数学メモアール

作用素環と幾何学

夏目利一
森吉仁志

第2巻　2001

日本数学会

まえがき

本書は１９９８年東京大学で行われたSurveys in Geometry「C^*環と幾何学」での夏目、森吉両氏の講演とその予稿集をもとに、両氏による加筆・訂正によってできあがったものである．ともに作用素環の理論の、幾何学に関わりの深い部分を中心とした、優れた概説である．森吉氏の概説はアティヤー・シンガーの指数定理に関わりの深い部分を中心にしたもので、また、夏目氏の概説は作用素環の理論の基礎から始めた解説になっている．一応は微分幾何あるいは位相幾何に関心の深い人を念頭に置いてかかれているが、必ずしも幾何学者ではない作用素環の理論に興味を持つ多くの人にとっても有用な概説であると思う．このような優れた解説書を読者に提供できたことは日本数学界メモワール編集委員としておよびSurveys in Geometry「C^*環と幾何学」の組織者として、大きな喜びであり、著者の２人に心から感謝したい．

２００１年6月１２日

深谷 賢治

目　次

第I部

トポロジストの為の作用素環論入門

夏目利一

目 次

まえがき

80 年代以降, トポロジー, 幾何学において C^* 環, フォン・ノイマン環という言葉をよく見かけるようになった. そんな折, トポロジスト, 幾何学者が作用素環のことを勉強しようとしても作用素環論関係の文献は解析にあまり縁の無い人にとっては決して読み易いものではない. このノートは「トポロジスト, 幾何学者が気楽に読み, 作用素環というものはどんなものなのか, 大雑把に感じてもらえたら」ということで準備した. したがって, テクニカルと思える部分は無視し雰囲気を伝えることを目標とした.

幾何的対象に代数的対象を対応させることは代数幾何では当り前のことで, 幾何においても馴染みのないものではない. 例えば C^∞-多様体 M に, $\mathbb{R}$-多元環 $C^\infty(M)$ を考えると M 上の C^∞-ベクトル場は多元環 $C^\infty(M)$ の微分と同一視される. 又, 1950 年代の Parsell-Shanks の定理「コンパクト C^∞-多様体 M, N が C^∞-同型である必要十分条件は $C^\infty(M), C^\infty(N)$ が $\mathbb{R}$-多元環として同型である.」も 1 つの例であろう.

C^∞-多様体に対して $C^k(M)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$ を考えることは自然なことであろう. これらはいずれもベクトル空間として無限次元であるから単なる $\mathbb{R}$-多元環として取り扱うだけでは意味あることはできない. 無限次元を「コントロール」する為に位相込みで考える必要がある. k : 有限なら $C^k(M)$ はバナッハ空間の構造が入り, $C^\infty(M)$ はフレッシェ空間である. 無限次元の線形代数をやろうと言うのであるから (例えば固有値を考えたいから) $\mathbb{C}$ 上で考えるのが適当であろう. 以下, $C^k(M)$ は $\mathbb{C}$-値 C^k-級関数の全体とする. $\mathbb{C}$-値関数を考えるから複素共役をとるという操作が入り, この操作込みで $C(M) = C^0(M)$ は C^* 環 (定義 1.5), $C^k(M)$ $(0 < k < \infty)$ はバナッハ $*$ 環 (§1), そして $C^\infty(M)$ はフレッシェ $*$ 環に成る.

一般論としてバナッハ $*$ 環より C^* 環の方が行儀がよく (well-behaved), 美しい理論が適用できる. コンパクト空間 X に対して C^* 環 $C(X)$ を対応させることは, コンパクト空間と連続写像の圏と可換, 1 を持つ C^* 環と $*$ 写像 (定義 3.17) の圏との間の同値を与える (Gel'fand の定理). 一旦, この対応を自然なものとして受け入れるならば, 葉層構造の葉空間等の「特異」空間に対応するべき C^* 環として非可換なものを考える必要があるであろう. したがって, 可換 C^* 環だけでなく, C^* 環の一般論を知っておくことも大切であろう.

冒頭に述べたように, このノートは「雰囲気」を伝えることを目標としている. そ

こで簡単に手に入る作用素環論一般に関する文献を掲げておく．読み物的に細かな証明を気にしないで読めるものとして [18], そこそこ証明が気になる向きには [33], そして徹底的に証明を理解したい向きには [26], [44] が在る．

第1章　C^* 環

1.1　C^* 環

$\mathbb{C}$-多元環 B が **バナッハ環** (Banach algebra) であるとは, B があるノルム $||\cdot||$ に関してバナッハ空間であり, 任意の $a, b \in B$ に対して積が定義され,

$$||ab|| \leq ||a||||b||$$

が成立することである. バナッハ環 B が (乗法的) 単位元 1 を持つ時, B を unital Banach algebra と言う. バナッハ環が単位元を持つ時, $||1|| = 1$ は仮定しない. 然しながら $||1|| \neq 1$ である時, 同値なノルム $|||\cdot|||$ で $|||1||| = 1$ とできる.

(例 1.1)　$\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ 開単位円盤として

$$A = \{\ f \in C(\overline{\mathbb{D}})\ ;\ f_{|\mathbb{D}} : \text{正則}\ \} \quad \text{(the disk algebra)}$$

はノルム $||f||_\infty = \sup\{|f(x)|\ ;\ x \in \overline{\mathbb{D}}\ \}$ に関してバナッハ環になる.

定義 1.2.　バナッハ環 B 上に共役線形写像 $* : B \to B$ で条件 (i) $a^{**} = a$, (ii) $(ab)^* = b^*a^*$, (iii) $||a^*|| = ||a||$ が任意の $a, b \in B$ に対して成立するものが存在する時, B を **バナッハ $*$ 環** (Banach $*$-algebra) と呼ぶ.

B が単位元 1 を持つ時

$$1^* = 11^* = 1^{**}1^* = (11^*)^* = 1^{**} = 1$$

が成立する.

(例 1.3)　例 1.1 の A にバナッハ $*$ 環の構造は入らない.

(例 1.4)　G を局所コンパクト群, μ を G 上の左ハール測度, Δ をモジュラー関数とする．G 上の可積分関数 (の同値類) の全体を $L^1(G)$ とする．$L^1(G)$ は以下の構造でバナッハ $*$ 環になる．

$$\text{積}\ :(\phi * \psi)(g) = \int_G \phi(h)\psi(h^{-1}g)d\mu(h), \quad \phi, \psi \in L^1(G),$$

$$* : \phi^*(g) = \Delta(g^{-1})\overline{\phi(g^{-1})},$$

$$\text{ノルム} : \|\phi\|_1 = \int_G |\phi(g)|d\mu(g).$$

G が離散群の場合が特に重要である．Γ: 離散群とする．この時 $\ell^1(\Gamma)$ は群環 $\mathbb{C}[\Gamma]$ の ℓ^1-ノルムに関する完備化と一致．特に, $\ell^1(\Gamma)$ は単位元を持つ．一般に $L^1(G)$ が 1 を持つ必要十分条件は G が離散群であることである．

定義 1.5.　A をバナッハ $*$ 環とする．ノルム $\|\cdot\|$ が条件

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad a \in A$$

を満たす時, A を $\boldsymbol{C^*}$ **環**, ノルムを $\boldsymbol{C^*}$ **ノルム**と呼ぶ．

(注 1.6)　$A = \{0\}$ は自然に C^* 環の構造が入る．

(注 1.7)　C^* 環 A が 1 を持つ時, $A \neq \{0\}$ ならば自動的 $\|1\| = 1$ が出る．何故ならば, $1 = 1^*1$ により $\|1\| = \|1^*1\| = \|1\|^2$．これから $\|1\| = 0$ または 1．$\|1\| = 0$ なら $1 = 0$ であり $A = \{0\}$．したがって $\|1\| = 1$．

(例 1.8)　例 1.4 のバナッハ $*$ 環 $L^1(G)$ は C^* 環ではない．この事は, 例えば $G = \mathbb{Z}$ として適当な $\varphi \in \ell^1(\mathbb{Z})$ をとれば $\|\varphi^*\varphi\|_1 \neq \|\varphi\|_1^2$ となることから分かる．

次の例は最も初等的かつ基本的なものである．

(例 1.9)　X をコンパクト・ハウスドルフ空間とし, $C(X)$ を考える．$C(X)$ は $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $\|f\|_\infty = \sup\{\, |f(x)|\ ;\ x \in X\,\}$ により C^* 環となる．

X をコンパクトとは限らない局所コンパクト空間としよう．$f \in C(X)$ が**無限遠点で消える** (vanishing at infinity) とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して適当なコンパクト集

合 $K \subset X$ をとれば, K の外で f の絶対値が ε より小さくなることとする. 記号 $C_0(X)$ で無限遠点で消える $f \in C(X)$ の全体を表わす. $C_0(X)$ はノルム $\|f\|_\infty$ に関して C^* 環となる.

(注 1.10) 偏微分方程式論 etc. 数学のいくつかの分野で記号 $C_0(X)$ は台がコンパクトである連続関数の全体を表わすことがあるから混同しない注意が必要となる. 作用素環論で台がコンパクトである連続関数の全体は $C_c(X)$ で表わされる.

1.11. $C_0(X)$ の中で $C_c(X)$ は稠密である.

1.12. $X^\sim = X^\cup\{\infty\}$ を X の 1 点コンパクト化とする. $C_0(X)$ は空間

$$\{\, f \in C(X^\sim) \; ; \; f(\infty) = 0 \,\}$$

と同一視できる.

1.2 ヒルベルト空間上の C^* 環

ヒルベルト空間に関する基本的事実をこの章の最後に付録として載せておく. $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間として $B(\mathcal{H})$ で有界線形作用素全体とする.

$A \in B(\mathcal{H})$ に対して, その共役 A^* を対応させる写像は共役線形で $A^{**} = A$ が成立する. 又, $\|A^*A\| = \|A\|^2$ が全ての $A \in B(\mathcal{H})$ に対して成立する. したがって $B(\mathcal{H})$ は C^* 環である.

(蛇足 2.1) 作用素論において大文字の $A, B, C, \cdots$ は通常, 作用素を表わす. 一方, 作用素環論において $A, B, \cdots$ は作用素環 (C^* 環, $*$ 多元環 etc.) を表わす.

$B(\mathcal{H})$ の部分代数 A で, $*$-作用, ノルムで閉じているものは自動的に C^* 環となる. 一般に C^* 環 A の部分代数 B で $*$-作用, ノルムで閉じているものは, C^* 環であり, B は A の **C^* 部分環**と呼ばれる. C^* 環 A が単位元を持っても, C^* 部分環 B が単位元を持つとは限らない. 例えば X を局所コンパクト空間とすると $C_0(X)$ は $C(X^\sim)$ の C^* 部分環とみなされる. $C(X^\sim)$ は 1 を持つが $C_0(X)$ は単位元を持たない. A が 1_A を持ち, その部分環 B が単位元 1_B を持っても $1_A = 1_B$ とは限らない. ヒルベル

ト空間 $\mathbb{C}^n$ に対して $B(\mathbb{C}^n) = M_n(\mathbb{C})$ である．$1 \leq m < n$ として, $M_m(\mathbb{C})$ を自然な写像

$$\begin{array}{ccc} M_m(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ a & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & \\ & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

で $M_n(\mathbb{C})$ の C^* 部分環とみなすことができる．この時 $M_m(\mathbb{C}), M_n(\mathbb{C})$ の単位元は一致しない．

定義 2.2. C^* 環 A の部分集合 S に対して, S を含む最小の C^* 部分環 $C^*(S)$ を **S で生成された C^* 環**と言う．

(例 2.3) G を局所コンパクト群, μ を左不変測度とする．$f \in L^1(G)$ は次の式で $L^2(G,\mu)$ 上の有界線形作用素 $\lambda(f)$ を定める:

$$(\lambda(f)\phi)(g) = \int_G f(h)\phi(h^{-1}g)d\mu(h).$$

この時ルベーグ積分論で学んだ様に $\|\lambda(f)\| \leq \|f\|_1$．$L^2(G,\mu)$ 上で (*i.e.* $B(L^2(G,\mu))$ の中で)

$$\{\ \lambda(f)\ ;\ f \in L^1(G)\ \}$$

で生成された C^* 環を $C^*_{\mathrm{red}}(G)$ と記し, **G の被約群 C^* 環** (reduced group C^*-algebra) と言う．

$C^*_{\mathrm{red}}(G)$ が単位元を持つ必要十分条件は G が離散群であることである．

(注 2.3) バナッハ空間 E 上の有界線形作用素全体 $B(E)$ はバナッハ環である．

X を局所コンパクト空間とする．1 を持たない C^* 環 $C_0(X)$ は 1 を持つ C^* 環 $C(X^\sim)$ の部分環 (実際にはイデアル) となっている．ベクトル空間として

$$\begin{array}{ccc} C(X^\sim) & \cong & C_0(X) \oplus \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & (f - f(\infty), f(\infty)). \end{array}$$

この事実が一般の 1 を持たない環に対して拡張される．A を任意の C^* 環 (1 を持つ持たないは仮定しない) とする．

$$A^\sim = A \oplus \mathbb{C} \qquad (\text{ベクトル空間の直和})$$

とおく．$A^\sim$ には $*$ 多元環の構造が次の様にして入る．

$$\begin{aligned} \text{積} \ : \quad & (a,\lambda)(b,\mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu), \\ * \ : \quad & (a,\lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda}). \end{aligned}$$

積の定義から A は $A^\sim$ の両側イデアルであることが分かる．$A^\sim$ にノルムを入れて C^* 環としたいのであるが, 例えばバナッハ空間の直和としてのノルム

$$\|(a,\lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$$

を考えると, バナッハ $*$ 環にはなるが, C^* ノルムにはならない．

任意の $(a,\lambda) \in A^\sim$ は左から掛けることによりバナッハ空間 A 上の有界線形作用素を定める．そこで (a,λ) の $B(A)$ の元としてのノルム

$$\|(a,\lambda)\| = \sup_{\|b\|\leq 1} \|ab + \lambda b\|$$

を考えると, このノルムは C^* ノルムであり, $A^\sim$ は C^* 環となる．

定義 2.4. $A^\sim$ を $\boldsymbol{A}$ **に 1 を付け加えた** $\boldsymbol{C^*}$ **環**と呼ぶ．

以上, 色々C^* 環, バナッハ環の例をみてきたが, これまでのところでは C^* ノルムの重要さは分からないであろう．C^* ノルムの条件が意味するところを理解するには少々スペクトラル理論が必要となる．

1.3 スペクトラル理論

A を単位元を持つ C^* 環とする．$a \in A$ に対して $b \in A$ が存在し $ab = ba = 1$ が成立する時, a を**可逆** (invertible), b (一意的に定まる) を a の**逆** (inverse) と呼び a^{-1} で表わす．$GL_1(A)$ で A の可逆な元の全体を表わす．

定義 3.1. $a \in A$ に対して

$$\sigma(a) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \lambda 1 - a \notin GL_1(A) \}$$

とおく．$\sigma(a)$ を a の**スペクトラム** (spectrum) と言う．

(例 3.2) $A = C(X)$, X: コンパクト空間とする．この時 $f \in C(X)$ に対して

$$\sigma(f) = f(X) \qquad (f \text{ の値域}).$$

(例 3.3) $a \in GL_1(A) \iff 0 \notin \sigma(a)$.

(例 3.4) $A = M_n(\mathbb{C})$ の時, $\sigma(a) = \{\ a \text{ の固有値}\ \}$.

(例 3.5) $a, b \in A$ に対して

$$1 - ab \in GL_1(A) \iff 1 - ba \in GL_1(A).$$

可逆である十分条件として次の便利な補題が成立する．

補題 3.6. A は単位元を持つとする．$a \in A$, $\|1-a\| < 1$ ならば a は可逆であり

$$\|a^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|1-a\|}.$$

(証) 仮定により級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n$ は A で収束し, a の逆になる．ノルムの評価は自明．

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n$ を**ノイマン級数** (Neumann series) と呼ぶ．

系 3.7. $GL_1(A)$ は A の開集合．

(証) $a \in GL_1(A)$, $\|a-b\| < \|a^{-1}\|^{-1} \implies b \in GL_1(A)$.

上の補題から次が分かる．

命題 3.8. $\sigma(a)$ は $\mathbb{C}$ の閉部分集合であり, $\{\ z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leq \|a\|\ \}$ に含まれる．したがってコンパクトである．

定義 3.9. $\mathbb{C}\backslash\sigma(a)$ を a の**レゾルベント集合** (resolvent set), 各 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(a)$ をレゾルベント (resolvent), $\mathbb{C}\backslash\sigma(a)$ 上の関数 $\lambda \mapsto (a-\lambda)^{-1}$ を**レゾルベント関数** (resolvent function) と言う.

$GL_1(A)$ に A の部分空間の位相を入れるとレゾルベント関数は連続になる. 実際は, もっと強い次のことが言える.

補題 3.10. バナッハ空間に値を持つ関数としてレゾルベント関数は正則である.

実際

$$\lim_{\lambda'\to\lambda}\frac{(a-\lambda')^{-1}-(a-\lambda)^{-1}}{\lambda'-\lambda} = \lim_{\lambda'\to\lambda}\frac{(a-\lambda')^{-1}(\lambda'-\lambda)(a-\lambda)^{-1}}{\lambda'-\lambda}$$
$$= (a-\lambda)^{-2}.$$

命題 3.8 により, 我々は $\sigma(a)$ はコンパクト集合であることを知っている. 例 3.2, 例 3.4 では明らかに $\sigma(a) \neq \varnothing$. 然しながら一般的に $\sigma(a)$ が空でないということは自明ではない.

定理 3.11 (I.M. Gel'fand). スペクトラム $\sigma(a)$ は空ではない.

(略証) $|\lambda| > 2\|a\| \implies \|(a-\lambda)^{-1}\| < \|a\|^{-1}$. 一方, コンパクト集合 $\{|\lambda| \leq 2\|a\|\}$ 上で $\lambda \mapsto \|(a-\lambda)^{-1}\|$ は連続. したがって有界. まとめて関数 $\lambda \mapsto \|(a-\lambda)^{-1}\|$ はレゾルベント集合上で有界.

$\sigma(a) = \varnothing$ と仮定してみよう. A 上の任意の有界線形汎関数 ψ に対して関数 $\lambda \mapsto \psi((a-\lambda)^{-1})$ は有界整関数. よって Liouville の定理により定数関数. したがってレゾルベント関数は定数. これは矛盾.

定義 3.12. A: 1 を持つ C^* 環. $a \in A$ に対して

$$r(a) = \sup\{\, |\lambda|\, ; \lambda \in \sigma(a)\,\}$$

を a の**スペクトル半径** (spectral radius) と言う.

直ちに $r(a) \leq \|a\|$ が得られる．スペクトル半径とノルムを関連付ける次の大事な結果がある．

定理 3.13 (A. Beurling). $r(a) = \inf_{n \geq 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

C^* 環の元に対して大事な概念を導入しよう．

定義 3.14. $a \in A$ が**自己共役** (selfadjoint) $\Longleftrightarrow$ $a^* = a$.

すると次が成立する．

定理 3.15. A を 1 を持つ C^* 環, a を自己共役とする．この時 $r(a) = \|A\|$.

(証) 証明では, C^* ノルムであることがポイント．

$$\begin{aligned} a^* = a \implies \|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2 \implies \text{帰納的に } \|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n} \\ \implies r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|. \end{aligned}$$

系 3.16. $*$ 多元環を C^* 環とするノルムは高々1つ存在．

(証) $\|\cdot\|_j$ $(j = 1, 2)$ を $*$ 多元環 A 上の C^* ノルムで $(A, \|\cdot\|_j)$ は C^* 環, *i.e.* A は各 $\|\cdot\|_j$ に関して完備であるとする．

$$\|a\|_j^2 = \|a^*a\|_j = r(a^*a).$$

スペクトル半径はノルムに無関係．よって $\|a\|_1 = \|a\|_2$.

定義 3.17. A, B を C^* 環とする．多元環の準同形 $\varphi : A \to B$ で任意の $a \in A$ に対して $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ となるものを **$*$ 準同形** ($*$-homomorphism) という．

任意の $*$ 準同形 $\varphi : A \to B$ は $\widetilde{\varphi} : A^\sim \to B^\sim$ に 1 を 1 に写すとして一意的に拡張する．

定義 3.17 において φ の有界性を仮定しないのは次の定理が成立するからである．

定理 3.18. 任意の $*$ 準同形 $\varphi : A \to B$ は縮小写像である, *i.e.*

$$\|\varphi(a)\| \leq \|a\|, \quad a \in A.$$

(証) 必要なら $\tilde{\varphi}$ を考えることにより, A, B は 1 を持ち $\varphi(1) = 1$ が成立すると仮定してよい. すると $\varphi(GL_1(A)) \subset GL_1(B)$. よって $\sigma(\varphi(a)) \subset \sigma(a)$. したがって

$$\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| = \|\varphi(a^*a)\| = r(\varphi(a^*a)) \leq r(a^*a) = \|a\|^2.$$

次の事実は非常に役に立つ.

定理 3.19. 単射的 $*$ 準同形は等長写像である.

I を C^* 環 A のノルムに関して閉である両側イデアルとする. 以後特に断られない限りイデアルは両側イデアルを意味することとする. I が閉イデアルとすると A/I は $*$ 多元環の構造を持つ. バナッハ空間としての商ノルム

$$\|a + I\| = \inf\{\ \|b\|\ ;\ b \in a + I\ \}$$

は C^* ノルムとなり, A/I は C^* 環となる. このことを使うと定理 3.19 の系として次が得られる:

系 3.20. $\varphi : A \to B$ を $*$ 準同形とすると, 像 $\mathrm{Im}(\varphi)$ は閉部分空間である.

以上 C^* 環の持っている性質をスペクトラムという概念を通して見た. スペクトラムはバナッハ環の各元に対して定義される. 今, 次の例を考えてみよう.

A を例 1.1 のバナッハ環, *i.e.* the disk algebra とする. $\overline{\mathbb{D}} \backslash \mathbb{D} = \mathbb{T}$ であり, 写像

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A & \longrightarrow & C(\mathbb{T}) \\ & f & \longmapsto & f_{|\mathbb{T}} \end{array}$$

は最大値の原理により中への等長写像である. $\varphi(A) = B$ とする. B は $C(\mathbb{T})$ の部分バナッハ環で 1 と $z : \mathbb{T} \hookrightarrow \mathbb{C}$ により生成されている. 今, 元 $z \in B$ を考えてみよう. z の $C(\mathbb{T})$ でのスペクトラムは $\mathbb{T}$ であるが B の中でみれば $\overline{\mathbb{D}}$ となる. つまりどの

バナッハ環の中で考えるかによってスペクトラムが変わってしまうのである．C^* 環に対してはこの様なことは起きない．

定理 3.21. A を 1 を持つ C^* 環, B を A の $*$ 部分環で A の 1 を含むとする, *i.e.* 1 を共有すると仮定する．この時, 任意の元 $a \in B$ の A におけるスペクトラムと B におけるスペクトラムは一致する．

証明において次の定理が "crucial" である．

定理 3.22. A を 1 を持つ C^* 環とし, $a \in A$ を自己共役とする．この時

$$\sigma(a) \subset \mathbb{R}.$$

行列環 $M_n(\mathbb{C})$ の元については既知．そこでの本質は $\sigma(a)$ の元が全て固有値であることであった．

驚くべきことであるが, 巷に出回っている関数解析の本で, 定理 3.22 の証明を「$\lambda \in \sigma(a) \implies \bar{\lambda} \in \sigma(a)$」で事足りるとしたものがある．注意されたし．

証明のアウトラインは次の様である．自己共役 a に対して $u = e^{ia}$ はユニタリー (unitary), *i.e.* $u^*u = uu^* = 1$. 先ず $\sigma(u) \subset \mathbb{T}$ であることを示し, $\lambda \in \sigma(a)$ ならば $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia})$ となることから $\lambda \in \mathbb{R}$ が出る．

定理 3.21 の証明の概略.「$a \in B \cap GL_1(A) \implies a \in GL_1(B)$」を言う．$a$ の A (resp. B) におけるスペクトラムを $\sigma_A(a)$ (resp. $\sigma_B(a)$) と記すことにする．明らかに $\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a)$.

