

# 書 評

## シリーズ現代基礎数学4 線形代数と正多面体

小林正典 著，朝倉書店出版，2012年

奈良女子大学研究院自然科学系数学領域

松澤 淳一

正多面体は、図形を見ながら高度な数学に接することができ、具体的な数値計算から様々な関係式や性質を引き出す面白さを体験できる格好の数学的对象である。しかも広範囲の数学と関連している。例えば、多面体の幾何学的性質を問題にする場合は幾何学、代数方程式の理論との関連および対称性の研究をする場合は代数学、超幾何関数のみならず微分方程式と関連する話題の場合は解析学などである。正多面体は、これらの各分野でそれぞれ個性的な結果を示す魅力的な題材なので、私は授業や卒業研究などで正多面体を取り上げることが多いのだが、文字通り多面性をもつ題材だけに、その取扱いに困ることがある。

例えば、一つの視点から話を進めていった後、他の観点からのアプローチをしようとする時、そのためにまた新たに説明すべき言葉や理論を用意しなければならなくなり、説明がおろそかになってしまったり、一方向からの分析に深入りしすぎて疲れてしまい、他の方向からの視点を十分説明できなかつたりするのである。料理でいえば、おかずはよかったけれども、ごはんがいま一つだったとか、ステーキが大きすぎて、他の料理が楽しめなかつたりするようなものである。これは、多分に私の力量不足が原因なのだが、正多面体に潜在している数学の多様性も原因となっていると思うのである。食べる側からすると、品質の良い素材を最高の技術で料理してもらい、しかも必要な栄養はすべて入っていて、うまく胃の中に納まってくれるようなディナーが望まれるのである。

本書はこうした食欲をもつ人にはうってつけのものではないだろうか。正多面体についての必要事項がすべて取り揃えてあり、それらは一つ一つ最高の品質をもって提示されている。なおかつそれらがバラバラに存在するのではなく、全体の統一感が持てるようにデザインされている。しかも驚くほどコンパクトにまとまっているので、この本を片手に、いろいろな方向に進んでいけるであろう。まことに有難い本である。

本書の主演である正多面体は、ユークリッドの原論の最終章で取り上げられているが、その取扱いは多分に代数的である。そこでは幾何学を代数的に扱う手法が強く意識され、後の言葉でいえば、2次方程式の幾何学的解法が正多面体に適用できることを示した風である。

正多面体という図形は、きわめて幾何的な色彩が強い対象であるが、当初から代数と密接にかかわっていたことは興味深い。

小林氏は前書きで次のように述べている。「代数という強力な武器を携えつつも魂を失わずに豊かな幾何の世界を探検しよう。」これは、著者の本書全体に対するスタンスを示している。そして、正多面体を語る言葉として、線形代数という、言わば透明な数学を提案したのである。これは私にとって新鮮な驚きであった。このような視点を意識したことがなかったからである。

和辻哲郎が、ある歌人の歌を評して、歪みのない透明なガラスを通してみる景色のようだと褒め称えていた。表現の透明さが作者の現わそうとするものを最も鮮明に見せてくれるというのである。この評論を借りれば、本書は、線形代数という透明な数学を通して正多面体を眺めた作品といえよう。幾何学的な色合いや、群論的色彩など、様々な色を付けて正多面体をみると、その色に応じた独特の景色を見ることが出来る。しかし、もっと魅力を引き出そうとしたり、別の角度から眺めようとしたりすると、その色そのものが邪魔になることもある。本書の取り扱いはその点で特別である。線形代数を底流として、正多面体の数学に必要なエレメントを淡々と、しかも少しの無駄なく用意し、それらの道具をさりげなく使って正多面体を我々に見せてくれる。まるで濁りのない無色透明なガラスを通して正多面体を眺めるかのようである。これが我々読者にはとても有難い。定理の配列や証明は、よく考え抜かれたものであり、これ以上望めないほど簡潔にして無駄がない。その自然な流れは、そこで起こっている数学的現象を実によく浮き彫りにしてくれる。このような本を書く作業は、数学的練達なしには成し得ないと思う。初学者は本書に収められている命題の配列や証明をじっくりと鑑賞するのも悪くないと思う。

