

# ジョン・フォーブズ・ナッシュと弧空間のお話 —個人的な視点で—

東京女子大学現代教養学部特任教授  
石井 志保子

## 1 数学者ジョン・フォーブズ・ナッシュ

この稿はナッシュと彼が導入した弧空間に関するお話で、今年3月の数学会での市民講演会\*の内容をもとにしています。講演会同様、横道に逸れながらの話ですので、気楽に読んでいただければ幸いです。

ジョン・フォーブズ・ナッシュ (John Forbes Nash, Jr, 1928-2015) は経済学分野でよく聞く名前です。

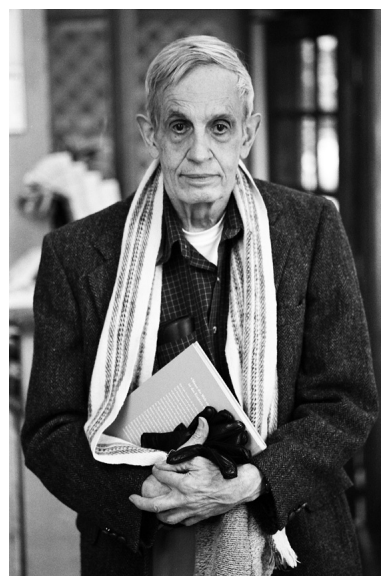
Carnegie Institute of Technology (後のCarnegie Mellon大学) で学士と修士を取得し1950年にPrinceton大学において、「非協力ゲーム」の業績で博士号を取得しました。22歳で博士号を取得したのですから、すばらしく優秀であったようです。その後1950年前後にいくつかのゲーム理論に関する論文を書き、1994年ゲーム理論の功績によりノーベル経済学賞を受賞しました。

一般には「ゲーム理論のナッシュ」として、経済学者と思われているようです。しかし、2015年5月に数学の最高の賞の一つであるアーベル賞を受賞したことからわかるように彼は数学者でした。むしろ数学者としての功績の方がはるかに多く、かつ偉大であると多くの数学者は思っています。

彼の業績を見てみると、

1. “Real algebraic manifolds” (1952, Annals of Math.)
2. “ $C^1$ -isometric imbeddings” (1954, Annals of Math.)
3. “The imbedding problem for Riemannian manifolds” (1956, Annals of Math.)
4. “Analyticity of the solutions of implicit function problem with analytic data” (1966, Annals of Math.)

いずれも微分幾何学における偉大な業績で、年齢的にも、(40歳以下という年齢制限のある) フィールズ賞を受賞しても不思議ではありませんでした。本人も数学者として評価されることを望んでいて、フィールズ賞を意識したような言動があったようですが、受賞には至りませんでした。80歳を過ぎてようやく、もう一つの数学の最高の賞であ



アーベル賞受賞時のナッシュ

\*2017年度年会市民講演会 (2017年3月26日)

るアーベル賞を受賞しました。しかし不運なことに、ノルウェーでのアーベル賞授賞式の帰路、交通事故に遭い、永年連れ添った妻とともに帰らぬ人となりました。

## 2 病気とビューティフルマインド

1964年に廣中平祐氏が、代数幾何学の長年の未解決問題を解決した「標数0の体上の特異点解消理論」を発表した時、世界中の数学者が特異点解消に注目しました。（廣中氏は1970年「標数0の体上の特異点解消理論」でフィールズ賞を受賞）ナッシュも特異点解消に興味を持ったらしく、1968年に特異点解消と特異点の弧空間を結びつける論文“Arc structure of singularities”を書きPrinceton大学のFine Hall Libraryに「提出」しました。

しかしその後、長い間出版されないまま、プレプリントの状態ですら世界中に出回りました。なぜ出版されなかったのかというと、実はその頃ナッシュは統合失調症を患っていたのです。どこかのジャーナルに投稿したのだと思われるのですが、編集者からの修正依頼に応えることができず、そのまま放置されたのではないかというのが大方の見方です。ナッシュは長い間統合失調症に苦しんだようです。

