阿部知行氏の平成25年度文部科学大臣表彰
若手科学者賞受賞に寄せて

東京工業大学理工学研究科理学研究流動機構
斎藤　秀司

阿部氏に出会ったのは，私が2004年に東大数理に赴任して最初の年，彼がまだ大学3年生の時である．Deligne の Weil 予想の証明 (Weil II) を勉強したいので付き合ってほしいと個人的に頼みを受けた．ご存知の方も多いかと思うが，この論文はEGAはもちろんSGAといった代数幾何の最先端理論を駆使した難解な論文であり，こんな論文を大学3年生がはたしてどれほど理解できるのかといぶかりながら始めたセミナーであった．が，彼の理解度は驚くほど深く，その類まれなる才能には目を見張らされた (東大に赴任したばかりだったので，東大生はみなこんなにできるのかと驚愕したのだが，これについては私の思い過ごしであることがのちに判明している)．修士課程に入って私が指導教官となってからも最先端の理論を次々に吸収していく様は見事というしかない．このような逸材を「研究指導」の名のもとに私の狭量な数学のなかに制約することは憚れる思いであったのだが，そうこうするうちに「数論的D加群」という私の専門を逸脱した研究テーマを自分で勝手に見つけてくれた．私は立場上は大学院指導教官ではあるが，彼との数学交流において多くを学ばせてもらっているのは私の方であると感じている．

阿部氏の研究のエッセンスを抜き出して表現すると，大局的な視野に立った問題意識，問題の本質を見通す深い洞察力，そこから湧き上がる着想を実現する強力な計算力，そして忘れてならないのは，阿部氏の数学に脈々と流れる豊かな感性である．阿部氏の数学には，多くの優れた業績に共通する芸術的ともいえる美的感覚がある．実は，阿部氏はピアニストとしても人並み外れた才能を持っており，彼の音楽的感性が数学にも表現され恩恵をもたらしているのだろう．

阿部氏の業績を解説するためにまず，その中核をなす「数論的 D 加群」について簡単に歴史的背景を説明しよう．有限体上の多様体の L 関数に関する Weil 予想に触発された Grothendieck は，一般の体 (特に有限体) k 上の代数多様体にたいして定義される良いコホモロジー理論 (Weil コホモロジー) のひとつとして ℓ 進エタール・コホモロジーを導入した．ここで ℓ は k の標数 p とは異なる素数で，ℓ 進エタール・コホモロジーは k の絶対ガロア群が自然に作用する $\mathbb{Q}_\ell$ 上の線形空間である．これは $\mathbb{C}$ 上の代数多様体の特異コホモロジーの数論的類似物とみることができる．しかし，ℓ 進エタール・コホモロジーは代数多様体の p 進的性質に関する情報を十分に与えるものではないため，$\mathbb{Q}_p$ 上の線形空間に値を取る p 進コホモロジー理論の構成が求められることになる．滑らかでアファインな代数多様体にたいしては Monsky と Washnitzer が，滑らかで固有なときは Grothendieck がそのようなコホモロジー理論を構成した．Berthelot はこれらを統合かつ一般化して，リジッド・コホモロジーと呼ばれる一般の代数多様体にたいする p 進コホモロジー理論を

構成した．さらに Berthelot はリジッド・コホモロジーの変動理論ともいえる数論的 D 加群の理論を提唱した．リジッド・コホモロジーは標数 0 の体上の代数多様体に対するド・ラーム・コホモロジーの正標数類似であり，数論的 D 加群は柏原らによって詳細に研究された D 加群の理論の正標数類似と考えられる．数論的 D 加群の構成は標数 0 の場合よりはるかに難解で，まず多様体をそれが定義されている体を剰余体とする完備離散付値環上の形式的スキームに持ち上げ，その上の無限階数を許した微分作用素環を適当な位相について完備化して定義される．数論的 D 加群は数論幾何の諸問題へのさまざまな応用が期待される強力な理論である．しかし，いまだ多くの未解決問題が存在する未完成な理論でもある．

阿部氏は，数論的 D 加群の理論の基礎付けにおいて重要な業績を挙げたのみならず，Deligne の小同志予想，p 進係数のラングランズ対応，高次元分岐理論といった数論幾何学の重要問題への応用を与えた．以下これらを解説する．

数論的 D 加群の理論の基礎付けと p 進係数ラングランズ対応 ([Ab6])

ラングランズ対応の重要性は異論を挟む余地のないものである．Lafforgue により解決された関数体のラングランズ対応は以下のように述べられる (多少不正確な点もあるがご容赦願いたい).

