「純粋」数学の擁護

砂田　利一

序

「純粋」数学というと必ず「応用」数学が対比されるが、ここで「純粋」と形容詞をつけて論じるからといって、私自身普段から「純粋」と「応用」を区別して考えているわけではない。むしろ数学の外部から、あるいは「応用」を標榜している人々から、直接自然現象や社会現象にタッチしていない数学の研究者に「そんなことをやっていて何の意味があるのか」というような「攻撃」が行われるときに、論点をはっきりすることを目的にして仕方なくつける形容詞である。「純粋」数学者であれ「応用」数学者であれ、数学という枠内で活動するから数学者と呼ばれるのであり、それは「幾何学者」と「数論専門家」という区分けと同じ意味しか私にはない。究極的には、研究者が真摯に活動し、その研究成果が「おもしろい」ものなら何ら分野の違いを感じないといってよい。そして、私は絶対に「そんなことをやって何の意味があるのか」を人には問わない。このような問いは自分自身に対するものである。

実際に、私の知っている多くの「応用」数学者が「純粋」数学に対しては好意的な立場を取っているこ

とを明記しておきたい。さらに言っておくと、「純粋」数学の理解者にとっては、この文章は何ら目新しい内容を含むものではない。

1. なぜ数学を研究するのか

Hardyは彼の著した「数学者の弁明」の中で、「精神活動」の結果としての数学を、むしろその「無用性」から発する「無害性」に重点を置いて擁護している。「無害性」については昨今の社会状況から疑問視する声もあり、さらに「無用性」についても「応用」数学との関わり合いの中でもう一度検討しなければならない主題であろう。Hardyが「弁明」を書くに至った経緯は不明であるが、「純粋」の中の「純粋」とも言える数学の世界（解析数論と実解析）で育ち超一流の活躍した彼が、自分の研究活動を振り返り、応用とは直接の関係のない研究を行う動機は何かを考えながら、数学の学問のとしての成り立ちを省みようとしたのであろう。　　数学者は、常時ではないにしても、Hardyのように「無用の用」とも言われる「純粋」数学を研究する理由を探し求めている。もし数学が、一般大衆に容易に理解され、何らかの形で直接的にアピールするものがあるのなら（役に立つということだけではない）、研究者個人のモラルの意味ではこのような自己への問いかけは必要であっても、社会に向けて発言としては余り緊急性はない。しかし、数学は一般人にとって難解極まる代物だし、他の科学のように容易にはその内容を説明できない。フェルマーの定理の証明のように、一時マスメディアで扱われることはあっても、その後は「それでどうした」という感想が続いてくるのが常である。フェルマーの定理の証明の中で使われた数々の美しい理論や概念を説明したくても、不可能に近いし、たとえそれができたとしてもほとんどの人は見向きもしない（「数学セミナー」に連載された加藤和也氏による解説は、その名文とともに的確な解説に成功している希有な例である）。もちろん、この説明の難しさの点では、他の学問の分野でも同じであるが（例えば、現在でも「相対論」や「量子力学」を「誤解」を生じないように一般の人々に説明するのは簡単なことではない）、しかし、「純粋」数学以外の分野では、最後の切り札として、「目の前にある不可思議な現象」を理解するための学問であることを公言すれば、大衆の好奇心は容易に刺激され、たとえ生半可な理解でもその重要性を躊躇することなく認めるであろう。ブラックホールやビッグバンの真の意味は分からなくても、まさにこの宇宙の神秘に関係があると言えば、誰でも「それを知ることはは大事なことだ」と同意するに違いない。数学では、これが困難な点である。数学もある意味では目の前にあるものを理解しようと日々努力を重ねているのではあるが、方程式の可解性とか素数の分布とか、一旦具象から離れ形式化された対象を扱っているため、それを愛でるには訓練と努力が必要なのである。　　もちろん、数学者の中には、長い時間のスパンで見れば、数学は役に立っているではないか、数学を抜きにした科学など考えられないではないかという言い方で、数学を擁護する人たちもいる。確かにこれは厳然とした事実ではあるが、このような言い方が個人の研究動機に果たしてどれほどの意味をもつのだろうか。我々は、自分自身の研究が将来人類の福祉に役立つことを願って研究を進めているのだろうか。中には、Hardyのように、自分の研究は絶対に社会に役に立たないと宣言する数学者もいる。近年、思ってもいなかった形で、応用とは無縁と思われていた数学が、ひょっこりと応用分野に顔を出してくることがあるから、絶対に役に立たないとは言い切れないが、当の数学者は目を白黒させているというのが実状であろう。　数学を絵画や音楽のような芸術活動と類似のものと考え、数学の存在を擁護する人々もいる。もちろん、絵画や音楽もそれなりの鑑賞力を必要とし、数学を理解するのに訓練が必要なことと対比させて類似をいうこともできるが、どちらかと言えば説得力の点では弱い。では、我々は開き直っ

