

格子めぐり

北海道大学 大学院理学研究科 松本圭司

September 19, 2004

Abstract

我々の身の回りにはいろいろな格子があり、人知れず生活の役に立っている。この講演では数学的な格子の定義を与え、基本的な性質を解説する。理解を深めるために、いろいろな格子をコンピューター画像や模型を利用して紹介する。そして格子理論と深くかかわる玉詰問題、接玉問題、玉覆問題についてふれる。数多くの未解決問題が残っているこれらの問題に関するエピソードや現在までの研究の歴史を紹介する。

1 格子の定義

d 個の実数の組 $X = (x_1, \dots, x_d)$ たちの集合 \mathbb{R}^d で、以下のような 1 次結合と距離が定義されているものを d 次元ユークリッド空間という。

$$\begin{aligned} aX + bY &= (ax_1 + by_1, \dots, ax_d + by_d) \\ \|X - Y\| &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_d - y_d)^2} \end{aligned}$$

ここで $X = (x_1, \dots, x_d)$, $Y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, $a, b \in \mathbb{R}$ とする。

2 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^2 は座標平面のことであり、3 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 は座標空間のことである。4 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^4 は集合的には

$$\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

であり、第 4 の座標がある。

定義 1 r 個の \mathbb{R}^d の元

$$\begin{aligned} E_1 &= (e_{11}, \dots, e_{1d}), \\ E_2 &= (e_{21}, \dots, e_{2d}), \\ &\vdots \\ E_r &= (e_{r1}, \dots, e_{rd}), \end{aligned}$$

をとり、 E_1, \dots, E_r たちの整数係数の 1 次結合全体の集合

$$L = \{n_1 E_1 + \dots + n_r E_r \mid n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^d$$

を格子という。

いろいろな格子やそれらの性質を紹介する。

2 2次元格子

2次元平面 \mathbb{R}^2 の原点 $O = (0, 0)$ と2点

$$A = (a_1, a_2), \quad B = (b_1, b_2)$$

が一直線上にないとする。

定義 2 集合

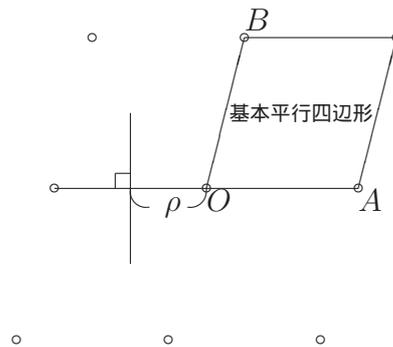
$$L = \{m(a_1, a_2) + n(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

を2次元格子という。

集合

$$H = \{u(a_1, a_2) + v(b_1, b_2) \mid 0 \leq u, v \leq 1\}$$

をこの格子 L の基本平行四辺形といい、その面積を格子 L の行列式といい $\det(L)$ で表す。



原点 O と O 以外の格子の点 P との最短距離の半分

$$\rho = \frac{1}{2} \min_{P \in L - \{O\}} \|P - O\|$$

をこの格子 L の詰め込み半径という。格子 L の点 P を中心とする合同な円たちを描くとき、互いに交わらないようになる最大半径が格子 L の詰め込み半径である。

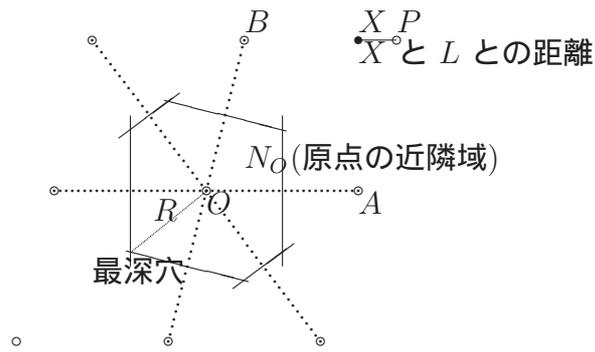
\mathbb{R}^2 の点 X に対し、 X に最も近い格子 L の点 P との距離

$$\min_{P \in L} \|XP\|$$

を点 X と格子 L との距離という。点 X と格子 L との距離が最大となる \mathbb{R}^2 の点 X を L の最深穴といい、その最大距離 R をこの格子 L の被覆半径という。格子 L の点 P を中心とする合同な円たちを描くとき、それらの円たちで平面 \mathbb{R}^2 が覆われる最小半径が格子 L の被覆半径である。

格子 L の点 P に対し、平面 \mathbb{R}^2 の点 X で P と X との距離が格子 L の P 以外の任意の点 Q と X との距離以下となるものの集合

$$N_P = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \|X - P\| \leq \|X - Q\|, \text{ for } P \neq Q \in L\}$$



