

実験数学とは何だろうか

岡部 靖憲

雑誌「数学セミナー」の誌上で、「純粋数学 vs 応用数学」という題で、昨年(1994年)の4月号から今年の3月号にかけて、砂田利一氏と12回の書簡を交換した([16]—[18])。その往復書簡の中で、アメリカの純粋数学者と応用数学者の論争を江戸幕府の末期に起きた鎖国・開国論争に対比して、現在の日本の数学界の現状は江戸幕府のとった政策である鎖国状態にあり、産業界でのコンピューターの発達と文部省から押し寄せてくる大学改革の波が江戸後期に米国の開国を迫った黒船の来航に似ているのではないだろうかとは述べた。さらに、この時期に、数学界と外の世界との境界領域に生きる(応用)数学者が行動を起こす責任があるのではないだろうかとも述べた。

今年の猛暑の中(8月7日~8日)、日本の応用数学を先導してこられた山口昌哉先生が中心になられ、涼しい御殿場で企画された「諸科学に現れる数理工学的手法の研究」研究会に、多くの日本の純粋数学

者と応用数学者が出席し、「数学、数理科学、応用数理」について、夜を徹して行った議論はとても印象的であった。御殿場での意見の交換を再現し、議論を深めて行くこの“文集”は、今後の日本の数学界にとって大切なものになるだろうと思うし、そう望みたい。

数学(狭い意味で純粋数学)は、その研究対象が他の学問からきた概念や数学自身の内部活動から生まれた概念にせよ、その普遍的構造を調べる目的を持ち、数学界という独自の世界で内部自己活動を行い、科学の基盤を支える学問として発展してきた。その研究過程は、ある公理系のもとで、「仮設」を立て、帰納的推論による「証明」を積み重ねて、ある「結果」を得ることで理論を構築する道筋を採る。

この数学界が何故鎖国状態なのかと疑問に思う方が多いのではないだろうか。私が実践している「実験数学」の立場からこのことについて詳しく述べてみたい。

数学を純粋数学と応用数学と分類するのではなく、研究過程を時間の流れと見て、数学は純粋数学から応用数学へ、応用数学から実験数学へ進み、数学は本来一本の道を進む学問であり、それぞれの数学を研究している人が純粋数学者、応用数学者、実験数学者であると私は考えている。従って、狭いあるいは厳密な意味で、応用数学者は純粋数学者であり、実験数学者は応用数学者であり純粋数学者でもある(また、そうあって欲しいと思っている)：

$$\text{純粋数学} \xrightarrow{\text{哲学}} \text{応用数学} \xrightarrow{\text{修業}} \text{実験数学} \quad (1)$$

純粋数学の理論が応用畑の研究者の仕事に使われ、成果を伴うあるいは役に立つことで、数学は基礎学問としての地位を保ってきた。帰納的推論に論理の拠り所をおく純粋数学者が、演繹的推論を採らざるえない応用畑の研究に足を踏み出すとき、相手を説得させるだけでなく、自分自身をも説得させる哲学が必要となる。私が展開する応用数学を支える「哲学」は「揺動散逸定理」である。揺動散逸定理とは、

「複雑な挙動をする現象も、定常状態では、その時間発展を支配する力はランダムな部分(揺動)と決定的な部分(散逸項)に分けられ、両項の間にある関係が成り立つ」と要約できる。この哲学は人の研究生活に於いても有効である。(悪戦苦闘する)研究活動が揺動項に、その研究結果を人との出合いを通して議論あるいは発表する活動が散逸項に相当する。研究結果の発表に対して建設的あるいは厳しい質問を受けるが、それをエネルギーとして研究活動をさらに続け、努力に見合った結果を再び発表する。これを繰り返し継続できる状態が定常であると考えられる。

この揺動散逸定理の作用が純粋数学の中の種々の分野間に働く研究は広い意味の応用数学であるが、この揺動定理の心をもっと広く数学界とその外の世界との関連で捉える研究が応用数学であると私は考えている。揺動散逸定理は本来は非平衡統計物理学に於ける基本原理の一つであった。それを外からきた研究対象としての概念として、その数学的構造と普遍的構造を調べる過程を通して、私は物理学、工学、経済学、生物学、医学等に現れる時と共に不規則に変動する時系列データの解析という応用数学的研究に足を踏み入れていった。