このあたりのことはシルビア・ナサー著の「ビューティフルマインド」(“A Beautiful Mind,” Sylvia Nasar, 2002)に書かれています。ナッシュの天才的な才能と、彼の生き方、病気の軌跡を克明に描写したもので、ナッシュを賛美する内容ではありません。時には冷徹とも思われる描写があり、本人の存命中によくぞこのような本を出版したものだ、と感心しました。この本によると、長い年月のあと、ナッシュの統合失調症はやがて寛解状態になり、ノーベル賞授賞式でもスピーチできる状態になりました。寛解に至るまでの経緯については、ナッシュ自身の短い手記(「ナッシュは何を見たか」(“The Essence of John Nash,” Harold W. Kuhn, Sylvia Nasar に収録)に極めて興味深い記述があります。

「...このようにしてさらに時間が経った。その後徐々に私の見当識の特徴であり続けた妄想に影響された考え方のいくつかを理性的に拒否するようになった。...」

「ビューティフルマインド」によるとナッシュは美談の主人公になれる人格ではなかったようです。筆者は7月に研究集会でナッシュの孫弟子にあたる人にお会いしました。彼はナッシュと面識はなかったのですが、先生からいろいろなエピソードを聞いておられたらしく、「ナッシュは、本当にひどい人だった」と言っておられました。

人格的な問題も、病気の一つの症状かもしれません。「ビューティフルマインド」に描かれているナッシュは全くビューティフルではないのになぜこのような題名をつけたのだろう、と気になっていました。

一方で、映画になった“A Beautiful Mind”はとても美しいものでした。数学への情熱を持ちながら、病気に苛まれ、格闘しながら、やがて穏やかな心を見出す姿が強調されていました。筆者が見て最も美しかったのは万年筆の儀式です。学生のナッシュが、教授のためのレストランに入ると高名な学者らしき人物が食事をしているところへ、何人かの教授が近づいてきて自分の愛用の万年筆をテーブルに置いていく、というものでした。説明はなかったのですが、観客にはそれが最高の敬意の表現だということがわかりました。若きナッシュは

その光景を憧れの目つきで見ているのでした。ナッシュの苦難の人生を描いた映画はやがて終わりに近づき、ノーベル賞を受賞したナッシュが教授用のレストランで食事をしていると、気がついた何人かの教授が近づいてきてナッシュのテーブルに愛用の万年筆をうやうやしく置いていく、というものでした。胸が熱くなるシーンでした。

昨年研究集会のために Princeton 大学に行った時ナッシュと同僚だったガニング教授にお会いして Princeton 大学にはこのような儀式の習慣があったのかとお訊きしたところ、「それはよく訊かれたよ、でもあれは映画会社の創作なんだよ。だって、そんなに万年筆もらったら困るでしょ」と言っておられました。

### 3 弧空間の論文

さて、前節で紹介したものですが、1968年に Princeton 大学の Fine Hall Library に提出した特異点解消と特異点の弧空間を結びつける論文“Arc structure of singularities”に戻ります。短いですが、ナッシュ自身の思い入れが大きい論文で「1966年に Annals of Math. に発表した論文よりも興味深いもの」とナッシュ自身が述べています。

ですが、この論文は奇妙な書き方をしています。通常の数学の論文は、本文ではまず定義から始まり、補題や命題を経て主定理を主張し、それを証明する、という形です。しかし、この論文は、定義や定理という statements の区切りがなく論文全体がひとつながりのエッセイのような形をしています。一見して、定義と主張の見分けがつきにくい「何が書いてあるのかわからない」という人もいます。(この書き方も病気に起因しているのかもしれませんが。)しかし実はこの論文でナッシュは弧空間(arc space)を導入しその空間の上の不思議な問題(通称 ナッシュ問題)を提起しているのです。