$GL_1(B)$ は $B \cap GL_1(A)$ の開かつ閉部分集合．a 自己共役とすると $\sigma_A(a) \subset \mathbb{R}$. よって, $\mathbb{C}\backslash\sigma_A(a)$ は連結であり, $\mathbb{C}\backslash\sigma_B(a)$ は $\mathbb{C}\backslash\sigma_A(a)$ の開かつ閉部分集合． よって

$$\mathbb{C}\backslash\sigma_B(a) = \mathbb{C}\backslash\sigma_A(a).$$

一般の $a \in B \cap GL_1(A)$ に対しては $aa^* \in GL_1(A) \cap B$ を示し, $aa^* \in GL_1(B)$ となることから $a \in GL_1(B)$ が示される．

1.4 Gel'fand の定理

さて, いよいよ非可換幾何の出発点に当たる「空間の代数化」Gel'fand 表現の話である.

「まえがき」で触れた様に Gel'fand の定理は可換 C^* 環と位相空間を結び付けるものである. C^∞-多様体と $C^\infty(M)$ とを結び付ける Pursell-Shanks の定理のメカニズムを思い出そう. 多様体の点 m, $C^\infty(M)$ のイデアル $\{ f \in C^\infty(M) \,;\, f(m) = 0 \}$, そして m での Dirac 測度 δ_m を同一視することが本質であった.

可換バナッハ環 A に対して多元環の準同型 $\phi : A \to \mathbb{C}$ を**指標** (character) と言う. 定義において ϕ の有界性を仮定しないが**自動的**に有界となる. 実際 $\|\phi\| \leq 1$. 更に, もし A が 1 を持ち, ϕ が 0 でなければ $\phi(1) = 1$ となり, $\|\phi\| = 1$.

0 でない指標の全体を $\Omega(A)$ と記す. A のバナッハ空間としての双対空間 A^* 上の弱 $*$ 位相 (weak*-topology), *i.e.* 各点収束位相を考える.

$$S = \{ \tau \in A^* \,;\, \|\tau\| \leq 1 \}$$

とおく. バナッハ・アラオグル (Banach-Alaoglu) の定理は S が弱 $*$ 位相に関してコンパクトであることを主張する. $\Omega(A) \subset S$ であり, $\Omega(A)^\cup\{0\}$ は S で弱 $*$ 閉, よって $\Omega(A)^\cup\{0\}$ は弱 $*$ コンパクト. したがって $\Omega(A)$ は局所コンパクト. 一方, A が 1 を持てば, $\phi \in \Omega(A)$ に対して $\phi(1) = 1$ となることから $\Omega(A)$ が S で閉となる. 以上まとめると:

定理 4.1. A を可換バナッハ環とする. $\Omega(A)$ は局所コンパクトであり, もし A が 1 を持てば $\Omega(A)$ はコンパクトである.

A が可換バナッハ環とする. 自明なことであるが $A = \{0\} \implies \Omega(A) = \varnothing$. $A \neq \{0\}$ かつ 1 を持つとする. この時 A は極大イデアル I を持つ ($I = \{0\}$ かもしれないが). すると A/I は 1 を持つバナッハ環で全ての 0 でない元が逆元を持つ. その様なバナッハ環は $\mathbb{C}$ と同型 (Gel'fand-Mazur の定理). 写像 $A \to A/I \cong \mathbb{C}$ は $\Omega(A)$ の元を与える. よって, $\Omega(A) \neq \varnothing$.

一方, 1 を持たないバナッハ環 A で, $A \neq \{0\}$, 可換, $\Omega(A) = \varnothing$ となるものが存在する. これもバナッハ環論における「病理的」な現象の一つである. A を可換バナッ

ハ環で $\Omega(A) \neq \varnothing$ とする．$a \in A$ に対して

$$\hat{a}: \Omega(a) \to \mathbb{C}$$

を $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$ で定義する．このセッティングでみると弱 $*$ 位相は全ての $\hat{a}$ $(a \in A)$ を連続とする最弱の位相である．任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\{ \phi \in \Omega(A) \ ; \ |\hat{a}(\phi)| = |\phi(a)| \geq \varepsilon \}$$

は S の弱 $*$ 閉集合．よって弱 $*$ コンパクト．このことから $\hat{a} \in C_0(\Omega(A))$.

定理 4.2 (Gel'fand). $\Omega(A) \neq \emptyset$ とする．この時写像

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & A & \longrightarrow & C_0(\Omega(A)) \\ & a & \longmapsto & \hat{a} \end{array}$$

は縮小写像である．実際, $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$, $a \in A$.

更に, もし A が 1 を持てば $\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(a))$, 1 を持たなければ $\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A))^{\cup}\{0\}$.

写像 $\varphi : A \to C_0(\Omega(A))$ を Gel'fand 表現と呼ぶ．

先に 0 でないバナッハ環で $\Omega(A) = \varnothing$ となるものが存在すると述べたが C^* 環に対しては, こんなことは起きない．

A を 0 でない C^* 環とする．簡単な議論で自己共役 $a \neq 0$ が存在することが分かる．定理 4.2 を $A^\sim$ に対して適用する．$r(a) = \|\hat{a}\|_\infty$ であるから, ノルム $\|\cdot\|_\infty$ の定義により適当な $\phi \in \Omega(A^\sim)$ をとれば $r(a) = \|\hat{a}\|_\infty = |\hat{a}(\phi)| = |\phi(a)|$．$r(a) = \|a\|$ (a は自己共役だから)．したがって $r(a) > 0$．故に $\phi|_A \in \Omega(A)$．この様にして 0 でない C^* 環 A に対して常に $\Omega(A) \neq \varnothing$ である．

定理 4.2 を可換 C^* 環に対して精密化する．

定理 4.3. A を 0 でない可換 C^* 環とする．この時 Gel'fand 表現は C^* 環の同型である．

証明は次の様なものである． C^* 環であることを何処で使っているか注意して欲しい．

φ が縮小写像であることは既に示されている．$\phi \in \Omega(A)$ は $*$ 準同形であることから (勿論, 要証明), φ が $*$ 準同形であることがでる．

等長写像であることは

$$\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a^*a)\| = r(a^*a) = \|a\|^2.$$

したがって φ を通して A を $C_0(\Omega(A))$ の C^* 部分環だとみなすことができる．

A は $\Omega(A)$ の点を分離し, 任意の $\phi \in \Omega(A)$ に対して $\varphi(a)(\phi) \neq 0$ となる $a \in A$ が存在する．したがって Stone-Weierstrass の定理により $\varphi(A)$ は $C_0(\Omega(A))$ で稠密. $\varphi(A)$ 自身, 閉部分空間であるから $\varphi(A) = C_0(\Omega(A))$. よって Gel'fand 表現は C^* 環の同型である．

定理 4.3 の系として, 実は定理 3.19 が得られる．

さて, 定理 4.3 を $A = C_0(\Omega)$ に適用すると A と $C_0(\Omega(A))$ の同型が得られる．Ω と $\Omega(A)$ の関係はどうなっているであろうか？

定理 4.4. $\omega \in \Omega$ に対して, ω での Dirac 測度を δ_ω とすれば $\delta_\omega \in \Omega(C_0(X))$ であり, 対応

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega(C_0(\Omega)) \\ \omega & \longmapsto & \delta_\omega \end{array}$$

は位相同型である．

証明は, Ω がコンパクトである場合に全単射連続であることを示し,「コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続全単射は位相同型である」という位相空間の演習問題を用いる．

$a \in C(\Omega)$ に対して $\sigma(a)$ 上で定義された連続関数 g を考えよう．すると $g(a) = g \circ a \in C(\Omega)$ が定義される．つまりスペクトラム上の連続関数に C^* 環の元を「代入」して同じ C^* 環の元が得られた訳である．このことが一般化される．

定理 4.5. A を 1 を持つ C^* 環, $a \in A$ を**正規** (normal), *i.e.* $a^*a = aa^*$ とする. $z \in C(\sigma(a))$ を自然な写像 $z : \sigma(a) \hookrightarrow \mathbb{C}$ とする．この時, 1 を 1 に移す $*$ 準同型

$$\varphi : C(\sigma(a)) \to A$$

で $\varphi(z) = a$ となるものが一意的に存在する.

1 と a で生成されると C^* 部分環を B とすれば, B は 1 を持つ可換 C^* 環. Gel'fand の定理から $B = C(\Omega)$ と書ける. 一方 $C(\sigma(a))$ は 1 と z により生成されている. 以上のことを継ぎ合わせ, 位相空間の問題として定理は示される.

$g \in C(\sigma(a))$ に対して定理 4.5 で一意的に定まる φ による像 $\varphi(g)$ を以降 $g(a)$ と記す. a に対して $g(a)$ を対応させることを a の**関数解析** (functional calculus) と言う.

Gel'fand の定理を用いて色々な事が示される. それらを少し見よう. A を C^* 環とする.

定義 4.6. $a \in A$ が**正値** (positive) $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a^* = a,\ \sigma(a) \subset [0, \infty)$. この時 $a \geq 0$ と記す.

$$A_+ = \{\, a \in A \,;\, a \geqq 0 \,\}.$$

正値性は $A = M_n(\mathbb{C})$, $A = C_0(X)$ の場合馴染みの概念である. 自己共役 $a, b \in A$ に対して $a - b \geq 0$ となる時 $a \geq b$ と記す.

A が 1 を持つ時, 勝手な自己共役 a に対して

$$a \leq \|a\| 1$$

が成立. 何故ならば $\sigma(\|a\| - a) = \{\, \|a\| - \lambda \,;\, \lambda \in \sigma(a) \,\}$.

命題 4.7. a 自己共役とする. この時

$$a \geq 0 \iff a = b^2,\ b \in A_+.$$

自己共役 c に対して c の生成する C^* 部分環 $C^*(c)$ を考えると, c が A で $c \geq 0$ となる必要十分条件は $C^*(c)$ で $c \geq 0$ となることである. $C^*(a)$, 又は $C^*(b)$ という可換 C^* 環に Gel'fand の定理を適用して位相空間上の連続関数の問題に焼き直せば証明は簡単.

上の命題で $a \in A_+$ は $a = b^2$, $b \in A_+$ と書ける訳だが, $a = b^2$ となる $b \in A_+$ は一意的に定まる. それを $\sqrt{a}$ 又は $a^{\frac{1}{2}}$ と記し, a の正の**平方根** (positive square root) と言う.

定理 4.8. A_+ は錐である．特に $\leq$ は A の半順序.

(証) $a \in A_+$, $\lambda \geq 0 \implies \lambda a \in A_+$ は自明.「$a, b \in A_+ \implies a + b \in A_+$」を示す為に $a \geq 0$ の特徴付けが必要となる．その特徴付けは連続関数に関して自明な次の命題である: $a = a^*, \|a\| \leq 1$ とする.

$$a \in A_+ \iff \|1 - a\| \leq 1.$$

これを用いれば

$$\|1 - \frac{1}{2}(a + b)\| = \frac{1}{2}\|(1 - a) + (1 - b)\| \leq 1$$

から $\frac{1}{2}(a + b) \in A$. よって $a + b \in A_+$. 先の特徴付け自身は, Gel'fand の定理で関数の問題に翻訳すれば自明.

$$a \in A_+ \cap (-A_+) \quad \text{とすると} \quad \sigma(a) = \{0\} \quad \text{よって} \quad \|a\| = 0.$$

$M_n(\mathbb{C})$ の元について「正値性」は既知の概念である．一般に $B(\mathcal{H})$ において $T \geq 0$ である必要十分条件は

$$\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0\,, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}$$

となることである．したがって $T \in B(\mathcal{H})$ に対して $T^*T \geq 0$ となる．後で示すように任意の C^* 環は適当なヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が存在し, $B(\mathcal{H})$ の C^* 部分環と同一視できるから, 事実として次のことが成立する:

$$a \in A \quad \text{に対して} \quad a^*a \in A_+.$$

簡単な証明が [18] に載っている.

正値性に関して主な性質をまとめておく．証明は [18], [33] 参照.

定理 4.9. A を C^* 環とする.

(i) $A_+ = \{\, a^*a\,;\, a \in A \,\}$,

(ii) a, b 自己共役, $c \in A$, $a \leq b \implies c^*ac \leq c^*bc$,

(iii) $0 \leq a \leq b \implies \|a\| \leq \|b\|$,

(iv) A は 1 を持つとする．$a, b \in A_+ \cap GL_1(A)$.

$$a \leq b \implies 0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}.$$

定理 4.10. $a, b \in A_+$. $a \leq b \implies \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

定理 4.9 の (iv), 定理 4.10 は $f(x) = \sqrt{x}$ とすると,

$$a \leq b \implies f(a) \leq f(b).$$

この様な関数は「operator monotone」であると言われる. 非常に面白い現象であるが, 「$0 \leq a \leq b \implies a^2 \leq b^2$」は一般には成立しない.

有名な例を挙げておく.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると $0 \leq a \leq a + b$ であるが $a^2 \leq (a+b)^2$ は成立しない.

実際, 「任意の a, b について $0 \leq a \leq b \implies a^2 \leq b^2$」が成立するのは可換 C^* 環に限ることが知られている (小笠原).

X を σ-コンパクト・ハウスドルフ空間とすると相対コンパクト・開集合の増大列 O_n で $\overline{O}_n \subset O_{n+1}$, $\cup O_n = X$ となるものが存在する. $u_n \in C_0(X)$ (実際は $u_n \in C_c(X)$) を $0 \leq u(x) \leq 1$, $u_n(x) = 1$ ($x \in O_n$), $\mathrm{supp}\, u_n \subset O_{n+1}$ となるものをとる. この時, $\|u_n\|_\infty \leq 1$ であり, $u_n \in C_0(X)_+$

(i) $n \leq m \quad \implies \quad u_n \leq u_m$,

(ii) $\|a - au_n\|, \quad \|a - u_n a\| \quad \longrightarrow \quad 0\ (n \to \infty)$, $a \in C_0(X)$.

列 (u_n) の意味するところは, $C_0(X)$ は単位元を持たないが, (ii) は (u_n) が「近似的単位元」だと主張する.

定義 4.11. C^* 環 A の**近似的単位元** (approximate unit) とは, 正値元の有向点族 $\{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で

(0) $\|u_\lambda\| \leq 1$,

(1) $\lambda \leq \mu \implies u_\lambda \leq u_\mu$,

(2) $\|a - au_\lambda\|, \|a - u_\lambda a\| \to 0$, $a \in A$,

となるもののことである.

例 4.12. $\{e_n\}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の ONB とする．$\{e_1, \cdots, e_n\}$ で張られる閉部分空間への射影子を p_n とする．$\{p_n\}$ はコンパクト作用素 (後述) の成す C^* 環の近似的単位元である．$B(\mathcal{H})$ の近似的単位元ではない．

定理 4.13. 任意の C^* 環 A は近似的単位元を持つ．もし A が可分ならば可算個の元からなる近似的単位元をもつ．

1.5 コンパクト作用素・フレドホルム作用素

定義 5.1. $T \in B(\mathcal{H})$ が**コンパクト作用素** (compact operator) であるとは, T による $\mathcal{H}$ の閉単位球の像がノルム位相で相対コンパクトとなることである．コンパクト作用素の全体を $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ で表わす．

有限次元ノルム空間の有界集合は相対コンパクトであるから, $\dim \mathcal{H} = n < \infty$ ならば $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = B(\mathcal{H}) = M_n(\mathbb{C})$．一方, 可逆な $T \in B(\mathcal{H})$ がコンパクトだとすると閉単位球がコンパクトになる．したがって $\dim \mathcal{H} = \infty$ ならば $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ は可逆になり得ない．つまり $\sigma(T)$ は常に 0 を含む．
次の定理はコンパクト作用素の基本定理である．

定理 5.2 (Fredholm の交代定理). $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ とする．

$$I - T \text{ が 単射} \iff I - T \text{ が全射}.$$

さらに, 値域 $R(I - T) \subset \mathcal{H}$ は常に閉である．

$\dim \mathcal{H} < \infty$ の場合, 任意の $\lambda \in \sigma(T)$, $T \in B(\mathcal{H})$ は固有値である．$\dim \mathcal{H} = \infty$ の場合, 有限次元のアナロジーが成立するのはコンパクト作用素である．

定理 5.3. $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ とする．

(1) $\lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\}$ は重複度有限な固有値である, *i.e.* $Tx = \lambda x$ となる $0 \neq x \in \mathcal{H}$ が存在し, 固有空間の次元は有限である．

(2) $\sigma(T) \backslash \{0\}$ は有限, 又は 0 のみを集積点とする可算集合である．

証明は Fredholm の交代定理を用いて与えられる.

定義 5.4. $x, y \in \mathcal{H}$ とする. 作用素 $\theta_{x,y} \in B(\mathcal{H})$ が

$$\theta_{x,y}(z) = \langle z, y \rangle x, \quad z \in \mathcal{H}$$

で定義される. $\theta_{x,y}$ は**階数 1 の作用素**である.

命題 5.5. $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathcal{H}$, ONS, $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ 有界列とする. この時

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \theta_{x_n, y_n} = s - \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \theta_{x_n, y_n}$$

が $B(\mathcal{H})$ の元として定まり,

(1) $\|T\| = \sup|\lambda_n|$,

(2) $T^* = \sum \overline{\lambda_n} \theta_{y_n, x_n}$,

(3) $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \iff \lambda_n \to 0 \quad (n \to \infty)$

特に $x_n = y_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ の時, T は対角作用素 (diagonal operator) と呼ばれる.

正規行列の対角化に対応して次の命題が成立する.

定理 5.6 (固有値展開). $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ を正規作用素 (*i.e.* $T^*T = TT^*$) とすると有限列又は 0 に収束する無限列 $\{\lambda_n\}$ と ONS $\{x_n\}$ が存在し,

$$T = \sum_{n} \lambda_n \theta_{x_n, y_n} \quad (\text{ノルム収束}).$$

$F(\mathcal{H}) = \{\, T \in B(\mathcal{H})\ ;\ \dim T(\mathcal{H}) < \infty \,\}$ とおく. $T \in F(\mathcal{H})$ は**有限階数の作用素**と呼ばれる.

定理 5.7. $F(\mathcal{H})$ は $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ で稠密である.

包含関係 $F(\mathcal{H}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ は自明. 稠密性を示すには自己共役 $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ が $F(\mathcal{H})$ の元で近似されることを言えばよい. これは定理 5.6 から示される.

定理 5.8. $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は $B(\mathcal{H})$ の閉イデアルである.

イデアルであることは簡単．ノルム閉であることを示すには, S を $\mathcal{H}$ の単位開球とする時,「$T \in B(\mathcal{H})$ がコンパクトである必要十分条件は $T(S)$ が全有界である」を使えば示される．

定理 5.9. $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は単純イデアルである．

証明は本質的には $M_n(\mathbb{C})$ が単純であるという証明と同じである．$\mathcal{H}$ が可分である時 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ が $B(\mathcal{H})$ の唯一のイデアルである．

少し, コンパクト作用素の例を考えよう．抽象的には命題 5.5 を用いればいくらでも作れる．非自明な例を考えよう．

(例 5.10) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$．$a \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$ が**位数 m の表象**であるとは任意の k, l に対して定数 $C > 0$ が存在して

$$|\partial_x^k \partial_\xi^l a(x,\xi)| \le C(1 + |x| + |\xi|)^{m-k-l}.$$

a は次の式で作用素 P_a を定める:

$$(P_a u)(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi) u(y) dy d\xi.$$
$$m < 0 \implies P_a \in \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

(例 5.11) P を閉多様体 M 上の位数 < 0 である擬微分作用素とすると, P は $L^2(M)$ 上のコンパクト作用素である．

さて $\mathcal{H}$ を可分としよう．先に見た様に $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は $\neq \{0\}$, かつ $\neq \mathcal{K}(\mathcal{H})$ となる閉イデアルを持たない．然しながら代数的 $*$ イデアルは非自明なものを含む．それがシャッテン・クラス (Schatten class) である．

補題 5.12. $\{e_n\}$ ONB とし, $T \in B(\mathcal{H})_+$ とする．この時

$$\sum_n \langle Te_n, e_n \rangle \in [0, +\infty]$$

は ONB $\{e_n\}$ の取り方によらない．

∞ 次元の場合, $T \geqslant 0$ という仮定が本質的である. $\{e_n\},\{e'_m\}$ を 2 組の ONB とする.

$$\langle Te_n, e_n\rangle = \|T^{\frac{1}{2}}e_n\|^2 = \sum_m |\langle T^{\frac{1}{2}}e_n, e_m{}'\rangle|^2 = \sum_m |\langle T^{\frac{1}{2}}e_m{}', e_n\rangle|^2$$

よって

$$\begin{aligned}\sum_n \langle Te_n, e_n\rangle &= \sum_n\sum_m |\langle T^{\frac{1}{2}}e_m{}', e_n\rangle|^2 = \sum_m\sum_n |\langle T^{\frac{1}{2}}e_m{}', e_n\rangle|^2 \\ &= \sum_m \|T^{\frac{1}{2}}e_m{}'\|^2 = \sum_m \langle Te_m{}', e_m{}'\rangle.\end{aligned}$$

定義 5.13. $T \in B(\mathcal{H})_+$ に対して $\mathrm{Tr}(T) = \sum_n \langle Te_n, e_n\rangle$ を T のトレースと言う.

任意の C^* 環 A の元 a に対して $(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ を a の**絶対値**と言い, $|a|$ と記す.

定義 5.14. $1 \leq p < \infty$. $T \in B(\mathcal{H})$ がシャッテン p-クラス (Schatten p-class) 作用素であるとは

$$\mathrm{Tr}(|T|^p) < \infty$$

となることとする. シャッテン p-クラス作用素全体を $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ と記す. シャッテン p-ノルムを $\|T\|_p = (\mathrm{Tr}(|T|^p)^{\frac{1}{p}}$ で定義する. 特に $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ をトレース・クラス, $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ を**トレース・クラス作用素**と言う. 又, $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ をヒルベルト・シュミットクラス (Hilbert-Schmidt class), $T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ をヒルベルト・シュミットクラス**作用素**と言う.

定義により $|T|^2 = T^*T$. よって $T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow \mathrm{Tr}(T^*T) < \infty$.