数学界の外の応用畑の研究では、現象の説明あるいは物の建設という直接の目的あるいは切実な要求のために、そこで使われる理論の依ってきた仮設の成否を確かめることはまれである。理論の結果を用いて目的が果たせない場合は、その理論は捨て去られる。しかし、目的が達せられた(ように見えた)理論も、その後の実験技術あるいはコンピューターの性能の進歩により、実は目的が達せられていなかったことが判明し、捨てられることがある。特に、数学理論が捨てられる局面に出会うあるいは知ることにはなんと悲しいことではないだろうか。アインシュタインによるブラウン運動の研究は、現代の確率論の中でのマルコフ過程論の建設を引き起こす基本的・根源的なものであった。しかし、そのアインシュタ

インの理論の前提となる(定性的性質である)マルコフ性という概念が、コンピューターの性能の進歩により、成り立っていないことが判明した([1])。

統計物理学では、ストークスとブシネによる流体力学の理論と久保の線形応答理論を用いて、ブラウン運動の時間発展を記述するモデルとしての確率的方程式を精密化することによって、この危機を乗り越えた([2],[19])。数学的研究としての確率論では、新しいモデルの定性的な特徴は、マルコフ性より広い概念である鏡映正值性であることが分かり、KMO-ランジュヴァン方程式論が構築された([3]—[5])。

応用畑の研究に足を踏み入れた確率論研究者の私は、これらの研究を「解決」した仕事としてではなく、諸外国が江戸幕府の鎖国を解き、開国を迫る「危機」と見た。何が危機なのか。この危機を如何に乗り切るのか。その苦悶の揺動という修業を経て実験数学に到達したのである([6]—[15])。

実験数学とは、「数学の理論を応用畑の仕事として適用し実践するために、その理論の前提となる仮説を、コンピューターの力を借り、(仮説から結論を導く過程を込めた)理論そのものを用いることによって、検証する道を踏むことを研究の第一歩とする数学のこと」と私は考えている。現象を記述するデータからモデルを必要条件として数学の世界に導き出す姿勢が実験数学の基本的な哲学である：

$$\text{データ} \xrightarrow{\text{定性的性質の検出}} \text{検証} \xrightarrow{\text{モデル}} \text{モデル} \quad (2)$$

そこには、帰納的推論と演繹的推論との融合という困難な局面が起こる。如何なる修業によってその局面を乗り越え、応用数学的研究を実験数学的研究に深めるか、今、私は苦闘しているところである。揺動散逸定理の心に従えば、必ずや散逸できると信じている。

数理物理学あるいは数理経済学等という応用数学的研究の中に、「高等な数学理論」を「信頼性あるいは客観性のない天下りに建てられたモデル」に適用するような仕事が多く見られる。モデリングの必要

性・妥当性を調べない限り、上記のブラウン運動の理論のときと同じ問題が再来することであろう。純粋数学はすべて検証できるものでなくてはならないと言っているのではない。純粋数学はその研究対象を徹底的に調べることが必要であり、その姿勢で研究しなければ理論を完成することはできない。しかし、(純粋数学の理論を用いる)応用数学的研究は検証できるものであって欲しいと言っているのである。純粋数学的理論の前提におく仮説をいかに一般化あるいは精密化したからといって、純粋数学的意味は(真に)あってもその仮説が検証できないあるいは仮説を検証しようとしてもしない応用数学的研究が(反省もなく又注意もなく)繰り返し発表される日本の数学界の現状が鎖国状態であると私は考えている。

実験数学はその打破を目的としている。私実践している実験数学では、純粋数学の内部の自己運動と応用数学のもつ外部との接触で得た方法をもって、自然現象・社会現象・生命現象等のなかに入り込んで研究を行う意志をもち、それらの現象を表現する観測データ・実験データ等のデータのみから、その奥に潜む法則として、定常性を検証し、因果関係の有無を判別し、ダイナミクスを探し出すことに、数学が本来もつ実証科学の姿を見ている。その理論的基盤を支えているのは純粋数学的研究である。実験数学の研究過程で、数学それ自身の内部運動で蓄積してきた理論が応用畑で捨て去られる原因を数学者自らが究明し、何かを「悟る」ことに依って、有限を扱う現場の解析から無限を扱う純粋数学の世界に新たな概念が生まれると考えている：

$$\text{実験数学} \xrightarrow{\text{悟り}} \text{純粋数学} \quad (3)$$

数学には自然界の現象の解明を志し、実行していた時期があった。不可思議に見える自然・社会・生命現象等の謎・構造を究明する際に、天下りのモデルを立てるという「人間が自然を支配する姿勢」ではなく、定性的性質の検証という過程からモデルを必要条件として導くという「人間が謙虚に自然に接