ではナッシュ問題とは何でしょうか? これを理解するために2つの概念が必要です。

1. 弧(arc)の族(family)と
2. 本質的因子(essential divisor)です。

まず弧とは何かということを説明します。多様体(特異点も許します) $X$ の弧とは $X$ 上の微小な曲線(小さすぎて、長さを持たない曲線)です。厳密に言えば、 $X$ の基礎体を $k$ とすると、 $k$ 上の射

$$\alpha : \text{Spec}k[[t]] \rightarrow X$$

を $X$ の弧と呼びます。数学の専門家でない方は $\text{Spec}k[[t]]$ は頭(closed point)と尻尾(generic point)しか持たないオタマジャクシのようなもので、それが図形 $X$ に貼り付いている様子をご想像ください。頭が貼り付いている $X$ の点の場所を $\alpha$ の中心と呼びます。 $X$ の弧全体の集合を弧空間(arc space)と呼びます。この空間は多様体としての構造も持ち、 $X$ の性質を反映しているものになっています。例えば、 $X$ が滑らかであれば、どんな点でもその点を中心とする弧全体の集合は「既約」です。つまり一つの固く結束した族(family)になりますが、 $X$ の滑らかでない点(特異点)を中心とする弧全体の集合は、幾つかの族から成っているのが普通です。このように、その点を中心とする弧の族がどれだけあるかということはその点の特徴を表しています。

一方多様体  $X$  の本質的因子 (essential divisor) とは次のようなものです。

廣中の特異点解消理論によって  $X$  の特異点は解消され、滑らかな多様体  $Y$  が得られます。この時  $Y$  は  $X$  を特異点に沿って爆発 (blow-up) させてできているので特異点の部分はもっと大きな、幾つかのかけらに置き換わっています。これを例外因子と呼びます。ここで特異点解消空間  $Y$  はただ一つではなく、無限にあります。したがって例外因子も無限にあります。これらの中で、どんな  $Y$  にも登場する例外因子のことを本質的因子と呼びます。これも何らかの形で、多様体  $X$  の特異点の状況を反映しているものです。

ナッシュ問題とは

どんな多様体  $X$  においても、この「特異点を中心とする弧の族」と「本質的因子」が 1 対 1 に対応するか？

というものです。ナッシュ自身は上記の論文の中で、2次元の  $A_n$  型特異点を持つ多様体  $X$  についてはこの問題について肯定的な答えを提示しています。

1968年に Fine Hall Library に提出された “Arc structure of singularities” は出版されないうまま、プレプリントの状態ですら世界中で読まれ、ナッシュ問題にチャレンジする人が出てきました。Monique Lejeune-Jalabert, Ana Reguera, Gonzalez Sprinberg, Camille Plenat, Marcel Morales, Popescu-Pampu らが貢献して2次元のいくつかの特別な場合に肯定的な解答が得られました。

この間ナッシュの論文 “Arc structure of singularities” は Duke Math. J. に出版されました。1995年のナッシュのノーベル賞を記念する特別号です。3次元以上ではほとんど研究されていなかったのですが2003年 János Kollár (Princeton University) と筆者が任意次元のトーリック多様体について肯定的に解決し、同時に4次元以上の非トーリック多様体で反例を提示することによって、否定的に解決しました。これにより、ナッシュ問題は常に成立するわけではないことがわかりました。しかし、次元を2次元と3次元に限れば、ひょっとしたら成立するかもしれません。

## 4 Sedano での連続講義

長い間ナッシュ問題は2次元の場合にのみ研究されてきました。これは、2次元の場合は最小特異点解消という2次元特有の「良い解消」があったため本質的因子が考えやすいと思われていたからです。そしてほとんどの人は肯定的解決を目指して研究していました。しかし4次元以上の多様体で反例が出たので、これまで楽観的だった研究者は、「ひょっとしたら、2次元もだめかも」と危機感を持つようになり、ナッシュ問題があらためて注目されるようになりました。筆者も「衝撃的(?)」論文の著者の一人として、幾つかの研究集会で招待講演などをさせていただく機会がありました。

2008年にスペインの小村 Sedano で開催された、博士課程の学生のためのワークショップで筆者は集中講義をする機会に恵まれました。初学者向けの弧空間とナッシュ問題の入門講義です。講義は4日間に分けて行われたのですが、質問も活発に出て、多くの学生が興味を持ってくれたようでした。受講者の中に Complutense de Madrid 大学の位相幾何学の准教

授の Javier Fernandez de Bobadilla やその学生の Maria Pe Pereira もいました。筆者の最終日の講義は「皆さんの中から、2次元3次元のナッシュ問題を解決する人が出てくることを希望します」と締めくくりました。

