

非線形固有値問題に対する 周回積分を用いた数値解法

櫻井 鉄也 (筑波大学)*

1. はじめに

時間遅れをともなう微分方程式の特性方程式は指数関数を含み, その安定性解析では非線形固有値問題が現れる [8]. 量子ドットの電子状態計算では多項式固有値問題や有理型の固有値問題 [7], 粒子加速器の設計では平方根を含む固有値問題 [9] が現れる. また, 連立代数方程式を多項式固有値問題に帰着させる解法もある [14]. 他にも, 振動解析や Schrödinger 作用素などさまざまな分野で非線形固有値問題が現れる [3].

これらの数値シミュレーションや解法で現れる行列は大規模になることが多く, 並列計算機での利用を想定した数値計算手法が求められる. 近年の大規模並列計算環境は, マルチコア CPU から構成される超並列計算機や GPU などの演算加速機構を備えた階層的な並列構造をもつ計算機に移行しており, その計算機資源を十分に活用するためには, 計算アルゴリズムの段階から階層的な超並列構造を考慮した手法の導出が必要である.

大規模な疎行列向けの固有値解法の多くは, 初期ベクトルを与えて反復によって部分空間を生成する内部反復と, 得られた部分空間から近似固有対を抽出して新たな部分空間生成を繰り返す外部反復の2つの入れ子状の反復過程から構成される. これらの反復過程は逐次的に行う必要があり, 並列化を阻害する要因となっている. 高い並列効率を得るためには, これらの反復による部分空間生成や近似ベクトルの更新を行わず, 独立した複数の計算から一度の操作で十分に精度のよい部分空間を抽出する方法が必要となる.

本稿では, 行列関数 $T(z)$ に対する固有値問題

$$T(z)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1)$$

に対して, 周回積分を用いて積分路内にある固有値と対応する固有ベクトルを求める方法について述べる. ここで, $T(z)$ はその各要素が z の関数として与えられている行列とする. 行列 $A_0, A_1, \dots, A_l \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A_l \neq O$ について,

$$T(z) = \sum_{i=0}^l z^i A_i$$

本研究は科研費(課題番号:21246018, 21105502)の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 65F15, 65F50

キーワード: 非線形固有値問題, 周回積分, 並列解法

* 〒305-8573 つくば市天王台 1-1-1 筑波大学 大学院システム情報工学研究科

e-mail: sakurai@cs.tsukuba.ac.jp

web: <http://www.cs.tsukuba.ac.jp/~sakurai/>

のとき、固有値問題(1)は l 次多項式固有値問題となる。とくに $l=1$ のとき一般化固有値問題や標準固有値問題を含む。多項式以外の非線形関数を要素にもつ行列関数の固有値問題を考えることもできる。

一般化固有値問題に対して、複素平面上の与えられた領域内にある固有値と対応する固有ベクトルを周回積分を用いて求める解法が文献[12]において提案された。この方法はSakurai-Sugiura法(以後、SS法)とよばれ、各積分点上での計算は独立して行うことができるため並列性の高い解法である。この方法のフィルター対角化に基づく一般化[6]によって、領域内に多数の固有値がある場合の安定性が改善され、重複固有値に対してもすべての固有ベクトルを求めることが可能になった。また、対称行列に対して直交射影を用いることで安定性を改善する方法も提案されている[13]。

文献[2]において、周回積分を用いた固有値解法(SS法)が多項式固有値問題に対して適用可能であることが示された。この方法は、行列多項式に適用した場合でもコンパニオン行列を用いた線形化のように行列の次元が増大することがなく、とくに高次の多項式で従来法に比べて有効性が高い。また、文献[12]の方法がもつ高い並列性を備えている。文献[1]では、行列の要素が解析関数で与えられる問題への拡張が行われた。

次節において、非線形固有値問題に対する周回積分を用いた固有値解法を紹介する。第3節において方法の並列性について述べる。第4節でいくつかの数値例を示す。

2. 周回積分を用いた固有値解法

n 次行列関数 $T(z)$ は複素平面上の領域 Ω で解析的とする。 $T(z)$ はその行列式が恒等的に0でないとき正則であるという。解析的な行列関数に対するSmith形についての以下の定理([5])が、周回積分を用いた非線形固有値問題の解法に対して方法導出の基礎となる。

