正則自己同型群による複素多様体の特徴付けの試み

児玉 秋雄（金沢大学大学院自然科学研究科）

1. 基本問題

複素多様体 M に対して, $\mathrm{Aut}(M)$ を M の正則自己同型群とする. $\mathrm{Aut}(M)$ は写像の合成を積とする群であるが, コンパクト開位相を入れることにより, M に連続的に作用する位相変換群となる. さらに, M が $\mathbf{C}^n$ 内の有界領域である場合には, 良く知られている H. Cartan の定理により, $\mathrm{Aut}(M)$ は実リー群の構造を持つ (cf. [19]). しかし, 一般的には $\mathrm{Aut}(M)$ はリー群の構造を持たない. 例えば, $k+\ell \geq 2$ のとき, $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ はリー群構造を持たない巨大な群であり, その構造は極めて複雑である (cf. [2], [21]).

さて, 今 $\mathbf{C}^n$ 内の領域 D が $\mathbf{C}^n$ に双正則同値である, すなわち D から $\mathbf{C}^n$ の上への双正則写像 $F : D \to \mathbf{C}^n$ が存在すると仮定しよう. このとき, 明らかに $\mathrm{Aut}(D)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ は位相群として同型になる. それでは, この逆は成り立つか？ すなわち, “$\mathbf{C}^n$ 内の領域 D に対して, $\mathrm{Aut}(D)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ が位相群として同型であるならば, D は $\mathbf{C}^n$ に双正則同値であるか？”, さらに問題を一般化して,

基本問題: 2 つの n 次元連結複素多様体 M, N に対して, それらの正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ と $\mathrm{Aut}(N)$ が位相群として同型であるならば, M と N は双正則同値であるか？

について考えてみたい. もちろん, M, N に何の条件も付けなければ, この問題の答えは否定的である. 実際, “$\mathbf{C}^n$ 内の滑らかな境界を持つ強擬凸有界領域の族 $\{D_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ で, すべての $\mathrm{Aut}(D_t)$ は恒等変換のみか

らなる群であり，D_s が D_t に双正則同値であるのは $s=t$ の場合に限る” となるものが存在する (cf. [5], [9]). 同様に，$\mathbf{C}^n$ 内の一般複素楕円体の族 $\{E(k,\alpha) \mid k \in \mathbf{N}, 0 < \alpha \in \mathbf{R}\}$ に対しても，“すべての $\alpha \neq 1$ に対して，$\mathrm{Aut}(E(k,\alpha))$ は互いに同型な正則自己同型群を持ち，しかも $E(k,\alpha)$ が $E(\ell,\beta)$ に双正則同値であるのは $(k,\alpha)=(\ell,\beta)$ の場合に限る” ということが知られている (cf. [13], [20]). しかし，また一方では，多様体 M, N に関する何らかの条件のもとで，この基本問題が肯定的に解決される場合もあることが知られている (cf. [10], [11], [6], [14, 15, 16, 18]).

本講演では，この基本問題に関して既に得られている結果には簡単に触れることとし，主に（企画特別講演の趣旨を踏まえて）それらに関連して自然に起こるいくつかの問題について話してみたい.

２. いくつかの結果

上記の基本問題に関して得られた結果をまず述べ，その後の節で関連するいくつかの問題について議論したい.

定理 1 ([15; Theorem 2]). M を n 次元連結複素多様体で，その正則包として n 次元 Stein 多様体 $\widehat{M}$ を持つものとする. また，k を $0 \leq k \leq n$ である整数とする. このとき, $\mathrm{Aut}(M)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k})$ が位相群として同型であるならば, M は $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k}$ に双正則同値である.

$\mathbf{C}^n$ 内の領域はその正則包として n 次元 Stein 多様体を持つという事実 (cf. [19; Chapters 6, 7]) に注意すれば，$\mathbf{C}^n$ 内の領域 M に対してこの定理が応用出来ることに注意しておきたい. また，この定理から直ちに $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{\ell})$ の位相群としての構造に関して, 次のことがわかる:

系. 負でない整数の組 (k,ℓ) と (k',ℓ') に対して, $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^{k'} \times (\mathbf{C}^*)^{\ell'})$ が位相群として同型であるのは $(k,\ell) = (k',\ell')$ の場合に限る.

Ahern-Rudin [1] で示されているように, $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^m)$ が抽象群として同型であるのは $n = m$ の場合に限る. このことから, 上記の系においても, 2 つの群が単に抽象群として同型であるという仮定のもとで, 同様のことが成り立つのではないかと思われる.

