書　評

ルベーグ積分入門

テレンス・タオ 著，舟木直久 監訳，乙部厳己 訳
朝倉書店，2016 年

Mynd, Inc.
原　啓介

テレンス・タオと言えば，皆さんご存じの通り，非常に広い分野で活躍している，万能型の天才的数学者であり，世界一のパズルソルバだと言っても過言ではないでしょう．そのタオがルベーグ積分論の教科書を書いたのは，私にはちょっとした驚きでした．なぜなら，ルベーグ積分論（積分論，測度論）は地味と申しましょうか，はっきり言えば，退屈な科目だという印象があるからです．もっと正直になれば，複雑な議論をしたあげく当たり前のことを保証するだけの科目ではないか，と．

私自身，何度か積分論の講義を担当しましたし，（確率論的な）積分論の教科書の翻訳にも関わり，自分で入門書を書いてもいますが，やはり，この退屈さをなんとかしたい，地味なものを面白く書きたい，ごちゃごちゃしたところを綺麗に書きたい，ということをテーマにしていました．そんなところに本書が登場したので，あのタオが，という気持ちになるのも自然でしょう．皆さんが積分論をそんな風に思っているかは分かりませんが……

それで思い出すのは私がまだ若い頃，積分論について友人が言った一言です．そのとき，私たちは積分論の講義の仕方について議論していたのですが，彼が言うには，「積分論は集合の簡単な計算だけで，すごいことがすっきりと示せて面白い」とのことでした．私自身は上に書いたように思っていましたから，そんな見方があったかと驚くと同時に，彼我の才能の差に愕然としたものでした．

では，天才タオは積分論の教科書をどう書いたか．それを解説する前に，積分論を講義する，または教科書を書く上での二通りの方針について整理しておきたいと思います．第一の方針は，特にルベーグ測度に重点を置いて，実解析学の文脈でおおむね歴史の発展順に書く方法，そして第二の方針は天下りに抽象的な測度の定義を与える方法です．無論，それぞれ一長一短であり，入門した後の「その先」をどう考えるかや，各先生の好みや問題意識によって，この二つの方針のブレンドの具合が変わってくるわけです．

第一の方法の長所は，まず何より自然であることです．複雑な図形の面積や体積を内側から，または外側から，小さな正方形や立方体のような基本図形の和集合で近似するという考え方は，ギリシャ時代以来の伝統です．ユークリッド空間の中の図形の面積や体積のような自然な概念に，自然な近似でアプローチし，ある種の「完備化」によってルベーグ測度へ拡張して，さらに一般の測度へと抽象化，整理する．これ以上自然なアイデアはないでしょう．さらに，この近似のアプローチは解析学の王道でもあります．こ

の方向から測度やルベーグ積分の概念に向かっていくことは，解析学における様々なテクニックを学ぶ絶好の機会にもなります．

しかし，この「自然な」手法には，どうしてもごちゃごちゃとして，見通しが効き難くなってしまう，という欠点があります．特に初学者は道に迷いがちですし，また，実解析学を専攻するわけではない読者にとってみれば必要でない枝葉が多すぎること，そして逆に，応用には必須のはずの項目が扱われないことも問題です．

一方，第二の方法の長所は，測度の本質が凝縮された公理的定義からスタートして，その定義から性質を導き，さらに具体例を構成したりするという順序が，ほとんどすべての数学者にとって好ましく，すっきりとして感じられることです．またこのアプローチは，目的がはっきりしていれば（例えば，測度論的な確率論の準備にしたい[1]，など)，かなり効率よく学習を導くことができます．

しかし，この方法の短所は，一言で言えば「綺麗事だけでは済まない」ことです．抽象的に定義した測度は，単に求められる性質を満たすものに過ぎないので，具体的に測度を構成することは別問題です．通常これは「拡張定理」を用いて一見は綺麗に行うのですが，拡張定理自体の証明が難しく，また時にその適用もトリッキィなので，結局，綺麗事だけでは済まないわけです．また，具体的な測度の構成で生じるこのような問題が，解析学の醍醐味でもある，ということが，著者や講師を悩ませます．