## 5 位相幾何学からの挑戦

翌2009年 Oberwolfach 研究所で Bobadilla と再会しました。彼は「2次元のナッシュ問題に挑戦している」と言っていました。彼は元々 topologist ですが、「ナッシュ問題は位相的な問題に帰着される」と主張していました。筆者ももちろん2次元の場合のナッシュ問題を考えたことはあったのですが、なかなかうまい方法が見つかりませんでした。この問題は純粋に代数的な問題ですが、なかなか解けないのは、別の分野からのアプローチが必要なかもしれない、と思っていましたので、彼の主張を聞いて、「さもありません」と思いました。筆者は当時は、ナッシュ問題は休戦して、弧空間の特異点理論への応用を考えていたところでした。「頑張ってるね」と言って別れました。やがて Bobadilla は学生の Maria Pereira と共著で2次元のナッシュ問題を肯定的に解決する論文を書き、プレプリントのサイト ArXiv に投稿しました。もちろん正式のジャーナルにも投稿しました。しかし、代数学だけでなく位相幾何学にもわたる内容なので審査にはかなり時間がかかると思われました。

そして2012年ついに、“Nash problem for surfaces” は Annals of Math. に掲載されました。これで2次元のナッシュ問題は完全に解決されたことになりました。

後で彼に聞いたところによると、Bobadilla は Sedano での筆者の集中講義で初めてナッシュ問題を知り「これはできそうだな」と思ったということでした。ワークショップでは昼食の後、長い休み時間があり、参加者はその間に周辺の小高い山を散歩しました。私も毎日昼食後に他の参加者達とおしゃべりをしながら歩いたものです。この時 Bobadilla は一人で歩きながら、構想を練り、「うん、うん、この線でいきそうだな」と思ったということでした。Madrid 大学の准教授だった Bobadilla はこの結果によって、脚光を浴びいろいろな研究集会から招待講演を依頼されました。幾つかの有力な大学からオファーを受け、研究環境のもっとも恵まれたバスク応用数学研究所の教授に就任することになりました。一方共著者の学生 Maria Pe Pereira はスペインの、目覚ましい業績を上げた若い研究者に授与されるドゥ フランシア賞を受賞しました。



2012年 Princeton 大学でナッシュとともに写真撮影した Bobadilla

## 6 ナッシュ問題の解決とその後

3次元に関しては2012年 Tommaso de Fernex(Utah University) が3次元のナッシュ問題に反例を構成し否定的に解決されました。Utah 大学の准教授だった de Fernex はこの後同大学の教授に就任しました。

これでナッシュ問題はすべての次元で解決したことになります。2次元では肯定的に、3次元以上では一般には否定的に解決し一方でトーリック多様体の範疇ではすべての次元で肯定的に解決しました。

ナッシュが問題を提起してから45年後のことです。完全に肯定的な解決ではなかったということはつまらない予想だった、ということではなく、或る範疇で肯定的に成立（任意次元のトーリック多様体や2次元多様体）し一般には成立しないということはとても微妙なところをついた問題と言えるでしょう。逆に、「ナッシュ問題が成立するような多様体」という視点を与えることにもなりました。

また研究の過程で弧空間の構造が徐々に解明されてきました。ナッシュ問題は弧空間と双有理幾何学を結びつけるきっかけになり、特異点の研究のために弧空間を用いるのは、極めて有効であることがわかってきました。筆者は現在この方向で研究中です。

## 7 なぜ“beautiful” mind?

石井がナサーによる“A Beautiful Mind”を読んで15年が経過し、最近になって思うことは（ナサーが言いたかったこととは違うかもしれませんが）、ナッシュのように、人格が壊れていても、人生が破綻していても、ひたむきに数学を考えることは美しい、ということではないでしょうか？ また壊れてしまった人間としてナッシュとの関わりを避ける人もある一方で、「Fine Hallの幽霊」と呼ばれながら Princeton 大学の数学科のある Fine Hall ビルディングのあたりを徘徊していたナッシュを排除する人はいませんでした。そしてナッシュの数学的業績を大切に思う人たちが骨を折って、ナッシュのアーベル賞受賞が実現したのです。「数学を大切にすることのような心が美しい」と言えるかもしれません。



当時の Fine Hall（今は別の名前と呼ばれている）。一方数学科の入っている現在の Fine Hall は高層のビルに変わっている。