

## 書 評

成田正雄著 イデアル論入門 (復刊)  
共立出版, 2009 年, 全 214 頁

明治大学理工学部 中村 幸男

### 概要

「イデアル論入門」は 1970 年, 国際基督教大学の成田正雄先生によって執筆された代数学の教科書で, 可換環とイデアルの理論をメインとした構成となっている. 本書はその復刊版である. オリジナルの「イデアル論入門」が執筆された 1970 年頃, 代表的な可換環論の教科書としては, *Ideal Theory* (D. G. Northcott) 1952 年, *Local rings* (永田雅宜) 1962 年, *Commutative Algebra* (Zariski-Samuel) 1960 年, *Commutative Algebra* (Bourbaki) 1961 年などの本が既に世に出ており, *Introduction to Commutative Algebra* (Atiyah-MacDonald) 1970 年, *Commutative Rings* (I. Kaplansky) 1970 年 などの本と同時期に出版された. 著者いわく「かなり程度の高い本が多い中, 気楽に読める入門書として, 本格的な理論を学ぶ前の足慣らし」となるような教科書を目指して執筆されたようである.

内容はほぼ self-contained に書かれており, もちろん群論・環論・体論の基礎知識があったほうが読みやすいであろうが, 多少でも線形代数学に慣れてさえいれば, 予備知識なしでも読めそうな本である. なお, 本書を読むのに必要な群・環・体に関する最低限必要な予備知識は第 0 章に準備されている. 本書の構成は大学で学ぶ標準的な環論の内容を含み, さらに進んだ内容として, 正則局所環・Cohen-Macaulay 環・整閉整域・代数多様体などを扱っている. 全体的に読み易く書かれており, また, ホモロジー代数を一切使わない組み立てとなっている. 代数学を学び始めた学生が副読本と読んでもいいし, 可換環論を専門にしようと考えている学生が足慣らしに読むのもよいであろう. あくもでも入門書なので可換環論の専門家を目指す人にとっては, より本格的な本を読む必要がある. ホモロジー代数, Gorenstein 環, 完備局所環, 付値環などの概念については取り上げられていない. 各章末にある演習問題は良問であり, 配置もよく考えて取り上げている. 本論で述べきれなかった内容をひたすら章末問題に詰め込む教科書も多く見受けられるが, 入門書らしく理解を深めるのに手頃で取り組みやすい問題が並べてあり, 大学の授業の小テストとして利用するのも適しているかもしれない.

## 本書の内容

以下各章における本書の内容と特徴を述べる。

### 第1章 イdealと加群

多くの代数学のテキストで、群論・環論・体論と話が進む中、加群については後回しにされたり、あるいは、扱われない場合も多い。本書では0章で述べた簡単な環の定義の後、すぐに加群を扱うことになる。部分加群、加群の準同型写像、剰余加群、同型定理と話が進んだ後に部分加群としてイdealが登場する。私自身の体験でも、学部の環論の授業では加群抜きで講義し、加群については独学で勉強してもらうか、または、ゼミで扱うということが多かったが、思い切って加群から講義を始めるのもひとつの方法だと感じた。なお本章では、加群の組成列まで言及し Jordan-Holder の定理についても丁寧な証明を与えている。

### 第2章 可換環

本章以後、環といえば可換環に限ることになる。素イdealと準素イdealの定義から始まり、基本的な性質を述べる。その後、ネーター環を取り上げてイdealの準素分解へと話が進んでいく。後半は極大イdealと多項式環についての話題となる。多項式環の定義は直感的な言い回しで済ませており、多項式環から環への代入射の存在についても直感的に成り立つものとしている。入門書ということでこのような構成になったのであろうが、学習者には、一度どこかで多項式環の定式化というものを試みてもらいたいものである。この章の最後では、E. Artin の方法によるヒルベルトの基底定理の証明を与え、その応用として拡大 Rees 環を用いた「intersection 定理」の証明を与えている。

### 第3章 局所環

局所環の特有な性質を紹介した後に、商環の構成について丁寧な解説を行う。その後、局所化への自然な写像に関するイdealの拡大と縮小について述べていく。後半は、 $m$ -準素イdealによる剰余環の長さについて論じる。これは、次章のパラメーター系の話題への準備となっている。また、イdealの高さや次元についても紹介していく。