を P の近隣域という。

中心 P の円で近隣域 N_P に含まれるものの最大半径が詰め込み半径で、近隣域 N_P を含むものの最小半径が被覆半径である。

また、格子 L の点 P と Q に対し、近隣域 N_P と近隣域 N_Q とは合同で、 \mathbb{R}^2 は N_P たちで覆われる。

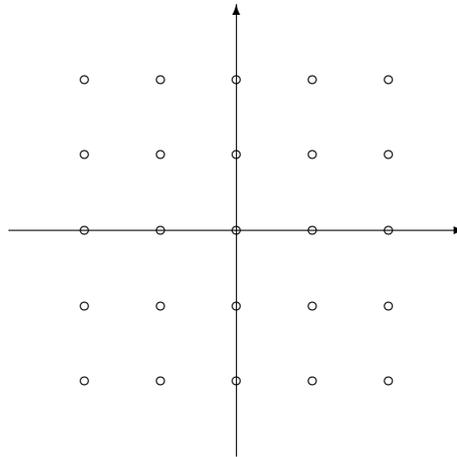
例 1 (正方格子)

$$A = (1, 0), B = (0, 1)$$

として得られる格子

$$L = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

は正方格子と呼ばれる。



正方格子

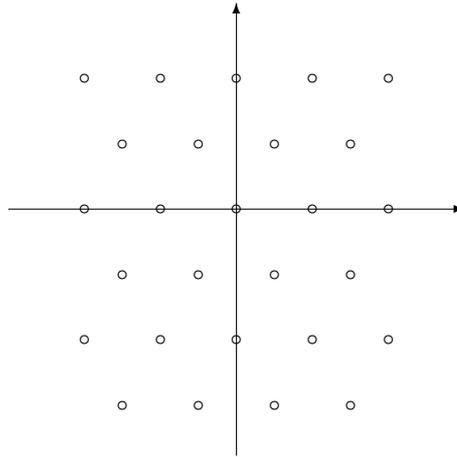
例 2 (六角格子)

$$A = (1, 0), B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

として得られる格子

$$L = \left\{ \left(m + \frac{1}{2}n, \frac{\sqrt{3}}{2}n\right) \in \mathbb{R}^2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

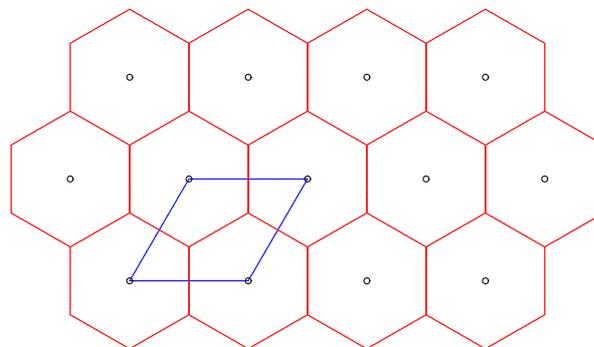
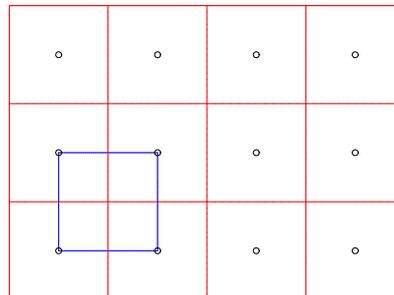
は六角格子と呼ばれる。



六角格子

正方格子では行列式は 1、近隣域 N_P は 1 辺の長さが 1 の正方形で、詰め込み半径が $\frac{1}{2}$ 、被覆半径が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

六角格子では行列式は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、近隣域 N_P は 1 辺の長さが $\frac{1}{\sqrt{3}}$ の正六角形で、詰め込み半径が $\frac{1}{2}$ 、被覆半径が $\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。



