書　評

P. R. クロムウェル　著,
下川航也・平澤美可三・松本三郎・丸本嘉彦・村上斉　訳
「多面体」
シュプリンガー・フェアラーク東京，2001 年 12 月，438 頁，4500 円

本書は４３８頁もあるが，流れがよくすいすいと読めてしまう本である．予備知識は中学校の分数計算ぐらい．それでいて後に述べるように凸多面体の剛体性定理，星型正多面体の決定，有限回転群の決定など多くの定理の証明もきちんと書いてある．もちろん群などは中学では習わないから具体例から入ってごく自然に導入している．著者の考えが序文にある．「多面体の研究は数学の分野で一番古いものの１つではあるが，その理論は今も発展している．しかしこれは，何が達成されて何がいま探究されているかということについて理解するために，過去２０００年にわたって確立されてきた怖じけさせるような数学の高い障壁を登ることが必要であることを意味しない．対象は生来幾何学的なものであるから，多くの結果は非専門家にもとっつきやすい．」とっつきやすいことだから分りやすく説明していこうという方針に貫かれている．それでいて，進んだ結果についても述べてあり巻末にしっかりした文献表を載せてあるので調べたい人にとっても十分である.内容は多面体に関係することなら何でも取り入れて話を進めている.歴史的なことや，いろいろなエピソード，定理の証明などがうまく混じり合って流れるように書いてあるので肩が凝らず読めるのだろう．正方形や正５角形の対角線の長さから無理数が出てきたところで分割を無限に続けるとはどういうことだろうかという無限に対する考察とか，４色問題がコンピューターを利用して解かれたが，コンピューターによる証明は今までの人が目で追って確かめられる証明とどういう違いがあるのだろうかと言う話しがあると思えば，多面体の模型を作るときノリが乾く間ラジオペンチでおさえると便利であると言うことが書いてあったりする．とにかく色々書いてあるなあ！である．

いくつかの話題をとりあげて流れを見てみよう．まず登場するのはエジプトのピラミッドである．その形は４角錐であるが体積が底面積×高さ÷３であることを昔の人はどのようにして証明したかがいろいろ紹介してある．薄く切ってとかやるのだがどこかで無限の操作が入る．３角形の面積が底辺×高さ÷２であることは３角形を３つに分けて並べ直して高さが半分の長方形にできることから分かるが，角錐の体積も有限個に分ける方法で出来ないだろうか．このことは彼の有名なガウスも気にしていた．幾何の公理化を考えていたヒルベルトは１９００年に２３の問題の中の第3問題としてとりあげたが，問題が印刷出版される前にデーンが解決してしまった．底面と高さが等しい２つの３角錐で１方を有限個に分解して組み変えて他方にすることが出来ない例をつくったのである．エジプトから近代に話をつなげている．

次に正多面体の話であるが,ユークリッドの原論に５種類であることが示されている.正多面体の条件を少し緩めた準正多面体の話，そしてさらに緩めてすべての面が合同とは限らない正多角形である凸多面体の分類がコンピューターを使って完成された話へとつながる．ジョンソンがそれらに名前をつけているが，正３，４，５角形からなる８＋２＋４＝１４面体の名前を双月双屋根型多面体と訳しているがややこしい名前が多くて

訳すのに苦労したでしょうね．

惑星の法則を発見したケプラーは多面体に凝っていろいろな多面体を発見しているが，面が星型正多角形も許す凸ではない星型正多面体を２つ発見したが，その後ポアソンが更に２つ発見しコーシーがこの４つに限ることを証明した．これはコーシーの最初の論文である．など聞いたことのある人名がでてきて楽しい．

多面体の分類というがすべての面のかたちと面のつながり具合が決まれば多面体はきまるのだろうか．凸なら決まるというコーシーの剛体性定理（第２論文）の証明が書いてある．オイラーは凹でも決まると予想したが１９７７年にコネリーが連続的に変型できる多面体つまり形が決まらない多面体を作ってしまった．シュテファンによるより簡単な動く多面体の展開図が載っている．メイソンによる正３角形の３２面体も絵がのっているので作ってみたがぐにゃぐにゃとよく動く．しかし厳密には動かないことが証明されているというのだから面白い．なお連続的に動く多面体は変形中の体積が一定だろうという蛇腹予想は原書執筆時には解かれてなかったが１９９７年にコネリーらにより肯定的に解決されたと訳注にある．

次は多面体の分類に役立つ頂点の数－辺の数＋面の数＝２というオイラーの公式である．オイラーによる最初の証明は少し厳密性を欠いていて，ルジャンドルが厳密に証明した．その後コーシー，リュイリエ，シュタウトらが与えたいろいろな意味を持った異なる証明が紹介されている．その時代に辺や頂点でつながった多面体では公式がなりたたないことが問題になったと書いてあるが，これは現在の出来上がった理論を知ってる人から見るとなんでもないことに見えるのだが，それは大勢の人の長い時間をかけた努力の成果なんだなと分からせてくれる話である．今現在の数学には分からないこと難しいことがいっぱいあるが，時がたてばなんでもないことに見えるようになるのだろうか．努力しましょう．

コーシーによる星型正多面体が４つに限ることの証明は多面体の対称性を考えることでできる．正多面体を動かして自分自身に重ねるやり方はどのようなものがあるか．実際の正多面体で調べてそれはある軸の周りの回転であることを説明する．１つの正多面体に関する回転全部を集めた集合を考えるとそのなかの２つの回転を続けて行うとまたその集合に入っている．とか言いながら群の概念を導入していき，有限回転群は５種類しかないことを証明してしまう．自然界にある結晶は対称性の高い形をしているが面に筋があったり模様がある．そこで多面体の面に模様の代わりに色が着いている時，同じ色を重ねる回転はどのようなものだろうか．色の着け方は何通りあるだろうか．次に１つの辺で隣り合う面の色は異なるような色着け（厳密な彩色という）はどうかと話しを進めていく．２色で厳密な彩色が可能なための必要十分条件は分かっている．３色ではまだ必要十分条件はわかっていない．が，部分的解答はあるといって２つの定理が証明される．そしてすべての多面体は４色で厳密に彩色可能であるという有名な４色問題に話が移る．このように未解決の問題も含めながら次々と話を展開していく．

以上に見たようにこの本は，多面体と言う昔からあるとっつきやすい対象をとりあげて，どのように問題を考え調べていくかを，多くの人々を登場させながら大昔から現代まで話を進めている．証明には３角関数も微積も出てこないから中高生から読める本でありながら多面体に関することがいろいろいっぱい書いてある楽しい本です．

（増田一男，東京工業大学大学院理工学研究科）