定理 1 $T(z)$ は $n \times n$ の正則な行列解析関数であるとする。このとき $T(z)$ は

$$P(z)T(z)Q(z) = D(z) \quad (2)$$

と表される。ここで $D(z) = \text{diag}(d_1(z), \dots, d_n(z))$ はその対角要素 $d_j(z)$, $j = 1, 2, \dots, n$ が解析関数で、 $d_j(z)/d_{j-1}(z)$, $j = 2, 3, \dots, n$ はまた解析的である。さらに、 $P(z)$, $Q(z)$ はその行列式が非零の定数となる $n \times n$ の行列解析関数である。

関数 $f(z)$ を

$$f(z) := \mathbf{u}^H T(z)^{-1} \mathbf{v} \quad (3)$$

と定義する。ここで、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ は零でないとする。Smith形から $f(z)$ に関して以下の結果を得る([1])。

定理 2 $D(z)$, $P(z)$, $Q(z)$ は式(2)により与えられるとする。このとき、 $f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\chi_j(z)}{d_j(z)}$$

と表される。ここで $\chi_j(z)$ は $P(z), Q(z), \mathbf{u}, \mathbf{v}$ より決まる関数で、 Ω で解析的である。

Γ は Ω 上の Jordan 曲線とし、 m 個の相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ が Γ 内にあるとする。ここでは議論を簡単にするため、固有値は単純であるとする。周回積分によって

$$\mu_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^k f(z) dz, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4)$$

とし、 $\{\mu_k\}_{k=0}^{2m-2}$ および $\{\mu_k\}_{k=1}^{2m-1}$ を要素にもつ Hankel 行列をそれぞれ

$$H_m = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{m-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{m-1} & \mu_m & \cdots & \mu_{2m-2} \end{bmatrix}, \quad H_m^< = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_m \\ \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{2m-1} \end{bmatrix}$$

とする。 μ_k に対応して

$$\mathbf{s}_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^k T(z)^{-1} dz \mathbf{v}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

とし、 $S = [\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_{m-1}]$ とおく。

このとき、定理 2 より以下の関係が得られる。

定理 3 $(\lambda_j, \mathbf{w}_j)$, $1 \leq j \leq m$ は行列則 $H_m^< - \lambda H_m$ の固有対とする。このとき、非線形固有値問題 $T(z)\mathbf{x} = 0$ の固有対は $(\lambda_j, \mathbf{x}_j)$, $1 \leq j \leq m$ で与えられる。ここで、

$$\mathbf{x}_j = S\mathbf{w}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

周回積分は以下のように数値積分によって近似する。 Γ 上の N 個の相異なる点 z_1, \dots, z_N に対して重み w_1, \dots, w_N を

$$\sum_{j=1}^N w_j z_j^k = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, N-2 \\ c, & k = N-1 \end{cases}$$

をみたすように決める。ここで c は零でない実数とする。適当なシフト値 γ とスケール値 ρ に対して、 $\tau_j = (z_j - \gamma)/\rho$ とおき、

$$\hat{\mathbf{s}}_k := \sum_{j=1}^N w_j \tau_j^k T(z_j)^{-1} \mathbf{v}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

とし、 $\hat{S} = [\hat{\mathbf{s}}_0, \dots, \hat{\mathbf{s}}_{\hat{m}-1}]$ とおく。ここで \hat{m} は $\hat{m} \geq m$ となる適当な整数である。また、 $\hat{\mu}_k := \mathbf{u}^H \mathbf{s}_k$ とする。このようにして得られた $\hat{\mu}_k$ から Hankel 行列 $\hat{H}_{\hat{m}}, \hat{H}_{\hat{m}}^<$ を

$$\hat{H}_{\hat{m}} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_0 & \hat{\mu}_1 & \cdots & \hat{\mu}_{\hat{m}-1} \\ \hat{\mu}_1 & \hat{\mu}_2 & \cdots & \hat{\mu}_{\hat{m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\mu}_{\hat{m}-1} & \hat{\mu}_{\hat{m}} & \cdots & \hat{\mu}_{2\hat{m}-2} \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_{\hat{m}}^< = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1 & \hat{\mu}_2 & \cdots & \hat{\mu}_{\hat{m}} \\ \hat{\mu}_2 & \hat{\mu}_3 & \cdots & \hat{\mu}_{\hat{m}+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\mu}_{\hat{m}} & \hat{\mu}_{\hat{m}+1} & \cdots & \hat{\mu}_{2\hat{m}-1} \end{bmatrix}$$