正方格子と六角格子に対する基本平行四辺形と近隣域

格子と関係する古来からの有名な問題がある。

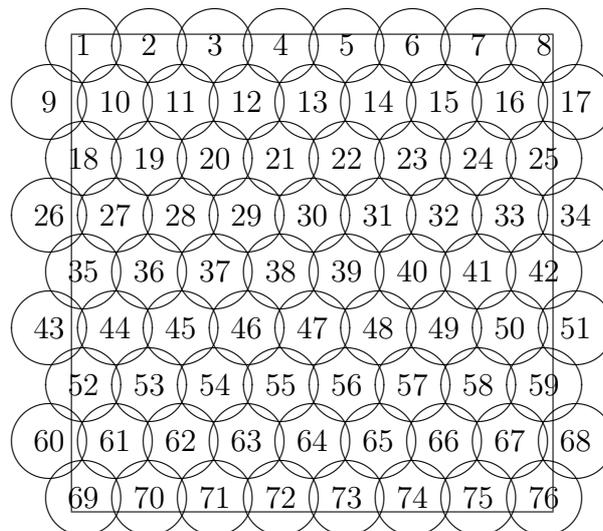
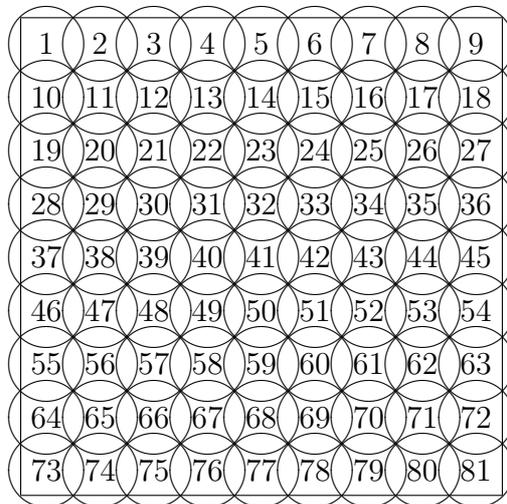
問題 1 (円覆問題) 2次元平面を合同な円たちで最も経済的に覆い尽くす手段を見つけよ。

問題 2 (円詰問題) 2次元平面に合同な円たちを最も密に詰め込む手段を見つけよ。

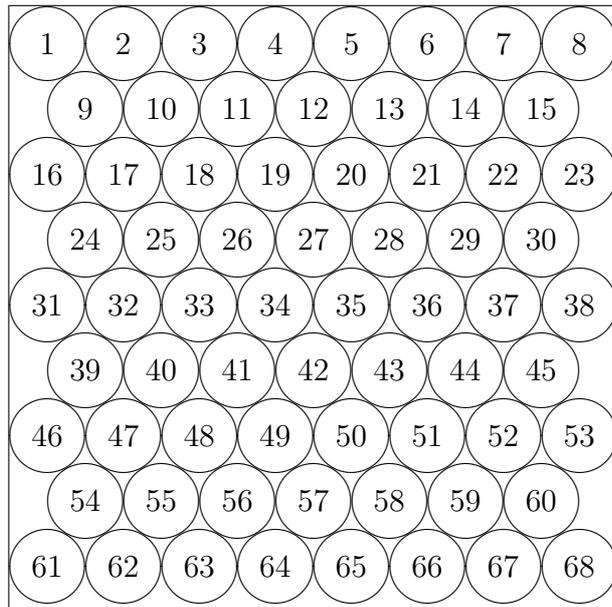
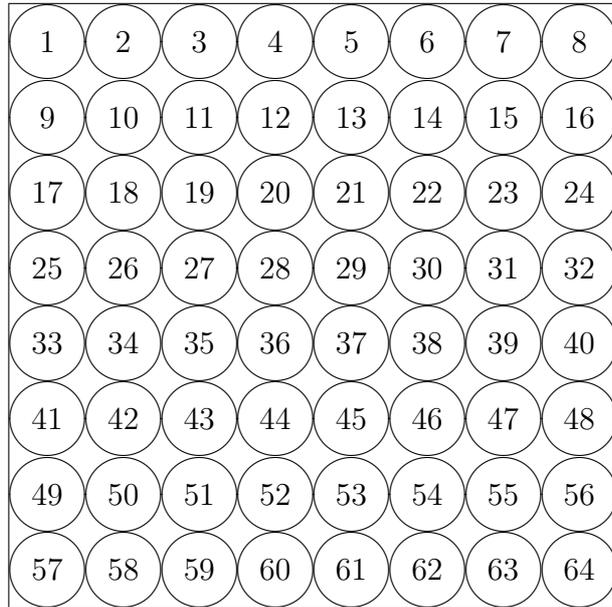
実は [円覆問題] と [円詰問題] はかなりの難問であった。これらの問題の難しさを解説した論文もある。

[円覆問題] が解決したのは 1939 年で R. Kershner による。[円詰問題] が解決したのは 1940 年で L. Fejes による。

いずれも円の中心を六角格子の点に配置すれば良い。六角格子がいかに優れているかは、正方格子と比べてみればよくわかる。



正方格子と六角格子による円覆



正方格子と六角格子による円詰

2.1 3次元格子

3次元空間 \mathbb{R}^3 内の原点 $O = (0, 0, 0)$ と3点

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3), \quad C = (c_1, c_2, c_3)$$

が一つの平面上にのらないとする。

定義 3 集合

$$L = \{lA + mB + nC \in \mathbb{R}^3 \mid l, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

