

女子中高生夏の学校 2018

実験・実習，ポスター展示出展報告

東京理科大学経営学部ビジネスエコノミクス学科

今村 悠里

本稿では平成 30 年 8 月 9 日から 11 日に、埼玉県比企郡の国立女性教育会館にて行われた女子中高生夏の学校（以下、夏学）への日本数学会からの出展，特にポスター展示についてご報告いたします。

日本数学会から、清水理佳さん（群馬工業高専）が 2 日目の午前に「サイエンスアドベンチャー I ミニ科学者になろう」（実験・実習）にて「組みひもの数学で遊んで占おう」と題した実験・実習を行い、午後には「サイエンスアドベンチャー II 研究者・技術者と話そう」（ポスター展示）にて今村が「確率論で未来戦略」の出展を行いました。また、大学生・大学院生の TA の方々が企画した「Gate Way」では、日本数学会からのメンバーはグループ「数学屋さん」として、女子中高生の悩みや相談を受け、ゆっくり話すことができました。

実験・実習「組みひもの数学で遊んで占おう」

清水理佳さんが講師として行ったこの実験・実習には、7 名の女子高生が参加してくれました。東京女子大学の大学院修士 2 年生の森下央子さんと学部 4 年生の清水彩音さんが TA として、私は聴講生として、生徒たちと一緒に考えながらお手伝いをさせていただきました。

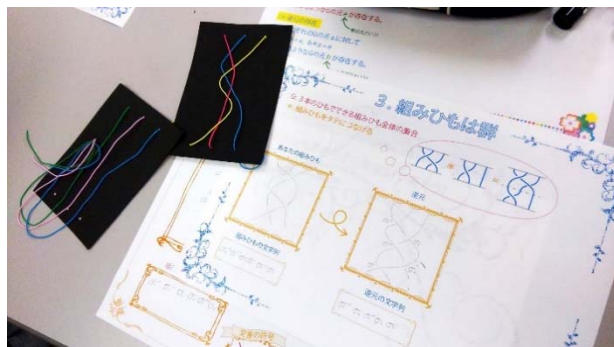
実験・実習はまず、上から下に垂れた 3 本のひもを思い思いに左右に交差させ、自分の組みひもを作るところから始まりました。そして、作った組みひもの交差を上から順に対応した記号で読むことにより、組みひもを記号の列として表現し、それが組みひもの形状を友達に伝えるときに便利な表現となっていることを確認しました。また、組みひも全体が成す集合はふたつの組みひもを上下につなげるという操作によって群をなすことが紹介され、生徒たちは自分の作った組みひもの逆元を、ひもを動かしながら作っていました。逆元を見つけることは容易ではなかったようですが、実際にもとの組みひもの下に逆元の組みひもをつなげ実験し、単位元である交差のない 3 本のひもに戻ったときには、喜びの声があがりました。最後に、自分の作った組みひもの「ラッキーナンバー」を求めました。組みひものねじれ数を生徒にも親しみやすくラッキーナンバーと呼んでいたのですが、それはひもの交

差の符号をすべて足し合わせたものです。ラッキーナンバーは、任意の組みひもに対して上下を固定した上でどんなにひもを移動させても変わりません。つまり不変量であるということですが、参加者は、ひもに具体的に触れながら、ラッキーナンバーはひもを動かしても変えることはできないということを感じることができたようです。組みひもは日常生活にも多く現れます。髪を結う三つ編みは女子にとって身近な3本のひもの組みひもです。三つ編みも表編みと裏編みがあり、それぞれの符号が左右対称になっています。そのとき三つ編みをしていた参加者は残念ながらいなかったのですが、生徒たちは自分の髪を使って三つ編みを作って確認していました。清水さんが監修されたNHKドラマ「この声をきみに」では、結び目理論専攻の数学者の主人公が久し振りに会った娘の髪が編み上げているのを見て「ヤン・バクスター方程式だ」と言ったシーンがあったことの紹介もありました。女子にとっては馴染みのあるヘアアレンジも組みひもの一種であるので、もしかするとときには面白い方程式と関係がある形になっているかもしれないと考えるところごく面白いと感じました。

今回行われた実験・実習の内容の詳細は「数学通信」第22巻第3号(p.11～)の船越紫さん(奈良女子大学理系女性教育開発共同機構)の記事“女子中高生夏の学校2017 実験・実習「組みひもの数学で遊んで占おう」”にあります。