とし、それぞれ H_m および $H_m^<$ の近似とする。

とくに z_j を中心 γ 、半径 ρ の円周上に等間隔におくと、 $\theta_j = (2\pi/N) \times (j-1/2)$ 、 $j = 1, 2, \dots, N$ として、

$$z_j = \gamma + \rho(\cos \theta_j + i \sin \theta_j), \quad w_j = \cos \theta_j + i \sin \theta_j$$

で与えられる。これは一般化固有値問題のとき文献[12]の方法と一致する。このときの固有値の精度について文献[15]で解析している。固有値が実軸上だけに分布しているようなときには、円を垂直方向に $\alpha (\leq 1)$ 倍して積分路を実軸に近づけた方が精度がよくなる。このときの積分点と重みは

$$z_j = \gamma + \rho(\cos \theta_j + i \alpha \sin \theta_j), \quad w_j = \alpha \cos \theta_j + i \sin \theta_j$$

となる。

求める固有値数が多いとき、Hankel行列の次元を大きくしようとすると高次の μ_k を利用する必要があり、数値的に不安定になる。通常は m は積分点数 N に対して1/4程度が適当である。より多くの固有値を求めるときには、 \mathbf{u} 、 \mathbf{v} のかわりに $n \times L$ の行列

$$U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_L], \quad V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_L]$$

を用いる。ここで、 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_L\}$ および $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_L\}$ はそれぞれ互いに独立な零でないベクトルである。これにより、

$$F(z) := U^H T(z)^{-1} V$$

とおき、 $\hat{\mu}_k$ のかわりに $L \times L$ の行列

$$\hat{M}_k := \sum_{j=1}^N w_j \tau_j^k F(z_j) = U^H \hat{S}_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (8)$$

とする。ここで

$$\hat{S}_k := \sum_{j=1}^N w_j \tau_j^k T(z_j)^{-1} V, \quad k = 0, 1, \dots \quad (9)$$

である。Hankel行列も $\hat{\mu}_k$ のかわりに行列 \hat{M}_k を並べたブロック Hankel 行列となる。この方法は Block SS 法とよばれる。計算の主要部は連立一次方程式の求解 $T(z_j)^{-1} V$ であり、複数右辺ベクトルをもつ方程式の高速な解法が必要となる。このような方程式に対して、Block Krylov 部分空間を利用した高速な解法が提案されている [16, 17]。

3. 解法の並列性

近年の大規模な計算機では、各計算ノード内でのメニーコアによる並列性とノード間の並列性のような演算ユニット間の階層性がある。また、レジスタや各レベルのキャッシュ、メモリー、ストレージなどへのアクセス、ネットワーク構造についても階層性がある。固有値問題はその解法のほとんどは漸化関係によって記述されている。しかし、漸化関係による反復計算では逐次性が避けられず、また、各ステップで計算結果を交換するための通信が発生し、最内ループの内側での並列性しか利用できない。そのため、超並列の計算機では十分な性能を得ることが難しい。

SS法において、式(9)におけるシフト点 z_j での連立一次方程式の求解 $T(z_j)^{-1}V$ が計算時間のほとんどを占める。そのため、各 z_j での計算を分散した計算ノードに割り当てると、計算ノード間の通信がほとんど発生しない方法となる。また、積分領域ごとにも独立して計算できるため、複数の領域を与える場合にはここでも並列性を利用することができる。

複素平面上に設定する複数の領域による並列性 (Top Level)、それぞれの領域ごとの積分点上での計算の並列性 (Middle Level) があり、さらに、連立一次方程式の解法に並列性の高い解法を用いると、その並列性も利用できる (Bottom Level)。たとえば、固有値を求めるために配置する領域の数を N_Γ 、領域ごとの積分点数を N_{int} とし、連立一次方程式の解法に N_{sol} 個の演算コアを割り当てるとすると、利用する総演算コア数は

$$N_{total} = N_{sol} \times N_{int} \times N_\Gamma$$

となる。

図1にSS法の階層的な構造を示す。解法のもつ3階層に対応させて、計算機ハードウェアの演算ノードを階層的にグループ化する。計算中に階層をまたがった通信はほとんど発生せず、効率的な計算の実行が可能となる。