B^m を $\mathbf{C}^m$ 内の単位球とするとき，次のことが成り立つ:

定理 2 ([6]). *M を n 次元連結 Stein 多様体とし，k は $0 \le k \le n$ を満たす整数とする．このとき, $\mathrm{Aut}(M)$ と $\mathrm{Aut}(B^k \times \mathbf{C}^{n-k})$ が位相群として同型であるならば, M は $B^k \times \mathbf{C}^{n-k}$ に双正則同値である.*

定理 3 ([18]). *M を n 次元連結 Stein 多様体で，$n \ge 2$ とする．また，$\mathbf{B} = B^{n_1} \times \cdots \times B^{n_s}$ を $\mathbf{C}^{n_j}$ 内の単位球 B^{n_j} の直積とする．ここで, 各 n_j は $n_j > 1$, $\sum_{j=1}^{s} n_j = n$ を満たすものとする．このとき, $\mathrm{Aut}(M)$ の位相部分群 G で $\mathrm{Aut}(\mathbf{B})$ と位相群として同型であるものが存在するならば, M は $\mathbf{B}$ に双正則同値である.*

ある n_j に対して，$n_j = 1$ である場合にもこの定理は成り立つと予想されるが，現時点でこのことは未だ証明出来ていない．しかし，すべての $n_j = 1$ であるとき，すなわち，$\mathbf{B}$ が $\mathbf{C}^n$ 内の単位多重円板 Δ^n である場合には，定理 3 の証明とは全く異なった手法により，この予想が正しいことが証明出来る:

定理 4 ([16]). *M を n 次元連結複素多様体で，その正則包として n 次元 Stein 多様体 $\widehat{M}$ を持つものとする．このとき, $\mathrm{Aut}(M)$ の位相部分群 G で $\mathrm{Aut}(\Delta^n)$ と位相群として同型であるものが存在するならば, M は Δ^n に双正則同値である.*

この定理から直ちに次のことがわかる:

系．M を n 次元連結 Stein 多様体，または $\mathbf{C}^n$ 内の領域とする．このとき，$\mathrm{Aut}(M)$ の位相部分群 G で $\mathrm{Aut}(\Delta^n)$ と位相群として同型であるものが存在するならば, M は Δ^n に双正則同値である．

上記の定理 1〜3 の証明においては，トーラス作用の標準化に関する Barrett-Bedford-Dadok の良く知られた結果 [3; Theorem 1] をより一般化した，次の定理が本質的な役割を果たす:

定理 5 ([17]). M を n 次元連結複素多様体でその正則包として n 次元 Stein 多様体 $\widehat{M}$ を持つものとし，K はコンパクト連結リー群でその階数 $r(K)$ (:= K の極大連結可換閉部分群の次元) は n であるとする．また，$\rho : K \to \mathrm{Aut}(M)$ を連続な単射準同型写像とする．このとき，M から $\mathbf{C}^n$ 内のあるラインハルト領域 D 上への双正則写像 $F : M \to D$ と自然数 $n_1, \cdots, n_s$ で $\sum_{j=1}^{s} n_j = n$ を満たすものが存在して

$$F\rho(K)F^{-1} = U(n_1) \times \cdots \times U(n_s) \subset \mathrm{Aut}(D)$$

となる．ここで，$U(n_j)$ は n_j 次ユニタリ群である．

特に，この定理の応用として得られる次の定理 6 は，単位球の直積 $\mathbf{B}$ の正則自己同型群による特徴付けに関する定理 3 の証明において重要である:

定理 6 ([17; Theorems 1, 2]). G を $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ の連結な位相部分群でリー群構造を持つものとする．このとき，次のことが成り立つ:

(1) G がコンパクトであるならば，その階数 $r(G)$ は n 以下である．さらに，$r(G) = n$ のときには，ある元 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ と自然数 $n_1, \cdots, n_s$ で $\sum_{j=1}^{s} n_j = n$ を満たすものが存在して

$$\varphi G \varphi^{-1} = U(n_1) \times \cdots \times U(n_s) \subset \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$$

となる．

(2) $m \geqq n$ である任意の自然数 m に対して，G と $\mathrm{Aut}(B^m)$ は位相群として同型になることはあり得ない.

