書　評

鏡映の数学—有限鏡映群の幾何学

A. V. ボロビック，　A. ボロビック 著
小林雅人，陶山大輔，塚本靖之，中島規博，東谷章弘，嶺山良介 訳
丸善出版，2015 年

香川大学教育学部
佐竹　郁夫

鏡映群やルート系は，現在では数学の様々な分野に現れる．その全てを網羅することはできないが，すぐに思いつくものだけでも，複素半単純 Lie 環や Kac Moody Lie 環のルート系に関する鏡映群（Weyl 群），有理曲面や特異点の幾何，古典的な代数幾何における Cremona 変換の研究（Kantor，Coble，Mukai)，K3 曲面，力学系，Painlevé 方程式の研究などが挙げられる．私自身も，孤立特異点を持つ関数の Milnor ファイバーのホモロジーのモノドロミー変換が Picard-Lefschetz 公式により鏡映で与えられることに関連して，鏡映群とそれに対する不変式環の持つ構造 (Frobenius 構造）の研究をしている．このように多岐にわたる分野に同じ構造が顔を出すというのは不思議なことであるが，数学ではよく見られることでもあると思う（現在では団代数がそれにあたるのであろうか).

歴史的にみると，鏡映群の研究は，正多面体との関わりが深い．詳しくは Bourbaki 著「リー群とリー環３」の歴史覚えがきを見ていただくことにするが，正多面体はプラトンの時代から興味をもたれており，高次元の正多面体（正多胞体）の研究は 1850 年頃までの Schlöfli の研究に始まる（これについては Coxeter 著「Regular polytope」を参照．また，河野俊丈著「結晶群」にも解説がある)．正多面体と鏡映との関係の研究は，Möbius(1852) による研究があり，その高次元化は Wythoff 構成として知られている．そして，Coxeter による Coxeter 図形，Coxeter 群の研究がある．それは彼の多面体さらに多胞体への強い興味がその原動力であった．その一方で，彼は Du Val や Weyl との交流があり，代数幾何や特異点における鏡映の問題や複素半単純 Lie 環のルート系の鏡映の理論と関わりがあったことは見逃せない．これについては，Coxeter についての著作「多面体と宇宙の謎に迫った幾何学者」（シュボーン・ロバーツ著）に Coxeter の多面体への愛着と共に生き生きと描かれており，またそこから原論文をたどることができる．

このような歴史的にも現在も分野横断的な性質を持つ鏡映群を，どのように学んだらよいのだろうか．通常は，各分野を学ぶ過程で鏡映群に出会い，必要に応じて鏡映群の学習をするケースが多いと思われる．分野によって必要になる鏡映群の知識や重点を置くべき部分は異なるので，そのような学習の仕方はもっともである．

しかし，鏡映群について，群論を学んだ時点での単なる例，を超えるが，専門的な部分にまで深入りはしない，というレベルの学習をすることに教育的な効果が見出せるのではないか，というのが本書のねらいの１つであるように思われる．具体的には，鏡映

における鏡の超平面配置の幾何と群論とを行き来することによって，幾何的アイデアを群論の言葉で明確に述べたり，逆に群論の言葉で述べられた証明を，作用する空間を用いて幾何的に説明することに（初等幾何の学習のような）教育的効果を見出すことをねらいとしている．

そのために本書には多くの図が入っており，学習者が図を描けるように図の描き方の章まで設け，代数概念を図示させたり，逆に図から直観的に明らかな事柄に論理的な説明をさせたりする多くの演習問題を入れており，そのねらいは成功していると思う．

鏡映群を扱った本であっても，Bourbaki の「リー群とリー環３」を筆頭に，必ずしも図は多くない．Bourbaki に図が少ないのには理由がある（というか，「リー群とリー環３」は Bourbaki としては図が多いと言うべきか）が，図を多く取り入れることで，鏡映群を学びたくても敷居が高いと感じる大学院生にとっての鏡映群の入門書となることが，もうひとつの本書のねらいであろう．

その代わりに本書は，鏡映群の教科書として，完全であることは目指していない．たとえば，鏡映群についての不変式論は書かれていないし，Coxeter 変換やその固有値（exponents と関連）も導入されていない．有限鏡映群が中心であり，アフィン Weyl 群は少し例が触れられているだけである．

以下で具体的に内容を見てみよう．

第 I 部　幾何学的背景は第 1 章から第 4 章までであり，アフィン空間，アフィン空間の等長変換，超平面配置，多面錐についての基本事項がまとめられている．内積をもつ空間の双対基底の定義が通常と異なり，マイナスがついているのは，双対の錐を（双対空間でなく元の空間に）図示する際に反対側に出現させるためであると思われる．丁寧に記述され，やさしい演習問題も豊富で，初学者への配慮が感じられる．