を 3 次元格子という。

3 次元格子に対しても 2 次元格子と同様に、行列式、詰め込み半径、被覆半径、近隣域、等が定義される。

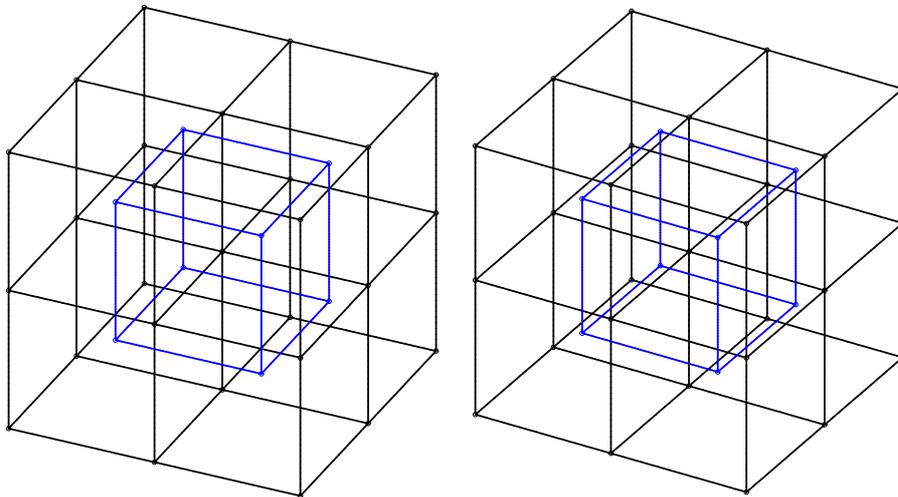
例 3 (立方格子)

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0), \quad C = (0, 0, 1)$$

として得られる格子を立方格子という。

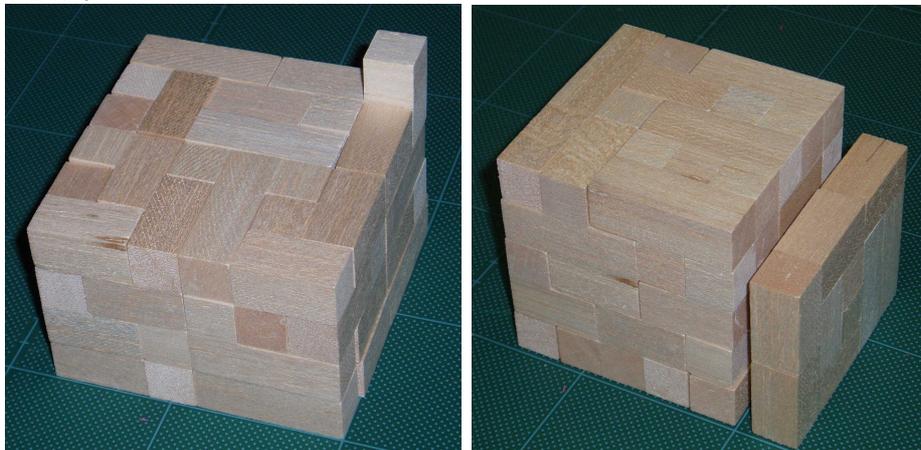
$$L = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3 \mid n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^3$$

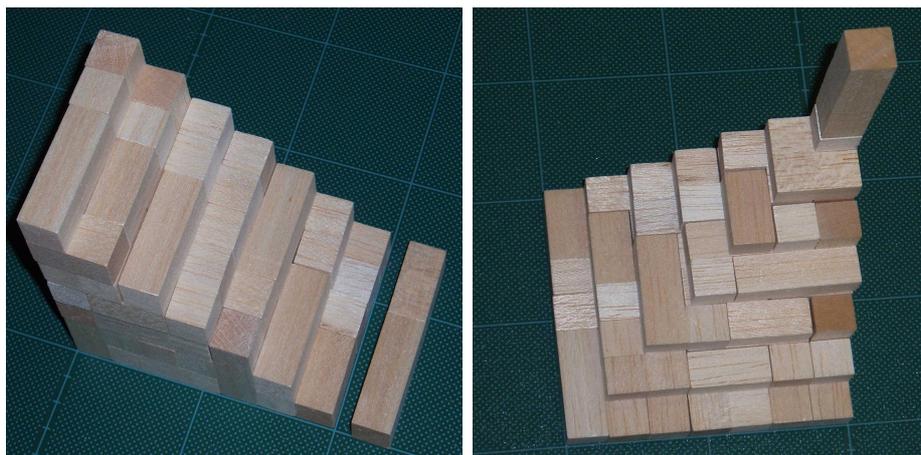
となっている。この格子の行列式は 1 である。詰め込み半径は $\frac{1}{2}$ で、被覆半径は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。近隣域は一辺の長さが 1 の立方体である。



立方格子とその近隣域の Stereographic Figures

立方格子を用いてパズルを作った。合同な立方体 5 個の面どうしを貼りあわせて得られる立体は全部で 29 通りある。29 は素数なのでこれらを全て用いて直方体は作れないが、余分があったり欠落していたりする直方体は構成できる。