て、なんと言おうと数学というものは存在するのだと大声で叫ぶほかはないのだろうか。

ここで他の基礎的分野の研究者がどうしてその分野の研究を行うのか考えてみよう。いわゆる目の前にある現象を研究している人たちが、人類の福祉に役立つことを願って研究しているかといえば、これは一般論としては怪しい。もし、この研究者が会社や国の指示に従って、ある目的のために研究しているのなら、少しは福祉に関連があるかもしれない（利潤追求や、武器の製造に関連していれば、逆のこともあるが）。だが、自由な立場の研究者の動機のほとんどは、むしろ個人的な興味という方が多いと思われる。

そうすると、「純粋」数学の研究と、その他の分野の研究の性格の違いは、「なぜ、その研究が必要なのか」を社会（納税者）に向かって説明するときに生じるということになる。それでも正直な研究者は「純粋に未知のものを知りたいという個人的動機から」と率直にいうと思うが、この点では「純粋」数学と他の分野との違いはない。「自分の研究は、これこれの応用のための基礎研究で、直ぐには役に立たないが、将来十分有益なものになる」という言い方は、本音を隠して建前を述べている感が否めないが、それでも「純粋」数学以外の研究者は別に誇大広告を掲げているときの「罪の意識」は感じないでこう言えるだろう。だが「純粋」数学者がこのような言い方をすると、少々白々しいものを感じる。たとえ事実として、数学が科学の言葉として役に立っているとしてでもである。

「純粋」数学の研究の動機は、最初から最後まで「未知のものを知りたいという個人的」なものなのである。したがって、数学の社会的基盤は脆弱なものにならざるを得ない。特に「すぐに役に立つ教育・研究」が強調される風潮の中では、数学の学問としての重要性を主張することは極めて困難である。ここで、この風潮にのって、数学の役に立つ側面をアピールし、社会ですぐ役に立つ学生を育てることを謳い文句にすることも、１つの選択肢ではある。実際、数学の「汎用性」からいって、これは不可能なことではない。しかし、数学の歴史を顧みるとき、はっきり言ってこれは欺瞞である。古代ギリシャの数学を持ち出すことは避けるとしても、「役に立つ立たない」とは無関係のところで数学は進歩してきたのである。素数の研究が一体何の役に立つのか（もし、桁の大きい素数が暗号に使えるといっても、そのようなことは素数の研究の主体ではない）、正１７角形が作図できるからどうなのか、非ユークリッド幾何学が存在したらどうなのか、それらを研究した人々の頭の中には、また学生に教育する場面でも、「これは実生活で役に立つ」などという考えは全くなかったであろう。

我々はどのようにして数学に惹かれてきたのか。数学の「役に立つ」側面に惹かれたのか。数学の歴史の上でも、私の知っている数学者の中でも、「役に立つ」ということで数学を目指した人はいない。私自身に限って言えば、数学のロマンの虜にされたのである。そして、壮大な数学の歴史に参加したいという、個人的欲求から数学者になったのである。もちろん凡人の才覚しかない私にできることは限られている。でも、これは致し方ないことである。このような私ができることと言えば、このすばらしい数学を次の世代に伝えていくことである。教育とは（特に大学教育とは）、研究者自身および先人が培ってきた学問的体験を少しでも多くの学生に伝授する事ではないのか。我々を導いたロマンを、次の世代にも理解してもらうことではないのか。

数学の社会的基盤は脆弱であると言った。実際、数学者が数学をやっていられるのは、未知の事柄がたとえ社会的利益と直接にあるいは全く結びつかなくても、それを発見したいと言う一群の人たちの存在を社会の中で認める風潮があるからである。それは「文化」への人間の理解といってもよい。もし、この