する姿勢」が、環境問題が議論されている現在、求められているのではないだろうか。

参考文献

- [1] Alder, B.J. and T.E. Wainwright. Velocity autocorrelations for hard spheres, *Phys. Rev. Lett.* 18 (1967), 988-990
- [2] Kubo, R. 非可逆過程と確率過程, 確率過程論と開放系の統計力学 (数理解析研究所講究録 367) (1979), 50-93
- [3] Okabe, Y. On KMO-Langevin equations for stationary Gaussian process with T -positivity, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, SectIA Math.* 33 (1986), 1-56
- [4] Okabe, Y. On the theory of Brownian motion with the Alder-Wainwright effect, *J. Stat. Phys.* 45 (1986), 953-981
- [5] Okabe, Y. On long time tails of correlation functions for KMO-Langevin equations, *Proceedings of the Fourth Japan-USSR Symposium on Probability and Mathematical Statistics, Kyoto, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Tokyo, 1299 (1986), 391-397*
- [6] Okabe, Y. On a stochastic difference equation for the multi-dimensional weakly stationary process with discrete time, *Prospect of Algebraic Analysis (ed. by M. Kashiwara and T. Kawai), Academic Press, Tokyo (1988), 601-645*
- [7] Okabe, Y. 非線型予測理論と因果解析, システム／制御／情報, 「非線型システム特集号」 33 巻, 9 号 (1989), 478-487
- [8] Okabe, Y. Langevin 方程式と因果解析, *数学* 43 (1991), 322-346
- [9] Okabe, Y. Application of the theory of KM_2O -Langevin equations to the linear prediction problem for the multi-dimensional weakly stationary time series, *J. Math. Soc. Japan* 45 (1993), 277-294
- [10] Okabe, Y. A new algorithm derived from the view-point of the fluctuation-dissipation principle in the theory of KM_2O -Langevin equations, *Hokkaido Math. J.* 22 (1993), 199-209
- [11] Okabe, Y. 確率過程 応用と話題, 4 章 定常解析と因果解析, 情報理論とその応用シリーズ 2, 情報理論とその応用学会 [編], 培風館 (1994) 118-139
- [12] Okabe, Y. Langevin equations and causal analysis, *SUGAKU Expositions in Amer. Math. Soc. Transl.* 161 (1994), 19-50
- [13] Okabe, Y. and Y. Nakano, The theory of KM_2O -Langevin equations and its applications to data analysis (I):Stationary analysis, *Hokkaido Math. J.* 20 (1991), 45-90
- [14] Okabe, Y. and A. Inoue, The theory of KM_2O -Langevin equations and its applications to data analysis (II):Causal analysis, *Nagoya Math. J.* 134 (1994) 1-28
- [15] Okabe, Y. and T. Ootsuka, Application of the theory of KM_2O -Langevin equations to the non-linear prediction problem for the one-dimensional strictly stationary time series, *J. Math. Soc. Japan* 47 (1995), 349-367
- [16] 砂田利一・岡部靖憲, 往復書簡 “純粋数学 vs 応用数学”, *数学セミナー*, 1994 年 4 月号—1995 年 3

月号

- [17] 岡部靖憲, 実験数学と般若心経, 8 同人, 8₃, 1995
年 3 月, 1-10
 - [18] 岡部靖憲, 実験数学の立場から見た確率測度と
確率過程, 数理科学, 1995 年 12 月号
 - [19] Oobayashi, K., Kohno, T. and H. Utiyama,
Photon correlation spectroscopy of the non-
Markovian Brownian motion of spherical par-
ticles, Phys. Rev. A 27 (1983), 2532-2641
- (おかべ やすのり、東京大学工学系研究科
計数工学専攻)