なお，この定理の (2) において，“条件 $m \geqq n$ は落とせない”．実際，$m < n$ の場合には，定理 6 の (2) が成り立たないような具体例が存在することを注意しておく.

３．いくつかの問題

定理 1〜4 におけるモデル空間 $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k}$, $B^k \times \mathbf{C}^{n-k}, \cdots$ を D_0 とおけば，いずれの場合にも $\mathrm{Aut}(D_0)$ は D_0 に推移的に作用している．このことから，まず次の問題をあげておきたい:

問題 1．２つのノンコンパクトな連結複素多様体 M, N が等質であるとき，すなわち，$\mathrm{Aut}(M), \mathrm{Aut}(N)$ がそれぞれ M, N に推移的に作用しているとき，基本問題は肯定的に解決されるか？

なお，ここでは M, N として一般の複素多様体を考えているので，それらの正則自己同型群はリー群構造を持つとは限らないし，また多様体への作用は固有であるとも限らない.

次に，定理 1, 2 において $k = n$ の場合，および定理 3 において $s = 1$ の場合を考えてみよう．このような場合には，n 次ユニタリ群 $U(n)$ が多様体 M に正則自己同型群として連続的，かつ効果的に作用し，そしてこのとき定理の結論は，M は $\mathbf{C}^n$ または B^n に双正則同値であるということである．実は，Isaev-Kruzhilin [11] は $U(n)$ が正則自己同型群として連続的，かつ効果的に作用するような連結複素多様体の分類を行っている．彼らの議論は極めて難解なものであるが，その分類の結果の応用として，（$k = n$ の特別な場合ではあるが）M がその正則包として Stein 多様体を持つという仮定なしに，定理 1 が成り立つことを示している．このようなことから，自然な（しかしながら難解であると思われる）問題として

問題 2. ユニタリ群の直積 $U(n_1)\times\cdots\times U(n_s)$ が正則自己同型群として連続的，かつ効果的に作用するような連結複素多様体を分類せよ.

があげられる．定理 3 で考えた単位球の直積 $\mathbf{B}=B^{n_1}\times\cdots\times B^{n_s}$ はまさにこのような $U(n_1)\times\cdots\times U(n_s)$-作用を許容する多様体の典型的な例である．

さて，M を定理 1〜3 の仮定を満たす n 次元複素多様体とすれば，n 次元トーラス T^n が M に正則自己同型群として連続的，かつ効果的に作用する．従って，Barrett-Bedford-Dadok の結果 [3] により，M は $\mathbf{C}^n$ 内のあるラインハルト領域 D であるとしてよい．このとき，定理 1〜3 を証明するためには，D がモデル空間 D_0 と双正則同値である場合以外のすべての可能性を排除出来ることを示す必要があるのだが，その証明には非常に有効な一つの手段が用いられた．そのためには，個々のモデル空間 D_0 に応じて，$\mathrm{Aut}(D_0)$ のある "都合の良い" 位相部分群 Γ_0 を選ぶ必要があった．定理 1〜3 におけるモデル空間 D_0 の正則自己同型群は，ある意味で非常に大きく，そのような部分群 Γ_0 を選ぶことは比較的容易であったが，n 次元多重円板 Δ^n の正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(\Delta^n)$ は余りにも窮屈すぎて，そのような都合の良い部分群をどうしても見つけ出すことが出来なかった．このような事情から，n 次元多重円板 Δ^n の正則自己同型群による特徴付けに関する定理 4 の証明には，定理 1〜3 の証明とは全く異なったアイディアが要求された．次の問題を述べるために，ここでその証明の一端を思い出しておこう．まず，定理 4 にあるような多様体 M には n 次元トーラス T^n が正則自己同型群として作用するから，定理 1〜3 の証明と同様に，M は $\mathbf{C}^n$ 内のラインハルト領域 D であるとしてよい．さて，$\mathrm{Aut}(\Delta^n)$ の単位元の連結成分 $\mathrm{Aut}_o(\Delta^n)$ は

$$\mathrm{Aut}_o(\Delta^n)=\mathrm{Aut}(\Delta_1)\times\cdots\times\mathrm{Aut}(\Delta_n),\ \Delta_j=\{z_j\in\mathbf{C}\mid |z_j|<1\},$$

と直積構造を持つことがわかっている．そこで，与えられた位相群同型 $\Phi:\mathrm{Aut}(\Delta^n)\to G$ により，各 $\mathrm{Aut}(\Delta_j)$ に対応する G の位相部分