ような風潮が弱まれば数学はその主要な原動力を失う。もし社会がそれでも良いというなら仕方がない。ローマ法が「数学は邪悪なものである」と規定したローマ時代に戻るだけのことである。

2. 数学とは何か

物理学者のウィグナーは「なぜ数学がこれほどまでに科学に有効なのか」を問いかけている。数学の成り立ちを考えれば、これは決して不思議でも何でもない。数学が対象とする概念は、直接ではなくても、何世代か（場合によっては2000年のオーダー）を遡れば、自然現象や日常を支配する法則に関連している。そしてその対象からあくまで離れずに研究しようとすれば、物理、化学、生物などの自然科学が登場するし、具体的対象は一旦おいて諸事象の関係を形式化して記述しようとすれば数学になる。たとえば同じ空間を対象としていても物理学は具象としての空間からは離れないが、数学（幾何学）は具象から形式としての空間の構造に興味を持つ。すなわち、点や直線の形式的関係を知りたいのである。だからこそ、数学は自由に飛翔する可能性をもつ。

しかし、だからといって人間は決して空なものから概念を抽出することはない。すなわち、人間の経験する諸事象とは無関係に数学の形式性が作られているのではないということである。今述べたように目の前にある空間を対象とした幾何学はもとより、整数を扱う数論でさえ、ものを数えるという極めて日常的な活動から始まっているのである（数の形式的側面は、それが余りにも日常化しているためほとんど気付かない）。そして、数学の論理さえ、日常の言葉の論理構造を敷衍したものであり、決して人間から離れたところにあるものをいじくり回している訳ではないのである。　　自然科学においても法則の記述を行おうとすると大抵形式化が必要となる。ただ見たままの現象を日常的な言い方で説明しても何の法則も説明できない（リンゴが落ちる、イギリスの海岸線は複雑であるといっても、それはそれだけのことである）。しかし、なぜリンゴが落ちるのか、複雑とはどういうことかを説明しようとすれば、必ず形式的思考が必要なのである。このとき、同じ根っ子から生じた学問で、しかも形式を対象とする数学がここで役にたたないはずはない。もちろん自然科学者は言う。「数学の形式性を表現上使うとしても、あくまでも研究の対象は具体的な『ものと現象』である」と。数学者は言う。「数学は、人間の日常的な営みから生まれたものではあるが、あくまで研究の対象は『形式』である」と。

形式というと、ヒルベルトの形式主義を思い浮かべるかもしれない。これは、確かに今述べた数学の形式的側面を徹底的に磨きあげようとする試みである。そしてその途中段階にあるのが公理主義である。ヒルベルトの形式主義（というよりその有限的な立場）は失敗もあり（ゲーデルの不完全性定理）、さらに公理主義についてもブルバキズムに対する反動もあってか、最近は評判がよくないが、実は数学を何らかの意味で使う者は、多かれ少なかれ「形式」主義者かあるいは「形式」主義の結果を使う人々なのである。例えば、実数を使わない科学者はほとんどいないと思うが、実数の成り立ちを反省すれば分かるように、その実体は形式そのものである。

ダイソンは言う。「２１世紀の新しい物理学で本質的に使われる数学は、ブルバキが捨て去っているもの（今流行っていない数学）の中から生まれるだろう」。確かに、ブルバキの数学が扱っていない数学は数え切れないほどあるし、彼の言うことは事実であろう。だからといって、物理学が数学の形式的側面を使わずにすますわけにはいかない。我々人間はお釈迦様の手の内から逃げ出すことはできない（もっと即物的に言えば、我々の脳が作り出す仮想現実と論理からは一歩も離れることはできないのである）。

ただここで誤解が起こらないよう、一言付け加えておこう。公理主義というと、公理を設定して、その枠組みの中で演繹のみにより研究を行うのが「厳密」

な数学と考えがちである。しかし、考えてみればすぐ分かるように、数学の研究も帰納的なのであって、もし本当に新しくおもしろいことを研究しようとすれば、特殊な事実を積み重ねて一般に至る道をとるのが普通である。これは「応用」であろうが「純粋」であろうが分野は問わない。公理主義や形式主義は、研究者が研究の手段として掲げているスローガンではなく、数学の形態を表す言葉である。数学は形式の表現として「厳密」であるが、数学者は決して厳密な態度で理解し、発見するのではない。数学者が、数学の形式的形態にはっきり気付いたのは、１９世紀以後である。非ユークリッド幾何学の発見、集合論の創始、数理論理学の発展など、すべて数学の形式性の発見の過程に起こったことである。数学は、それから長足の進歩を遂げた。すなわち、数学の独自の問題が続々と生まれ解かれてきたのだ。奇を衒う言い方かもしれないが、数学者が数学自身を成り立たせる形式的基盤の重要性を自覚したのは、この２００年の間のことなのである。