パズルの構成例

高校の化学で習う光学異性体は、3次元空間内では一般に鏡に映して得られる物体はもとの物体の平行移動と回転では実現できないことから生じる。このパズルにより、その事情を遊びながら実感することができる。

この講演の最後にクイズを出して、正解者から1名、参加者全員から1名を抽選で選びこのパズルを進呈した。

例 4 (体心立方格子)

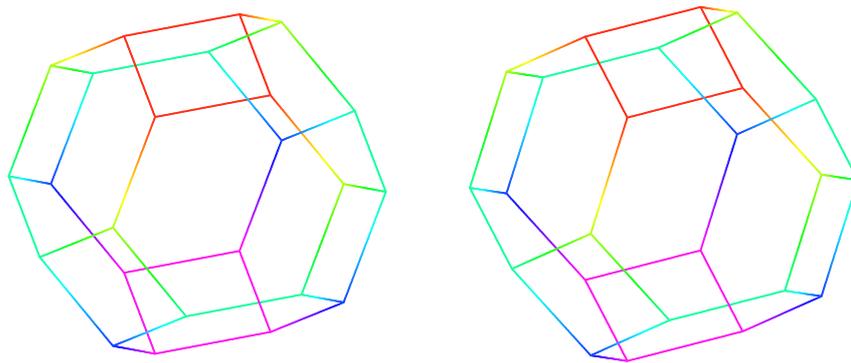
$$A = (2, 0, 0), \quad B = (0, 2, 0), \quad C = (1, 1, 1)$$

として得られる格子を体心立方格子という。体心立方格子は

$$L = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid n_1 + n_2, n_2 + n_3, n_3 + n_1 \text{ は偶数}\}$$

となっている。立方格子にその近隣域の頂点を加えて得られる格子を2倍に拡大したものとみなすことができる。この格子の行列式は4である。詰め込み半径は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ で、被覆半径は $\frac{\sqrt{5}}{2}$ である。

体心立方格子の近隣域は正8面体の頂点を切り落とした立体で、境界面は8枚の正6角形と6枚の正方形からなる。3次元空間がこの立体ですきまなく覆われることも見て確認してほしい。



体心立方格子の近隣域の Stereographic Figures



体心立方格子の近隣域

体心立方格子の近隣域による 3次元空間の被覆

問題 3 (玉覆問題) 3次元空間を合同な球たちで最も経済的に覆い尽くす手段を見つけよ。

体心立方格子の点に球の中心を配置する手段が現在知られているなかで、一番経済的な手段である。私の知る限りそうであることの証明は未だ存在しない。

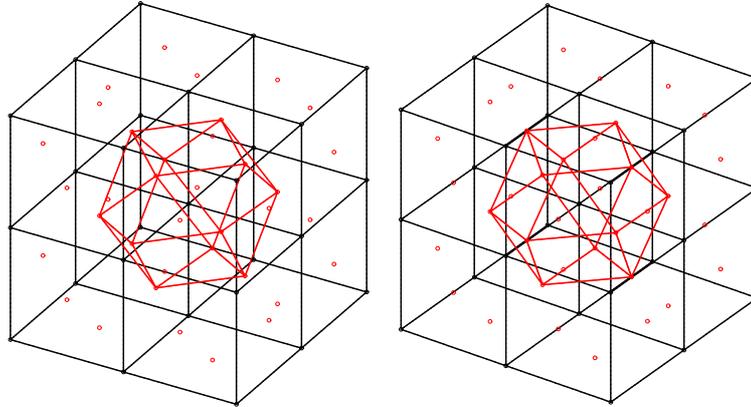
例 5 (面心立方格子)

$$A = (2, 0, 0), B = (1, 1, 0), C = (0, 1, 1)$$

として得られる格子を面心立方格子という。面心立方格子は以下のような集合となる。

$$L = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid n_1 + n_2 + n_3 \text{ は偶数}\}.$$

立方格子に各立方体の面の中心を加える得られる格子を2倍に拡大したものとみなすことができる。この格子の行列式は2である。詰め込み半径は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ で、被覆半径は1である。