さて，タオはどちらのアプローチを用いたか，というと前者，第一の方法です．しかも最右翼（最左翼かも知れませんが）であることは，本書から「ルベーグ可測性」の定義 (本書 p.19, 定義 1.2.2) を引用すれば一目瞭然でしょう．(ここで $m^*(\quad)$ はルベーグ外測度．)

定義 (ルベーグ可測性)．集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ がルベーグ可測であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$m^*(U \backslash E) \leq \epsilon$ となるような E を含む開集合 $U \subset \mathbb{R}^d$ がとれることをいう．もし E がルベーグ可測であれば，$m(E) := m^*(E)$ のことを E のルベーグ測度と呼ぶ（この量は $+\infty$ かもしれない)．

このように本書では，最初からおなじみの開集合を本質的に登場させて，位相とのつながりを意識しながら測度論を展開します．測度論は位相をほとんど全く切り離して議論することも可能ですし,（第二の方法の論旨からすれば）そうすべきだという考え方ももっともなので，これは本書の特徴だと言えるでしょう．

さらにこの定義は，本書で言う以下の「リトルウッドの三原則」と呼ばれる近似の大方針に従っているとも考えられます (本書 1.3.5 項)．

1. (可測な) 集合というのは，だいたい区間の有限和である．
2. (絶対可積分な) 関数というのは，だいたい連続である．
3. (各点) 収束関数列というのは，だいたい一様収束している．

[1]もちろん確率論の奥深くには，豊かな実解析学の土壌が広がっているのではありますが，とりあえずいまは「入門」段階での話として．

つまり，本書の特徴は実解析学の伝統と深い教養のもと，ある意味の王道によって，ルベーグ積分論を展開している，ということです．この方針は，（タオも本書でそう明言していますが）シュタインらの実解析学の教科書 [1] を参考にしたもので，プリンストン大学の解析学教程の方針なのでしょう．

最後に，本書の他の特徴にも触れておきたいと思います．まず一つは，タオの数学全般に渡る学識，特に実解析学に関する深い教養からくる，見事なコメントが随所に見られることです．本書の「まえがき」ですら，私は二度，三度と目から鱗が落ちるような思いがしました．

また，本書の全く独創的な第 2 章からも分かるように，世界随一のパズルソルバとしてのタオの顔がうかがわれることです．第 2 章以外の各所にも，問題を解くためのコツとも考えられるコメントが見られます．(例えば，しばしば繰り返される「イプシロンの余地をもらえ」．See also [2])．

本書の欠点と考えられる部分にも触れておくべきでしょう．と言っても，本書の成立の事情からして，必ずしも欠点とまではみなせないと思いますが，強いて言えば，あまりに多くの内容が「演習」（解答なし）に任されていて，そのどれも易しくなく，一部は非常に難しく，かなりの予備知識が必要です．また，本書には図が一つもありません (これは教育的配慮だと，「日の出の補題」の箇所の脚注に書かれています)．これらからして，この本で「入門」されることは，かなりチャレンジングでしょう．

結論として，本書はタオの深い教養に基づいて，実解析学の中の重要な一分野としてルベーグ積分論を位置づけて解説した，きわめて豊かで興味深い教科書です．このような本を翻訳する困難を引き受けられた訳者の乙部厳己さんと監訳者の舟木直久先生に，感謝と敬意を捧げるとともに，皆さんにも一読をおすすめしたいと思います．

参考文献

[1] E. Stein and R. Shakarchi, “Real analysis. Measure theory, integration, and Hilbert spaces”, Princeton Lectures in Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

[2] T. Tao, “An epsilon of room”, Vol.I, Americal Mathematical Society, Providence RI, 2010.