実験・実習の様子



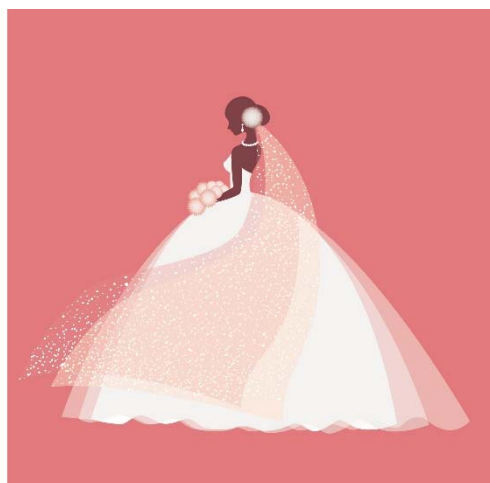
作った組みひもの逆元を求める

ポスター展示「確率論で未来戦略」

ポスター展示は2日目の13時から15時まで、2時間のあいだに中高生が好きなブースを訪れる企画です。参加した42団体がそれぞれのブースでポスターや簡単な実験を用いて研究の紹介や体験を提供しました。日本数学会からは今村が確率論と数理ファイナンスに関する身近な次の問題を用いてネイピア数 ($e \approx 2.718$) の紹介をしました。

1. お見合い問題

ある人が N 人とお見合いをするとする。 N 人には全順位がつけられているとする。これはその人から N 人を見たときの好みの順番と解釈する。お見合いは順番に行い、交際を受け入れた時点でそれ以降のお見合いは行わない。交際を断った場合は次の人とお見合いをし、断った人とは二度と会うことができないとする。最初の k 人全員には交際を断わり、 k 人の中で一番いいと思った人を覚えておく（サンプリングする）。 $k+1$ 人目から後、これまでに会った



人と比べて一番いいと思った人の交際を受け入れるとする。このとき、 N 人全員の中で一番順位が高い人を選ぶ確率は N が十分大きいとき、 $\frac{k}{N} \sum_{i=k+1}^N \frac{1}{i-1} \doteq \log \frac{N}{k}$ である。この確率が最大となる k は $k = \frac{N}{e} \doteq 0.368N$ である。

2. 複利運用とネイピア数

利率（年利）とは、1年間運用したときにもらえる利息の率のことである。例えば、1万円を利率100%で運用すると、1年後にもらえる利息は1万円である。このとき、1年後の総資産は投資した1万円と利息の1万円を合わせた2万円である。この利息の計算方法を単利という。

利息をもらう期間を半年ごとに分けた場合を考える。1万円を利率100%で半年運用すると、半年後には1万円 \times 100% \div 2=0.5万円が利息としてもらえる。半年後の総資産1.5万円を年利100%で半年運用すると、1年後には1.5 \times 100% \div 2=0.75万円が利息としてもらえる。よって、1年後の総資産は投資した1.5万円と利息の0.75万円を合わせた2.25万円である。この利息の計算方法を半年複利という。同様に4ヶ月複利ならば1万円の1年後の総資産は2.37万円、3ヶ月複利ならば2.44万円となる。



同様に4ヶ月複利ならば1万円の1年後の総資産は2.37万円、3ヶ月複利ならば2.44万円となる。

複利回数を増やすと1万円の1年後の総資産の金額は単調に増加する。限りなく複利回数を増やした複利のことを連続複利と呼び、このとき1万円を年100%で運用した1年後の総資産は $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \doteq 2.71828$ 万円となる。

3. 1 期間 2 項モデルにおけるコールオプション価格

現在 100 円の株が 1 期間後には 110 円に上昇、または 95 円に下落する 2 項モデルを考える。株のほかに 100 円が 1 期間後に 105 円となる安全資産があるとする。

1 期間後に 1 株を 100 円で買うことが出来る権利（行使価格 100 円のコールオプション）の現在の価格は、次の方法で求めることができる。

1 期間後のコールオプションの価値は、株が 110 円に上昇した場合は $110 - 100 = 10$ （円）である。株が下落した場合は株と行使価格の差 $95 - 100 = -5$ （円）が負であることからコールオプションの保有者は行使する権利を使わないため 1 期間後のコールオプションの価値は 0 円である。株と安全資産を組み合わせ（ポートフォリオ）を考えることによって、1 期間後にコールオプションの価値がポートフォリオの価値となる株の保有量 x と、安全資産の保有量 y を求める。1 期間後に株が上昇した場合のポートフォリオの価値は $100x + 105y$ 、株が下落した場合は $95x + 105y$ であることから、 x と y は連立方程式 $[100x + 105y = 10, 95x + 105y = 0]$ を満たし、それぞれの保有量は $x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{38}{63}$ であることがわかる。よって、コールオプションの現在価値は、100 円の株 $x = \frac{2}{3}$ と 100 円の安全資産 $y = -\frac{38}{63}$ だけ保有している価値と一致することから、 $100 \times \left(\frac{2}{3}\right) + 100 \times \left(-\frac{38}{63}\right) = 6.35$ （円）である。

4. 多期間 2 項モデルと 中心極限定理

1 期間 2 項モデルは 2 点に値をとることからベルヌーイ分布に従うと解釈することができる。1 期間 2 項モデルを独立に繰り返し多期間 2 項モデルに拡張した場合、取る値の分布は独立なベルヌーイ分布の和である 2