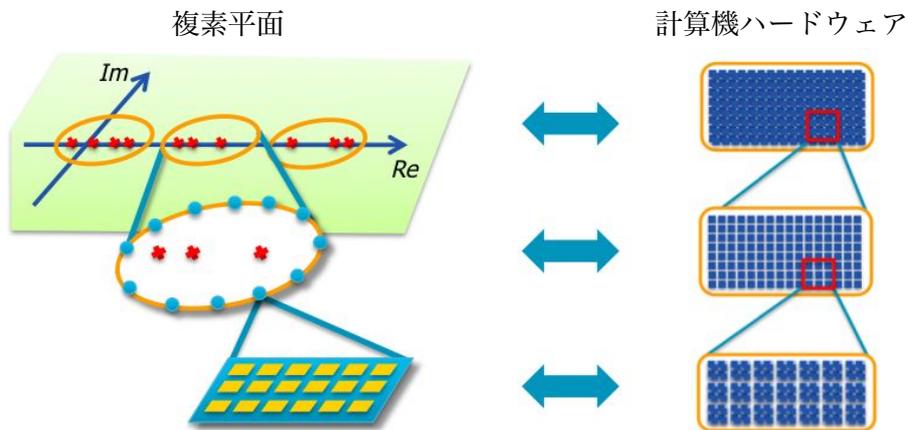


図 1: SS法の階層的な構造

より効率的に適用するためには、領域の設定など方法のパラメータを適切に決めておく必要がある。文献 [4] では確率的な手法によって少ない手間で広い範囲の固有値分布を調べる方法が示されている。標準固有値問題のとき $T(z_j)$ はシフト行列となり、Krylov 部分空間のシフト不変性が利用できるため連立一次方程式を解くための計算量を削減できる [10, 11]。また、シフト点の配置も問題の特性に応じて行うことで、より効率的な計算が可能となる [11]。

4. 数値例

周回積分を用いた固有値解法を非線形固有値問題に適用したいくつかの数値例を示す。

数値例 1. 遅延時間 τ を考慮した遅延微分方程式から得られる固有値問題 [8],

$$(zI - A_0 - A_1 e^{-\tau z})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

ここで、行列の次元は $n = 3,600$ で A_0, A_1 は 3 重対角である。遅延時間は $\tau = 1$ とした。

SS 法のパラメータは、積分点数 $N = 32$ 、ブロックサイズ (V の列数) $L = 10$ とした。 Γ は中心 0、半径 2 の円とした。計算は MATLAB を用いて倍精度で行った。SS 法で現れる連立一次方程式は直接法を用いて解いた。

図 2 に複素平面上での原点付近の固有値分布を示す。図中で記号 $+$ は固有値を示し、記号 \bullet は積分点を表す。領域内に 6 個の固有値がある。表 1 に得られた固有値の値と残差を示す。指数関数を含む固有値問題に対して、領域内の固有対が得られていることが分かる。

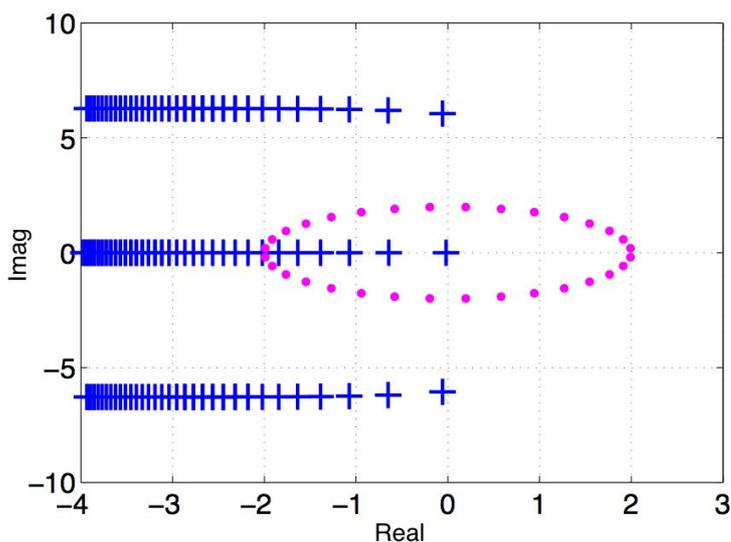


図 2: 数値例 1 の固有値分布

表 1: 求めた固有値と残差 (数値例 1)