定義 5.15. $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ とする. $|T|$ の固有値を (重複度分繰り返して)

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \cdots \searrow 0$$

とする. μ_n を $\mu_n(T)$ と記し T の**特性値** (characteristic values) と言う. $\{\mu_n(T)\}$ を用いて $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ を特徴付けることができる. 先ず:

補題 5.16. $\mathcal{L}^p(\mathcal{H}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

補題 5.17. $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ とする．この時

$$T \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H}) \iff \sum_n \mu_n(T)^p < \infty.$$

命題 5.18. (1) $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ は $B(\mathcal{H})$ の $*$ イデアル,
(2) $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ は $\|\cdot\|_p$ に関して完備,
(3) $p \leq q \Rightarrow \mathcal{L}^p(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}^q(\mathcal{H}), \quad \|T\| \leq \|T\|_q \leq \|T\|_p$,
(4) ヘルダー不等式 (Hölder's inequality),
$0 \leq p, q, r < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$,

$$S \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H}), T \in \mathcal{L}^q(\mathcal{H}) \Longrightarrow ST \in \mathcal{L}^r(\mathcal{H}), \|ST\|_r \leq \|S\|_p \|T\|_q.$$

上の諸々の性質から想像されるように $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ は測度空間上の L^p-空間のいわば非可換アナロジーである．

補題 5.19. $\{e_n\}$ ONB, $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ に対して $\sum_n \langle Te_n, e_n \rangle$ は絶対収束し，その和は $\{e_n\}$ の選び方によらない．その和を $\mathrm{Tr}(T)$ と書くと $|\mathrm{Tr}(T)| \leq \|T\|_1$.

命題 5.20. $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $S \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$, $T \in \mathcal{L}^q(\mathcal{H})$ に対して

$$\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(TS).$$

$S \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, $T \in B(\mathcal{H})$ に対しても

$$\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(TS)$$

が成立する．

抽象的命題ではなく，少し，例を考えよう．

(例 5.21) 測度空間 (Ω, μ) に対して直積測度空間 $(\Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$ を考える．$K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ は

$$O_p(K)\phi(\omega) = \int_\Omega K(\omega, \omega')\phi(\omega')d\mu(\omega')$$

により $L^2(\Omega)$ 上の作用素 $O_p(K)$ を定める．積分論の講義で学んだ様に，$O_p(K)$ は有界であり

$$\|O_p(K)\| \leq \|K\|_2.$$

実際，$O_p(K)$ はヒルベルト・シュミット・クラス作用素になる．このことは (ϕ_n) を $L^2(\Omega)$ の ONB とすれば $\{\phi_m \otimes \overline{\phi_n}\}$ は $L^2(\Omega \times \Omega)$ の ONB となることから直接計算で

$$\begin{aligned}\|Op(K)\|_2^2 &= \mathrm{Tr}(Op(K)^* Op(K)) = \sum_m \|Op(K)\phi_m\|^2 \\ &= \sum_{m,n} |\langle Op(K)\phi_m, \phi_n\rangle|^2 \\ &= \|K\|_2^2 < \infty.\end{aligned}$$

逆に任意の $T \in \mathcal{L}^2(L^2(\Omega))$ に対して一意的に $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ が存在して

$$T = Op(K)$$

と書ける．実際，T は適当な ONS $\{e_n\}, \{f_n\}$ により

$$T = \sum \mu_n \theta_{e_n, f_n}, \quad \mu_n > 0$$

と展開できる．

$$K(\omega, \omega') = \sum_{m,n} \langle Te_m, f_n\rangle f_n(\omega)\overline{e_m(\omega')}$$

とおけば，$K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ で

$$Op(K) = T.$$

さて，ここでトレース・クラスとヒルベルト・シュミット・クラスの関係をみておこう．$S, T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ ならば $ST \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ であるが (命題 5.18 (4))，逆に任意の $R \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ は適当な $S, T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ が存在して $R = ST$ と書ける．特に $S, T \in \mathcal{L}^2(L^2(\Omega))$ の時，$S = O_p(K), T = O_p(L), K, L \in L^2(\Omega \times \Omega)$ と書けば，ST の積分核は

$$M(\omega, \omega') = \int_\Omega K(\omega, \omega'')L(\omega'', \omega')d\mu(\omega')$$

で与えられる．$ST = O_p(M)$ となることの証明において，フビニの定理が用いられている．積分の順序交換等慎重に議論して

$$\mathrm{Tr}(ST) = \int_\Omega M(\omega, \omega)d\mu(\omega)$$

が得られる.

(注 5.22) $O_p(K)$ がトレース・クラスだと分かっても $\mathrm{Tr}(Op(K)) = \int K(\omega,\omega)d\mu(\omega)$ ではない. (作用素として同じでも, 対角集合上での K の値を変えることができる. $K(\omega,\omega')$ が連続でも一般には正しくない.)

一般に測度空間 (Ω,μ) 上の 2 変数関数 $K(x,y)$ が与えられた時, K を核として積分作用素 $Op(K)$ が考えられる. $Op(K)$ は一般には, 有界ですらない. 上の例では, K が 2 乗可積分ならば, $Op(K)$ はコンパクト作用素になった. この十分条件は, ハンディーだが結論が強すぎる. コンパクト作用素ではないが有界作用素になるという場合がやっかいで, 色々判定条件がある. その辺りの事は [21], [28] に載っている.

1.6 フレドホルム指数

コンパクト作用素に関連して, フレドホルム作用素がある.

定義 6.1. $F \in B(\mathcal{H})$ が**フレドホルム作用素** (Fredholm operator) $\underset{\text{def}}{\iff}$ $R(F)$: 閉部分空間, $\dim\ker F, \dim\ker F^* < \infty$.

(注 6.2) 値域 $R(F)$ が閉だから $\mathrm{Coker}F \cong \ker F^*$.

定理 6.3 (Atkinson). 次の条件は同値である:
(1) F: フレドホルム.
(2) 適当な $G \in B(\mathcal{H})$ をとれば $GF-1, FG-1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

証明のアウト・ラインを紹介しておこう.

(1) $\Longrightarrow$ (2). F: フレドホルム $\Longrightarrow$ $F|_{(\ker F)^\perp}$: $(\ker F)^\perp \to F(\mathcal{H})$ 同型. 逆写像 G: $F(\mathcal{H}) \to (\ker F)^\perp$ を $F(\mathcal{H})^\perp = \ker F^*$ 上で 0 として全体に拡張.

この G に対して $I-GF, I-FG$ は有限階数の射影子である. 特にコンパクト.

(2) $\Longrightarrow$ (1). $\dim\ker F < \infty$ を示す為に $(x_n) \subset \ker F$: 無限 ONS が存在するとして矛盾を出す. $K = GF - I$ とおくと $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. そして $K(x_n) = -x_n$. K: コンパクト $\Longrightarrow$ $\|K(x_n)\| \to 0$, 一方 $\|K(x_n)\| = \|-x_n\| = 1$. 矛盾. よって $\dim\ker F < \infty$. 同様に, $\dim\ker F^* < \infty$.

$R(F)$ が閉部分空間であることを示す．K を $K_0 \in F(\mathcal{H})$ で近似して $\|K - K_0\| <$ $1/2$. $X = F(\ker K_0)$ とおくと，任意の $0 \neq x \in \ker K_0$ に対して $\frac{\|x\|}{2} \leq \|G\|\|F(x)\|$.

この事は X: 閉を主張．$Y = F(K_0^*(\mathcal{H}))$ を考えれば，$\dim Y < \infty$．$F(\mathcal{H}) = X + Y$．一般に「閉部分空間 + 有限次元部分空間」は閉部分空間である．

さてトポロジーと解析学のクロス・ロードにおける最も基本的な定義が次である．

定義 6.4. フレドホルム作用素 F に対して

$$\mathrm{index} F = \dim\ker F - \dim\ker F^*$$

を F の**指数** (index of F) と呼ぶ．

(注 6.5) 定理 6.3 の証明中 (1) $\Longrightarrow$ (2) で現れる FG, GF は作り方からそれぞれ $F(\mathcal{H}) = (\ker F^*)^\perp, (\ker F)^\perp$ の上への射影子であり

$$\mathrm{index}\, F = \mathrm{rank}(I - GF) - \mathrm{rank}(I - FG)$$

と書ける．

(注 6.6) F: 可逆 $\Longrightarrow$ F: フレドホルム, $\mathrm{index}\, F = 0$.

$\mathrm{index}\, F = 0$ でも可逆とは限らないが，$\dim\ker F = \dim\ker F^*$ により有限階数の部分等長写像 $V : \ker F \to \ker F^*$ が存在する．$V \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ であり $F + V$ は可逆となる．

(注 6.7) F: フレドホルム $\Longrightarrow$ F^*: フレドホルム．あきらかに

$$\mathrm{index}\, F^* = -\mathrm{index}\, F.$$

指数の持つ性質をリスト・アップしておこう．F: フレドホルム, $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ とすると Atkinson の定理により $F + K$ もフレドホルムである．

命題 6.8. F_1, F_2: フレドホルム $\Longrightarrow$ $F_1 F_2$: フレドホルム

$$\mathrm{index}\,(F_1 F_2) = \mathrm{index}\, F_1 + \mathrm{index}\, F_2.$$

最も初等的な証明は注意深い「Bookkeeping」．F_1, F_2, F_1F_2 の核, 余核の関係をしらべることにより示される．

定理 6.9. $\mathcal{F}$: フレドホルム作用素全体 $\subset B(\mathcal{H})$ とする. $\mathcal{F}$ は開集合であり index : $\mathcal{F} \to \mathbb{Z}$ は連続, *i.e.* 局所定値関数である.

$GL_1(B(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})) \subset B(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ が開集合であることにより, Atkinson の定理から前半は出る.

$F \in \mathcal{F}$ に対して定理 6.3 (1) $\Longrightarrow$ (2) の証明中構成された G を考えると, $G \in \mathcal{F}$ であり (1) $FGF = F$, (2) FG, GF は射影子, (3) $\ker(GF) = \ker F, FG(\mathcal{H}) = F(\mathcal{H})$ が成立する.

$F_1 \in \mathcal{F}, \|F - F_1\| < \|G\|^{-1} \Longrightarrow \|FG - F_1G\| < 1 \Longrightarrow 1 + F_1G - FG$: 可逆 $\Longrightarrow F + F_1GF = FGF + (1 + F_1G - FG)F$ と上記 (1)–(3) を用いて

$$\operatorname{index} F_1 = -\operatorname{index} G = \operatorname{index} F.$$

系として:

系 6.10. $F \in \mathcal{F}, T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \Longrightarrow \operatorname{index}(F+T) = \operatorname{index} F.$

フレドホルム作用素の道 $t \longmapsto F + tT$ を考え定理を適用すればよい.

次の命題は次章での話題 , 解析的 K-理論のキッカケを与えた.

命題 6.11. $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ が同じ弧状連結成分に属する $\Longleftrightarrow \operatorname{index} F_1 = \operatorname{index} F_2$.

(証) $\Longrightarrow$ は定理 6.9.

$\Longleftarrow$ 「$\operatorname{index} F = 0 \Longrightarrow F$ は I と連続な道で結ばれる」ことを言えばよい. (注 6.6) と Kuiper の定理「$GL_1(B(\mathcal{H}))$ は可縮」を用いる.

以上ヒルベルト空間上のフレドホルム作用素を考察したが, バナッハ空間 B_1 から B_2 への有界線形写像に対しても定義される: $F : B_1 \to B_2$ がフレドホルム $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $R(F)$: 閉部分空間. $\dim\ker F, \dim(B_2/R(F)) < \infty$. この場合も指数が $\operatorname{index} F = \dim\ker F - \dim(B_2/R(F))$ として定義され, この節で述べたことはそのまま成立する.

フレドホルム作用素の例を掲げておこう.

(1) $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}), (e_n)_0^\infty$ を ONB として, $S \in B(\mathcal{H})$ を $Se_n = e_{n+1}$ $(n = 0, 1, \cdots)$ で定義する. この S は片側シフト (unilateral shift) と呼ばれる重要な作用素であり,

$$\operatorname{index} S = -1.$$

(2) M: 閉多様体, E, F を M 上の複素ベクトル束, $P : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ を位数 0 の楕円型擬微分作用素とする. P は有界線形作用素 $P : L^2(E) \to L^2(F)$ へ拡張し, パラメトリックスの存在によりフレドホルム作用素であることが分かる.

(3) (2) において位数 > 0 の様な場合には適当なソボレフ空間を考えてやれば良い.

1.7 乗法子環

X を局所コンパクト空間 (非コンパクト) とする. 一点コンパクト化 $X^\sim$ は X の最小のコンパクト化であり, $C(X^\sim)$ は $C_0(X)$ をイデアルとして含む最小の 1 を持つ C^* 環である. 一方, X に対して最大のコンパクト化 βX が (Stone-Čech のコンパクト化) が存在する. では 1 を持つ C^* 環 $C(\beta X)$ とそのイデアル $C_0(X)$ はどの様な関係にあるのであろうか?

A を C^* 環とする.

定義 7.1. 2 重中心化子 (double centralizer) とは, A から A への写像の対 (L, R) で任意の $a, b \in A$ に対して

$$R(a)b = aL(b)$$

が成立するもののことである.

(例 7.2) B を C^* 環. A をその閉イデアルとする. この時, 任意の $b \in B$ に対して $L_b(a) = ba, R_b(a) = ab$ とおけば (L_b, R_b) は 2 重中心化子.

定義 7.1 において L, R が線形であると仮定していないが, 結果として:

命題 7.3. (L, R): 2 重中心化子 $\Longrightarrow L, R$ は有界線形で $\|L\| = \|R\|$.

線形性は, ほぼ自明. 有界性の証明は閉グラフ定理を用いる.

定義 7.4. $M(A) = \{(L, R)\ ;\ 2$ 重中心化子$\}$ を A の**乗法子環** (multiplier algebra of A) と言う.

名前が示すように $M(A)$ に $*$ 多元環の構造が次の様にして入る.

$$(L, R) \pm (L', R') = (L \pm L', R \pm R'), \quad \lambda(L, R) = (\lambda L, \lambda R)$$
$$(L, R)(L', R') = (LL', R'R) \qquad (R'R \text{ の積の順番に注意})$$
$$(L, R)^* = (R^*, L^*),$$
$$\text{但し} \qquad R^*(a) = (R(a^*))^*, \quad L^*(a) = (L(a^*))^*.$$

更にノルムを $\|(L, R)\| = \|L\|\ (= \|R\|)$ で定義する. 以上の構造に関して:

定理 7.5. $M(A)$ は C^* 環である.

$I: A \to A$ 恒等写像とすれば $1 = (I, I)$ が $M(A)$ の単位元となる. $A \to M(A)$ を $a \mapsto (L_a, R_a)$ で定義すれば等長 $*$ 準同形であり, これを通して $A \subset M(A)$ とみなす. 明らかに A は $M(A)$ のイデアルである.

X がコンパクトの時, $X^\sim = X^\cup\{\infty\}$ において ∞ は孤立点になり $C(X^\sim) = C(X) \oplus \mathbb{C}$ はイデアルの直和となる. A を C^* 環 B のイデアルとする. A が**本質的** (essential) であることは, B のイデアル J で $A \cap J = \{0\}$ となるものは $J = \{0\}$ に限る時を言う. この条件は次の条件と同値:

$$Am = 0, \text{ 又は } mA = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = 0.$$

命題 7.6. A は $M(A)$ の本質的イデアル.

命題 7.7. A が 1 を持つならば $A = M(A)$.

乗法因子環に関して最も大切な性質は:

命題 7.8. A を C^* 環 B の閉イデアルとする. この時, 恒等写像 $A \to A$ は一

意的に $*$ 準同形 $B \to M(A)$ に拡張する．さらに，もし A が本質的イデアルならば，$B \to M(A)$ は単射である．もし B が 1 を持てば，$B \to M(A)$ は 1 を保つ写像である．

(注 7.9) 上記，命題 7.8 で与えられる $B \to M(A)$ は勿論

$$b \longmapsto (L_b, R_b)$$

で与えられる．

具体的に与えられた C^* 環に対して上の定義から乗法因子環を求めることは簡単ではない．

$A \subset B(\mathcal{H})$, C^* 部分環が非退化, *i.e.* $Ax = \{0\} \Longrightarrow x = 0$, とする．この時，

$$\{\, T \in B(\mathcal{H})\ ;\ TA, AT \subset A\,\} \cong M(A).$$

これを用いて $M(A)$ を決定することができる．

(例 7.10) $A = C_0(X) \Longrightarrow M(A) = C_b(X) = \{X$ 上の有界連続関数$\}$.
X : 非コンパクト $\Longrightarrow C_b(X) \cong C(\beta X)$.

(例 7.11) $M(\mathcal{K}(\mathcal{H})) = B(\mathcal{H})$.

任意の $*$ 準同形 $\varphi : A \to B$ は何時でも $\varphi^\sim : A^\sim \to B^\sim$ に拡張するが $M(A) \to M(B)$ には必らずしも拡張しない．

命題 7.12. 全射 $\varphi : A \to B$ は $\varphi' : M(A) \to M(B)$ に拡張する．A が可算近似的単位元を持てば φ' は全射となる．

(略証) $(L, R) \in M(A)$ に対して $(\hat{L}, \hat{R}) \in M(B)$ を

$$\hat{L}(b) = \varphi(L(a)), \quad \hat{R}(b) = \varphi(R(a)), \quad b = \varphi(a)$$

で定義する．(L, R) が 2 重中心化子であることを用いて $(\hat{L}, \hat{R})$ が well-defined であることが示される．$(L, R) \to (\hat{L}, \hat{R})$ が求める写像である．

可算性は $M(B)$ の元を $M(A)$ に持ち上げる段階で点列を構成する為に用いられる.

(注 7.13) X: 局所コンパクト, $Y \subset X$ 閉部分空間とする. 制限写像

$$C_0(X) \to C_0(Y)$$

は全射である. $C_0(X)$ が可算近似的単位元を持つ $\iff$ $X:\sigma$-コンパクト.

したがって上の命題 7.12 は将に位相空間論における Tietze の拡張定理である.

1.8 核型性

$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ をヒルベルト空間とする. 代数的テンソル積を $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ と記す. $x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$ に対して $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ の対応する元を $x \otimes y$ で表わす.

$\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ 上で基本テンソル $x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2$ に対して

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle \langle y_1, y_2 \rangle$$

となる内積が一意的に存在する. 勿論, 基本テンソルに対して上式で内積を定義し, 基本テンソルの線形和に対して自然に拡張する. そうして得られたものが $x, y \in \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ を基本テンソルの線形和として表わす表わし方によらないことと, 実際に内積になることは証明を要する.

得られた内積に関する完備化を $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ と書き, $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ の**テンソル積**と言う.

$a \in B(\mathcal{H}_1), b \in B(\mathcal{H}_2), \sum x_i \otimes y_i \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ に対して

$$(a \otimes b)\left(\sum x_i \otimes y_i\right) = \sum_i a x_i \otimes b y_i$$

とおく.

この式で線形写像 $a \otimes b : \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ が定義される. $a \otimes b = (a \otimes I)(I \otimes b)$ と分解して $a \otimes I, I \otimes b$ の有界性を示すことにより $a \otimes b \in B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$. $a \otimes I$ の有界性は任意の $x \in \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ は $x = \sum x_i \otimes y_i$, $\{y_i\}$ ONS と書けることを用いれば

$$\|(a \otimes I)x\|^2 = \|\sum a x_i \otimes y_i\|^2 = \sum \|a x_i\|^2 \le \|a\|^2 \|x\|^2.$$

同様な議論を $I \otimes b$ に適用して, $\|a \otimes b\| \le \|a\| \|b\|$. 実際には等号が成立する. 任意の $x \in \mathcal{H}_1, \|x\| = 1, y \in \mathcal{H}_2, \|y\| = 1$ に対して

$$\|ax\| \|by\| = \|ax \otimes by\| = \|(a \otimes b)(x \otimes y)\| \le \|a \otimes b\|.$$

x, y を動かすことにより, $\|ax\|, \|by\|$ はそれぞれ $\|a\|, \|b\|$ を任意の精度で近似できる. したがって $\|a\|\|b\| \le \|a \otimes b\|$.

$A \subset B(\mathcal{H}_1), B \subset B(\mathcal{H}_2)$ に対して代数的テンソル積 $A \odot B$ から $B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ への自然な写像は単射である (単射であることは非自明). それを通して $A \odot B \subset B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ とみなす. 明らかに $A \odot B$ は $B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ の $*$ 部分環である.

定義 8.1. $A \odot B$ の $B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ における閉包を $A \otimes_{\min} B$ と記し, A と B の**最小テンソル積** (minimal tensor product), 又は**単射的テンソル積** (injective tensor product) と言う. $A \otimes_{\min} B$ のノルムを $\|\cdot\|_*$ とする.

(注 8.2) $A \otimes_{\min} B$ は最初に与えられた $A \subset B(\mathcal{H}_1), B \subset B(\mathcal{H}_2)$ となる $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ のとり方によらず同型を除いて一意的に定まる.

命題 8.3. $\pi : A \to C$, $\sigma : B \to D$ を $*$ 準同形とする. $\pi \otimes \sigma : A \odot B \to C \odot D$ は有界な $\pi \otimes \sigma : A \otimes_{\min} B \to C \otimes_{\min} D$ に拡張する.

この事実は "highly nontrivial". 証明には $\|\cdot\|_*$ を別の表現で表わすことが用いられる.

特に $A \subset C, B \subset D$, C^* 部分環のとき, $A \otimes_{\min} B$ は $C \otimes_{\min} D$ の C^* 部分環.

さて

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

を C^* 環の完全列としよう. 今見たことにより, 任意の D に対して $*$ 準同形の列

$$(8.4) \qquad 0 \longrightarrow A \otimes_{\min} D \xrightarrow{i} B \otimes_{\min} D \xrightarrow{j} C \otimes_{\min} D \longrightarrow 0$$

が得られる. i は単射であり, j は明らかに全射となる.

$I = i(A \otimes_{\min} D)$ とおけば I は閉イデアルであり, $I \subset \ker j$ となる. j は写像 $\bar{j} : B \otimes_{\min} D/I \to C \otimes_{\min} D$ を導き, 図式

$$\begin{array}{ccc}
B \otimes_{\min} D & \xrightarrow{j} & C \otimes_{\min} D \\
\searrow & & \nearrow \bar{j} \\
& B \otimes_{\min} D/I &
\end{array}$$

は可換. $C \odot D$ から $B \otimes_{\min} D/I$ への $*$ 準同形 β で $\beta \circ \bar{j} = \mathrm{id}$ が $B \otimes_{\min} D/I$ における $B \odot D$ の像上で成立するものが存在する.

「(8.4) が完全列 $\Longleftrightarrow \bar{j}$ が単射」に注意.

さて, β が $C \otimes_{\min} D$ のノルム $\|\cdot\|_*$ に関して連続と仮定しよう. すると β は $\bar{\beta} : C \otimes_{\min} D \to B \otimes_{\min} D/I$ に拡張. このことから $\bar{\beta} \circ \bar{j} = \mathrm{id}$. よって $\bar{j}$: 単射. 逆に, $\bar{j}$: 単射 $\Longrightarrow \bar{j}$: 同型 $\Longrightarrow \bar{j}$: 等長 $\Longrightarrow \beta$: 連続. (最後のステップは開写像定理を使う.)

以上の議論は「(8.4) が完全 $\Longleftrightarrow C \odot D$ 上に $|||u||| = \|\beta(u)\|$ で入るノルムが $\|\cdot\|_*$ と一致する」ということを示している.

定義 8.5. 任意の完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ に対して (8.4) が完全となる D を**完全 C^* 環** (exact C^*-algebra) と言う.

$*$ 多元環 A に対して, $*$ 準同形 $\rho : A \to B(\mathcal{H})$ を A の $*$ **表現**と言う.