項分布となる。対称な 2 項分布の確率は中心が大きく、端は小さな山形を描く。展示では Galton Board を用いて 2 項分布の分布を調べる簡単な実験を行った。ボードに規則的に画鋲でピンを刺し、一番上から硬貨を落とす。このとき、硬貨は上から順番にピンに当たり、ランダムに左右どちらかに落ちていく。硬貨は 8 段のピンに当たりながら、最後はどこかの領域に落ちる。複数の硬貨を落とすことによって、どの領域に落ちやすいのかの確率を確認した。

ピンの段の数が十分大きいとき、2項分布は近似的に正規分布と呼ばれる連続分布に従う。この正規分布の確率密度関数は、ネイピア数 e を用いて表現される。

5. ブラックショールズ公式

3. では1期間2項モデル、4. では多期間2項モデルを考えた。多期間2項モデルの期間数を限りなく増やすと株価過程はブラックショールズモデルと呼ばれる連続時間モデルに収束する。ブラックショールズモデルとは、株価過程がネイピア数 e の肩にブラウン運動（独立増分で、分布が正規分布に従う連続な確率過程）を乗せた幾何ブラウン運動によって表現される。ブラックショールズモデルのもとでのコールオプション価格は正規分布の分布関数を用いて表すことができ、この公式をブラックショールズ公式と呼ぶ。

展示にあたり、清水理佳さん、森下央子さん、清水彩音さん、そして夏学運営スタッフを務められた大山口菜都美さん（秀明大学）と柏原賢二先生（東京大学）が展示の設営や生徒の対応をお手伝い頂きました。ポスター展示は2時間という限られた中でしたが、途切れることなく多くの女子中高生が訪問してくれました。ネイピア数に関する5つの話題を用意しましたが、すべてを説明するには時間がかかるため、「結婚」と「お金」の2つに分け、生徒にどちらに興味があるのかを最初に聞いてから説明するようにしました。中高生なので恋愛のほうに興味があるのかな、と予想していたのですが、多くの方がお金を選択していたのは驚きでした。結婚問題はまだまだ先のことなのでお金のほうが現実的だったのかもかもしれません。お金やファイナンスの問題は中高生にとっては新鮮なトピックだったと思います。ネイピア数が身近な問題の極限として登場している面白さが伝わったのなら嬉しいです。

学生企画「GateWay」（科学者・技術者などによるキャリア相談）

夏学2日目の夕方に行われた“Gate Way”というプログラムは、女子中高生が理系進路について更に深く知るためのもので、科学者・技術者・TA（理系の女子学部生・院生ボランティア）からアドバイスを受ける企画です。日本数学会と日本数式処理学会のメンバーは「数学屋さん」というグループに配属され、数学に関する悩みや相談のある女子中高生に対応しました。

私に対応したのは高校生が多く、数学の質問を出来る人が学校の先生や友達にはいない、授業が速すぎて考える時間がなく理解しないまま進んでしまう、大学受験に対してどのように勉強するべきなのか、高校2年生に進級してから成績が振るわ

ないことへの不安といった学校の数学に対する相談が多かったです。数学の成績が良くないと数学が苦手なのだと思います。傾向が見受けられましたが、多くの生徒さんは数学に対して興味をもち、数学を考えることは好きだと言っていました。数学に向き合っただけで諦めずに取り組んでいくことは簡単ではないですが、興味を持ち続けることはとても重要だということをお伝えしたのですが上手くいったかどうかはわかりません。ほかの質問内容としては、数学がどのように社会に貢献しているのか、いろんな数学屋さんたちの研究内容について知りたいというものもあり、また、大好きな素数の話をしたいという生徒もいました。いろいろなグループの中から数学屋さんを選んで訪れてきてくれた生徒たちは、やはり「数学好き」で話している間は目が輝いていました。

終わりに

今回清水理佳さんからポスター出展のお声をかけていただいて、たくさんの貴重な経験をすることができました。清水理佳さんにはポスター内容の立案からポスター印刷、展示の手伝いまでご協力いただきました。また、ポスター印刷を提供いただいた群馬工業高等専門学校地域連携テクノセンターの皆様のご協力に感謝いたします。新庄玲子さん（国土舘大学）にはポスターのイラストをオリジナルで描いていただき、ポスターに華を添えて頂きました。数学会メンバーの柏原賢二先生、清水理佳さん、大山口菜都美さん、森下央子さん、清水彩音さんに加え、日本数式処理学会からの参加の藤村雅代先生（防衛大学）と照井章先生（筑波大学）、TAの本多理紗さん（筑波大学4年生）と伊藤綾音さん（筑波大学3年生）には、展示前日にポスターの飾りつけを一緒にしていただき、また「Gate Way」では「数学屋さん」として、さらに研究に関する議論もさせて頂きお世話になりました。日本数学会からは講師やTAの旅費の援助を頂きました。私自身、多くの方に支えられ、今回の夏学に参加させて頂いたことに本当に感謝しております。また参加された女子中高生、女子中高生夏の学校実行委員会、学生TAをはじめ今回の夏学に関わられたすべての方にお礼申し上げます。