学的に与えられる定数である.

注意 8.6  $|\omega| > |\bar{\omega}|$  の時, 解は存在しない.

注意 8.7 不安定な解はたくさん存在する.

注意 8.8  $\omega < 0$  の場合は, 安定な capillary surface の幾何学的な特徴付け, 一意性の問題は, CMC 曲面の場合ですら未解決である. すでにわかっていることは, 以下のとおり. 非等方的 unduloid の負曲率な部分は,  $V$  が十分大きければ安定である. 十分円柱に近い非等方的 unduloid の, 負曲率の部分は安定である. 非等方的 Delaunay 曲面  $X$  のくびれの部分が十分細いならば,  $X$  の負曲率の部分は不安定である.

## 9. 今後の課題など

前節までの結果は, すべて CMC(超) 曲面に対する結果の自然な一般化となっている. CAMC 曲面固有の現象はないのかというと, そうではない. たとえば, §8 において, 仮定 (W3) が満たされない時は, 一般には定理 8.3 は成立しない.  $\omega = 0$  の時は, 非等方的 unduloid の半周期が安定となる場合がある. また,  $\omega > 0$  のとき, 安定な capillary surface は水平面に関して対称とは限らないと予想している. これらのことは, capillary surfaces の分岐を調べることによりわかるはずである ([18]).

§4, §8 では, Wulff 図形は回転面であると仮定した. この仮定をはずすとどうなるか?

§8 では, 曲面の自由境界の支持曲面は, 平行な二平面とした. 平行でない二平面とした時はどうなるか? また, 支持曲面が互いに直交する三平面の時はどうか? この問題は, 3次元ヤング図形のスケール極限とも関係があるようである.

## 参考文献

- [1] T. Bodineau, D. Ioffe and Y. Velenik. Rigorous probabilistic analysis of equilibrium crystal shapes. *J. Math. Phys.* **41** (2000), 1033–1098.
- [2] E. Bolthausen and D. Ioffe. Harmonic crystal on the wall: a microscopic approach. *Commun. Math. Phys.* **187** (1997), 523–566.
- [3] R. Cerf and R. Kenyon. The Low-temperature expansion of the Wulff crystal in the 3D Ising model. *Commun. Math. Phys.* **222** (2001), 147–179.
- [4] J.-D. Deuschel, G. Giacomin and D. Ioffe. Large deviations and concentration properties for  $\nabla\varphi$  interface models. *Probab. Theory Relat. Fields* **117** (2000), 49–111.
- [5] L. P. Eisenhart. A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Dover Publications, Inc., New York, 1960.

- [6] T. Funaki. Stochastic Interface Models. *Lectures on Probability Theory and Statistics*, Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXIII - 2003 (ed. J. Picard), 103–274, Lect. Notes Math. **1869** (2005), Springer.
- [7] Y. Giga. Surface evolution equations. A level set approach. *Monographs in Mathematics* **99**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [8] Y. He, H. Li, H. Ma and J. Ge. Compact embedded hypersurfaces with constant higher order anisotropic mean curvatures. *Indiana Univ. Math. J.* **58** (2009), 853–868.
- [9] N. Kapouleas, Complete constant mean curvature surfaces in euclidean three-space, *Ann. of Math.*(2) **131** (1990), 239–330.
- [10] N. Kapouleas, Constant mean curvature surfaces constructed by fusing Wente tori. *Invent. Math.* **119** (1995), 443–518.
- [11] M. KOISO. Deformation and stability of surfaces with constant mean curvature. *Tohoku Math. J. (2)* **54** (2002), 145–159.
- [12] M. Koiso and B. Palmer. Geometry and stability of surfaces with constant anisotropic mean curvature. *Indiana Univ. Math. J.* **54** (2005), 1817–1852.
- [13] M. Koiso and B. Palmer. Stability of anisotropic capillary surfaces between two parallel planes. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* **25** (2006), 275–298.
- [14] M. Koiso and B. Palmer. Anisotropic capillary surfaces with wetting energy. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* **29** (2007), 295–345.
- [15] M. Koiso and B. Palmer. Uniqueness theorems for stable anisotropic capillary surfaces. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **39** (2007), 721–741.
- [16] M. Koiso and B. Palmer. Rolling construction for anisotropic Delaunay surfaces. *Pacific Journal of Mathematics* **234** (2008), 345–378.
- [17] M. Koiso and B. Palmer. Anisotropic umbilic points and Hopf's theorem for surfaces with constant anisotropic mean curvature. *Indiana Univ. Math. J.* **59** (2010), 79–90.
- [18] M. Koiso, B. Palmer, and P. Piccione. Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature and their generalizations, *in preparation*.
- [19] B. Palmer. Stability of the Wulff shape. *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 3661–3667.
- [20] R. C. Reilly. The relative differential geometry of nonparametric hypersurfaces. *Duke Math. J.* **43** (1976), 705–721.
- [21] A. M. da Silveira, Stability of complete noncompact surfaces with constant mean curvature. *Math. Ann.* **277** (1987), 629–638.
- [22] J. E. Taylor. Crystalline variational problems. *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), 568–588.
- [23] H. C. Wente. Counterexample to a conjecture of H. Hopf. *Pacific J. Math.* **121** (1986), 193–243.
- [24] W. L. Winterbottom. Equilibrium shape of a small particle in contact with a foreign substrate. *Acta Metallurgica* **15** (1967), 303–310.
- [25] G. Wulff. Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Krystallflächen. *Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie* **34** (1901), 449–530.