### 第4章 正則局所環

この章ではホモロジー代数の概念を一切使うことなく正則局所環の理論が繰り広げられる。当然大域次元など出てこない。考察の対象となる環も一般のネーター環というわけではなく、体上の多項式環の剰余環あるいは商環の形をしたものに限って議論をおこなう。話の流れを見て行くと多項式環上のイdealの振る舞いやイdealの拡大縮小に関する性質を非常にうまく使った理論が構築されており、古典的な薫りの高いものとなっている。後半は

Cohen-Macaulay 環について書かれている。正則列に関する一連の性質を準備した後に、非混合定理の成り立つネーター環としての特徴づけを与え、正則局所環が Cohen-Macaulay 環となることを証明する。本章を通して使われている道具は正則列だけともいえる。その過程で示されるさまざまな補題には、こんなことも言えるのかと思うような命題も少なくない。

## 第 5 章 一意分解整域

一意分解整域の定義から始まり、一意分解整域の特徴づけである「高さ 1 の素イデアルは単項」や「最大公約元・最大公倍元の存在」などについて述べた後、原始多項式を用いて多項式拡大で一意分解性が遺伝されることを証明する。後半は整拡大を扱う。整閉整域や正規環の一般論が展開された後、デデキント環を定義して素イデアル分解の定理へと進んでいく。本章の中では一次元正則局所環が重要なツールとして扱われているが、付値環に関しての言及はない。付値を一切使うことのない組み立てとなっている。

## 第 6 章 イデアル論と代数幾何学

代数的集合の定義から始まり、代数多様体とその次元に関する理論が繰り広げられる。途中、正規化定理を証明なしで引用して「体上有限生成な体は代数拡大である」ことの証明を与える。後半はトピックスとして、線形多様体、代数多様体上の点における局所環、ザリスキー位相などの話題を取り上げる。

## 著者について

成田正雄氏は弥永昌吉先生に師事して 1953 年東京大学理学部数学科卒業。1968 年国際基督教大学教授就任。1975 年夭逝、享年 45 歳。

故松村英之名古屋大学教授は著書「可換環論」序文において、「万人から敬愛される温厚な人柄の紳士である」と評している。1965 年から 1969 年の間、国際基督教大学に於いて成田先生から直接の薫陶を受けた渡辺純三氏（東海大学教授）は「学生に対しても礼節を以て敬語で会話して下さる姿はまさに紳士の品位でした」と追憶している。氏の談では「同僚の教授に対するも、学生に対するも等しく対等の研究者として接しられ、時に研究に没頭して時間を忘れてしまう事もあったようだ」とも語っている。研究面では、一意分解整域、完備局所環、ヒルベルト係数に関する業績で著しい結果を残している。正則局所環は一意分解整域であることと、完備局所環の構造定理は独力で殆ど証明を完成させていた。また、ヒルベルト係数に関する結果は現在も多くの論文で引用されている。もし 40 代の若さで急逝することがなければ、現在の可換環論にも大きな影響を与えていたであろうという声も多い。

私自身の経験では、都立大学セミナー報告の「Unique Factorization Domain」が印象深い。東京都立大学の図書館にあったオレンジ色のレクチャーノートを手にして、UFD の深遠な世界を垣間見た。なんとか理解したいと思ったものの、力量不足でなかなか理解ができなく悔しい思いをしたことも思い出す。本書を読んでみて感じるのだが、入門書らしく演習問題にも気を配っているところや、丁寧に書かれているが理論の深いところまで到達している本書の作りが、成田先生の人柄そのものを表しているのではないかという思いに駆られてくるのである。

最後になりますが、本稿を書くにあたって渡辺純三先生から貴重なご経験・ご意見を伺いました。心から御礼申し上げます。

### 主要著書一覧

- [1] 成田正雄, 初等代数学, 共立数学講座, 共立出版 (1966).
- [2] 成田正雄, イデアル論入門, 共立全書, 共立出版 (1970).
- [3] 成田正雄, Unique Factorization Domain, 都立大学数学教室セミナー報告 (1971).
- [4] 成田正雄, 代数学, 共立数学講座, 共立出版 (1976).
- [5] 成田正雄—大口邦雄, 現代数学入門, 集合・代数系・位相 サイエンスライブラリ, サイエンス社 (1976).
- [6] 成田正雄, イデアル論入門 (復刊版), 共立出版 (2009).