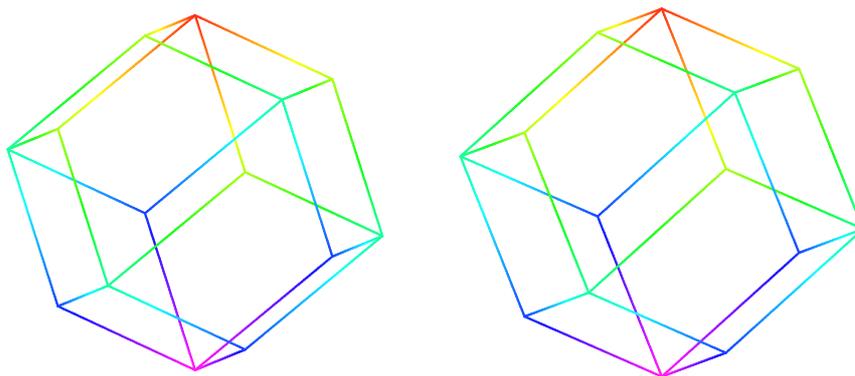


面心立方格子の Stereographic Figures

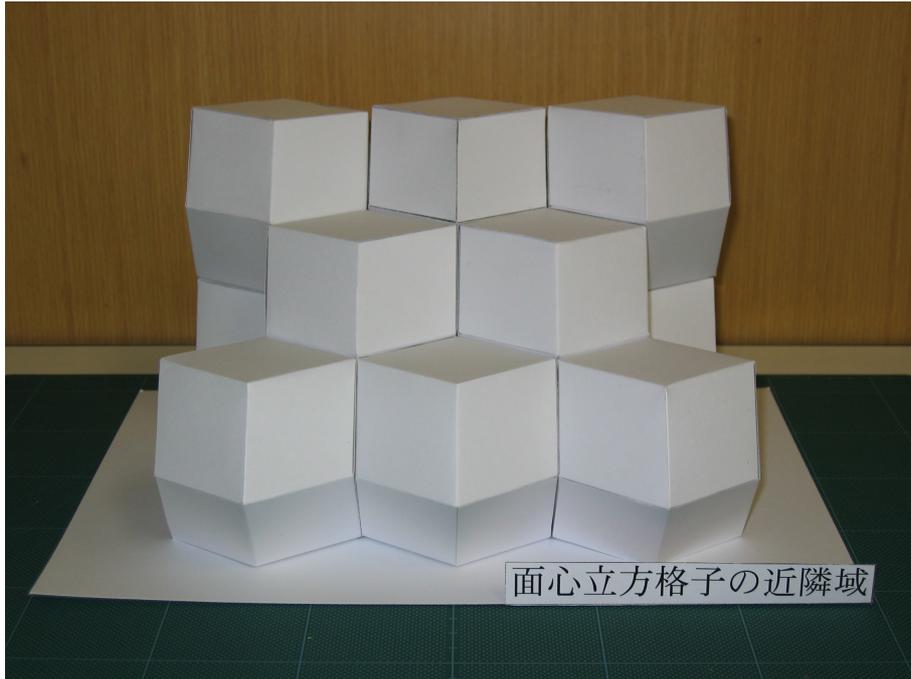
面心立方格子において、原点から最短距離の点は

$$(0, \pm 1, \pm 1), \quad (\pm 1, 0, \pm 1), \quad (\pm 1, \pm 1, 0)$$

で12個ある。上図に現れている多面体は、これらの12個の格子点を頂点とするものであり、中心にある原点の近隣域とは異なる。原点の近隣域は、これらの12個の点たちと原点との垂直二等分面により構成される。それは菱形12面体とよばれる立体で、境界面は12枚の合同な菱形で、24本の辺と14個の頂点ある。3次元空間がこの立体ですきまなく覆われることも見て確認してほしい。



面心立方格子の近隣域の Stereographic Figures



面心立方格子の近隣域による3次元空間の被覆

問題 4 (玉詰問題) 3次元空間に合同な球たちを最も密に詰め込む手段を見つけよ。

Kepler が「面心立方格子の点に球の中心を配置する手段がこの問題の1つの答えである」と予想した。



面心立方格子の点に球の中心を配置する玉詰

この予想は、1997年に Thomas C. Hales と Samuel P. Ferguson により解かれた。2002年の ICM (4年に1度開かれる国際数学会議) で講演されている。文献 [H1],[H2] を参照。

文献 [Ba],[PZ] にあるように、この方面の研究が近年めざましい進歩を遂げている。

問題 5 (接玉問題) 球に合同な球たちをできるだけ多く接するように配置する手段を見つけよ。

接玉問題の答えとして、I. Newton は12個であると予想した。一方、1694年に D. Gregory は13個置けるのではないかと (Oxford のキリスト教教会にあるノートに記している) と予想した。13球問題として後世に伝えられた。

面心立方格子において、原点から最短距離の点は12個あった。これらの12点に球の中心をおけば、みな原点にある球に接している。この手段以外にも12個の球が中心にある球に接するように配置する手段はたくさんある。隙間がかなり生じることを確認してほしい。



実はこの問題は19世紀に12個であることが証明された。J. Leech が初等的な証明を1956年に与えている。その証明は [Ma] に詳しく紹介されている。

2.2 4次元格子

4次元格子に対しても行列式 $\det(L)$ 、詰め込み半径 ρ 、被覆半径 R 、近隣域が同様に定義される。

例 6 (4次元立方格子)