k	$\hat{\lambda}_k$	$\ T(\hat{\lambda}_k)\mathbf{x}_k\ _2$
1	$-1.8430999460091 - 0.00000000001795i$	4.1×10^{-11}
2	$-1.6360041143475 - 0.00000000000933i$	2.9×10^{-11}
3	$-1.3873471247021 + 0.0000000000012i$	1.8×10^{-11}
4	$-1.0733987902064 + 0.0000000000117i$	6.1×10^{-12}
5	$-0.6447181064859 - 0.0000000000080i$	1.4×10^{-12}
6	$-0.0189025363809 + 0.0000000000005i$	4.5×10^{-13}

数値例 2. 量子ドットの電子状態計算で現れる 5 次多項式固有値問題 [7],

$$T(z)\mathbf{x} = (A_0 + zA_1 + z^2A_2 + z^3A_3 + z^4A_4 + z^5A_5)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

の固有対を求める。ここで、行列の次元は $n = 186,543$ である。

Γ は中心 0.6, 半径 0.2 の円を虚軸方向に 0.1 倍した楕円 ($\alpha = 0.1$) とした。積分点数を $N = 24$, ブロックサイズを $L = 4$ とした。連立一次方程式は複数右辺ベクトル向きの反復解法である Block BiCGGR 法 [17] を用いて解き, 相対残差が 10^{-10} となったところで反復を停止した。表 2 に結果を示す。この問題では領域内の実軸上に 6 個の固有値がある。

表 2: 求めた固有値と残差 (数値例 2)

k	$\hat{\lambda}_k$	$\ T(\hat{\lambda}_k)\mathbf{x}_k\ _2$
1	0.417282797679849	1.3×10^{-10}
2	0.599865532468985	6.2×10^{-10}
3	0.599865533101223	8.3×10^{-11}
4	0.717694132081799	1.7×10^{-10}
5	0.730239765797513	1.0×10^{-10}
6	0.792362444547822	6.4×10^{-10}

数値例 3. 加速器の設計において現れる非線形固有値問題 [9],

$$T(z) = K - \lambda M + i \sum_{j=1}^p \sqrt{\lambda - \sigma_j^2} W_j.$$

ここで, $K, M, W_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は対称で, M は正定値である。行列の次元は $n = 1,100,242$ で, 問題中のパラメータは $p = 1$, $\sigma_1 = 0$ である。

表 3: 求めた固有値と残差 (数値例 3)

k	$\hat{\lambda}_k$	$\ T(\hat{\lambda}_k)\mathbf{x}_k\ _2$
1	716.612476579150 + 0.000000221305 i	3.6×10^{-13}
2	718.960538663024 + 0.000000841959 i	2.5×10^{-13}
3	722.566812632947 + 0.000001645112 i	1.0×10^{-13}
4	727.037838429705 + 0.000002404169 i	1.8×10^{-13}
5	731.852598839981 + 0.000002969716 i	1.6×10^{-13}
6	736.417477593787 + 0.000003286917 i	9.7×10^{-14}
7	740.176719982116 + 0.000003421542 i	8.9×10^{-14}
8	742.655019547186 + 0.000003664992 i	1.1×10^{-13}
9	743.442930908112 + 0.000001948657 i	7.8×10^{-14}

この問題では、640 付近から右側の実軸に近い数十個程度の固有値が必要とされる。領域 Γ は、中心 700、半径 50 の円を虚軸方向に 0.1 倍し、

$$z_j = \gamma + \rho(\cos \theta_j + i \alpha \sin \theta_j), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

とした。ここで $\gamma = 700$, $\rho = 50$, $\alpha = 0.1$, $\theta_j = 2\pi(j - 1/2)/N$, $N = 32$, $L = 8$ である。