3. 数学は変わりつつあるのか

もちろん数学が扱う対象は変わりつつある。というよりも対象が広がりつつある。これは、ここ２００年だけでも、数学は扱う対象を相当に広げたという事実からも当然のことである。ただ数学の本質が変わるのかといえば、その兆候を私は見ることができない。幾何学者の立場から、将来空間概念のドラスティックな変化が現れることは期待もするし、その可能性も大であるが、数学の本質が変わるとは思えない。計算機は数学を変えるか。これについても懐疑的である。もちろん脳の外部的補助装置としての計算機の重要性はさらに大きくなるだろうが、それだけのことである。我々は、ガウスの計算の能力を計算機で獲得できるかもしれないが、ガウスの「本質的なものを掴み出す」能力は計算機からは得られない。また、ラマヌジャンが天才的閃きで発見した公式を、計算機はたちどころに作り出すかもしれないが、それだけでは数学には何の意味もない。ラマヌジャンがハーディと共同研究することにより、それらの公式（全部ではないが）の深い意味が明らかになったように、人間の想像力（創造力）がそのこれらの公式をとらえない限り、そこらに転がっている石と同じである。

人間の理解を超える長い証明にどう対処するのかが、計算機の関わり合いのもとでよく議論になる。このような場合に挙げられる例が４色問題の計算機による解決である。確かに 5000 以上の場合分けをして、虱潰しにチェックすることは人間の能力を超えることである。また、有限単純群の分類に１万ページ（？）の論文が必要と聞くと一人の数学者がすべての部分に関わることは不可能であろう。この様な状況は数学を根本から変えるのだろうか。もっと極端なことを言うと、リーマン予想の証明に一億ページかかるとしたとき、数学者は数学の証明に対する考え方を根本的に変えなければいけないのだろうか。しかし、場合分けにしても分類にしても、何をすべきか分かったときにはその証明の本質的な部分は終わっている。リーマン予想の場合は、むしろ我々の未知の構造が待ちかまえており、それを解明する努力を数世紀（？）にわたって行わなければならないということではないのだろうか。

もちろん、いつかは計算機が人間の情緒的な面まで踏み込んでくる可能性がないとは言えない。そして、計算機自身が数学を研究する事態を想定できないことはない。しかし、このような想定をして、数学は変化するのだという言い方は、ほとんど何の意味もない。人間は将来進化して、脳だけの生物になるから、我々の食生活は変化するだろうといっても、何の意味もないのと同じである。

また、最近、「証明」のない数学的結果もそれが真に面白いものならば価値があるのではないかという議論も行われる。その原型としては前述のラマヌジャンの例があるが、最近の物理学との関わり合いから

再び論争になっている。これは、研究者が新しい理論や結果を生み出すときの帰納的活動の部分を表に出すかどうかを、特に目覚ましい例を持ち出して「さあ、どうするか」を問いただしているのである。一般論としてはもちろん価値はある。ラマヌジャンの例はまさに好例である。しかし、気をつけなければいけないのは、このことに関して次のような事例を思い出すからである。「指数定理」の「証明」をある物理の専門家が説明したとき、ホモトピー不変性だけを計算で示して「指数定理」の証明と宣言し、物理学者は簡単な証明を知っていると自慢げに公言したときに感じたことである。事実はそうではないし、ホモトピー不変性は既にゲルファントが「指数定理」がアティヤとジンガーが確立する前に証明していることである。ゲルファンドは「指数定理」の成立を「証明」はなくてもは確かなものとして把握していたに違いないし、そのパイオニア的仕事は賞賛に値する。しかし、アティヤとジンガーの証明はそれに勝るとも劣らず重要なことである。かれらの証明から産出された概念は２０世紀後半の数学の発展にどれだけ寄与したことか。「証明」というものがもつ発見の機能も見過ごしてはならない。

（すなだ　としかず、東北大学理学研究科数学専攻）