書　評

「集合と位相」をなぜ学ぶのか
—数学の基礎として根づくまでの歴史—

藤田博司 著，技術評論社，2018 年

静岡大学名誉教授
大田　春外

長年にわたって理学部および理工学研究科において，公理的集合論の研究に取り組むとともに，数学専攻の学生の教育に携わってきた著者による好著である．

本書の主題である「集合と位相」という科目は，同時期に学ぶ線形代数や微積分などと比べると，学生にとってハードルが高い．一方，授業を行う教員にとっても手腕が問われる科目である．実際，「集合と位相」の授業に苦しんでいる学生や，授業構想の思案に暮れている先生も多いのではないだろうか．本書は，そのような学生，教員はもちろんのこと，大学レベルの数学に関わるすべての人に，ぜひ一読をお勧めしたい本である．また，数学の独学者の数は意外に多い．その人たちの共通の望みは「数学の中身は本に書かれているが，それだけでなく，授業中に話されるような分野の背景や歴史的経緯を知りたい」ということである．本書は，「集合と位相」に関して，まさにその願いをかなえてくれる本である．

本書の性格は，冒頭の「はじめに」の中の著者の言葉に的確に表現されている．最初に，少し長くなるが，その一節を引用しよう．

「··· さて，本書はこの「集合と位相」という科目の，教科書ではありません．これから専門的な数学を学ぼうという人たちに「集合と位相」で講じられる内容を理解する手がかりを提供するために，本来なら授業に盛り込まれるべき「周辺の話題」「余談」「脱線」といったものを集めた本になっています．そのため本書には，「集合と位相」から大きくはみ出した話題が多く含まれています．標準的な「集合と位相」のコース内容を網羅しているわけでもありません．たとえば「距離空間」と「位相空間」についてはほとんど触れずに実数直線や平面の点集合に話を限定していますし，順序関係や同値関係についての一般論もありません．

その代わりに本書では「集合と位相」の基本的アイデアが生まれてきた経緯，そして集合や位相の考え方が数理科学における必須の知識とされるに至った経緯といった，歴史的な事情の説明にもっとも力を入れています．19 世紀初頭に熱の伝導現象の解析のために考え出されたフーリエ級数の方法が，それまでの解析学の基礎づけに変更を迫り，それに答える形で，実数の理論が整備され，無限を扱う数学が生まれた．実数の性質を集合の考え方を用いて調べることから，位相に関する考察の重要性が理解されるようになった．いろいろの数学的概念が集合と位相の言葉で表現されるようになった結果，現代の

数学にとって「集合と位相」の知識は，古代の幾何学にとっての定規とコンパス，小学生にとっての掛け算九九と同様の，基本的なスキルというべきものになっている．そういうストーリーを読み取っていただきたいと思っております．$\cdots$」

本書は全 7 章からなる．第 1 章から第 3 章は，カントールが集合論の着想を得た経緯，第 4 章以後は，カントールの集合論と，それによって数学が変貌して行く過程の話である．次に，各章の内容を紹介しよう．

第 1 章では，時代背景から筆を起こし，熱伝導方程式の数理的な分析のために考え出されたフーリエ級数の話題がとりあげられる．また，積分の定義の不備と関数概念の未成熟から生じたフーリエの理論の問題点が，具体例を通して指摘される．

第 2 章では，任意の関数が三角級数の和として表現されるというフーリエの期待に関して，ディリクレの定理が紹介される．評者は，現代の我々が学ぶ関数の定義「変数 y が変数 x に関連づけられていて，x の数値が与えられるたびに，それに対する y の値がただひととおりに決まる仕組みがあるなら，y は独立変数 x の関数である，といわれる」がディリクレによるものであることを，本書から初めて教わった．次に，ディリクレの仕事を引き継いだリーマンによる三角級数による関数の表示可能性の研究と，そこから「異なる 2 つの三角級数が，まったく同じ関数をあらわすことがあるだろうか」という三角級数の一意性の問題が生じたことが説明される．さらに，ディリクレによる関数の上述の定義に適合するリーマン積分の誕生と，関数の積分可能性の研究を通じて，実数についての知識が求められるようになった事情が明らかにされる．