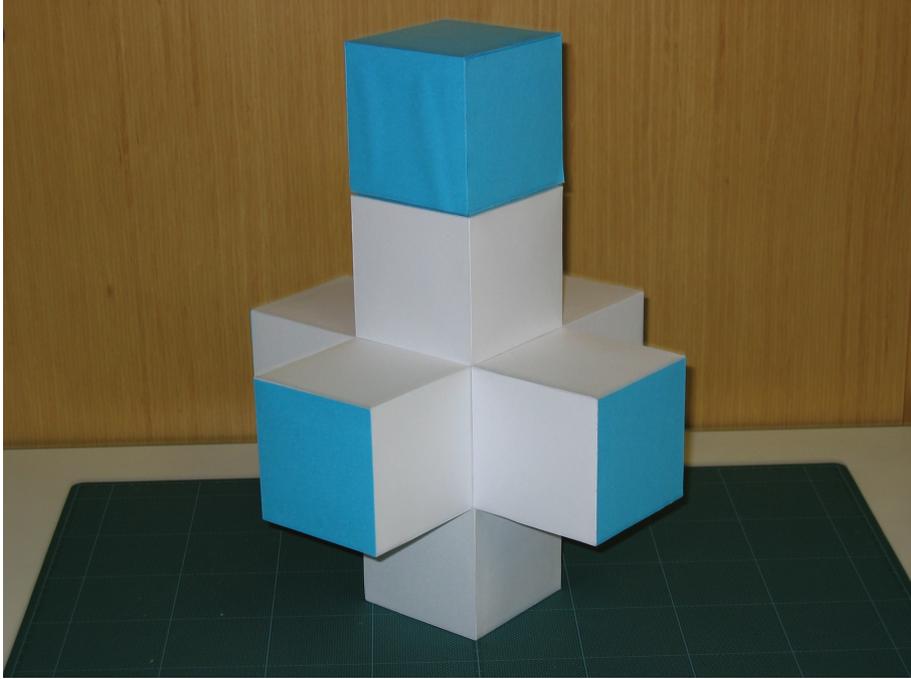
$$E_1 = (1, 0, 0, 0), \quad E_2 = (0, 1, 0, 0), \quad E_3 = (0, 0, 1, 0), \quad E_4 = (0, 0, 0, 1)$$

として得られる格子を4次元立方格子という。

$$L = \{(n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{R}^4 \mid n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^4$$

となっている。この格子の行列式は1である。詰め込み半径は $\frac{1}{2}$ で、被覆半径は1である。近隣域は一辺の長さが1の4次元立方体である。

4次元立方体は見せることはできないが、その展開図は作成できる。



4次元立方体の展開図

例7 (D_4 型格子)

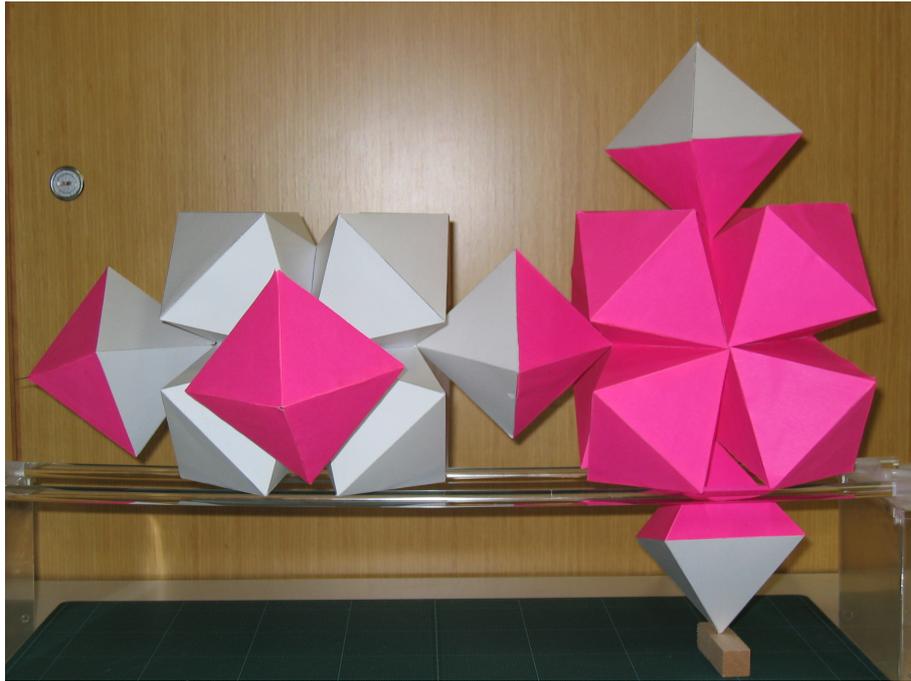
$$\begin{aligned} E_1 &= (-1, -1, 0, 0), & E_2 &= (1, -1, 0, 0), \\ E_3 &= (0, 1, -1, 0), & E_4 &= (0, 0, 1, -1) \end{aligned}$$