定義 8.6. $x \in A \odot B$ に対して

$$\|x\|_{\max} = \sup\{ \|\rho(x)\| \,;\, \rho : A \odot B \text{ の } * \text{表現} \}.$$

$\|\cdot\|_{\max}$ は $A \odot B$ 上の C^* ノルムであり, $\|\cdot\|_{\max}$ による完備化を $A \otimes_{\max} B$ と記し, A, B の**最大テンソル積** (maximal tensor product), 又は**射影的テンソル積** (projective tensor product) と言う.

命題 8.7. $A \odot B$ 上の任意の C^* ノルム $\|\cdot\|_\alpha$ に対して

$$\|a \otimes b\|_\alpha = \|a\|\,\|b\|, \quad a \in A, b \in B$$

が成立.

定理 8.8. $\|\cdot\|_\alpha$ を $A \odot B$ 上の任意の C^* ノルムとする. この時,

$$\|\cdot\|_* \le \|\cdot\|_\alpha \le \|\cdot\|_{\max}.$$

そこで

定義 8.9. 任意の C^* 環 B に対して $A \odot B$ 上で $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_{\max}$ となる時 A は核型 (nuclear) であると言う.

したがって A が核型ならば任意の C^* 環 B に対してテンソル積 $A \otimes B$ が一意的に定まる.

(注 8.10) 定義 8.9 を用いて与えられた C^* 環が核型かどうか判定することは不可能.

定義から直ちに核型 C^* 環は完全 C^* 環であることが分かる. 最後に核型 C^* 環の例をリスト・アップしておく.

(例 8.11)
(1) A: I-型 (定義は後述).
(2) $A = C_0(X)$ とすれば (1) により核型であり, 任意の C^* 環 B に対して

$$A \otimes B = C_0(X) \otimes B \cong \{\, f : X \to B \text{ 連続 } ;\ \infty \text{ 遠点で消滅} \,\}.$$

(3) $I \subset A$ 閉イデアルとする.

$$I, A/I: \text{ 核型 } \iff A: \text{ 核型}.$$

(4) 核型 C^* 環の C^* 部分環は必らずしも核型でない.
(5) A, B: 核型 $\iff$ $A \otimes B$: 核型.

C^* 環 A が A と $\{0\}$ 以外に閉イデアルを持たない時 A を**単純**ということを思い出しておこう.
核型かどうかに関わらず次が成立.

命題 8.12. A, B: 単純 $\iff$ $A \otimes_{\min} B$: 単純.

局所コンパクト群 G に対して, $*$ 多元環 $L^1(G)$ を考える. $a \in L^1(G)$ に対して

$$\|a\|_{\max} = \sup\{\, \|\rho(a)\| \ ;\ \rho \text{ は } L^1(G) \text{ の } * \text{ 表現} \,\}$$

は C^* ノルムであり, $L^1(G)$ の $\|\cdot\|_{\max}$ による完備化を $C^*(G)$ と記し, G の**群 C^* 環** (group C^*-algebra) と言う.

被約群 C^* 環の定義を思い出せば自然な写像

$$C^*(G) \to C^*_{\mathrm{red}}(G)$$

が存在することが分かる.

定理 8.13. G を局所コンパクト群とする.

(1) G がアメナブルならば $C^*(G) \cong C^*_{\mathrm{red}}(G)$ であり, $C^*_{\mathrm{red}}(G)$ は核型.

(2) G: 離散群とする. この時

$$C^*(G): \text{ 核型} \iff C^*_{\mathrm{red}}(G): \text{ 核型} \iff G: \text{ アメナブル}$$

したがって, この場合 $C^*(G) \cong C^*_{\mathrm{red}}(G)$.

1.9 C^* 環の表現論

既に述べた様に, C^* 環 A に対してヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ と $*$ 準同形 $\rho : A \to B(\mathcal{H})$ の対 $(\rho, \mathcal{H})$ を A の表現と言う. 甚だ「routine」ではあるが次の定義をする.

定義 9.1. 表現 $(\rho, \mathcal{H})$ が**既約** (irreducible) $\underset{\mathrm{def}}{\iff}$ $\rho(A)$ は非自明な不変閉部分空間を持たない.

(注 9.2) 上の定義は次と同値:

$$T \in B(\mathcal{H}),\ T\rho(a) = \rho(a)T,\ a \in A \quad \iff \quad T = \lambda I,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

(例 9.3) $A = C_0(X)$ の時, (注 9.2) により, $(\rho, \mathcal{H})$ が既約ならば $\mathcal{H}$ は 1 次元であることが分かる. 即ち, ρ は指標である.

逆に C^* 環 A の全ての既約表現が 1 次元ならば A は可換であることが示される.

(例 9.4) $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ の $\mathcal{H}$ への自然な表現は既約.

定理 9.5. (ρ, H) を A の既約表現とすると

$$\rho(A) \supset \mathcal{K}(\mathcal{H}), \quad \text{又は} \quad \rho(A) \cap \mathcal{K}(\mathcal{H}) = \{0\}.$$

(略証) $\rho(A) \cap \mathcal{K}(\mathcal{H}) \neq \{0\}$ とすると, 0 でない自己共役元 a を含む. $r(a) = \|a\| > 0$ により $\sigma(a) \neq \{0\}$. つまり a は有限重複度の固有値がある. このことから $\rho(A)$ は有限階数の射影子を含むことが分かる.

そこで q をその様なもののうち階数が最小となるものとする.

q: 有限階数 $\Longrightarrow q\rho(A)q$ は有限次元 C^* 環. 階数が最小 $\Longrightarrow q\rho(A)q = \mathbb{C}q$. $q\mathcal{H}$ の単位ベクトル y に対して $\overline{\rho(A)y} = \mathcal{H}$ (既約性)$\Longrightarrow$ $q(\mathcal{H}) = \mathbb{C}y \Longrightarrow q$ は $\theta_{y,y}$ に一致. もう一度, $\overline{\rho(A)y} = \mathcal{H}$ を用いて, 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して $\theta_{x,x} \in \rho(A) \Longrightarrow \rho(A)$ は全ての有限界数作用素を含む. $\Longrightarrow \rho(A) \supset \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

簡単の為, 以下 A: 可分とする. 幾何学, トポロジーで表われる C^* 環を考える範囲では合理的な仮定.

定義 9.6. 表現 $(\rho, \mathcal{H})$ が **I-型** $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\rho(A) \supset \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

定義 9.7. C^* 環 A が **I-型** (又は GCR) $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の既約表現は I-型.

定義 9.8. A が **CCR** (completely continuous representation の略)
$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の既約表現 $(\rho, \mathcal{H})$ に対して $\rho(A) = \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

勿論, $CCR \Longrightarrow GCR$.

(例 9.9) (1) $C_0(X)$ は I-型.

(2) $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は I-型. (任意の既約表現は $\mathcal{H}$ への自然な表現とユニタリー同値であることを示す必要あり.)

(3) G: 局所コンパクト・アーベリアン群に対して $C^*(G)$ は I-型.

(4) Γ: 可算離散群とする.

$C^*(\Gamma)$: I-型 $\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ Γ が I-型, *i.e.* アーベル群 A, 有限群 F が存在して

$$1 \to A \to \Gamma \to F \to 1 \quad 完全.$$

例えば $\Gamma = \mathbb{F}_2$ (2 元生成自由群) は非 I-型.

定義 9.10. C^* 環 A に対して, A の有界線形汎関数 ϕ で
(1) $\|\phi\| = 1$, (2) $\phi \geqq 0$, *i.e.* $\phi(a^*a) \geq 0$, $a \in A$ となるものを**状態** (state) と言う.

(注 9.11) A が 1 を持てば, $\phi(1) = 1$.

(例 9.12) (1) $A = C_0(\Omega)$ の状態 $\phi \iff \Omega$ 上の正値有限ラドン測度 μ で

$$\phi(f) = \int_\Omega f d\mu$$

(2) $A = M_n(\mathbb{C})$ の時, 任意の状態 ϕ は適当な正値エルミート行列 H に対して $\phi(X) = \mathrm{tr}(HX)$, $X \in A$.

(3) 1 を持つ A の表現 $(\pi, \mathcal{H})$ で $\pi(1) = I$ となるものとする. $\xi \in \mathcal{H}$ を単位ベクトルとして

$$\phi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$$

とおけば ϕ は状態. この ϕ は**ベクトル状態** (vector state) と呼ばれる.

命題 9.13. A の状態の全体を $S(A)$ とする. $S(A)$ は凸集合である.

$\phi_1, \phi_2 \in S(A) \implies t\phi_1 + (1-t)\phi_2 \geqq 0$ $(0 \leq t \leq 1)$, $\|t\phi_1 + (1-t)\phi_2\| \leq 1$ は明らか. 実際にノルムが 1 になることを示す要あり. A が 1 を持てば $t\phi_1(1) + (1-t)\phi_2(1) = 1$ により O.K. 1 を持たない場合も近似的単位元 (u_λ) に対して

$$\lim(t\phi_1 + (1-t)\phi_2)(u_\lambda) = 1$$

により O.K.

一般に凸集合 S の点が他の (S の)2 点の中点として表わせない時, その点は**端点** (extremal point) と呼ばれる. 状態 ϕ が凸集合 $S(A)$ の端点である時, **純粋状態** (pure state) と呼ばれる. $PS(A)$ で純粋状態全体を表わす.

命題 9.14. $\phi \in S(A)$ が乗法的だとすると, ϕ は純粋状態である. 逆に任意の純粋状態は A の中心の上で乗法的である.

特に A が可換の時 $PS(A) = \Omega(A)$ (指標の全体). 別の言葉で言えば, $A = C_0(\Omega)$ の時, $\phi \in PS(A) \Longleftrightarrow \phi = \delta_w$ ($w \in \Omega$ でのディラック測度). したがって $PS(A) = \Omega$.

C^* 環上の状態に関して非常に重要な GNS 構成法と呼ばれるものがある. ϕ を A 上の正値有界線形汎関数とする.

$$L_\phi = \{ a \in A \, ; \, \phi(a^*a) = 0 \}$$

とおけば L_ϕ は A の左イデアルとなる (定理4 .9, (ii) より, 任意の a, c に対して $a^*c^*ca \leq \|c\|^2 a^*a$. これを用いる). $a, b \in L_\phi \implies a + b \in L_\phi$ は非自明. これを示すには「$\phi(a^*a) = 0 \iff \phi(ba) = 0, b \in A$」を使う. A/L_ϕ (ベクトル空間) 上の内積が

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \phi(y^*x)$$

で定義される, ここで $\bar{x}, \bar{y}$ はそれぞれ $x, y \in A$ の A/L_ϕ におけるクラスを表す. 完備化を $\mathcal{H}_\phi$ と表わす. L_ϕ は左イデアルであるから A の元 a を左からかけることにより A/L_ϕ 上の線形作用素 $\pi_\phi(a)$ が定まる.

$$\|\pi_\phi(a)\bar{x}\|^2 = \|a\bar{x}\|^2 = \phi(x^*aa^*x) \leq \|a\|^2\phi(x^*x) = \|a\|^2\|\bar{x}\|^2$$

により $\pi_\phi(a)$ は $\mathcal{H}_\phi$ 上の有界線形作用素となる. この様にして A の表現 $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi)$ がつくられる. この表現の特徴について説明しよう.

A が 1 を持つとする. A/L_ϕ における 1 の類を ξ_ϕ と記せば

(i) $\langle \pi_\phi(A)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle = \phi(a), \quad a \in A.$

(ii) $\pi_\phi(A)\xi_\phi$ は $\mathcal{H}_\phi$ で稠密.

A が 1 を持たない場合も近似的単位元を用いて上の (i), (ii) が成立するような単位ベクトル ξ_ϕ がとれる.

定義 9.15. $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ を ϕ に付随した **GNS 構成** (Gel'fand-Naimark-Segal construction) と言う.

一般に C^* 環の表現で上記 (ii) が成立する時, ベクトル ξ を**巡回ベクトル** (cyclic vector), 表現を**巡回表現** (cyclic representation) と言う.

巡回表現 $(\rho, \mathcal{H}, \xi)$ に対して $\rho(A) \subset B(\mathcal{H})$ は非退化である．逆に任意の非退化表現は巡回表現の直和にユニタリー同値である, *i.e.* 巡回表現の族 $(\rho_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)$ が存在し, 表現 $(\rho, \mathcal{H})$ は $(\sum \oplus \rho_\lambda, \sum \oplus \mathcal{H}_\lambda)$ とユニタリー同値になる．

(例 9.16) $A = C_0(\Omega), \phi(\cdot) = \int \cdot d\mu$ の時, GNS 構成は有限測度 μ に関する $L^2(\Omega, \mu)$ への $C_0(\Omega)$ の自然な作用であり, 巡回ベクトルは Ω 上の定数関数 1 である．

命題 9.17. $\phi \in S(A)$ が忠実 (*i.e.* $\phi(a^*a) = 0 \implies a = 0$) とする．この時, GNS 構成による π_ϕ は忠実 (単射) である．

証明は易しい．このことから C^* 環 A が忠実な状態を持てば A は適当な $B(\mathcal{H})$ の C^* 部分環とみなすことができる．

A が忠実な状態を持たない時は表現の直和

$$(\sum_{\phi \in S(A)} \oplus \pi_\phi, \sum_{\phi \in S(A)} \oplus \mathcal{H}_\phi)$$

を考える．この表現を A の**普遍表現** (universal representation) と言う．任意の 0 でない $a \geq 0$ に対して $\phi \in S(A)$ が存在し

$$\phi(a) = \|a\|.$$

このことを用いると:

定理 9.18 (Gel'fand-Naimark). A の普遍表現は忠実である．

この様にして任意の C^* 環は, ある $B(\mathcal{H})$ の C^* 部分環とみなすことができる．

系 9.19. 任意の C^* 環 A に対して $M_n(A)$ (= A の元を成分とする $n \times n$ 行列) は C^* 環である．$M_n(A) \cong M_n(\mathbb{C}) \otimes A$.

勿論, ポイントは C^* ノルムの入れ方である．$A \subset B(\mathcal{H})$ の時, $M_n(A)$ は自然に $\oplus\mathcal{H}$ (n 個の直和) に働く．したがって $B(\oplus\mathcal{H})$ の C^* 部分環として C^* 環になる．

GNS 構成で得られる表現の既約性に関して次の重要な結果がある．

定理 9.20. $\phi \in S(A)$ とする. π_ϕ: 既約 $\iff \phi \in PS(A)$.

$A = C_0(\Omega)$ の時, 「任意の $\omega \in \Omega$ に対して $\delta_\omega(a) = 0$ ならば $a = 0$ が成立する」ことから想像されるように忠実な表現を構成する時, 普遍表現は大きすぎる. 任意の $\phi \in PS(A)$ に対して $\phi(a^*a) = 0$ ならば $a = 0$ であるから

$$\sum_{\phi \in PS(A)} \pi_\phi$$

が忠実な表現になる.

C^* 環上の状態という用語が出てきたが, この辺りを少し直観的な説明をしておこう.

空間 X に対して, X 上の連続関数は熱分布, 磁場の強さといった物理量に対応している. したがって, 例えば点 x_0 でのディラック測度 δ_{x_0} を関数で値をとらせるという事は, その点における熱の状態, その点における磁場の状態を計っていることになる訳である. 他に例えば $\mu(X) = 1$ となるボレル測度に対応した状態で値をとることは平均の状態を計っていることになる. この様な理由で定義 9.10 を満たす線形汎関数を状態と呼ぶのは自然であろう.

閑話休題. 状態の中で特に重要なものが次の跡的状態である.

定義 9.21. $\phi \in S(A)$ が跡的 (tracial) $\underset{\text{def}}{\iff} \phi(ab) = \phi(ba),\ a, b \in A$.

(例 9.22) (1) A: 可換 $\Longrightarrow$ 任意の状態は跡的.

(2) $\dim \mathcal{H} = \infty$ の時, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は跡的状態をもたない. この事は次の様にして示される.

ϕ 跡的状態とする. 任意の階数 1 の射影子 p, q に対して部分等長作用素 U で $UpU^* = q$ となるものが存在する. ϕ 跡的 $\Longrightarrow \phi(p) = \phi(q)$. したがって任意の階数 1 の射影子に対して ϕ の値は一定. それを λ とする. $\{e_n\}$ を ONB として, P_n を $e_1, \cdots, e_n$ で張られる閉部分空間への射影とする. この時 $|\phi(P_n)| \le \|P_n\| = 1$. $P_n \ge 0$ だから $0 \le \phi(P_n) \le 1$. 一方, $\phi(P_n) = n\lambda$. よって $n\lambda \le 1$. $n \to \infty$ として $\lambda = 0$.

(3) Γ を離散群として $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma) \subset B(l^2(\Gamma))$ を考える.

$$\tau(a) = \langle a\delta_e, \delta_e \rangle, \quad a \in C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$$

とおけば τ は跡的状態. τ が忠実であることは容易.

定理 9.23 (P. de la Harpe). Γ を Gromov の意味で双曲的離散群とする. $\tau' \in S(C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma))$ が跡的だとすると $\tau' = \tau$.

双曲的離散群についてなじみのない読者は, 例えば [20] 参照.

(例 9.22) の (2) で $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は跡的状態を持てないことを示したが, 先に見た様に $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ の代数的イデアル $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ 上で定義されたトレース Tr は, その名の通り跡的 *i.e.* $\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(TS)$ である. Tr を一般化した C^* 環上のトレースというものについて説明しよう.

定義 9.24. A を C^* 環とする. $\tau : A_+ \to [0, \infty]$ が**トレース** (trace)$\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ 以下の (1)-(3) が成立.

(1) $a, b \in A_+ \implies \tau(a+b) = \tau(a) + \tau(b)$,

(2) $\tau(\lambda a) = \lambda\tau(a)$, $\lambda \geq 0, a \in A_+$, (但し, $0 \cdot \infty = 0$)

(3) $\tau(x^*x) = \tau(xx^*)$, $x \in A$.

トレース τ が**忠実** (faithful) $\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\tau(a) = 0$ から $a = 0$.

トレース τ が**有限** (finite) $\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\tau(a) < \infty$, $a \in A_+$.

トレース τ が**半有限** (semifinite) $\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $a \in A_+$ に対して,
$0 \neq b \in A_+$ が存在して,
$b \leq a$, $\tau(b) < \infty$.

ルベーグ積分論で, 正値関数に対して積分を定義し, 線形性で一般の関数に対して積分を拡張する. 同じ操作をトレースに対して行なうと, τ 有限ならば A 上の線形汎関数が得られる. 同じ記号 τ で表わしておく.

命題 9.25. τ: 有限トレース $\Longrightarrow$ τ: 有界 (よって $\tau \in S(A)$).

「$\phi : C_0(\Omega) \to \mathbb{C}$ 線形, $\geq 0 \Longrightarrow \phi$: 有界」の証明と本質的に同じ.

次の定理が成立.

定理 9.26. A: C^* 環, $\phi \geq 0$ 線形汎関数 $\Longrightarrow$ ϕ:有界.

(注 9.27) τ が有限でない時「連続性」を保証する為, 通常「下半連続」を仮定する.「下半連続」を想定する理由は Fatou の補題が成立するセッティングを考えていることである.

1.10 C^* 力学系と接合積

非可換幾何において最も頻繁に顔を出す C^* 環が接合積である. 接合積に関する基本的事項について述べることにする. 詳細は, 例えば, 接合積に関する古典である [36] でみつけることができる. この本は 79 年の出版であり, 勿論その後の接合積に関する膨大な知識の蓄積をカバーしていない. この本の出版から 20 年, このへんで、誰か接合積に関する結果を網羅した辞典的本でも出してくれるととても助かるのですが....

A を C^* 環とする. A の $*$ 自己同型の全体を $\mathrm{Aut}(A)$ とすると, $\mathrm{Aut}(A)$ は写像の合成に関して群となる.

G を局所コンパクト群とする.

定義 10.1. $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$ を群の準同型とする. 任意の $a \in A$ に対して, 写像 $g \mapsto \alpha(g)(a)$ が G 上連続となる時, α は G の A への**作用** (action of G on A) と呼ばれる.

(記号 10.2) 作用素環論では $\alpha(g)$ の代わりに α_g と記すことが多い.

(注 10.3) G が離散群の場合, G の C^* 環 A への作用を与えることと、群準同型 $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$ を与えることは同値である.

定義 10.4. 三つ組 (G, α, A) を C^* **力学系** (C^*-dynamical system) と言う.

(例 10.5) M を C^∞ 閉多様体, ξ を M 上の C^∞ ベクトル場とする. $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\alpha_t = \exp t\xi$ を考えれば, α は $\mathbb{R}$ の $C(M)$ への作用を引き起こす.

(例 10.6) 離散群 G のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ へのユニタリー表現 π が与えられたと

する. この時, G の C^* 環 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ への作用 α が

$$\alpha_g(a) = \pi(g)a\pi(g)^* \quad , \quad a \in \mathcal{K}(\mathcal{H}), g \in G$$

で与えられる.

(例 10.7) C^* 環 A の自己同型 α は自然に離散群 $\mathbb{Z}$ の作用に拡張する.
特に, A が可換環 $C_0(X)$ である時, $\mathbb{Z}$ の A への作用を考えることと, X の位相同型写像を考えることは同値である.

さて (G, α, A) を C^* 力学系としよう.

定義 10.8. π を A のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ への非退化表現, U を G の $\mathcal{H}$ へのユニタリー表現とする. 任意の $a \in A, g \in G$ に対して

$$\pi(\alpha_g(a)) = U_g\pi(a)U_g^*$$

が成立する時, 対 (π, U) は C^* 力学系 (G, α, A) の**共変表現** (covariant representation) と呼ばれる.

(例 10.9) π を A の $\mathcal{H}$ への表現とする. A, G の $L^2(G, \mathcal{H})$ への表現 $\tilde{\pi}$, $\tilde{\lambda}$ をそれぞれ

$$(\tilde{\pi}(a)\xi)(g) = \pi(\alpha_{g^{-1}}(a))\xi(g),$$
$$(\widetilde{\lambda_g}\xi)(h) = \xi(g^{-1}h)$$

で定義すると, $(\tilde{\pi}, \tilde{\lambda})$ は (G, α, A) の共変表現となり, π に付随した**左正則表現** (left regular representation) と呼ばれる.

(例 10.10) $G \times X \longrightarrow X$ を位相変換群とし, X は G-不変ボレル測度 μ を持つとする. この時, $(G, \alpha, C_0(X))$ の $L^2(X, \mu)$ への共変表現 (M, μ) が次式で定義される.

$$M(f)\xi = f\xi,$$

$$(\lambda_g\xi)(x) = \xi(g^{-1} \cdot x).$$

(G,α,A) を C^* 力学系とし, G 上の A-値連続関数でコンパクトな台を持つものの全体を $C_c(G,A)$ とする. $\phi,\psi\in C_c(G,A)$ に対して

$$(\phi*\psi)(g)=\int_G\phi(h)\alpha_h(\psi(h^{-1}g))\,d\mu(h),$$

$$\phi^*(g)=\Delta(g^{-1})\alpha_g(\phi(\,(g^{-1})^*)$$

とおけば, $C_c(G,A)$ は $*$ 多元環となる.

G 上の A-値可積分関数の (同値類の) 全体を $L^1(G,A)$ とする. $L^1(G,A)$ も $*$ 多元環となり $C_c(G,A)$ を $*$ 部分多元環として含む.

(π,U) を $\mathcal{H}$ への共変表現とする. $C_c(G,A)$ の $\mathcal{H}$ への表現 $\pi\times U$ が

$$(\pi\times U)(\phi)=\int_G\pi(\phi(g))U_g\,dg$$

で定義される. 但し, 右辺の積分の収束は $B(\mathcal{H})$ の弱位相 (定義はこの章のアペンディックス参照) に関してである. $\pi\times U$ は $L^1(G,A)$ の $*$ 表現に拡張する. π が非退化ならば $\pi\times U$ も非退化であり, 逆に, $L^1(G,A)$ の非退化表現は $\pi\times U$ の形である.