第 3 章は，いよいよカントールの登場である．最初に，三角級数の一意性の問題に答える 1870 年のカントールの一意性定理が紹介され，次に定理を拡張する過程で生まれた実数の点集合の理論へと進む．ここまで，三角級数の理論の数学的内容には決して深入りしていない．それでいて，その数学的意味が十分に理解できるのは著者の筆力によるものである．さらに，歴史上の数学者の人物像にも紙数がさかれていて，読者をあきさせない．第 3 章の残りの部分では，ワイエルシュトラスの連続の原理，デデキントの切断の原理，カントールの区間縮小法の原理の同値性，すなわち，実数の連続性の 3 通りの表現の同値性が証明される．最後に，実数全体の集合の非可算性について，通常の対角線論法ではなく，区間縮小法に基づくカントールの最初の証明が与えられる．本章は，微積分の基礎としての実数論の格好のテキストになると思う．

第 4 章では，カントールによる集合論が紹介される．集合の用語と記号の説明から始めて，カントールの定理「すべての濃度 $\boldsymbol{a}$ について $\boldsymbol{a} < 2^{\boldsymbol{a}}$ が成立する」までが解説される．この定理から，任意の濃度に対して，それより大きい濃度が存在することが導かれる．これらはどの教科書にも書かれている内容であるが，やさしいことがらにも，著者の専門的知識が反映されていて興味深い．さらに，集合が数学の道具として認識されるようになる初期のステップの話題として，デデキントによる環のイデアルの定義と，切断による実数の定義が論じられる．

第 5 章は，位相の話である．実数直線と平面は同じ濃度を持つ集合である．それらの違いを表現することを目標にして，$\mathbb{R}^m$ 上の位相空間論が展開される．距離，点列の収

束，写像の連続性，内部，閉包，開集合，閉集合，位相同型，連結性といった概念を用意した後，直線と平面が位相同型でないことが証明される．定義および，命題とその証明には，それぞれに著者の教育経験がうかがえる直観的な説明が加えられていて，目からウロコが落ちる思いをする読者もいるに違いない．

第 6 章では，カントールの無限集合の理論が，当初はドイツ数学界における逆風にさらされながらも，次第に 20 世紀の数学者に受け入れられていく様子が生き生きと描かれる．主な内容は，ボレルの測度論，ハイネーボレルの定理とコンパクト性，ルベーグ積分とコルモゴロフの確率論の発展の歴史である．

第 7 章の表題は「集合と位相はこうして数学の共通語になった」である．内容は読者の楽しみのために紹介しないでおこう．最後に，位相空間の定義と，位相空間の間の連続写像の定義が与えられて終わる．通常の教科書の出発点が本書の到達点である．

最後に，評者の感想を述べたい．基礎教育としての「集合と位相」の授業は外から注文を受けやすい．たとえば，微積分の授業担当者からは「実数論はそちらでやっておいて」といわれる．解析学の教員からは「完備性と関数空間の位相はしっかり教えておいてほしい」，幾何学の教員からは「商空間とコンパクト距離空間のルベーグ数はかならず」といった注文を受ける．ときには，「学生が連続性と一様連続性の違いがわかっていない」というような苦情まで来る．それらに応えているうちに，授業内容は限りなくふくらんでいく．しかし，基礎教育の目的は，将来必要となる（面倒な）ことを前もって教えておくことではないだろう．文章の書き方では，先の準備を最初に済ませておくスタイルは読者を困らせる書き方の例とされている．基礎教育の目的は，必要になったときに必要なことを学べるだけの基礎学力を養うことである．この理念にしたがえば，外からの注文をはねのけて，授業を基本的な内容に絞ることもできるはずである．それが本書に書かれているような分野の歴史をふまえていればなおよいだろう．最初に引用したように，著者は，本書は「集合と位相」の教科書ではないと書いている．たしかに，教科書のスタイルでは書かれていない．しかし，評者には，詰め込み型になりがちな「集合と位相」の授業の現状に対するアンチテーゼとして，理想の授業プランを提案しているように感じられてならない．著者には，本書の精神を生かした「集合と位相」の教科書を書いてほしいと思う．