定理 1： X を有限体 k 上の滑らかで完備な曲線とし，ℓ を k の標数とは異なる素数とする．X の開部分スキーム上の既約で滑らかな ℓ 進層の集合と X の関数体の既約な尖点的保型表現の集合には各点のフロベニウス固有値とヘッケ固有値が一致するような一対一対応が存在する．

この定理で驚くべきは，既約で滑らかな ℓ 進層の集合はアプリオリには ℓ によっているにもかかわらず，尖点的保型表現の集合は ℓ によらないことである．ラングランズ・プログラムに触発された Deligne は Weil 予想を解決した記念碑的論文で次の予想を提唱した．

予想 1： X を有限体 k 上の正規な多様体とし，$\mathcal{F}$ を既約で滑らかな X 上の ℓ 進層とする．このとき k の標数と異なる全ての素数 ℓ' にたいし，既約で滑らかな X 上の ℓ' 進層 $\mathcal{F}'$ で，$\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ の X の各点のフロベニウス作用の固有値が一致するものが存在する．

X が曲線の場合，予想は Lafforgue の定理の帰結である．一般には，X が正則という仮定の下で Drinfeld が上の予想を示すことに成功している．証明は，高次元類体論における Wiesend の手法を用いて予想を曲線の場合に帰着する．さて p を k の標数とするとき，上の予想で $\ell' = p$ が除かれていることが気になる．Deligne は $\ell' = p$ の場合にも予想を成り立たせる ℓ' 進層の対応物が存在することを曖昧な形で述べ，これを「小同志予想」と呼んでいる．これは Crew によって厳密化され次のように定式化されている．

予想 2： X を有限体 k 上の正規な多様体とし，$\mathcal{F}$ を既約で滑らかな X 上の ℓ 進層とする．このとき X 上の過収束 F アイソクリスタルで，その X の各点のフロベニウス作用

の固有値が $\mathcal{F}$ のそれと一致するものが存在する．

p 進係数ラングランズ対応は次の形で予想として定式化される．

予想 3： X を有限体 k 上の滑らかで完備な曲線とする．このとき X の開部分スキーム上の既約な過収束 F アイソクリスタルの集合と X の関数体の尖点的保型表現の集合には各点のフロベニウス固有値とヘッケ固有値が一致するような一対一対応が存在する．

阿部氏は次を示した．

定理 2([Ab6])： 予想 2 と予想 3 は同値である．より強く次が成り立つ．X を上のとおりとし，$\mathbb{A}$ を X の関数体のアデール環とする．整数 $r \geq 1$ に対して次の二つの集合を考える：

$\mathcal{A}_r$: $GL_r(\mathbb{A})$ の既約な尖点的保型表現
$\mathcal{I}_r$: X の稠密な開部分集合上の階数 r の既約な過収束 F アイソクリスタルの集合

整数 $n > 1$ を固定し，$n > r \geq 1$ となるすべての r にたいして $\mathcal{A}_r$ と $\mathcal{I}_r$ の間にそれぞれのフロベニウス固有値とヘッケ固有値が一致するような一対一対応が存在すると仮定する．するとそれぞれの固有値とヘッケ固有値が一致するような写像 $\mathcal{I}_n \to \mathcal{A}_n$ が唯一存在する．

Grothendieck の哲学によれば Lafforgue の定理 (定理 1) の p 進係数類似の理論が存在してしかるべきである．しかし阿部氏の研究以前にはそのような理論の存在を指し示す確証はなかった．これを Deligne の小同志予想という信憑性の高い予想から導くことに成功した阿部氏の成果は画期的である．さらに Deligne の小同志予想 (予想 2) および p 進係数ラングランズ対応 (予想 3) の解決という偉業達成に向け，阿部氏はすでに実現可能性の高い研究計画を進めている．阿部氏の研究計画の秀逸性は，ただ単にこれらの問題を解決するということにとどまらず，スタック上の数論的 D 加群の一般論の完成という壮大な枠組みの中で展開している点である．

p 進的な ϵ 因子の積公式 ([AM])