(G,α,A) を C^* 力学系とし, $L^1(G,A)$ 上のノルムを

$$\|\phi\| \;=\; \sup\{\ \|\pi(\phi)\|\ ;\ \pi \text{ は } L^1(G,A) \text{ の } * \text{ 表現}\ \}$$

で定義する.

定義 10.11. $\|\cdot\|$ は $L^1(G,A)$ の C^* ノルムであり, $L^1(G,A)$ の $\|\cdot\|$ に関する完備化は, **接合積 C^* 環** (crossed product C^*-algebra) と呼ばれ, $A\rtimes_\alpha G$ と記される.

π を A の への忠実な表現とする. $(\tilde\pi,\tilde\lambda)$ を π に付随した左正則表現 (例 10.9) とすると, $\tilde\pi\times\tilde\lambda$ は $L^1(G,A)$ の忠実な表現となる.

定義 10.12. $(\tilde\pi\times\tilde\lambda)(L^1(G,A))$ の $B(L^2(G,\mathcal{H}))$ における閉包を $A\rtimes_{\alpha,red}G$ と記し, **被約接合積 C^* 環** (reduced crossed product C^*-algebra) と呼ぶ.

$A=\mathbb{C}$ の時, 接合積, 被約接合積はそれぞれ群 C^* 環, 被約群 C^* 環である.

定義より直ちに全射　$A\rtimes_\alpha G\longrightarrow A\rtimes_{\alpha,red}G$ の存在が分かる.

定理 10.13 G: アメナブルならば, 上記の自然な全射

$$\pi_\alpha \ : \ A \rtimes_\alpha G \longrightarrow A \rtimes_{\alpha, red} G$$

は同型である.

$A = C_0(X)$ の時, $C_0(X) \rtimes_\alpha G$ はしばしば**位相変換群 C^* 環** (topological transformation group C^*-algebra) と呼ばれる.

群 G がアメナブルでなくても π_α が同型となることがある. それは作用がアメナブルと呼ばれる場合である. 例えば, $\widetilde{M} \longrightarrow M$ を正則被覆空間, Γ を被覆変換群とすると, Γ の $C_0(\widetilde{M})$ への作用はアメナブルである. 離散群のアメナブル作用に関しては, 例えば [1] 参照.

接合積はあくまで群の作用が基となっている. 幾何学的状況では, 位相変換群が与えられた時接合積が考えられる. 幾何学的対象を調べる時, 群ではなく, それを一般化した亜群しか利用できず, それが重要であることが起きる. 例で考えてみよう. 多様体 M 上に葉層構造 $\mathcal{F}$ が与えられたとしよう. T を $\mathcal{F}$ の完全横断多様体とする. この時, 諸々の葉のホロノミーは T 上の局所同相写像の芽の亜群を定める. T 上に自然な群作用はないが亜群の作用は何時でも存在するというわけである.

位相変換群が接合積を生むように, 亜群の作用が在ったら, 何か位相変換群 C^* 環を一般化したような C^* 環ができるのではないかと予測される. それが**位相亜群** (topological groupoid) に付随した C^* 環である. 定義, 基本的性質については [41] 参照. 位相変換群 C^* 環は位相亜群に付随した C^* 環の例である.

葉層構造からホロノミー亜群が作られ, この位相亜群に付随した C^* 環として, Connes は葉層 C^* 環 $C^*(M, \mathcal{F})$ を構成し, 葉の空間 $X/\mathcal{F}$ 上の連続関数環の代替物だと考えた. $C^*(M, \mathcal{F})$ を用いて, 葉の方向に楕円型である擬微分作用素の指数定理, その他微分位相幾何学的概念が定式化される. この辺りのことは, 例えば [8], [12] 参照.

蛇足　葉層構造の幾何学的性質と $C^*(M, \mathcal{F})$ の解析的性質との関わり合いに関して, 以下のことが知られている. M をコンパクト, ホロノミー亜群がハウスドルフで

あると仮定する (この仮定は, 例えば, S^3 の Reeb 葉層は満たさない). この時

(1) $C^*(M,\mathcal{F})$ は単純 $\Longleftrightarrow$ 任意の葉は稠密,
(2) $C^*(M,\mathcal{F})$ は GCR $\Longleftrightarrow$ 任意の葉は固有葉であり, そのホロノミー群は I-型,
(3) $C^*(M,\mathcal{F})$ は CCR $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ はコンパクト葉層であり, ホロノミー群は I 型,
(4) $C^*(M,\mathcal{F})$ は核型 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ は多項式増大度.

Appendix. ヒルベルト空間上の有界線形作用素

ヒルベルト空間に関する基本的事実をまとめておく.

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を第1変数に関して線形, 第2変数に関して共役線形とする.

$M=\{e_\alpha\ ;\ \alpha\in A\}$ を $\mathcal{H}$ の元の集まりとする. M が**正規直交系** (ONS) であることは

$$\langle e_\alpha, e_\beta\rangle=\delta_{\alpha\beta}$$

が全ての $\alpha,\beta\in A$ に対して成立することである. 特に $\|e_\alpha\|=1$. ONS M が**正規直交基底** (ONB), 又は**完全正規直交系**であることは M の生成する線形部分空間 $L(M)$ が稠密となることとする.

(例 A.1)

(1) $\mathcal{H}=\ell^2(\mathbb{N})$, $\quad e_j=(0,0,\cdots,0,\overset{j}{1},0,\cdots)$, $\quad (e_j)_j^\infty=0$ は ONB.

(2) $L^2(0,1)$ で $e_n(x)=e^{2\pi inx}$ とおけば $M=\{e_n\ ;\ n\in\mathbb{Z}\}$ は ONB.

定理 A.2. (1) $\{e_\alpha;\alpha\in A\}$ を ONS とする. 任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して $\langle x,e_\alpha\rangle\neq 0$ となるのは高々可算個であり

$$\|x\|^2\geqq\sum_{\alpha\in A}|\langle x,e_\alpha\rangle|^2\quad\text{(Bessel の不等式)}.$$

(2) $\{e_\alpha;\alpha\in A\}$ が ONB である必要十分条件は, 任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して

$$\|x\|^2=\sum_{\alpha\in A}|\langle x,e_\alpha\rangle|^2\quad\text{(Parseval の不等式)}$$

が成立することである．この時, $x = \sum_\alpha \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$ (Fourier 展開).

定理 A.3. $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とする.
(1) $\mathcal{H}$ は ONB を持つ.
(2) M_0 を ONS とすると, $M \supset M_0$ となる ONB M が存在する.
(3) 全ての ONB は同じ濃度を持つ.

定理 A.3 の (3) で定まる濃度を $\mathcal{H}$ の**ヒルベルト空間次元**と言う．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が可算稠密部分集合を含む時 $\mathcal{H}$ は**可分** (separable) であるという.

定理 A.4. 可分なヒルベルト空間は可算 ONB を持つ.

$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ をヒルベルト空間とする．線形写像 $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ が**有界** (bounded) であるとは, 適当な $M > 0$ をとれば

$$||Tx|| \leq M||x||, \quad x \in \mathcal{H}_1.$$

特に $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}$ の時, 有界線形汎関数 (bounded linear functional), $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ の時**有界線形作用素** (bounded linear operator) と言う.

有界な $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ に対して

$$||T|| = \inf\{M \geq 0\ ;\ ||Tx|| \ \leq M||x||,\ x \in \mathcal{H}_1\ \}$$

とおけば $||\cdot||$ はノルム.

命題 A.5. $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ (有界) に対して次の等式が成立.

$$||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Tx|| = \sup_{||x||=1} ||Tx|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||}.$$

定義より $||Tx|| \leq ||T||||x||$ が成立する.

$B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ で $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への有界線形写像の全体を表わす．$B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ は自然な演算でベクトル空間の構造が入る．特に $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ の時, $B(\mathcal{H}) = B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ には $\mathbb{C}$-多元環の構造が入る．ノルム $||\cdot||$ に関して $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ はバナッハ空間であり, $B(\mathcal{H})$ はバナッハ環となる.

(例 A.6)　(Ω, μ) 測度空間として $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mu)$ を考える．可測な関数 ϕ に対して

$$\|\phi\|_\infty = \operatorname*{ess\cdot sup}_{\omega\in\Omega}|\phi(\omega)| < \infty$$

とする．$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を $T\xi = \phi\xi$, $\xi \in \mathcal{H}$ とすれば, T は有界であり $\|T\| \leq \|\phi\|_\infty$ が成立する．実際には等号 $\|T\| = \|\phi\|_\infty$ が成立する．

$B(\mathcal{H}, \mathbb{C}) = \mathcal{H}^*$ と記す.

定理 A.7 (Riesz の表現定理).　任意の $f \in \mathcal{H}^*$ に対して一意的に $x_f \in \mathcal{H}$ が存在し $f(x) = \langle x, x_f \rangle$, $x \in \mathcal{H}$, $\|f\| = \|x_f\|$ が成立する．

この定理のおかげで, 任意の $A \in B(\mathcal{H})$ に対して唯一 $A^* \in B(\mathcal{H})$ が存在して, 全ての $x, y \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

が成立する．A^* を A の**共役作用素** (adjoint) と言う.

命題 A.8.　写像 $A \mapsto A^*$ は次の性質を持つ.

(1) $(A+B)^* = A^* + B^*$,　(2) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^*$,　(3) $(AB)^* = B^*A^*$.

(4) A が可逆 (*i.e.* $B \in B(\mathcal{H})$ が存在して $AB = BA = I$) ならば A^* も可逆であり $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.　(5) $(A^*)^* = A$,　(6) $\|A^*\| = \|A\|$,

(7) (重要) $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

(7) のみ証明しておく．$\|A^*A\| \leq \|A\|^2$ は自明．任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle \leq \|A^*Ax\|\|x\| \leq \|A^*A\|\|x\|^2$. $\|x\| \leq 1$ なる x で上限をとって $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$.

以上のことから $B(\mathcal{H})$ は C^* 環である.

ヒルベルト空間上の特に重要な作用素として次のものがある.

(1) A: **自己共役** (self-adjoint)　$\Longleftrightarrow$　$A^* = A$,

(2) U: **ユニタリー** (unitary)　$\Longleftrightarrow$　$U^*U = UU^* = I$,

(3) P: **射影子** (projection)　$\Longleftrightarrow$　$P^* = P$, $P^2 = P$.

これは $\mathcal{H}$ の閉部分空間への直交射影に対応する.

$B(\mathcal{H})$ はノルムに関して C^* 環になるが, ノルムによる位相以外に重要な位相がある.

定義 A.9. $\{A_\alpha\}$ を $B(\mathcal{H})$ の有向族とする. $A \in B(\mathcal{H})$.

(1) $\{A_\alpha\}$ が A に**ノルム収束** (一様収束) する

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\|A_\alpha - A\| \to 0$,

(2) $\{A_\alpha\}$ が A に**強収束**する

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して $\|A_\alpha x - Ax\| \to 0$

この時 $A = A = s - \lim_\alpha A_\alpha$, 又は $A_\alpha \xrightarrow{s} A$ と記す.

(3) $\{A_\alpha\}$ が A に**弱収束**する

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $x, y \in \mathcal{H}$ に対して $\langle A_\alpha x, Ax\rangle \to \langle Ax, y\rangle$

この時 $A = A = w - \lim_\alpha A_\alpha$, 又は $A_\alpha \xrightarrow{w} A$ と記す.

定義から直ちに

ノルム収束 $\Longrightarrow$ 強収束 $\Longrightarrow$ 弱収束.

さて最後に知っていると重宝な定理 2 つを紹介する.

定理 A.10 (開写像定理). X, Y: バナッハ空間. $T \in B(X, Y)$ が全射 $\Longrightarrow T$ は開写像.

定理 A.11 (閉グラフ定理). X, Y: バナッハ空間. $T : X \to Y$ を定義域が X 全体である線形写像であるとする. この時, 次は同値:

(1) $T \in B(X, Y)$,

(2) $G(T) = \{(x, Tx) \in X \oplus Y \,;\, x \in X\}$ が閉部分空間.

第2章　K-理論

2.1　K-群

位相的 K-理論は, おなじみであろう．代数的トポロジーは勿論, 大域解析学においても重要な道具立てである．

X をコンパクト空間とする．位相的 K-群 $K(X)$ は X 上の複素ベクトル束の同型類から構成される．

E を X 上の複素ベクトル束として, $\Gamma(E)$ で連続断面の全体を表わす．

$\Gamma(E)$ は C^* 環 $C(X)$ 上の加群となる．

定理 1.1 (Swan).　$\Gamma(E)$ は $C(X)$ 上の有限生成射影的加群である．逆に任意の有限生成射影的加群は適当な複素ベクトル束の F に対する $\Gamma(F)$ と同型になる．

$A = C(X)$, $M = \Gamma(E)$ とおく．上の結果により M は $A^n = A \oplus \cdots \oplus A$ (n 個) の直和因子である．A^n から M への射影 (これは A-加群写像) を p として, i を $M \hookrightarrow A^n$ とする．$p \in M_n(A)$ とみなされ, 明らかに $p^2 = p$ (巾等) が成立．次の完全列が成立する．

$$0 \to (I-p)A^n \to A^n \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} M \to 0.$$

N を他の有限生成射影的加群として同じ操作をすると, 完全列

$$0 \to (I-q)A^m \to A^m \underset{j}{\overset{q}{\rightleftarrows}} N \to 0.$$

必要ならば自由加群 A^k を足して, $m = n$ と仮定してよい．

今, M と N が A-加群として同型だったと仮定しよう．

$f : M \to N$,　$g : N \to M$,　$f \circ g = \mathrm{id}$,　$g \circ f = \mathrm{id}$ とする．

$u = i \circ g \circ q$,　$v = j \circ f \circ p$ とおく．

すると $u,v \in M_n(A)$ であり $uv=p, vu=q$.

逆に $p,q \in M_n(A)$ 巾等元に対して $u,v \in M_n(A)$ が存在して $p=uv, q=vu$ が成立すれば

$$pA^n \cong qA^n.$$

さて, A を一般の 1 を持つ C^* 環とする.

$$\begin{array}{ccccccccc} M_n(A) & \subset & M_{n+1}(A) & \subset & \cdots & \subset & \bigcup_n M_n(A) & =: & M_\infty(A). \\ \Cup & & \Cup & & & & & & \\ a & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & \\ & 0 \end{pmatrix} & & & & & & \end{array}$$

定義 1.2. $p,q \in M_\infty(A)$ を巾等元とする. p,q が**同値** $(p \sim q)$.
$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 適当な n をとれば, $p,q \in M_n(A)$ であり, $u,v \in M_n(A)$ が存在して

$$p=uv, \quad q=vu.$$

(注 1.3) $p \sim q \Longrightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $M_{2n}(A)$ で相似.

実際, $g = \begin{pmatrix} v & 1-q \\ p-1 & u \end{pmatrix}$ とおけば $g^{-1} = \begin{pmatrix} u & p-1 \\ 1-q & v \end{pmatrix}$ であり

$$g^{-1}\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

逆に, 2 つの巾等元 p,q が相似なら同値になる.

$$g^{-1}qg = p \Longrightarrow p = (g^{-1}q)(qg).$$

(注 1.4) 定義 1.2 の同値の概念は Murray-von Neumann がフォン・ノイマン環の射影子に対して導入し, マレー・ノイマンの意味で同値と呼ばれる.

巾等元の和を考えたい. 巾等元 p,q に対して: $p+q$ が巾等元 $\Leftrightarrow pq+qp=0 \Leftrightarrow pq=qp=0$ であるから, 任意の巾等元 $p,q \in M_n(A)$ に対して $p+q$ は一般には巾等元にはならない.

ベクトル束の直和に対応して, 巾等元 p,q の直和を

$$p \oplus q = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

で定義する.

命題 1.5.
(1) $p \sim p',\ q \sim q' \quad \Longrightarrow \quad p \oplus q \sim p' \oplus q'$,
(2) $p \oplus q \sim q \oplus p$,
(3) $pq = 0,\ qp = 0 \quad \Longrightarrow \quad p + q \sim p \oplus q$.

$M_\infty(A)$ の巾等元 p の同値類を (p) とし, 同値類の全体を $V(A)$ とおく. $V(A)$ は $(p) + (q) = (p \oplus q)$ により可換半群となる.

定義 1.6. $K_0(A) := V(A)$ の生成するグロタンディエク群 (Grothendieck group).

グロタンディエク群の定義により, F を $V(A)$ で生成される自由アーベル群, R を $(p) + (q) - (p \oplus q)$ の形の元で張られる部分群とすると

$$K_0(A) = F/R.$$

このことから $(p) \equiv (q) \in F/R$ である為の必要十分条件は適当な巾等元 r をとれば,

$$p \oplus r \ \sim \ q \oplus r$$

となることである.
r に更に適当な r' を足せば

$$r \oplus r' = I_k \ (= M_k(A) \ \text{の単位元}\ ) \ \subset \ M_\infty(A)$$

とできる.

定義 1.7. p と q が**安定同値** ($p \approx q$ と記す)
$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 適当な k をとれば, $p \oplus I_k \sim q \oplus I_k$.

安定同値類を $[p]$ で表わす.

以上の議論をまとめると $K_0(A)$ は安定同値類の形式的差の

$$[p] - [q]$$

の全体だとみなすことができる．(この辺りの議論は [32] 参照.)

A, B を 1 を持つ C^* 環として, $\varphi : A \to B$ は 1 を保つ $*$ 準同型とする．φ は自然に

$$\varphi : M_\infty(A) \to M_\infty(B)$$

を導き,

$$p \approx q \quad \Longrightarrow \quad \varphi(p) \approx \varphi(q)$$

したがって

$$\varphi_* : K_0(A) \to K_0(B)$$

が定義される．

さて A が 1 を持たない場合はどうするか? この場合, 1 をつけ加えた C^* 環 $A^\sim$ を考える．自然な全射 $A^\sim \to \mathbb{C}$ が在る．

定義 1.8. $K_0(A) := \ker(K_0(A^\sim) \to K_0(\mathbb{C}))$.

$\varphi : A \to B$ $*$ 準同型は $\varphi^\sim : A^\sim \to B^\sim$ に拡張し, 次の可環な図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A^\sim & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B^\sim & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

このことから $\varphi_* : K_0(A) \to K_0(B)$ が得られることがわかる．

A に 1 が在っても形式的に $A^\sim$ を構成できる．この時定義 1.6 と定義 1.8 で与えられる $K_0(A)$ は同じものであろうか? 定義 1.8 で与えられるものを一先ず $\widetilde{K}_0(A)$ として区別しておく．

$\pi : A^\sim \to \mathbb{C}$ とする．

A が単位元 e を持ったとする．$p \in M_\infty(A)$ 巾等元だとする．

このとき, π の定める $M_\infty(A^\sim) \to M_\infty(\mathbb{C})$ も同じ π で表わしておく．あきらかに $\pi(p) = 0$. したがって $\widetilde{K_0}(A)$ の元を定める．

この対応を j_A としておく．

$$j_A : K_0(A) \to \widetilde{K_0}(A).$$

定理 1.9. A が 1 を持つとする. この時 j_A は同型であり, 更にもし, $\varphi : A \to B$ が 1 を保つ $*$ 準同型だとすると, 次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccc} K_0(A) & \to & K_0(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{K_0}(A) & \to & \widetilde{K_0}(B). \end{array}$$

この結果により, A が単位元を持つ, 持たないによらず $K_0(A)$ が一意的に定義されることがわかる.

(例 1.10) (最も簡単な C^* 環)　$A = \mathbb{C}$. $p, q \in M_\infty(\mathbb{C})$ 巾等元に対して

$$p \sim q \iff p \approx q \iff \dim R(p) = \dim R(q).$$

このことから $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ であり, 生成元は単位元 1 の類であることがわかる.

先に, A が 1 を持つ時, $K_0(A)$ は巾等元の安定同値類の形式的差の全体だとみなせることを注意したが, 単位元を持たない場合は, どのようなものだとみなすことができるのであろうか？ この場合は $x \in K_0(A)$ は,

$$x = [p] - [I_n], \qquad p \in M_\infty(A^\sim), \quad p - I_n \in M_\infty(A)$$

と書ける. この記述は計算する場合, 有効である.

さて, 聡明な読者は, $K_0(A)$ の定義において, A が C^* 環であることは何処でも用いられていない事に気付かれたことと思う. $K_0(A)$ は代数的 K_0-群そのものである. では A が C^* 環であることは何か利点があるのであろうか?

補題 1.11. $A : 1$ を持つとする. $p \in A$ 巾等元に対して, 自己共役巾等元 *i.e.* 射影子 q が存在して $p \sim q$.

さらに

補題 1.12. p, q: 射影子, $p \sim q \Longrightarrow$　適当な u が存在して $p = uu^*, q = uu^*$ が成立　(Murray-von Neumann の意味で同値).

結局, A: C^* 環の場合, $K_0(A)$ の定義を射影子を基にしてできる.

補題 1.13. p, q: 射影子, $\|p-q\| < 1 \Longrightarrow p \sim q$.

このことから

定義 1.14. p, q: 射影子がホモトピック (homotopic)
$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ノルム連続的な射影子の道 $(p_t)_{0 \leq t \leq 1}$ が存在して $p_0 = p$, $p_1 = q$.

系 1.15. p, q ホモトピック $\Longrightarrow p \sim q$.

定義 1.16. $\phi, \psi : A \to B$ $*$ 準同型がホモトピック (homotopic)
$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $*$ 準同型の道 w_t, $t \in [0,1]$ が存在して

(1) $w_0 = \phi$, $w_1 = \psi$,

(2) 任意の $a \in A$ に対して写像 $t \longmapsto w_t(a)$ はノルム連続.

定義 1.16 と系 1.15 から

命題 1.17. $\phi, \psi : A \to B$ ホモトピック $\Longrightarrow \phi_* = \psi_* : K_0(A) \to K_0(B)$.

A が 1 を持つとする. τ を有限トレースとする. τ を各 $M_n(A)$ に自然に拡張し, 同じ記号で表わしておく. トレースの性質から $p \sim q \Longrightarrow \tau(p) = \tau(q)$. したがってアーベル群の写像

$$\tau_* : K_0(A) \to \mathbb{R}$$

が得られる.

2.2 K_1-群

A は 1 を持つとする.

$$\begin{array}{ccccccccc} GL_n(A) & \subset & GL_{n+1}(A) & \subset & \cdots & \subset & \bigcup GL_n(A) & = & GL_\infty(A) \\ a & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & & & & & & \end{array}$$

A は C^* 環であるから各 $GL_n(A)$ は位相群であり, その帰納極限として $GL_\infty(A)$ は位相群である.

定義 2.1. $K_1(A) := \pi_0(GL_\infty(A)) = GL_\infty(A)/GL_\infty(A)_0$, 但し, $GL_\infty(A)_0$ は単位元の連結成分.

B を 1 を持つ C^* 環, $z \in GL_1(B)$ とすると, $u := z|z|^{-1}$ はユニタリーであり, $|z|^{-1}$ の部分を 1 に結ぶことにより, z は $GL_n(B)$ の中で u にホモトピックであることが分かる. このホモトピーは実際, $GL_n(B)$ の $U_n(B)$ の上への変形レトラクト (deformation retract) を与える. $M_n(B)$ のユニタリーの全体を $U_n(B)$ と記す. 定義 2.1 において $GL_\infty(A)$ を

$$U_\infty(A) = \varinjlim U_n(A)$$

でおきかえることができる, *i.e.*

$$K_1(A) := \pi_0(GL_\infty(A)) = \pi_0(U_\infty(A))$$

命題 2.2. $K_1(A)$ はアーベル群.