群 G_j を考えると，G_j は $\mathrm{Aut}(\Delta_j)$ と同型な実 3 次元単純リー群構造を持つ．このとき，定理 4 の証明のキーポイントの一つは "適当な点 $p \in D$ に対して，p を通る G_j の軌道 $G_j \cdot p$ は単位円板 Δ に双正則同値である D の 1 次元複素部分多様体である" という事実であった．このことから，もしも次の問題が肯定的に解決出来るならば，定理 3 は（定理 4 の証明と同じ方法により）一般の条件 "$n_j \geqq 1$" のもとで証明出来るはずである:

問題 3. D を $\mathbf{C}^n$ 内のラインハルト領域，L を $\mathrm{Aut}(D)$ の位相部分群とする．また，m は自然数で $m \leqq n$ とする．このとき，もし L が $\mathrm{Aut}(B^m)$ と位相群として同型であり，かつ適当な点 $p \in D$ の L-軌道 $L \cdot p$ が D の m 次元複素部分多様体であるならば，$L \cdot p$ は小林双曲型多様体であるか？

L には，$\mathrm{Aut}(B^m)$ のリー群構造から，自然に $\mathrm{Aut}(B^m)$ と同型な単純リー群構造が入り，$\mathrm{Aut}(D)$ にはコンパクト開位相を入れているので，L は D に正則自己同型群として連続的に作用するリー群である．従って，Bochner-Montgomery [4] の古典的な結果から，L は D に正則自己同型群として作用するリー変換群である．しかし，問題 3 において，D は有界領域であるとは仮定していないので，点 p での L の固定部分群 L_p はコンパクトであるとは限らないことに注意しておく．

最後に定理 6 との関連で，次の問題をあげておきたい:

問題 4. $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ の連結な位相部分群 G でリー群構造を持つものを決定せよ．

問題の部分群 G がコンパクトリー群である場合には，定理 6 からその階数 $r(G)$ はつねに n 以下であり，しかも "$r(G) = n$ のときには，G は $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ 内で $U(n) \subset GL_n(\mathbf{C})$ のある部分群に共役である" ことがわかっている．しかし，$r(G) < n$ である一般のコンパクトリー群 $G \subset \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ に対しては，次のようなことが知られている (cf. Derksen-Kutzschebauch [7, 8]): "非自明な任意のコンパクトリー

群 G に対して，次のような自然数 $N(G)$ が存在する: $N \geq N(G)$ である任意の自然数 N に対して，G と同型なコンパクトリー群構造を持つ $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^N)$ の位相部分群 $\widetilde{G}$ で，$GL_N(\mathbf{C})$ のどんな部分群にも共役でないようなものが存在する”．このようなコンパクトリー群 $\widetilde{G}$ の存在性と定理 6 の結果を考慮すれば，自然に次の問題が起こる:

問題 4-1．G を $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ のコンパクト連結位相部分群でリー群構造を持つものとする．このとき，“G の階数 $r(G)$ が $k \leq r(G) \leq n$ を満たすならば，G は $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ 内で $GL_n(\mathbf{C})$ のある部分群に共役である”となるような n にだけ関係して G には無関係な自然数 $k = k(n)$ $(1 < k < n)$ が存在するか？

さて，G を $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ のコンパクト連結位相部分群でリー群構造を持つものとすれば，$\dim G \leq n^2$ である．実際，$\mathbf{C}^n$ 内の任意の有界領域 U を一つ取り，その G-軌道 $V := G(U)$ を考えると，V は $\mathbf{C}^n$ 内の有界領域で，G は自然に $\mathrm{Aut}(V)$ の部分群と見なせる．ここで，$\dim G > n^2$ であると仮定すれば，$\dim \mathrm{Aut}(V) > n^2$ であり，（V が双曲型であることに注意すれば）$\mathrm{Aut}(V)$ の V への作用は固有であるから，V は $\mathrm{Aut}(V)$ の等質空間であることがわかる (cf. Kaup [12])．従って，与えられた一点 $p \in V$ での $\mathrm{Aut}(V)$ の固定部分群 $\mathrm{Aut}_p(V)$ は $\mathrm{Aut}(V)$ の極大コンパクト部分群であり，$\dim \mathrm{Aut}_p(V) \leq \dim U(n) = n^2$ である．これより，G は $\mathrm{Aut}_p(V)$ のある部分群と共役になるから，$\dim G \leq \dim \mathrm{Aut}_p(V) \leq n^2$ となるが，これは我々の仮定に反する．従って，$\dim G \leq n^2$ であると結論される．この事実より，素朴な疑問として“G がノンコンパクトの場合にはどうか？”という問題が起こる:

問題 4-2．G を $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ のノンコンパクト連結位相部分群でリー群構造を持つものとする．このとき，“$\dim G \leq N$” となるような n にだけ関係して G には無関係な自然数 $N = N(n)$ が存在するか？

いずれにしても， $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ の構造に関しては多くの問題が残されているのが現状である．

参考文献

[1] P. Ahern and W. Rudin, *Periodic Automorphisms of* $\mathbf{C}^n$, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), 287–303.

[2] E. Andersén and L. Lempert, *On the group of holomorphic automorphisms of* $\mathbf{C}^n$, Invent. Math. **110** (1992), 371–388.

[3] D. E. Barrett, E. Bedford, and J. Dadok, T^n*-actions on holomorphically separable complex manifolds*, Math. Z. **202** (1989), 65–82.

[4] S. Bochner and D. Montgomery, *Groups of differentiable and real or complex analytic transformations*, Ann. of Math. **46** (1945), 685–694.

[5] D. Burns, S. Shnider and R. O. Wells, *On deformations of strictly pseudoconvex domains*, Invent. Math. **46** (1978), 237-253.

[6] J. Byun, A. Kodama and S. Shimizu, *A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and a Euclidean space*, Forum Math. **18** (2006), 983–1009.

[7] H. Derksen and F. Kutzschebauch, *Nonlinearizable holomorphic group actions*, Math. Ann. **311** (1998), 41–53.

[8] H. Derksen and F. Kutzschebauch, *Global holomorphic linearization of actions of compact Lie groups on* $\mathbf{C}^n$, Contemp. Math. **222** (1999), 201–210.

[9] R. E. Greene and S. G. Krantz, *Deformation of complex structures, estimates for the* $\bar{\partial}$ *equation, and stability of the Bergman kernel*, Adv. Math. **43** (1982), 1–86.

[10] A. V. Isaev, *Characterization of* $\mathbf{C}^n$ *by its automorphism group*, Proc. Steklov Inst. Math. **235** (2001), 103–106.

[11] A. V. Isaev and N. G. Kruzhilin, *Effective actions of the unitary group on complex manifolds*, Canad. J. Math. **54** (2002), 1254–1279.

[12] W. Kaup, *Reelle Transformationsgruppen und invariante Metriken auf komplexen Räumen*, Invent. Math. **3** (1967), 43–70.

[13] A. Kodama, *Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains $E(k,\alpha)$ in $\mathbf{C}^n$*, Tohoku Math. J. **40** (1988), 343–365.

[14] A. Kodama and S. Shimizu, *A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space*, Osaka J. Math. **41** (2004), 85–95.

[15] A. Kodama and S. Shimizu, *A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space, II*, J. Math. Soc. Japan **58** (2006), 643–663.

[16] A. Kodama and S. Shimizu, *An intrinsic characterization of the unit polydisc*, to appear in Michigan Math. J. (2008).

[17] A. Kodama and S. Shimizu, *Standardization of certain compact group actions and the automorphism group of the complex Euclidean space*, to appear in Complex Variables & Elliptic Equations (2008).

[18] A. Kodama and S. Shimizu, *An intrinsic characterization of the direct product of balls*, in preparation.

[19] R. Narasimhan, Several complex variables, Univ. Chicago Press, Chicago and London, 1971.

[20] I. Naruki, *The holomorphic equivalence problem for a class of Reinhardt domains*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. **4** (1968), 527–543.

[21] J. P. Rosay and W. Rudin, *Holomorphic maps from $\mathbf{C}^n$ to $\mathbf{C}^n$*, Trans. Amer. Math. Soc., **310** (1988), 47–86.

「正則自己同型群による複素多様体の特徴付けの試み」

児玉　秋雄（金沢大学大学院自然科学研究科・教授，理学博士）

　大学院生のころから有界領域に関する研究，特にその正則自己同型群の構造についての研究を続けてきましたが，ふと気が付くと最近はもっぱら非有界領域に関係することばかりやっていたようです．今後も具体的な領域，例えばｎ次元複素ユークリッド空間などの正則自己同型群に関する研究をねばり強く続けていきたいと思っています.