定理 2 の証明の鍵となるのは，阿部–Marmora により示された有限体上の滑らな曲線 X 上の過収束 F アイソクリスタル M にたいする ϵ 因子の積公式

$$\epsilon(M,t) = \prod_{x\in|X|} \epsilon_x(M_x, t, \psi_x)$$

である．記号の詳しい説明は避けるが，左辺は大域的な不変量で，右辺は各点での局所的な不変量の積である．これは Laumon により示された ℓ 進層にたいする ϵ 因子の積公式の p 進類似である (ℓ 進層の場合に ϵ 因子の積公式を用いてラングランズ対応の次元に関する帰納法を進めることは Deligne のアイデアであり，定理 2 の証明もこれに沿っている)．過収束 F アイソクリスタルにたいする ϵ 因子の積公式の証明で特筆すべきは，過収束 F

アイソクリスタルの圏では狭すぎ，より広い数論的 D 加群の圏を本質的に用いていることである．さらに阿部氏自身によるいくつかの数論的 D 加群の基本的な結果が用いられている．以下これらを簡単に説明する．

数論的 D 加群にたいする相対的なポアンカレ双対定理の証明 ([Ab5])

ポアンカレ双対定理は数論的 D 加群が良いコホモロジー理論であることを示す基本的な結果である．応用として，構造層から定義される F アイソクリスタルの双対を計算することが可能になり，これを用いることにより数論的 D 加群を用いて定義された L 関数の関数等式を示したり，数論的 D 加群とリジッドコホモロジーによって定義された二つの L 関数を比較することが可能となる．

超局所微分層の構成 ([Ab4])

超局所微分作用素の理論は $\mathbb{C}$ 上の古典的理論においては基本的である．しかし数論的 D 加群における類似理論は特別な場合にしか構成されていなかった．阿部氏はこれを一般の場合に構成することに成功した．古典理論では，超局所微分層を用いることにより D 加群の特性多様体を計算することが可能であるが，この類似の事実が数論的 D 加群についても成り立つと予想される．実際，阿部氏はこのことを 1 次元の場合に示している．特性多様体の計算は数論的 D 加群の理論において非常に重要な問題であり，阿部氏が構成した理論は大きな潜在能力を持つものである．

阿部氏は Deligne の小同志予想および p 進係数ラングランズ対応の解決に向けたプログラムの一環として次の結果も示している．

数論的 D 加群にたいする重さの理論の確立 ([AC])

Deligne は Weil 予想の解決のために ℓ 進コホモロジーにたいする重さの理論を構築した．一般に良いコホモロジー理論には重さの理論が存在することを Grothendieck が予想していたのだが，最近ではモチーフの理論という大理論にまで発展して代数多様体のコホモロジー理論にたいする基本的な概念となっている．[AC] においては p 進コホモロジー理論にたいする重さの理論を確立している．この結果は，これまで過収束 F アイソクリスタルに関しては知られていた結果をそれを含むより広範で自然な枠組みである数論的 D 加群にまで拡張するもので，p 進コホモロジーの重さの理論を完成したものといえる．

以下，p 進係数ラングランズ対応に関係する業績以前の阿部氏の仕事についても説明する．

数論的 D 加群の理論の多様体の高次元分岐理論への応用 ([Ab1])