(証)

$$\begin{pmatrix} ab & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \\ & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{ホモトピック}}{\sim} \begin{pmatrix} a & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix} \underset{\text{ホモトピック}}{\sim}$$
$$\begin{pmatrix} b & \\ & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & a \end{pmatrix} \underset{\text{ホモトピック}}{\sim} \begin{pmatrix} b & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

(例 2.3) (1) $K_1(\mathbb{C}) = \{0\}$

(2) A: フォン・ノイマン環, 特に $B(\mathcal{H})$ $\Rightarrow$ $K_1(A) = \{0\}$.

(3) $A = C(S^1)$

$U_n(A) = C(S^1, U(n))$ ($U(n)$-値連続関数).

$\pi_1(U_n) = \mathbb{Z}$ により $K_1(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$. 生成元は自然なユニタリー $z : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$.

ここで正確には $K_1(A) = \varinjlim(U_n(A)/U_n(A)_0)$ を用いる.

A, B を 1 を持つ C^* 環, $\varphi : A \to B$ を 1 を保つ $*$ 準同型とすると,

$$\varphi_* : K_1(A) \to K_1(B)$$

が得られる. そこで, 任意の A に対しては, $\pi : A^\sim \to \mathbb{C}$ を考え,

$$K_1(A) := \ker(K_1(A^\sim) \longrightarrow K_1((\mathbb{C}))$$

とおく. 例でみたように, $K_1(\mathbb{C}) = \{0\}$ したがって $K_1(A) \cong K_1(A^\sim)$.

$A, B; C^*$ 環に対して, 明らかに

$$K_1(A \oplus B) \cong K_1(A) \oplus K_1(B).$$

命題 2.4. A が 1 を持つ時, 2 つの定義 $K_1(A)$ と $K_1(A^\sim)$ は一致.

(証) $e \in A$ 単位元とする. この時, $A^\sim$ は C^* 環の直和 $A \oplus \mathbb{C}$ に同型である.

$$\begin{array}{ccc} A^\sim & \longrightarrow & A \oplus \mathbb{C} \\ (a, \lambda) & \longmapsto & (a + \lambda e, \lambda) \end{array}$$

したがって

$$K_1(A^\sim) \cong K_1(A \oplus \mathbb{C}) = K_1(A).$$

(例 2.5) $A = C_0(\mathbb{R})$ なら $A^\sim = C_0(\mathbb{R}^\sim) = C(S^1)$.

よって $K_1(C_0(\mathbb{R})) \cong K_1(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$. 生成元としては例えば次の様な関数 f を考え,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ x & , 0 < x < 1 \\ 1 & , 1 \leq x, \end{cases}$$

$u(x) = e^{2\pi i f(x)}$ とすれば, u は $C_0(\mathbb{R})^\sim$ のユニタリーで, そのクラスが $K_1(C_0(\mathbb{R}))$ を張る.

C^* 環 A が与えられて, $K_0(A), K_1(A)$ を計算することは困難. 位相的 K- 群 $K^*(X)$ の計算方法を思い出してもらうと, そこでは Mayer-Vietoris 完全列等を用いることが基本. 同様に C^* 環の K-群を計算する上で種々の完全列が必要となる. 基本的なものについて説明する.

A: C^* 環, I: イデアルとして完全列

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$$

を考える.

定理 2.6. 準同型 $\delta : K_1(A/I) \longrightarrow K_0(I)$ が存在して次の列は完全

$$K_1(I) \xrightarrow{i_*} K_1(A) \xrightarrow{\pi_*} K_1(A/I) \xrightarrow{\delta} K_0(I) \xrightarrow{i_*} K_0(A) \xrightarrow{\pi_*} K_0(A/I).$$

δ の構成: 先ず A が 1 を持つ場合を考える.
$a \in GL_k(A/I)$ に対して 2 倍のサイズの行列 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ を考えると, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in GL_{2k}(A/I)_0$. これを $g \in GL_{2k}(A)_0$ にリフトする, *i.e.* $\pi(g) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. $q = \left(\begin{array}{c|c} I_k & \\ \hline & 0 \end{array}\right) \in M_{2k}(A)$ として $p = gqg^{-1}$ とおくと $p^2 = p$: さらに

$$\pi(p) = \pi(g)\pi(q)\pi(g)^{-1} = \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & \\ & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

したがって $p \in M_{2k}(I^\sim)$, *i.e.* p は I を法としてスカラー行列に合同. よって

$$[p] - [I_k] \in K_0(I).$$

δ の定義 $\delta([a]) := [p] - [I_k]$ は well-defined.

(注 2.7) 上の構成で $a \in U_k(A/I)$ なら $g \in U_{2k}(A)_0$ がとれ, p は射影子になる.

A が 1 を持たない場合は次の写像の合成を δ と呼ぶ.

$$K_1(A/I) = K_1((A/I)^\sim) = K_1(A^\sim/I) \longrightarrow K_0(I).$$

一旦 δ が構成されれば完全性は注意深い「帳簿付け」. 証明の細かい事の代わりに, 少し具体例で δ がどの様になっているか調べることにする.

(例 2.8) $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ 単位開円盤として完全列

$$0 \longrightarrow C_0(\mathbb{D}) \longrightarrow C(\overline{\mathbb{D}}) \xrightarrow{\pi} C(\partial\overline{\mathbb{D}}) \longrightarrow 0$$

を考えよう. $\partial\overline{\mathbb{D}} = S^1$ であり $K_1(C(S^1))$ は S^1 上の関数 $e^{i\theta}$ の類で生成されている. $\overline{\mathbb{D}}$ 上の 2×2-行列値連続関数 g を

$$g(re^{i\theta}) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \sin \frac{\pi}{2} r & -\cos \frac{\pi}{2} r \\ \cos \frac{\pi}{2} r & e^{-i\theta} \sin \frac{\pi}{2} r \end{pmatrix}$$

で定義すれば, $g \in U_2((C(\overline{\mathbb{D}}))_0$ であり $\pi(g) = \left(\begin{smallmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{smallmatrix}\right)$. よって

$$p(re^{i\theta}) = g(re^{i\theta}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g(re^{i\theta})^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos \pi r & e^{i\theta} \sin \pi r \\ e^{-i\theta} \sin \pi r & 1 + \cos \pi r \end{pmatrix},$$

$$\delta([e^{i\theta}]) = [p] - [I_1] \in K_0(C_0(\mathbb{D})).$$

$\overline{\mathbb{D}}$ はコンパクトであり, 1 点に可縮. よって $K_1(C(\overline{\mathbb{D}})) = \{0\}, K_0(C(\overline{\mathbb{D}})) \cong \mathbb{Z}$. ($K_0(C(\overline{\mathbb{D}})) \to K_0(C(S^1))$ は同型.) したがって定理 2.6 により

$$\delta : K_1(C(S^1)) \longrightarrow K_0(C_0(\mathbb{D}))$$

は同型!! よって $K_0(C_0(\mathbb{D})) \cong \mathbb{Z}$ であり, 生成元は先に記述された $[p] - [I_1]$.

(例 2.9) M: 閉 C^∞ 多様体. S^*M: 余球束, $\Psi^0(M)$: $L^2(M)$ 上で位数 0 の擬微分作用素の生成する C^* 環. このとき完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(L^2(M)) \longrightarrow \Psi(M) \xrightarrow{\sigma} C(S^*M) \longrightarrow 0$$

が得られる. σ は表象写像.

P: 楕円型 $\in \Psi^0(M)$ とすると, $\sigma(P)$: 可逆. Q を P のパラメトリックスとする. (特に Q も楕円型であり $\sigma(Q)$: 可逆 $\sigma(P)^{-1} = \sigma(Q)$).

$T = \begin{pmatrix} P + (1 - PQ)P & PQ - 1 \\ 1 - QP & Q \end{pmatrix}$ とおけば T: 可逆であり

$$\sigma(T) = \begin{pmatrix} \sigma(P) & 0 \\ 0 & \sigma(P)^{-1} \end{pmatrix}.$$

δ の構成から

$$P = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - S_1{}^2 & (S_1 + S_1{}^2)P \\ S_0 Q & S_0{}^2 \end{pmatrix},$$

ここで $S_0 = 1 - QP$, $S_1 = PQ$ とおいて

$$\delta([\sigma(P)]) = [P] - [I_1] \in K_0(\mathcal{K}(L^2(M))).$$

もう 1 つチェックしておきたいのは, $K_0(\mathcal{K}(L^2(M))) \cong \mathbb{Z}$ を通して

$$[P] - [I_1] \longleftrightarrow \mathrm{index} P.$$

$K_0(\mathcal{K}(L^2(M))) \cong \mathbb{Z}$ を通して $\delta : K_1(S^*M) \longrightarrow \mathbb{Z}$ とみると

$$\delta([\sigma(P)]) = \mathrm{index} P.$$

キー・ポイント: $T, S \in B(\mathcal{H})$. $R_1 = 1 - ST$, $R_2 = 1 - TS$. 適当な $N > 0$ をとれば ${R_1}^N, {R_2}^N \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ となったとすると, T はフレドホルムであり

$$\mathrm{index}\ T = \mathrm{Tr}(R_1^N) - \mathrm{Tr}(R_2^N).$$

これについては, 例えば, L. Hörmander [24] の Prop. 19.1.14 参照.

例 2.10. $0 \to I \to A \to A/I \to 0$. $u \in U_n(A/I)$ が部分等長作用素 $a \in M_n(A)$, *i.e.* aa^*, a^*a は射影子, にリフトしたとする. このとき

$$w = \begin{pmatrix} a & 1 - aa^* \\ 1 - a^*a & a^* \end{pmatrix} \quad \in U_{2n}(A)$$

そして $\delta([u]) = [wI_nw^*] - [I_n] = [1 - a^*a] - [1 - aa^*]$. (2番目の等号は証明が要る.)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a & 1 - aa^* \\ 1 - a^*a & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & 1 - a^*a \\ 1 - aa^* & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 - a^*a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & 1 - a^*a \\ 1 - aa^* & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa^* & a - aa^*a \\ a^* - a^*aa^* & (1 - a^*a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^* & 0 \\ 0 & 1 - a^*a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ここで, $1 - a^*a$ が射影子であることを用いた.

(注 2.11) δ の構成で $\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix}$ を考えたポイントは, $\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \in (\quad)_0 \Longrightarrow$ 持ち上げ可. 実は $\pi(g) = \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix}$, g: 可逆ならばリフトとしてどの g をとっても良い.

A: C^* 環に対して

$$SA = \{\, f : [0,1] \longrightarrow A \text{ 連続 } ;\ f(0) = f(1) = 0 \,\} \cong C_0(\mathbb{R}) \otimes A$$

を A の**懸垂** (suspension) と言う.

簡単に分かるが,

$$(SA)^{\sim} = \{\ f : [0,1] \longrightarrow A^{\sim}\ \text{連続}\ ;\ f(0) = f(1) = \lambda \in \mathbb{C}\ \}.$$

一方

$$CA = \{\ f : [0,1] \longrightarrow A\ \text{連続}\ ;\ f(0) = 0\ \}$$

を A の**錐** (cone) と言う. SA は CA のイデアルで $f \in CA$ に対して $f(1) \in A$ を対応させることにより完全列

$$0 \longrightarrow SA \longrightarrow CA \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

を導く.

命題 2.12. $K_0(CA) = \{0\}$, $K_1(CA) = \{0\}$.

(略証)

$f \in CA$ に対して $(\varphi_s f)(t) = f(st)$ を考えると, φ_s は CA から CA への $*$ 準同型 (φ_s) はホモトピー, $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \mathrm{id}$. K_0, K_1 のホモトピー不変性から結論.

定理 2.6 を上の完全列に適用すると

$$\delta : K_1(A) \longrightarrow K_0(SA)$$

が同型であることがわかる. まとめると:

定理 2.13. 任意の C^* 環 A に対して自然な同型 $\alpha : K_1(A) \longrightarrow K_0(SA)$ が存在する.

(注 2.14) $\varphi : A \to B$ $*$ 準同型は $S\varphi : SA \to SB$ を導く. 自然性とは図式

$$\begin{array}{ccc} K_1(A) & \xrightarrow{\alpha} & K_0(SA) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow (S\varphi)_* \\ K_1(B) & \xrightarrow{\alpha} & K_0(SB) \end{array}$$

が可換となることである. 定理 2.13 において自然性は δ の構成法から自明.

次の定理は C^* 環の K-理論で最も重要な結果の一つである．

証明は Atiyah による可換の場合の証明からその他色々ある．その中では，[15] が最も簡単 (自己宣伝)．

定理 2.15 (Bott 周期性). 任意の C^* 環 A に対して自然な同型

$$\beta : K_0(A) \longrightarrow K_1(SA)$$

が存在する．

β の構成は簡単．$P \in M_n(A)$ 射影子に対して

$$f(t) = e^{2\pi i t} P + (I - P)$$

を考えれば

$$[P] \longmapsto [f]$$

が求める β を導く．

(注 2.16) 周期性と呼ばれる理由．
先の α と組み合わせると，$K_0(A) \cong K_1(SA) \cong K_0(S^2A)$．

さて，$0 \to I \to A \to A/I \to 0$ に対して，$SA/SI = S(A/I)$ に注意すれば，完全列

$$0 \longrightarrow SI \longrightarrow SA \longrightarrow S(A/I) \longrightarrow 0$$

が得られる．定理 2.6 から次の可換な図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\to & K_0(A) & \to & K_0(A/I) & & K_1(I) & \to & K_1(A) & \to \\
 & \beta\downarrow & & \beta\downarrow & & \alpha\downarrow & & \alpha\downarrow & \\
\to & K_1(SA) & \to & K_1(S(A/I)) & \xrightarrow{\delta} & K_0(SI) & \to & K_0(SA) & \to
\end{array}$$

(下の列は完全，α, β は同型)．そこで

$$\delta_0 = \alpha^{-1} \circ \delta \circ \beta : K_0(A/I) \longrightarrow K_1(I)$$

とおく．すると，定理と上の図式から:

定理 2.17(6 項完全列). C^* 環の完全列 $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ に対して, 完全列

$$\begin{array}{ccccc} K_0(I) & \longrightarrow & K_0(A) & \longrightarrow & K_0(A/I) \\ \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(A/I) & \longleftarrow & K_1(A) & \longleftarrow & K_1(I) \end{array}$$

が得られ, 完全列の間の $*$ 準同型に関して自然.

Bott 周期性の証明は易しくないが, δ_0 の記述は簡単に出来る.

δ_0 の記述. $p \in M_n((A/I)^\sim)$ 射影子に対して, p を自己共役元 $f \in M_n(A^\sim)$ に持ち上げる (これは何時でも可. 代数的関係 $p^2 = p$ は必らずしも持ち上がらない). f: 自己共役だから $e^{2\pi i f}$ はユニタリー $\in U_n(A^\sim)$.

$$\begin{aligned} \pi(e^{2\pi i f}) = e^{2\pi i p} &= I_n + (2\pi i p) + \frac{(2\pi i p)^2}{2!} + \cdots \\ &= I_n - p + (\ 1\ + (2\pi i) + \frac{(2\pi i)^2}{2!} + \cdots)p \\ &= I_n - p + e^{2\pi i} p = I_n \end{aligned}$$

したがって $e^{2\pi i p}$ は $U_n(I^\sim)$ に属する.

$$\delta_0([p]) = [e^{2\pi i p}] \in K_1(I^\sim) = K_1(I).$$

この記述から δ_0 は exponential map と呼ばれる (一方 δ_1 は index map). (index も exponential も同じ "指数", どうやって区別 ?)

2.3 K-群の基本性質

C^* 環の K-群に関する性質をまとめておく.

(1) ホモトピー不変性 (命題 1.17+同型 $K_1(A) \cong K_0(SA)$).

(2) Bott 周期性.

(3) 6 項完全列.

以下はまだ説明していない分.

(4) 連続性.

A_n: C^* 環. $A_n \subset A_{n+1} \subset A_{n+2} \subset \cdots \subset \bigcup_n A_n$

$\bigcup_n A_n$ は自然に C^* ノルムを持つ. そのノルムに関する完備化を $\varinjlim A_n$ で表わし, (A_n) の**帰納的極限** (inductive limit) と言う. この時, $\varinjlim K_*(A_n) \to K_*(\varinjlim A_n)$ が存在.

定理 3.1.　写像 $\varinjlim K_*(A_n) \to K_*(\varinjlim A_n)$ は同型.

(略証)　この写像はサスペンションをとることと可換. よって K_0 について示せば良い.

全射. $p \in \varinjlim A_n$ 射影子とすると, 適当な A_n で自己共役な元 q' が存在して $\|p-q'\| < \frac{1}{2}$, $\|q'-(q')\|^2 < \frac{1}{4}$. A_n の中で q' を少し変形することにより $q \in A_n$ 射影子で $\|q'-q\| < \frac{1}{2}$ なるものがとれる.

すると $\|p-q\| < 1$. このことから p と q は $A = \varinjlim A_n$ で同値.

単射. $p, q \in A_k$ 射影子が $A = \varinjlim A_n$ で同値だったとする. $u \in \varinjlim A_n$ が存在し $p = u^*u, q = uu^*$. この u を $\bigcup_n A_n$ の元で近似して適当な $A_m, m > k$ で部分等長作用素 u' が存在し,

$$\|p - u'^*u'\| < 1, \quad \|q - u'u'^*\| < 1.$$

このことから, $p \sim q$ (A_m で同値).

(5) $\varinjlim M_n(A) = \mathcal{K} \otimes A$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$: 可分, ∞ 次元)

$e \in \mathcal{K}$ を階数 1 の射影子とし, 写像

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \otimes \mathcal{K} \\ a & \longmapsto & a \otimes e \end{array} \tag{3.2}$$

を考える.

定理 3.3 (安定性).　$*$ 準同型 (3.2) は K-群の同型を導く.

(略証)　定理 3.1 により, $K_*(A) \to K_*(M_n(A))$ が同型であることを示せば良いが, これは直接的 (straightforward).

K-群の計算においては, 6 項完全列が基本. 何か計算したい C^* 環 A があった時, A を含む完全列を構成して, 6 項完全列を用いて A の K-群を計算する. 良い例として M. Pimsner, D. Voiculescu による次の結果がある.

(6) $(A,\alpha,\mathbb{Z})$ を C^* 力学系とする. このとき,

定理 3.4. 次の 6 項列は完全.

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{1-\alpha_*^{-1}} & K_0(A) & \longrightarrow & K_0(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) & \longleftarrow & K_1(A) & \underset{1-\alpha_*^{-1}}{\longleftarrow} & K_1(A) \end{array}$$

(7)

懸垂の定義を思い出すと $SA = A \otimes C_0(\mathbb{R})$ であり, フーリエ変換を通して $C_0(\mathbb{R}) \cong C^*(\mathbb{R})$. したがって定理 2.13, 2.15 は,

$$K_i(A) \cong K_{1-i}(A \otimes C^*(\mathbb{R})) \quad (i = 0, 1)$$

を主張していることになる. $A \otimes C^*(\mathbb{R})$ はリー群 $\mathbb{R}$ が A に自明に作用している場合の接合積である.

定理 3.5 (Connes). $(A,\alpha,\mathbb{R})$ を C^* 力学系とする. この時, 自然な同型

$$\phi_\alpha^i : K_i(A) \longrightarrow K_{1-i}(A \rtimes_\alpha \mathbb{R}) \quad (i = 0, 1)$$

が存在する.

(注 3.6) α が自明である時 ϕ_α^0 は Bott 周期性である.

(注 3.7) Connes による証明 [7] は先ず ϕ_α^0 を構成し, ϕ_α^1 を構成する為に Bott 周期性を用いている. 一方 [15] で与えられた証明では Bott 周期性を仮定しないで (正確には, 写像 β は用いるがそれが同型であることは仮定しないで) 定理 3.5 を示した.

(例 3.8) $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ 単位開円盤. $\partial\overline{\mathbb{D}} = S^1$,

$$0 \to C_0(\mathbb{D}) \to C(\overline{\mathbb{D}}) \xrightarrow{\pi} C(S^1) \to 0$$

を考える．

$$u(z) = \begin{pmatrix} z & -\sqrt{1-|z|^2} \\ \sqrt{1-|z|^2} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

は $M_2((C(\overline{\mathbb{D}}))$ のユニタリー．あきらかに

$$\pi(u) = \begin{pmatrix} z|\partial\overline{\mathbb{D}} & 0 \\ 0 & \bar{z}|\partial\overline{\mathbb{D}} \end{pmatrix}$$

$$u\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}u^* = \begin{pmatrix} |z|^2 & z\sqrt{1-|z|^2} \\ \bar{z}\sqrt{1-|z|^2} & 1-|z|^2 \end{pmatrix} = p.$$

したがって $\delta_1 : K_1(C(S^1)) \to K_0(C_0(\mathbb{D}))$ は同型であり，$K_0(C_0(\mathbb{D}))$ は $[p]-[I_1]$ で生成される．

$\mathbb{D}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と写像 $z \mapsto \dfrac{z}{\sqrt{1-|z|^2}}$ で同一視すれば $K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ は

$$\left[\frac{1}{1+|z|^2}\begin{pmatrix} |z|^2 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

で生成されることが分かる．射影子 $\dfrac{1}{1+|z|^2}\begin{pmatrix} |z|^2 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^2$ の Bott 射影子と言う．

もう 1 つだけ例を紹介してこの節を終えることにしよう．

(例 3.9, テープリッツ作用素)　フーリエ解析で学んだように，$L^2(S^1)$ の ONB として $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が考えられる．閉部分空間 H^2 (Hardy 空間) は $\{z^n\}_{n\geq 0}$ で生成される．$L^2(S^1)$ の H^2 への正射影を p とする．$f \in C(S^1)$ を各点毎に掛ける操作で得られる $L^2(S^1)$ の有界作用素を M_f とする．$T_f \in B(H^2)$ が $T_f = PM_f$ として定義される．T_f を f を**表象** (symbol) とする **Toeplitz 作用素** (Toeplitz operator) と言う．$B(H^2)$ で $\{\, T_f\ ;\ f \in C(S^1)\,\}$ で生成される C^* 環を $\mathcal{T}$ で表わしておく．完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H^2) \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} C(S^1) \longrightarrow 0$$

が存在する $(\sigma(T_f) = f)$.

Atkinson の定理から T_f がフレドホルム作用素であることと, f が可逆であることが同値である. この完全列に対して指数写像

$$\delta_1 : K_1(C(S^1)) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H^2)) \cong \mathbb{Z}$$

を考えると, T_f がフレドホルムである時

$$\delta_1([f]) = \mathrm{index}\, T_f.$$

Boutet de Monvel による指数公式は, index T_f を f の言葉で表わしている.

定理 3.10. $\mathrm{index}\, T_f = -w(f)$ (回転数).

この右辺は巡回コホモロジーと関係がある.

2.4 K-理論の応用

C^* 環の理論の中で K-群が重要な働きをした例をあげて, この章を終えることにしよう.

AF-環の分類

有限次元 C^* 環は有限個の行列環の直和と表わされる. 有限次元 C^* 環と $*$ 準同型の列

$$A_1 \xrightarrow{\phi_1} A_2 \xrightarrow{\phi_2} A_3 \longrightarrow \cdots$$

を考える. 簡単の為, 各 ϕ_j は単射であると仮定しよう. この時, 帰納的極限 C^* 環 $\varinjlim A_n$ が得られる.