第 II 部　鏡，鏡映，ルートは，第 5 章から第 9 章までであり，そのうち，第 5 章，第 6 章で，鏡，鏡映，鏡系（超平面配置で鏡映で不変なもの），有限鏡映群といった基本概念が導入されたのち，第 7 章で 2 面体群が導入される．一般のコクセター群の導入の前に，このような形で 2 面体群を導入してその幾何学的な意味を説明しているのは，本書の目的である教育的であるという点からもよい配慮であると思う．そして，まえがきにもあるように，そのまま第 8 章以降に進む他に，いきなり第 V 部の 3 次元鏡映群に進むことも推奨されており，そのように第 V 部を読んだ後，第 8 章に戻るのがよいと思われる．

第 II 部の残りでは，ルート系を，鏡に対する双対概念として導入している．ここで，ルート系と呼んでいるのは，リー環のルート系に比べてかなりゆるい条件で考えており，鏡映面の法線ベクトルの集合といった意味合いである．これは，鏡映群の研究を目的として導入しているためであり，Humphreys 著の「Reflection Groups and Coxeter Groups」でも同様であるが，注意が必要である．第 9 章で A 型から D 型のルート系が説明されている．気になったのは，第 9 章のタイトルで，$\mathrm{A}_{n-1}, \mathrm{BC}_n, \mathrm{D}_n$ 型のルート系とあり（原著もそのまま），BC_n 型の鏡映群のルート系という意味かと思われるが，普通に読めば BC_n 型のルート系が書いてあるように見える．実際には章のなかでは，B_n 型と C_n 型のルート系を区別して書いているので問題なく，またこれらの鏡映群が一致することも述べられているが，ルート系としてはこれらは区別されるべきものであり，$\mathrm{A}_{n-1}, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$

型のルート系としたほうがよいように思われる．また，被約でないルート系 BC_n と間違える可能性がある．

第 III 部　コクセター複体は，第１０章から第１４章までであり，部屋，ギャラリー，道といった概念が導入され，鏡映群の部屋への作用が推移的であることが（第３章の結果を用いて）示される．これにより，鏡映群の研究と部屋の集合の幾何学に関係がつき，そのあとはこれを用いて，鏡映群の代数的研究を部屋の集合の幾何学を用いて行われる．第１１章５節の最初の「鏡映群の理論においてしばしば起こることであるが，述べたいと思っている重要かつ技巧的な結果は絵を参照することで簡単に示せる」と述べているが，これがこの著者らがこの本で示したかったことであろう．証明を論理的にたどることと絵を見てアイデアを理解することとの行き来がまさに行われる．第１２章の終わりから第１３章は，放物型部分群による商と剰余と呼ばれる部屋の同値類のなす集合の対応が論じられる．この部分は著者（A.V. Borovik) の専門の入り口であり，I.M.Gelfand, Neil White らとの共著「Coxeter Matroids」と重なっている部分である．ここについては，理解を助ける絵もあるので内容は理解できるが，いくつか原著に誤りがあり（１３章１節の J-面の定義は誤り．その下の４つの対象の１対１対応において共役な放物型部分群への対応は１対１でない）翻訳でも修正されていないので関連部分（１３章３節の第１文）も含めて注意が必要である．第１４章は，鏡映群から逆に多面体を構成して（一般化置換多面体と呼ばれる）その性質を調べている．これも図との関連が楽しめ，よい題材であると思う．

第 IV 部は有限鏡映群がコクセター群になることの証明と，それを用いてコクセターグラフを定義して，コクセターグラフを分類することにより有限鏡映群を分類していく．最後の第１７章ではルート系の構成が紹介されているが，証明は省略されている．

第 V 部は，３次元鏡映群であり，３次元有限鏡映群の分類と正２０面体が丁寧に議論されている．第 VI 部は付録として「忘れられた技芸：黒板の図画」がある．面白かったので，実際にこの手法を用いた正 20 面体の図示を学生に実践させたところ好評であった．

翻訳は原著に忠実であり，原著の誤りを修正する努力もなされている．図を多く取り入れることで学生自身も図をかけるようにすること，それを基にして，図による直観的理解と明確な言葉を用いた論理的理解とを行き来させる，という目標が達成されており，鏡映群の入門書として（表紙裏の文字通り）鏡映群にすんなりと入ることができると感じられた．