これは阿部氏が修士論文において得た結果である．正標数の体上の多様体 X 上のエタール層 $\mathcal{F}$ にたいしそのオイラー数 $\chi(\mathcal{F})$ を計算することは数論幾何学の重要問題であり活発な研究が行われている．曲線の場合には，Grothendieck–Ogg–Shafarevich の公式により，Swan 導手とよばれる $\mathcal{F}$ の分岐を統制する局所的不変量を用いて $\chi(\mathcal{F})$ を計算することができる．これを高次元化することが重要な問題である．これまでに，Deligne, Laumon, Bloch, たちによる研究があったが近年，加藤和也と斎藤毅により大きな進展がもたらされた．彼等は高次元の場合に $\mathcal{F}$ の Swan 導手 $Sw(\mathcal{F})$ を 0 次元代数的サイクルとして定義し，それを用いて GOS 公式の高次元版を示すことに成功した．しかし彼等は重要な問題を残した．彼等の定義した Swan 導手 $Sw(\mathcal{F})$ は係数が有理数のサイクルとして定義されているのだが，実際には係数は整数であると予想される．この予想の 1 次元の場合は古典的な Hasse–Arf の定理にあたる．阿部氏はこの予想を特異点の解消を仮定して解決することに成功した．結果自体は特異点の解消という条件付きではあるが，業績の核心部分は特異点の解消に依存しない．阿部氏は数論的 D 加群の特性多様体を用いて，加藤–斎藤とは全く異なる方法による Swan 導手の定義を与えた．阿部氏の定義した Swan 導手はその定義から自然に整数係数を持つ．よって阿部氏の Swan 導手と加藤–斎藤の Swan 導手が一致することを示せば上述の予想が解決できる．これは極めて独創的で斬新なアプローチといえる．阿部氏は，数論的 D 加群により定義される Swan 導手を計算するための道具として，古典的 D 加群の理論における柏原–Dubson の公式の数論的 D 加群での類似公式を証明した． この結果と幾何学的交点理論を用いることにより，D 加群による Swan 導手と加藤–斎藤の Swan 導手を比較したのである．この最後の段階のみにおいて特異点の解消が必要となる．

曲線上の数論的 D 加群の有限性予想 ([Ab2])

p 進コホモロジーの有限次元性は基本的な問題であり，de Jong によるオルタレーションを用いて示される．Berthelot 予想とは，p 進コホモロジーの有限次元性の一般化として数論的 D 加群のホロノミー性の保存法則を予想する．ホロノミー性の保存法則は古典的 D 加群の理論においては基本的な事実である．現在ではこの予想自体は Kedlaya による志甫予想の解決を用いて Caro と都築によりかなりの場合に示されている．[Ab2] においては曲線の場合の Berthelot 予想が p 進微分方程式論の基本的な結果のみを用いて示されている．特筆すべき点は，先行結果において仮定されていたフロベニウス構造の存在が除かれ適用範囲がはるかに広がっていることである (フロベニウス構造なる付加構造は古典的 D 加群には存在しない)．

阿部氏のこれまでの研究成果は，すでに国際的に高い評価を得ており，彼が日本のみならず世界の数学をリードし，その将来を担っていく逸材であることに疑いはない．文部科学大臣表彰若手科学者賞にふさわしいかたであると確信している．

参考文献

[Ab1] Abe, T., *Comparison between Swan conductors and characteristic cycles*, Compositio Math. **146** no.3, 638–682 (2010).

[Ab2] Abe, T., *Coherence of certain overconvergent isocrystals without Frobenius structures on curves*, Math. Ann. **350** no.3, 577–609 (2011).

[Ab3] Abe, T., *Some notes on Tsuzuki 's full faithfulness conjecture*, Int. Math. Res. Not. **20**, 4747–4755 (2011).

[Ab4] Abe, T., *Rings of microdifferential operators for arithmetic D-modules*, preprint, arxiv.org/abs/1104.1574.

[Ab5] Abe, T., *Explicit calculation of Frobenius isomorphisms and Poincaré duality in the theory of arithmetic D-modules*, preprint, to appear in Rendiconti. Padova. arxiv.org/abs/1105.5796.

[Ab6] Abe, T., *Langlands program for p-adic coefficients and the petits camarades conjecture*, preprint, arxiv.org/abs/1111.2479.

[AM] Abe, T., Marmora, A., *On p-adic product formula for epsilon factors*, preprint, arxiv.org/abs/1104.1563.

[AC] Abe, T., Caro, D., *Theory of weights in p-adic cohomology*, preprint, arxiv.org/abs/1303.0662.