逆に C^* 環 A に対して 有限次元 C^* 部分環の増大列 $\{A_n\}$ が存在し, $A = \varinjlim A_n$ と書ける時, A を **AF-環** (AF-algebra) と言う.

例としては Cantor 集合上の連続関数環, あるいは

$$M_2 \hookrightarrow M_4 \hookrightarrow M_8 \hookrightarrow \cdots$$

で, $M_{2^n} \hookrightarrow M_{2^{n+1}}$ を $a \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ で定義して得られる $\varinjlim M_{2^n}$ が典型的な例である. 記号として $\varinjlim M_{2^n}$ を M_{2^∞} と記す.

K-群の性質から $K_*(A) = \varinjlim K_*(A_n)$. よって AF-環に対しては常に $K_1(A) = \{0\}$. では $K_0(A)$ はどんな性質を持つであろうか? 各 M_{2^n} に対して $K_0(M_{2^n}) \cong \mathbb{Z}$ であり, 生成元は階数 1 の射影子で与えられる. この時, $K_0(M_{2^n}) \to K_0(M_{2^{n+1}})$ は写像のし方から $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ は 2 倍写像 $n \to 2n$ であることが分かる. したがって, $K_0(M_{2^\infty})$ は帰納系

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

の帰納極限だと言うことになる. よって $K_0(M_{2^\infty})$ は 2 進整数全体と同一視される. 特に $K_0(M_{2^\infty})$ は群 $\mathbb{R}$ の部分群として半順序群の構造が入る.

半順序群 $(G, \leq)$ とはアーベル群 G とその上の半順序 $\leq$ で $G^+ = \{x \in G : 0 \leq x\}$ とおく時, $G = G^+ - G^+$, かつ $x \leq y$ ならば任意の z に対して $x + z \leq y + z$ となるもののことである.

アーベル群 G の部分集合 N で $N + N \subseteq N, G = N - N, N \cap (-N) = \{0\}$ となるものを**錐** (cone) と言う. 半順序群 $(G, \leq)$ に対して G^+ は錐になる.

A を 1 を持つ C^* 環として $K_0(A)^+$ で $M_\infty(A)$ の射影子の安定同値類とする. $K_0(A)$ は $K_0(A)^+$ の生成する Grothendieck 群である.

定理 4.1. A が 1 を持つ AF-環である時, $K_0(A)^+$ は $K_0(A)$ の錐になる.

半順序群 G_1, G_2 に対して群の同型写像 $\varphi : G_1 \to G_2$ で $\varphi({G_1}^+) = {G_2}^+$ となるものが存在する時, φ を**順序同型**と言う.

定理 4.2 (G.A. Elliott). A, B を 1 を持つ AF-環とする. $\tau : K_0(A) \to K_0(B)$ を順序同型とする. この時 C^* 環の同型 $\varphi : A \to B$ が存在して $\varphi_* = \tau$.

AF-環の分類それ自体は O.Bratteli が学位論文において, 現在 **Bratteli 図形** (Bratteli diagram) と呼ばれるグラフの分類の問題として調べた. 例えば, M_{2^∞} は次のグラフに対応する AF-環である:

$$2 = 4 = 8 = \cdots .$$

ちなみに $2 - 4 - 8 - 16 - \cdots$ に対応する AF-環は $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$: 可分無限次元ヒルベルト空間である.

Kadison 予想： R. Kadison は $C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_2)$ が 0 と 1 以外に射影子を持たないという予想を立てた．Pimsner-Voiculescu は K-群を用いてこの予想を肯定的に解決した．(一旦, 証明が与えられれば, 別証明も与えられ, 現在は K-群を使わない証明も存在．)

彼らは一般に C^* 力学系 $(A, \alpha, \mathbb{F}_n)$ に対して $K_*(A \rtimes_{\mathrm{red}} \mathbb{F}_n)$ を計算する完全列を構成し [38], $K_0(C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_n)) \cong \mathbb{Z}$ となることを得た．τ を $C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_n)$ 上の一意的に存在する $\tau(1) = 1$ となるトレースとする．τ が $K_0(C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_n))$ 上に導く写像を τ_* とすると, $K_0(C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_n)) \cong \mathbb{Z}$ であり, 生成元が 1 の類であることから

$$\tau_*(K_0(C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_n))) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}.$$

この事実と τ が忠実であることから, 0, 1 以外の射影子は存在しない事が分かる．

Kadison 予想は, 今紹介したように肯定的に解決されたが, 一般化された Kadison 予想は未解決である．Γ を有限位数の元を持たない (torsion-free) 離散群とする．

一般 Kadison 予想： $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ は 0, 1 以外に射影子を持たない．

第3章　KK-理論

3.1　KK-群

KK-理論は C^* 環の対 (A,B) にアーベル群 $KK(A,B)$ を対応させるもので A に関して反変, B に関して共変であり, 特に重要な性質の一つは: アーベル群の準同型

$$K_i(A) \otimes KK(A,B) \to K_i(B) \quad (i=0,1)$$

が存在する, ことである.

$x \in K_0(A)$ は適当な $p,q \in M_\infty(A^\sim)$ で $p-q \in M_\infty(A)$ となるもので

$$x = [p]-[q]$$

と表わされる. $M_\infty(A^\sim) \subset \mathcal{K} \otimes A^\sim$ であり, $\mathcal{K} \otimes A$ は $\mathcal{K} \otimes A^\sim$ の両側イデアルである. この時, $\phi_+, \phi_- : \mathbb{C} \to \mathcal{K} \otimes A^\sim$ を $\phi_+(1)=p$, $\phi_-(1)=q$ で定義すると, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$\phi_+(\lambda) - \phi_-(\lambda) \in \mathcal{K} \otimes A.$$

そこで:

定義 1.1. C^* 環 A から B への**擬準同型** (quasi homomorphism) とは
(1) C^* 環 E とその両側イデアル J 及び $*$ 準同型 $\mu : J \to \mathcal{K} \otimes B$, と
(2) $*$ 準同型 $\phi_\pm : A \to E$ で

$$\phi_+(a) - \phi_-(a) \in J, \quad a \in A,$$

となるもののことである.

記号として, $\Phi = (\phi_+, \phi_-)$, $A \xrightarrow{\Phi} E \rhd J \xrightarrow{\mu} \mathcal{K} \otimes B$ etc. で表わす.

(例 1.2)　$\phi : A \to B$ を (通常の)$*$ 準同型とする. この時 $E = J = \mathcal{K} \otimes B$, $\mu = \mathrm{id}$, $\phi_+ = e \circ \phi$, $\phi_- = 0$ とおけば (ϕ_+, ϕ_-) は擬準同型. 此処で $e : B \to \mathcal{K} \otimes B$ は第 2 章 (3.2) の写像である.

擬準同型を食材として $KK(A,B)$ を調理することになる．先ずこの様な対象が如何にして K-群の間の写像を導くであろうかみてみよう．

A, E に 1 を付け加え自然に (ϕ_+, ϕ_-) を拡張し，1 を保つようにする．(拡張も同じ記号で表わす．)

$$(\phi_+, \phi_-) : A^{\sim} \longrightarrow E^{\sim} \triangleright J \xrightarrow{\mu} \mathcal{K} \otimes B.$$

記号 $U_n(J)$ で $\ker(U_n(J^{\sim}) \to U_n(\mathbb{C}))$ を表わすことにする．$u \in U_n(A^{\sim})$ に対して $\phi_\pm(u) \in U_n(E^{\sim})$．そこで $\phi_+(u)\phi_-(u)^{-1} \in U_n(E^{\sim})$ を考えると，$\phi_+(a) = \phi_-(a)$ が $E^{\sim}/J$ において成立することから，

$$\phi_+(u)\phi_-(u)^{-1} \in U_n(J)$$

(*i.e.* $\phi_+(u)\phi_-(u)^{-1}$ が J を法としてスカラー行列)．よって

$$\phi_+(\cdot)\phi_-(\cdot)^{-1} : U_\infty(A^{\sim}) \to U_\infty(J).$$

ホモトピーに落として，μ と合成することにより

$$K_1(A) \ \to \ K_1(\mathcal{K} \otimes B) \cong K_1(B)$$

が得られる．

さて $x \in K_1(A)$ は $u = 1 + a,\ a \in M_n(A)$ の形のユニタリーで代表される．この時

$$\mu(\phi_+(u)\phi_-(u)^{-1}) = 1 - D_\Phi(a^*) - Q_\Phi(a, a^*)$$

と書ける．但し

$$D_\Phi : A \to \mathcal{K} \otimes B, \quad D_\Phi(a) = \mu(\ \phi_+(a) - \phi_-(a)\ ),$$
$$Q_\Phi : A \times A \to \mathcal{K} \otimes B, \quad Q_\Phi(a,b) = \mu(\ \phi_+(a)(\phi_+(b) - \phi_-(b)\ )\ ).$$

このことは KK-群の最も重要な性質を考える上で，この 2 つの写像 D_Φ, Q_Φ が「核心」だと言っている．このことから次の定義が考えられる．

定義 1.3. 擬準同型 $\Phi = (\phi_+, \phi_-), \Psi = (\psi_+, \psi_-)$ がホモトピックであるとは擬準同型の族 $(p_t)_{t\in[0,1]}$ が存在し；

(1) $p_0 = \Phi, p_1 = \Psi$,

(2) $a, b, \in A$ を固定した時, 写像 $t \mapsto D_{p_t}(a), t \mapsto Q_{p_t}(a, b)$ はノルム連続,
となることとする.
ホモトピー類を $[\phi_+, \phi_-]$ で表わす.

(注 1.4) 定義 1.3 において擬準同型の定義に現われる $E \triangleright J, \mu$ は当然 t と共に変化して良い. 相互関係は定義 1.3 の (2) を通してしかない.

(注 1.5) (自明な例) 擬準同型 Φ, Ψ に対して $D_\Phi = D_\Psi, Q_\Phi = Q_\Psi$ ならば Φ と Ψ はホモトピックである.

定義 1.6. $KK(A, B) = \{A$ から B への擬準同型$\}/$ ホモトピー を **Kasparov KK-群** (Kasparov KK-group) と呼ぶ.

既に「群」と呼んだように, $KK(A, B)$ にアーベル群の構造を入れる. 先ず, 和を定義する.

$$\Phi = (\phi_+, \phi_-) : \ A \to E_1 \triangleright J_1 \xrightarrow{\mu_1} \mathcal{K} \otimes B,$$
$$\Psi = (\psi_+, \psi_-) : \ A \to E_2 \triangleright J_2 \xrightarrow{\mu_2} \mathcal{K} \otimes B,$$

とする. 直和をとれば

$$\Phi \oplus \Psi = (\phi_+ \oplus \psi_+, \phi_- \oplus \psi_-) : A \to E_1 \oplus E_2 \triangleright J_1 \oplus J_2 \xrightarrow{\mu_1 \oplus \mu_2} \mathcal{K} \otimes B \oplus \mathcal{K} \otimes B.$$

ここで

$$\mathcal{K} \otimes B \oplus \mathcal{K} \otimes B \subset M_2(\mathcal{K} \otimes B) \cong \mathcal{K} \otimes B$$

を利用すれば

$$\Phi \oplus \Psi : A \longrightarrow E \triangleright J \xrightarrow{\mu} \mathcal{K} \otimes B, \quad E = E_1 \oplus E_2, \quad J = J_1 \oplus J_2$$

が得られた.

定義 1.7. $[\phi_+, \phi_-] + [\psi_+, \psi_-] = [\phi_+ \oplus \psi_+, \phi_- \oplus \psi_-].$

命題 1.8. 加法の定義は，ホモトピー類によってのみ定まり，この和に関して $KK(A,B)$ はアーベル群となる．

(略証) 和の定義が「well defined」であることは，ほぼ明らか．アーベル群になることは，$(\phi_+ \oplus \psi_+, \phi_- \oplus \psi_-)$, $(\psi_+ \oplus \phi_+, \psi_- \oplus \phi_-)$ に対する基本データが一致することより

$$[\phi_+ \oplus \psi_+, \phi_- \oplus \psi_-] = [\psi_+ \oplus \phi_+, \psi_- \oplus \phi_-].$$

単位元 0 は 0-準同型 $A \to B$ の定める類 $[0,0]$ を考えれば，任意の $[\phi_+, \phi_-]$ に対して $[\phi_+, \phi_-] + [0,0] = [\phi_+, \phi_-]$．これまでの議論から $KK(A,B)$ は可換な半群になることが分かる．

群になることを示すには，各「ϕ_+, ϕ_-」に対して $[\phi_+, \phi_-] + [\psi_+, \psi_-] = 0$ となる $[\psi_+, \psi_-]$ の存在を示す必要がある．先に見た (ϕ_+, ϕ_-) が導く $K_1(A)$ から $K_1(B)$ への写像の記述から推測されるように，(ϕ_+, ϕ_-) は $\phi_+ - \phi_-$ と考えると分かり易い．そうすれば $[\phi_+, \phi_-]$ の逆は $[\phi_-, \phi_+]$ であろうと予想される．実際にそうなることを見よう．

$$\Phi = (\phi_+, \phi_-) : A \to E \triangleright J \to \mathcal{K} \otimes B$$

とする．又，

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \phi_+ & 0 \\ 0 & \phi_- \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix} \phi_- & 0 \\ 0 & \phi_+ \end{pmatrix}$$

とおく．$E \oplus E \subset M_2(E)$ により，$\psi_\pm$ を $A \to M_2(E)$ とみなす．$s \in [0,1]$ に対して

$$w(s) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2}s & \sin\frac{\pi}{2}s \\ -\sin\frac{\pi}{2}s & \cos\frac{\pi}{2}s \end{pmatrix}$$

とおき，${\psi_-}^{(s)} = w(s)\phi_- w(s)^*$ を考える．全ての $s \in [0,1]$ に対して ${\psi_+}^{(s)} = \psi_+$ とおいて ${\psi_+}^{(s)} - {\psi_-}^{(s)}$ を計算すると，任意の $a \in A$ に対して

$$ {\psi_+}^{(s)}(a) - {\psi_-}^{(s)}(a) \in M_2(J)$$

が成立する．

$$({\psi_+}^{(0)}, {\psi_-}^{(0)}) = \left(\begin{pmatrix} \phi_+ & 0 \\ 0 & \phi_- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_- & 0 \\ 0 & \phi_+ \end{pmatrix} \right),$$

$$({\psi_+}^{(1)}, {\psi_-}^{(1)}) = \left(\begin{pmatrix} \phi_+ & 0 \\ 0 & \phi_- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_+ & 0 \\ 0 & \phi_- \end{pmatrix} \right).$$

明らかに $(\psi_+{}^{(s)}, \psi_-{}^{(s)})$ は $(\phi_+ \oplus \phi_-, \phi_- \oplus \phi_+)$ と $(\phi_+ \oplus \phi_-, \phi_+ \oplus \phi_-)$ の間のホモトピー. $(\phi_+ \oplus \phi_-, \phi_+ \oplus \phi_-)$ の基本データ D, Q は共に 0. よって $(\phi_+ \oplus \phi_-, \phi_+ \oplus \phi_-)$ は 0 を表わす.

以上の事実により $KK(A,B)$ はアーベル群である.

(注 1.9)　上記略証中用いた事実「任意の準同型 ϕ に対して, $[\phi, \phi] = 0$ 」は実際に計算する上で非常に有効である.

$K_1(A) \otimes KK(A,B) \to K_1(B)$ が群の準同型であることは, K_1, KK における和が共に直和で与えられていることから示される.

$KK(A,B)$ の基本的性質をリスト・アップしておこう.

(1) $KK(A,B)$ は A に関して反変, *i.e.* $*$準同型　$f : D \to A$ が与えられた時 $f^* : KK(A,B) \to KK(D,B)$ が

$$(\phi_+, \phi_-) \mapsto (\phi_+ \circ f, \phi_- \circ f)$$

で定義される.

(2) B に関しては共変, *i.e.* $*$準同型 $f : B \to D$ に対して

$$f_* : KK(A,B) \to KK(A,D)$$

が

$$[A \to E \triangleright J \to \mathcal{K} \otimes B] \to [A \to E \triangleright J \to \mathcal{K} \otimes B \to \mathcal{K} \otimes D]$$

で与えられる.

(3) $KK(A,B)$ はホモトピー不変である.
これは $KK(A,B)$ が擬準同型のホモトピー類として定義されることから示される.

(4) 既に述べたことであるが, アーベル群の間の写像

$$K_1(A) \otimes KK(A,B) \longrightarrow K_1(B)$$

が存在する. 同様な写像 $K_0(A) \otimes KK(A,B) \longrightarrow K_0(B)$ が以下述べる様にして構成される.

任意の C^* 環 D に対して

$$\tau_D : KK(A,B) \longrightarrow KK(A \otimes_{\min} D, B \otimes_{\min} D)$$

が $\Phi : A \to E \triangleright J \to \mathcal{K} \otimes B$ に対して

$$\Phi \otimes \mathrm{id} : A \otimes_{\min} D \longrightarrow E \otimes_{\min} D \triangleright J \otimes_{\min} D \longrightarrow \mathcal{K} \otimes B \otimes_{\min} D$$

を対応させることにより構成される. $D = C_0(\mathbb{R})$ に対して適用すると

$$KK(A,B) \longrightarrow KK(SA,SB)$$

が得られる. これを用いて

$$K_0(A) \otimes KK(A,B) \longrightarrow K_1(SA) \otimes KK(SA,SB) \longrightarrow K_1(SB) \cong K_0(B).$$

(注 1.10)　(4) で使われた写像 $KK(A,B) \to KK(SA,SB)$ は同型である. ([27] 参照).

(5) この節の導入部での考察から予想される様に

$$KK(\mathbb{C},A) \cong K_0(A).$$

写像 $K_0(A) \otimes KK(A,B) \to K_0(B)$ を直接構成する為には $KK(A,B)$ をもう少し詳しくみる必要がある.

任意の擬準同型 $A \xrightarrow{\Phi} E \triangleright J \xrightarrow{\mu} \mathcal{K} \otimes B$ に対して擬準同型 $A \xrightarrow{\Phi'} E' \triangleright J' \xrightarrow{\mu'} \mathcal{K} \otimes B$ で次の条件を満たすものが唯一つ存在する.

(条件 1.11)

(1) $D_\Phi = D_{\Phi'}$,

(2) E' は $\phi'_+(A), \phi'_-(A)$ により生成され, J' は E' の両側イデアルとして $\phi'_+(A) - \phi'_-(A)$, $a \in A$ で生成され, J' は E' の本質的両側イデアル,

(3) μ' は単射.

この条件を満足する擬準同型の特徴は次の命題にまとめられる.

命題 1.12. Φ, Ψ は (条件 1.11) の (2) を満足すると仮定する．この時 Φ と Ψ がホモトピックである必要十分条件は (条件 1.11) の (2) を満たす擬準同型 $p : A \to E \triangleright J \subset C[0,1] \otimes \mathcal{K} \otimes B$ が存在し

$$q_0 \circ p = \Phi, \quad q_1 \circ p = \Psi,$$

$q_t : C[0,1] \otimes \mathcal{K} \otimes B \to \mathcal{K} \otimes B$ は t で値をとる写像.

上の命題を用い, 各 $x \in KK(A,B)$ を (1.11) の (2) を満たす (ϕ_+, ϕ_-) で代表させることにすれば

$$(1.13) \qquad K_0(A) \times KK(A,B) \longrightarrow K_0(B)$$

が直接構成される．即ち, $[p] \in K_0(A)$, $p \in M_n(A)$ 射影子に対して射影子 $\phi_+(p) - \phi_-(p) \in M_n(E)$ を考えれば

$$[\phi_+(p)] - [\phi_-(p)] \in K_0(J).$$

自然な写像 $K_0(J) \to K_0(\mathcal{K} \otimes B) \cong K_0(B)$ と合成すれば

$$[\phi_+(p)] - [\phi_-(p)] \in K_0(B).$$

この対応は x を代表する (1.11) の (2) を満たす擬準同型のとり方によらず定まる．

先に見たように, $KK(\mathbb{C}, A) \cong K_0(A)$. したがって (1.13) は

$$KK(\mathbb{C}, A) \times KK(A,B) \longrightarrow KK(\mathbb{C}, B)$$

という写像だとみなせる．これを一般化したものが Kasparov 積 (Kasparov product) である．以下, C^* 環は技術的理由で可分だとする．

定理 1.14. (1) 双一次対合 (bi-additive pairing) (**Kasparov 積**)

$$KK(A,D) \times KK(D,B) \to KK(A,B)$$

が定義される．(x,y) の $KK(A,B)$ における像を $x \otimes_D y$ と記す．

(2) (1) のペアリングは B について共変．A について反変．さらに, もし $f : D \to E$ が $*$ 準同型ならば $x \in KK(A,D), y \in KK(E,B)$ に対して $f_*(x) \otimes_E y = x \otimes_D f^*(y)$.

(3) カスパロフ積は結合律を満たす: $x \in KK(A,D), y \in KK(D,E), z \in KK(E,B)$ に対して

$$(x \otimes_D y) \otimes_E z = x \otimes_D (y \otimes_E z).$$

(4) $x \in KK(A,B)$ に対して $x \otimes_B 1_B = 1_A \otimes_A x = x$, 但し $1_A \in KK(A,A)$ (resp. $1_B \in KK(B,B)$) は恒等写像の定めるクラス.

(5) $x \in KK(A,B), y \in KK(B,C)$ とする. この時, 任意の E に対して

$$\tau_E(x \otimes_B y) = \tau_E(x) \otimes_{B \otimes_{\min} E} \tau_E(y) \in KK(A \otimes_{\min} E, C \otimes_{\min} E).$$

構成については次節で解説する.

(4) から次のより一般的なカスパロフ積が定義される. A_1, A_2, B_1, B_2, D を C^* 環とする. 写像

$$KK(A_1, B_1 \otimes_{\min} D) \times KK(D \otimes_{\min} A_2, B_2) \overset{\tau_{A_2} \times \tau_{B_1}}{\longrightarrow}$$
$$KK(A_1 \otimes_{\min} A_2, B_1 \otimes_{\min} D \otimes_{\min} A_2) \times KK(B_1 \otimes_{\min} D \otimes_{\min} A_2, B_1 \otimes_{\min} B_2)$$
$$\longrightarrow KK(A_1 \otimes_{\min} A_2, B_1 \otimes_{\min} B_2)$$

の合成により

$$KK(A_1, B_1 \otimes_{\min} D) \times KK(D \otimes_{\min} A_2, B_2) \to KK(A_1 \otimes_{\min} A_2, B_1 \otimes_{\min} B_2)$$

が得られる. (x,y) の $KK(A_1 \otimes_{\min} A_2, B_1 \otimes_{\min} B_2)$ における像も $x \otimes_D y$ と記す.

定理 1.15 (周期性). D, E に対して $\alpha \in KK(D,E), \beta \in KK(E,D)$ が存在し, $\alpha \otimes_E \beta = 1_D, \beta \otimes_D \alpha = 1_E$ が成立したとする. この時, 任意の A, B に対して

$$\cdot \otimes_D \alpha : KK(A, B \otimes_{\min} D) \to KK(A, B \otimes_{\min} E),$$
$$\beta \otimes_E \cdot : KK(D \otimes_{\min} A, B) \to KK(E \otimes_{\min} A, B)$$

は同型写像である (逆写像はそれぞれ $\cdot \otimes_E \beta, \alpha \otimes_D \cdot$)

上記定理の仮定を満たす α, β は可逆であるという. $KK(A,B)$ が可逆元を持つ時, A, B は **KK-同値** (KK-equivalent) と言う.