計算は筑波大学計算科学研究センターの並列クラスタである、T2K-Tsukuba システム上で倍精度で行った。計算ノードは 1 ノードあたり 4 コアの AMD Opteron 2.3GHz が 4 ソケットで構成され、メモリーは 32GB である。この計算ノードを 1 ノード (16 コア) から 32 ノード (512 コア) まで変えて時間を計測した。

連立一次方程式は Intel MKL の疎行列直接解法である PARDISO を用いて解いた。PARDISO は共有メモリー型のため、T2K-Tsukuba の場合 1 ノード 16 コアまでしか使うことができない。しかし、SS 法では複数のシフト点で別々の方程式を独立に計算するため、用いたシフト点の数 $N (= 32)$ まで同時に実行できる。これにより、512 ($= 16 \times 32$) コアまで利用している。表 3 に得られた固有値と残差、表 4 にコア数を変えたときの計算時間と speedup の比を示す。表より、512 コアでも十分な並列効率が得られていることがわかる。固有値を求める領域を複数設定したときには、領域ごとにも並列に計算できるため、さらに多くの計算ノードまで高いスケーラビリティが期待できる。

図 3 に 4 つの領域 ($\Gamma_1 \sim \Gamma_4$) を設定したときの計算時間を示す。連立一次方程式を解くための PARDISO には 8 コアを割り当てたため、4 つの領域を合わせると $8 \times 32 \times 4 = 1024$ コアを用いている。 Γ_1 , Γ_2 に対するプロセスがほぼ同時に処理を開始し、 Γ_3 , Γ_4 に対するプロセスが少し遅れて開始している。計算時間のほとんどは連立一次方程式を解く時間が占めていることがわかる。

表 4: T2K-Tsukuba システムでの実行時間とスピードアップ比 (数値例 3)

#cores	16	32	64	128	256	512
Solution time (sec.)	3770.1	1905.7	981.2	506.7	276.1	151.8
Speedup (ratio)	–	1.98	1.94	1.94	1.84	1.82

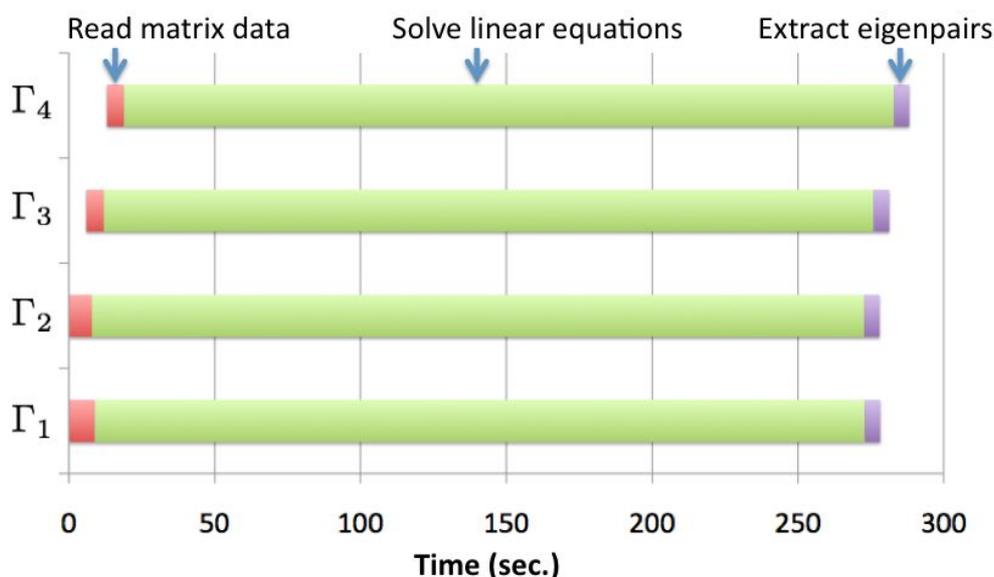


図 3: T2K-Tsukuba システム (1024 コア) での計算時間 (数値例 3)

5. おわりに

大規模な非線形固有値問題を解くための周回積分を用いた固有値解法について述べた。この方法は、多項式固有値問題、指数関数や平方根を含む固有値問題など、さまざまな種類の非線形固有値問題に適用可能である。階層的な並列構造をもつため、超並列型のクラスタシステムに適しており、とくに大規模計算で性能を発揮する方法である。