として得られる4次元格子を D_4 型格子という。 D_4 型格子は

$$L = \{(n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{Z}^4 \mid n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \text{ は偶数}\}$$

となっている。この格子の行列式は2である。詰め込み半径は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ で、被覆半径は1である。

近隣域は境界が24個の正8面体からなる正24胞体である。この展開図を紹介する。



正 2 4 胞体の展開図

問題 6 (4次元接玉問題) 4次元空間内の球に合同な球たちをできるだけ多く接するように配置する手段を見つけよ。

4次元接玉問題の答えは、24 か 25 であることが知られていたが、最近 O.R. Musin により 24 であることが証明された、[Mu], [T] を参照。正 2 4 胞体の中心に 4次元球を置き正 2 4 胞体の 2 4 個の頂点にその他の 4次元球を配置する手段、つまり D_4 型格子が 4次元接玉問題の答えを与える。

懸賞問題 正 2 4 胞体には何本の辺があるか。

- (1) 288 本 (2) 144 本 (3) 96 本 (4) 72 本

ヒント

正 2 4 胞体には正三角形は 96 ある。

計算方法

正 2 4 胞体は正 8 面体 2 4 個が 2 つの面で貼り合っている。1 つの正 8 面体には正三角形は 8 枚あるので

$$8 \times 24 \div 2 = 96$$

として求められる。

正解 (3) 96 本
計算方法

正 2 4 胞体は正 8 面体 2 4 個が貼り合っている。正 8 面体には辺は 1 2 本あり、1 本の辺には 3 個の正 8 面体が集まっているので

$$12 \times 24 \div 3 = 96$$

として求められる。

References

- [Ba] 坂内英一, 球の詰め込み問題についての最近の進展 -Cohn-Elkies-Kumar の仕事の紹介を中心にして-, 代数的組合せ論, 数理解析研究所講究録 No. 1394 (2004), 1–14.
- [Be] C. Bender, Bestimmung der grössten Anzahl gleich Kugeln, welche sich auf eine Kugel von demselben Radius, wie die übrigen, auflassen, *Archiv Math. Physik (Grunert)* **56** (1874), 302–306.
- [Bl1] H.F. Blichfeldt, On the minimum value of positive real quadratic forms in 6 variables, *BAMS* **31** (1925), 386.
- [Bl2] H.F. Blichfeldt, The minimum value of quadratic forms, and the closest packing of spheres, *Math. Ann.* **101** (1929), 605–608.
- [Bl3] H.F. Blichfeldt, The minimum values of positive real quadratic forms in six, seven and eight variables, *Math. Zeit.* **39** (1935), 1–15.
- [CS] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [F] L. Fejes, Über eien geometrichen Satz, *Math. Z.* **46** (1940), 83–85.
- [H1] T.C. Hales, A computer verification of the Kepler conjecture. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. III (Beijing, 2002), 795–804, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
- [H2] T.C. Hales, Some algorithms arising in the proof of the Kepler conjecture, *Discrete and computational geometry*, 489–507, Algorithms Combin., 25, Springer, Berlin, 2003.
- [KZ1] A. Korkine and G. Zolotareff, Sur les formes quadratique positive quaternaires, *Math. Ann.*, **5** (1872), 581–583.
- [KZ2] A. Korkine and G. Zolotareff, Sur les formes quadratiques, *Math. Ann.* **6** (1873), 366–389.
- [KZ3] A. Korkine and G. Zolotareff, Sur les formes quadratique positives, *Math. Ann.* **11** (1877), 242–292.

- [Ke] R. Kershner, The number of circles covering a set, *Amer. J. Matn.* **61** (1939), 665–671.
- [L] J. Leech, The problem of the thirteen spheres, *Math. Gazette* **40** (1956), 22–23.
- [Ma] 前原 潤, 円と球面の幾何学, 入門 有限・離散の数学 5, 朝倉書店, 東京, 1998.
- [Mu] O.R. Musin, The kissing number in four dimensions, preprint 2003, math. MG/0309430.
- [O] J. Oesterlé, Densité maximale des empilements de sphères en dimension 3 (d’après Thomas C. Hales et Samuel P. Ferguson). *Seminaire Bourbaki*, Vol. 1998/99. *Astérisque* **266** (2000), Exp. No. 863, 5, 405–413.
- [PZ] F. Pfender and G.M. Ziegler, Kissing Numbers, Sphere Packings, and Some Unexpected Proofs, *Notices AMS.* **51** (2004), 873–883.
- [T] 田上 真, Oleg Musin の論文「The kissing number in four dimensions」の紹介, 代数的組合せ論, 数理解析研究所講究録 No. 1394 (2004), 15–27.