前述したように、正多面体について様々な見方をしながらその面白さを伝えようとする、別々の分野の、それもかなり専門的な内容や定理を使うことになる。その都度、適切な参考文献を学生に教えるのであるが、実際にそれらを一から読むのは、意外に骨の折れる作業となることが多い。本書はそうした定理群も余さず入っている。例えば、凸多面体の面束や双対性に関する一連の定理群、直交変換に関するカルタンの定理、 $SO(3)$ と $O(3)$ の有限部分群の分類定理、高次元正多面体の合同群が鏡映で生成されること、有限コクセター群・アフィンワイル群の分類定理等々である。これらは、どの本にも書かれているというものではなく、また、いちいち説明するのも大変である。まして、定理だけを述べれば理解できる代物でもない。この他にも、メネラウスの定理、チェバの定理、パップスの定理、デザルグの定理など、有名な幾何の定理が線形代数を使って見事に証明されていて読者を楽しませてくれる。

「代数という強力な武器」が「豊かな幾何の世界」の探求にいかに関与するかという事を示す好例である。

これらの定理群を見ればお分かり頂けると思うが、本書に収められている内容を含む分野は相当広い。第1部では、アフィン幾何・射影幾何・ユークリッド幾何・球面幾何、そして凸多面体の幾何を説明しつつ線形代数の内容がさりげなくちりばめられ証明されていく。平面・空間の合同変換、球面三角法など興味深いトピックスが軽快に扱われた後、第2部の群論入門となる。平面の合同変換群、対称群、行列群などを例として群の基本事項が述べられている。孫子剰余定理やヤング図形を楽しんでいると思う間にシローの定理まで行ってしまうスピードである。その勢いで単因子論を使って有限生成アーベル群の基本定理が線形代数を使って示されるのである。最後の第3部がいよいよ正多面体である。まず正多面体と半正多面体が分類される。さらに高次元の正凸多面体が分類され、その合同群が有限鏡映群であることが示されるのである。ここまで読み進んできた読者は、なぜ著者が代数の考え方を駆使して正多面体の幾何学的世界を記述しようとしたか納得されるであろう。ここでは、正多面体が旗推移性で定義されているのである。このように定義すれば線形代数と群論の基本事項を使って正多面体の幾何構造や対称性が、複雑な議論抜きに語れるからである。また、演習問題も幅広い話題から選ばれていて気が利いている。特に最後の章には、空間充填、ジグザグ多角形、ねじれ多角形、ピートリー多角形など、本文で扱いきれなかった事項も盛り込まれていて、話題のさらなる展開を読者に提供している。以上、本書の内容を駆け足で紹介したが、これほどの豊富な内容が170ページ余りに納まっているのであるから著者の苦労は並大抵ではなかったであろうと推察される。

高次元の場合も含めて、正多面体に関する条件を変えることで、未知の領域が目の前に広がる。正多面体の定義を少し拡張することで、ねじれ正多面体を発見した若きコクセターとピートリーのエピソードは有名であるが、読者も本書を片手に、新発見に挑戦してみたいかがだろうか。正多面体を著者の提案するように代数的に扱えば、数式処理システムなどを使って様々な数値実験もできる。卒業研究などには格好の材料になるのではなかろうか。

本書の最後に著者は正多面体の未来を語っている。球面幾何からアフィン幾何や双曲幾何への拡張、ルート系や格子の幾何、最密充填問題など、正多面体に関連する話題は尽きない。正多面体は、その発見から二千年の間に、数学の中でさまざまに多様化してきた。正多面体の数学の豊富さを考えると、正多面体の未来に、新領域の開拓の可能性も大いに期待されるのではなかろうかと筆者も考える。

著者は半正十二面体のシュレーゲル図形をシンボリカルに描いて筆を置いている。本書の続きを書くことを暗に予告しているかのような印象を受ける。我々としては続編も期待したい。