方法を効率的に利用するためには、問題に適した積分路の配置や積分点数などの各種のパラメータの設定が必要であり、これらを問題に応じて適切に設定する方法の開発が実用化において重要となる。また、計算時間のほとんどを複素平面上でのシフト点における連立一次方程式の求解が占めており、大規模で複数の右辺ベクトルをもつ連立一次方程式の高速な解法の開発が求められる。

これまでモデル化の段階で非線形固有値問題への帰着は避けられる傾向があったが、効果的な解法を提供することでモデル化の制約が低減されることが期待される。

参考文献

- [1] J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami and K. Kimura, A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, *JSIAM Letters* 1, 52–55, 2009.
- [2] J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami and K. Kimura, A numerical method for polynomial eigenvalue problems using contour integral, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 27, 73–90, 2010.
- [3] T. Betcke, N. J. Higham, V. Mehrmann, C. Schröder and F. Tisseur, NLEVP: A collection of nonlinear eigenvalue problems, *MIMS EPrint* 2008.40, 2008.
- [4] Y. Futamura, H. Tadano and Tetsuya Sakurai, Parallel stochastic estimation method of eigenvalue distribution, *SIAM Letters* 2, 27–130, 2011.
- [5] I. Gohberg and L. Rodman, Analytic matrix functions with prescribed local data, *J. d'Analyse Mathématique* 40, 90–128, 1981.
- [6] T. Ikegami, T. Sakurai and U. Nagashima, A filter diagonalization for generalized eigenvalue problems based on the Sakurai-Sugiura projection method, *J. Comput. Appl. Math.* 233, 1927–1936, 2010.
- [7] F. Hwang, Z. Wei, T. Huang and W. Wnag, A parallel additive Schwarz preconditioned Jacobi-Davidson algorithm for polynomial eigenvalue problems in quantum dot simulation, *J. Comput. Phys.* 229, 2010.
- [8] E. Jarlebring, K. Meerbergen and W. Michiels, An Arnoldi method with structured starting vectors for the delay eigenvalue problem, *Proc. 9th IFAC Workshop on Time Delay Systems*, Prague, 2010.
- [9] L Q. Lee, Z. Li, C. K. Ng and K. Ko, Omega3P: A parallel finite element eigenmode analysis code for accelerator cavities. *Tech. Report SLAC-PUB-13529*, 2009.
- [10] T. Mizusaki, K. Kaneko, M. Honma and T. Sakurai, Filter diagonalization of shell-model calculations, *Phys. Rev. C* 82, No. 024310, 2010.
- [11] H. Ohno, Y. Kuramashi, H. Tadano and T. Sakurai, A quadrature-based eigensolver with a Krylov subspace method for shifted linear systems for Hermitian eigenproblems in lattice QCD, *JSIAM Letters*, 2, 115–118, 2010.
- [12] T. Sakurai and H. Sugiura, A projection method for generalized eigenvalue problems, *J. Comput. Appl. Math* 159, 119–128, 2003.
- [13] T. Sakurai and H. Tadano, CIRR: a Rayleigh-Ritz type method with contour integral for generalized eigenvalue problems, *Hokkaido Math. J.* 36, 745–757, 2007.
- [14] T. Sakurai, J. Asakura, H. Tadano, T. Ikegami and K. Kimura, A method for finding zeros of polynomial equations using a contour integral based eigensolver, *Proc. Symbolic Numeric Computations 2009*, Kyoto, 143–147, 2009.
- [15] T. Sakurai, J. Asakura, H. Tadano and T. Ikegami, Error analysis for a matrix pencil of Hankel matrices with perturbed complex moments, *JSIAM Letters* 1, 76–79, 2009.
- [16] T. Sakurai, H. Tadano and Y. Kuramashi, Application of block Krylov subspace algorithms to the Wilson-Dirac equation with multiple right-hand sides in lattice QCD, *Comput. Phys. Commun.* 181, 113–117, 2010.
- [17] H. Tadano, T. Sakurai and Y. Kuramashi, Block BiCGGR: A new block Krylov subspace method for computing high accuracy solutions, *JSIAM Letters* 1, 44–47, 2009.