(例 1.16) $D = C_0(\mathbb{R}^2), E = \mathbb{C}$ は KK-同値.

この例を周期性定理に適用すると:

定理 1.17(Bott 周期性).

$$KK(A, C_0(\mathbb{R}^2) \otimes B) \cong KK(A, B),$$
$$KK(C_0(\mathbb{R}^2) \otimes A, B) \cong KK(A, B).$$

定理 1.18 (双対性). $\rho \in KK(D \otimes_{\min} E, \mathbb{C})$, $\sigma \in KK(\mathbb{C}, E \otimes_{\min} D)$ が存在して $\sigma \otimes_D \rho = 1_E, \sigma \otimes_E \rho = 1_D$ が成立したと仮定する．この時任意の A, B に対して写像

$$\sigma \otimes_D \cdot \quad : \quad KK(D \otimes_{\min} A, B) \to KK(A, E \otimes_{\min} B),$$
$$\sigma \otimes_E \cdot \quad : \quad KK(A \otimes_{\min} E, B) \to KK(A, B \otimes_{\min} D)$$

は同型である．逆写像はそれぞれ $\cdot \otimes_E \rho, \cdot \otimes_D \rho$ により与えられる．

定理 1.18 の仮定をみたす D, E はお互いに K-**双対** (K-dual) であると言う．今, $C_0(\mathbb{R}^2) \cong C_0(\mathbb{R}) \otimes C_0(\mathbb{R})$ と分解して $D = C_0(\mathbb{R}), E = C_0(\mathbb{R})$ とすれば仮定をみたす．つまり $C_0(\mathbb{R})$ は自分自身の K-双対である．すると:

定理 1.19. 自然数 $m, n \geq 0$ に対して,

$$m + n: \text{ 偶数 } \Rightarrow KK(C_0(\mathbb{R}^m) \otimes A, C_0(\mathbb{R}^n) \otimes B) \cong KK(A, B),$$
$$m + n: \text{ 奇数 } \Rightarrow KK(C_0(\mathbb{R}^m) \otimes A, C_0(\mathbb{R}^n) \otimes B) \cong$$
$$KK(C_0(\mathbb{R}) \otimes A, B) \cong KK(A, C_0(\mathbb{R}) \otimes B).$$

定義 1.20. $KK(C_0(\mathbb{R}) \otimes A, B) \cong KK(A, C_0(\mathbb{R}) \otimes B)$ を $KK_1(A, B)$ と記す．

3.2 カスパロフ積の構成

先ず, クラス $x \in KK(A, B), y \in KK(B, C)$ を条件 1.11 の (2) を満たすもので代表しておく．

$$A \overset{(\phi_+, \phi_-)}{\longrightarrow} E_1 \triangleright J_1 \subset \mathcal{K} \otimes B, \quad B \overset{(\psi_+, \psi_-)}{\longrightarrow} E_2 \triangleright J_2 \subset \mathcal{K} \otimes C.$$

形式的に (ϕ_+, ϕ_-) を $\phi_+ - \phi_-$ と考えることにすると，今，考えたいことは $(\psi_+ - \psi_-) \cdot (\phi_+ - \phi_-)$．以下，形式的に計算すると

$$(\psi_+ - \psi_-) \cdot (\phi_+ - \phi_-) = (\psi_+ - \psi_-)\phi_+ - (\psi_+ - \psi_-)\phi_-$$
$$= \left(\begin{pmatrix} \psi_+\phi_+ & 0 \\ 0 & \psi_-\phi_- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_-\phi_+ & 0 \\ 0 & \psi_+\phi_- \end{pmatrix} \right).$$

この計算は勿論意味をなさない．そもそも写像の合成ができない．そこで以下の方策を考える．自明な操作で

$$\mathcal{K} \otimes B \overset{1\otimes(\psi_+,\psi_-)}{\longrightarrow} \mathcal{K} \otimes E_2 \triangleright \mathcal{K} \otimes J_2 \subset \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \otimes C \cong \mathcal{K} \otimes C$$

を考え，これを J_1 $(\subset \mathcal{K} \otimes B)$ に制限し，擬準同型

$$J_1 \longrightarrow \mathcal{K} \otimes E_2 \triangleright \mathcal{K} \otimes J_2 \subset \mathcal{K} \otimes C$$

が得られる．

キー・ステップとして，この擬準同型に，J_1 から $\mathcal{K} \otimes C$ への擬準同型としてホモトピックな $({\psi_+}^e, {\psi_-}^e)$ で ${\psi_\pm}^e$ は E_1 から $\mathcal{K} \otimes E_2$ を含む，ある C^* 環 D への $*$ 準同型に拡張するものをとる．このことは，(ψ_+, ψ_-) が条件 1.11 の (2) を満たすことから得られる．一旦，$({\psi_+}^e, {\psi_-}^e)$ を構成すれば

$$\left(\begin{pmatrix} {\psi_+}^e\phi_+ & 0 \\ 0 & {\psi_-}^e\phi_- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {\psi_-}^e\phi_+ & 0 \\ 0 & {\psi_+}^e\phi_- \end{pmatrix} \right)$$

は意味を有する．然しながら，これは擬準同型にならない．例えば，$a \in A$ に対して

$${\psi_+}^e(\phi_+(a)) - {\psi_-}^e(\phi_+(a))$$

が適当なイデアルに属する保障はない．したがって，更に少し細工が要る．

$\begin{pmatrix} {\psi_-}^e\phi_+ & 0 \\ 0 & {\psi_+}^e\phi_- \end{pmatrix}$ を $Ad(u) \circ \begin{pmatrix} {\psi_-}^e\phi_+ & 0 \\ 0 & {\psi_+}^e\phi_- \end{pmatrix}$，$u$ はユニタリー，で置き換えて擬準同型になる様にする．この u を構成する段階で「Kasparov の技術的補題」と呼ばれるものが用いられる．

$$({\psi_+}^e, {\psi_-}^e) \;:\; J_1 \longrightarrow E'' \triangleright J'' \subset \mathcal{K} \otimes C$$

とする．$M, N \in M(J'')$ 正値作用素で $u = \begin{pmatrix} \sqrt{M} & \sqrt{N} \\ \sqrt{N} & -\sqrt{M} \end{pmatrix}$ がユニタリーであり

$$\left(\begin{pmatrix} \psi_+{}^e\phi_+ & 0 \\ 0 & \psi_-{}^e\phi_- \end{pmatrix}, Ad(u) \circ \begin{pmatrix} \psi_-{}^e\phi_+ & 0 \\ 0 & \psi_+{}^e\phi_- \end{pmatrix}\right)$$

が擬準同型となる様に M, N を選ぶ．それが可能であることが「Kasparov の技術的補題」で保障される．この補題で最も重要な仮定は，現われる C^* 環は全て可分だということである．構成において点列が必要となり，そこで可分性が必要となる．

こうして $KK(A, C)$ の元が得られるが，これが最初に与えられた $x \in KK(A, B), y \in KK(B, C)$ で定まることは容易に示される．

先に進む前に，簡単な Kasparov 積の計算例を紹介しておこう．$A = \mathbb{C}$, $B = C^*(S) \subset B(l^2(\mathbb{N}))$, S: 片側シフトとする．B は単位元を持つ．そこで $i : A \longrightarrow B$ を $i(1) = 1$ で定義する．

命題 2.1. 準同型 i の類 $[i] \in KK(A, B)$ は可逆である．

$[i]$ の逆を与える $KK(B, A)$ の元を作る必要がある．$C^*(S)$ を含む次の完全列を思い出そう：

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow C^*(S) \longrightarrow C(S^1) \longrightarrow 0.$$

特に $C^*(S)$ は $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$ をイデアルとして含む．そこで $E = C^*(S)$, $J = \mathcal{K}$ として

$\phi_+ : C^*(S) \longrightarrow E$ は恒等写像,

$\phi_- : C^*(S) \longrightarrow E$ を $\phi_-(a) = SaS^*$

で定義すれば，(ϕ_+, ϕ_-) は擬準同型となる．

又，$\phi_+(1) - \phi_-(1) = 1 - SS^* = q$ は $\ell^2(\mathbb{N})$ の中で δ_0 で張られる 1 次元部分空間への射影で，$C^*(S)$ の中で $\mathcal{K}$ を生成することが知られている (これは簡単に分かる)．したがって $\Phi = (\phi_+, \phi_-)$ は条件 1.11 の (2) を満たしている．

さて，此処での主張は

$$[i] \otimes_B [\Phi] = 1_A.$$

カスパロフ積 $[i] \otimes_B [\Phi]$ は $[i]$ が $*$ 準同型の類であることから比較的簡単に計算できる．

Φ を取り換えないでも, i との合成が定義される．したがって

$$[i] \otimes_B [\Phi] = [\phi_+ \circ i, \phi_- \circ i],$$
$$\phi_+ \circ i(1) - \phi_- \circ i(1) = q$$

今, $j : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ を $j(1) = q$ で定義すれば $[j, 0] \in KK(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ は単位元に一致．したがって $[j, 0] = [\phi_+ \circ i, \phi_- \circ i]$ を言えば良い．$-[j, 0] = [0, j]$ であるから結局

$$[\phi_+ \circ i, \phi_- \circ i] + [0, j] = 0$$

を証明すればよい．

$\mathbb{C}$ から E への 2 つの $*$ 準同型 $\phi_- \circ i$ と j を考えると, 値域は直交する．したがって $\phi_- \circ i + j$ は $*$ 準同型であり, 実際

$$\phi_- \circ i + j = \phi_+ \circ i.$$

故に

$$[\phi_+ \circ i, \phi_- \circ i] + [0, j] = [\phi_+ \circ i, \phi_+ \circ i] = 0.$$

したがって $[i] \otimes_B [\Phi] = 1_A$ は示された．

問題は $[\Phi] \otimes_A [i] = 1_B$ の証明である．構成から $[\phi_+, \phi_-] \otimes_A [i] = [\bar{i} \circ \phi_+, \bar{i} \circ \phi_-]$, 但し $\bar{i} : M(\mathbb{C} \otimes \mathcal{K}) = B(\ell^2(\mathbb{N})) \to M(C^*(S) \otimes \mathcal{K})$ は $i \otimes 1 : \mathbb{C} \otimes \mathcal{K} \longrightarrow C^*(S) \otimes \mathcal{K}$ の拡張である．$(i \otimes 1)(a) = 1 \otimes a$, $a \in \mathcal{K}$．したがって $\bar{i}(T) = 1 \otimes T$, $T \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$．$KK(C^*(S), C^*(S))$ の単位元 1_B は $*$ 準同型

$$\begin{array}{rccc} k: & C^*(S) & \longrightarrow & C^*(S) \otimes \mathcal{K} \\ & a & \longmapsto & a \otimes q \end{array}$$

の類として表わされる．したがって $[\bar{i} \circ \phi_+, \bar{i} \circ \phi_-] = [k]$ を示せば良い．$a, a' \in C^*(S)$ に対して

$$(\bar{i} \circ \phi_-)(a)(\ \phi_+(a') \otimes q\ ) = 0.$$

故に

$$[k] = [k] + [\bar{i} \circ \phi_-, \bar{i} \circ \phi_-] = [k + \bar{i} \circ \phi_-, \bar{i} \circ \phi_-].$$

したがって, ホモトピー $(\psi_t), \psi_t : C^*(S) \longrightarrow B(\ell^2(\mathbb{N}) \otimes \ell^2(\mathbb{N}))$ で

(i) $\psi_0 = \bar{i} \circ \phi_+, \quad \psi_1 = k + \bar{i} \circ \phi_-,$

(ii) $\psi_t(a) - \psi_0(a) \in C^*(S) \otimes \mathcal{K},\ a \in C^*(S)$

となるものが構成されれば良い．

$(w_t)_t$ を $U(2)$ 内の連続なパスで $w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となるものとする．$\ell^2(\mathbb{N}) \otimes \ell^2(\mathbb{N})$ 上のユニタリーのパスを次の様につくる．

$\ell^2(\mathbb{N}) \otimes \ell^2(\mathbb{N})$ 内の各 2 次元部分空間

$$\mathbb{C}(\delta_i \otimes \delta_1) \oplus \mathbb{C}(\delta_0 \otimes \delta_{i+1}), \quad i = 1, 2, \cdots$$

内で w_t を用い,

$$(\oplus(\mathbb{C}(\delta_i \otimes \delta_1) \oplus \mathbb{C}(\delta_0 \otimes \delta_{i+1})))^{\perp}$$

上で恒等写像とすることにより $\ell^2(\mathbb{N}) \otimes \ell^2(\mathbb{N})$ 上のユニタリーのパス (v_t) が得られる．各 t に対して

$$\psi_t(S) = v_t(\bar{i} \circ \phi_+)(S)$$

は $C^*(S)$ の普遍性により $*$ 準同型

$$\psi_t : \quad C^*(S) \longrightarrow B(\ell^2(\mathbb{N}) \otimes \ell^2(\mathbb{N}))$$

へ拡張し, 上記条件 (i), (ii) を満たすことが容易に確かめられる．したがって $[\Phi] \otimes_A [i] = 1_B$ が示された．

同様の計算が参考文献 [37], [6] の証明の中で使われている．

さて, 以上説明した擬準同型に基づいた KK-群の構成は, 作用素環論の側からのアプローチには都合が良いが, 幾何の側からのアプローチには少し使いにくいかもしれない．そこで別の角度から KK-群を再構成してみよう．

とは言いながら, 擬準同型に基づいた $KK(A, \mathbb{C})$ を復習してみよう．典型的な A から $\mathbb{C} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$ への擬準同型 $\phi_\pm : A \longrightarrow B(\mathcal{H})$ で $\phi_+(a) - \phi_-(a) \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $a \in A$, となるもので与えられる．

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} \phi_+(a) & 0 \\ 0 & \phi_-(a) \end{pmatrix} \in M_2(B(\mathcal{H})) = B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}),$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$$

とおくと, 条件: $\phi_+(a) - \phi_-(a) \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ は

$$[\phi(a), F] = \phi(a)F - F\phi(a) \in \mathcal{K}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$$

で表わされる.

この様な対象はどんな幾何的セッティングから生じるであろうか？ C^* 環 A のヒルベルト空間 $\mathcal{H}_0$ への表現 ϕ と, $\mathcal{H}_0$ 上のフレドホルム作用素 P が与えられ, 任意の $a \in A$ に対して

$$P\phi(a) - \phi(a)P \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_0)$$

が成立したとする. 例えば, 閉多様体 M 上で位数 0 の楕円型擬微分作用素 P を考える. C^* 環 $C(M)$ は自然に $L^2(M)$ へ作用する. この時, $[P, f] = Pf - fP$ はコンパクト作用素である.

フレドホルム作用素 P の準逆 Q を考えると, P に関する仮定と $\mathcal{K}(\mathcal{H}_0)$ がイデアルであることから

$$Q\phi(a) - \phi(a)Q \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_0), \quad a \in A,$$

となることが言える. P, Q を同時に考察する為に, $\mathcal{H}_0$ のコピー $\mathcal{H}^{\pm}$ を考え, $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ とおく. $\mathcal{H}$ 上の有界作用素

$$F = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ P & 0 \end{pmatrix}$$

は $F^2 - 1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ を満たす. 又, $\phi : A \longrightarrow B(\mathcal{H})$ を

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & \phi(a) \end{pmatrix}$$

で定義しておく (記号は乱用する). ここで一つ言葉を導入しておく.

定義 2.2. $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とする. 自己共役 $\varepsilon \in B(\mathcal{H})$ で $\varepsilon^2 = 1$ となるものが与えられた時, $\mathcal{H}$ は **$\mathbb{Z}_2$-次数付き** ($\mathbb{Z}_2$-graded) であると言う.

$\mathcal{H}$ が $\mathbb{Z}_2$-次数付きだとすると

$$\mathcal{H}^{\pm} = \{\, \xi \in \mathcal{H}\ ;\ \varepsilon(\xi) = \pm\xi \,\} \quad (\text{複号同順})$$

とおけば $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$. 逆に, $\mathcal{H}$ が閉部分空間の直和 $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ ならば, この分解に関して $\varepsilon \in B(\mathcal{H})$ を

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定義すれば, $(\mathcal{H}, E)$ は $\mathbb{Z}_2$-次数付きになる.

$\mathcal{H}$ を $\mathbb{Z}_2$-次数付きだとする. $T\varepsilon = \varepsilon T$ となる $T \in B(\mathcal{H})$ を**偶次数** (even degree), $T\varepsilon = -\varepsilon T$ となる時, **奇次数** (odd degree).

分解 $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ に関して T を行列で表わせば

$$T: \ \text{偶次数} \quad \Longleftrightarrow \quad T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix},$$

$$T: \ \text{奇次数} \quad \Longleftrightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ T_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

以上の言葉を用いて先に観察したことをまとめると:

(1) $\mathcal{H}$ は $\mathbb{Z}_2$-次数付きヒルベルト空間, C^* 環 A の $\mathcal{H}$ 上の偶次数の作用素としての左からの作用,

(2) $F \in B(\mathcal{H})$ は奇次数作用素で

$$[F, a] \in \mathcal{K}(\mathcal{H}), \quad a \in A, \qquad F^2 - 1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

一般に, A の $\mathcal{H}$ への作用は偶次数という以外に条件は付けない. $M(\mathcal{K}(\mathcal{H})) = B(\mathcal{H})$ であることに注意して, この状況を一般化する. その為に, ヒルベルト空間を一般化した概念が必要となる. それが次に紹介するヒルベルト C^* 加群である. B を C^* 環とする.

定義 2.3. 前ヒルベルト B-加群 (pre-Hilbert B-module) とは, 右 B-加群 E, 写像 $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \longrightarrow B$ の対で次の条件を満たすもののことである.

(1) $\langle\ ,\ \rangle$ は第 1 変数に関して共役線形, 第 2 変数に関して線形,

(2) $\langle x, yb \rangle = \langle x, y \rangle b, \quad x, y \in E,\ b \in B,$

(3) $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle,$

(4) $\langle x, x \rangle \geq 0,\ \langle x, x \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$

E の元 x に対して $\|x\| = \|\langle x, x \rangle\|^{\frac{1}{2}}$ とおけば, $(E, \|\cdot\|)$ はノルム空間となる. $\langle\ ,\ \rangle$ はスカラー値ではなく C^* 環に値を持つ内積. したがって $\|\cdot\|$ が三角不等式をみたすことは自明ではない. 然しながら証明の本質は通常の場合と同様である. 特に,

$$\|xb\| \leq \|x\|\,\|b\|, \quad x \in E,\ b \in B,$$

$$\|\langle x, y \rangle\| \leq \|x\|\,\|y\|, \quad x, y \in E.$$

定義 2.4. 前ヒルベルト B-加群 $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ において E が $\|\cdot\|$ に関して完備となる時, **ヒルベルト B-加群** (Hilbert B-module) と呼ぶ.

(例 2.5)　$B = \mathbb{C}$ の時, ヒルベルト $\mathbb{C}$-加群 $\Longleftrightarrow$ ヒルベルト空間.

(例 2.6) 任意の C^* 環 B は右 B-加群である. そこで B-値内積を $\langle a, b\rangle = a^*b$ で定義すればヒルベルト B-加群である.

この例をもう少し一般化して $B^n = B \oplus \cdots \oplus B$ (n 個) を考えると

$$\langle x, y\rangle = \sum x_i^* y_i, \quad x = (x_i),\ y = (y_i)$$

で定義して, ヒルベルト B-加群の構造が入る.

さらに一般化して, $(E_i)_{i\in I}$ をヒルベルト B-加群の可算族とする. 代数的直和 $\oplus E_i$ 上に上と同じ公式で B-値内積を定義すると前ヒルベルト B-加群となる. 完備化をとって $\widehat{\bigoplus_i} E_i$ はヒルベルト B-加群となる. 特に, $E_i = B$ として

$$\widehat{\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}} E_i = \mathcal{H}_B$$

と記す.

(例 2.7)　E をコンパクト空間 X 上のエルミート複素ベクトル束とする. $\Gamma(E)$ で E への連続断面の全体を表わすとする. x でのファイバー E_x の内積を $\langle\ ,\ \rangle_x$ とする. $\Gamma(E)$ は $C(X)$ 上の加群であり, $\Gamma(E)$ 上の $C(X)$-値内積が

$$\langle S, S'\rangle(x) = \langle S(x), S'(x)\rangle_x$$

で定義され, $\Gamma(E)$ はヒルベルト $C(X)$-加群となる.

ヒルベルト C^*-加群はヒルベルト空間とよく似た対象であるが, 根本的に異なった面も有する. E をヒルベルト加群, $E' \subset E$ を閉部分加群として E' の直交補空間を

$$(E')^\perp = \{\, x \in E\ ;\ \langle x, y\rangle = 0,\ y \in E' \,\}$$

と定義しても必らずしも $E' \oplus (E')^\perp$ は全体と一致しない. 例を一つ考えよう. $B = C[0,1] = E$ として, $E' = \{\, f \in E\ ;\ f(0) = 0 \,\}$ とおくと, $(E')^\perp = \{0\}$. したがって $E' \oplus (E')^\perp \neq E$.

この性質がある為, ヒルベルト B-加群上の (バナッハ空間としての) 有界作用素は必らずしも「共役作用素」を持たない. E_1, E_2 をヒルベルト B-加群として $T : E_1 \longrightarrow E_2$ を考える. グラフ

$$G(T) \subset E_1 \oplus E_2$$

を考えた時

$$G(T)^{\perp} \oplus G(T) = E_1 \oplus E_2$$

が成立すれば $T^* : E_2 \longrightarrow E_1$ が存在して

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \quad x \in E_1, y \in E_2$$

が成立する. この時

$$G(T^*) = \{ \, (x_2, x_1) \in E_2 \oplus E_1 \; ; \; (x_1, -x_2) \in G(T)^{\perp} \, \}.$$

以上の考察から次の定義が生まれる.

定義 2.8. 写像 $T : E_1 \longrightarrow E_2$ が**共役可能** (adjointable) であるとは, 写像 $T^* : E_2 \longrightarrow E_1$ が存在して

$$\langle Tx_1, x_2 \rangle = \langle x_1, T^* x_2 \rangle, \quad x_i \in E_i$$

となるもののことである.

共役可能な T は**自動的に**線形, B-加群写像かつ有界となる. 線形性, B-加群写像であることは容易である. 有界性は閉グラフ定理を用いて示される. 共役不可能な例は, 例えば [45] の p. 261 を参照.

$\mathcal{L}(E_1, E_2)$ で共役可能写像の全体とする. $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ はノルムに関してバナッハ空間であり, 特に $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ は C^* 環となる. $B = \mathbb{C}$ の時, $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = B(\mathcal{H})$.

$B(\mathcal{H})$ はイデアル $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ を含んでいる. このイデアルに対応する $\mathcal{L}(E)$ のイデアルを考えよう. コンパクト作用素 $a \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ というのは, 有界集合を相対コンパクト集合に移す, $\mathbb{C}$-線形写像として定義されていた. 今, 我々は, B-加群写像として「コンパクト」なものを考えたいのである. $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は有界階数作用素で生成されていたことを思い出そう.

定義 2.9. $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ に対して $\theta_{x_1,x_2} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ を

$$\theta_{x_1,x_2}(x) = x_1\langle x_2, x\rangle$$

で定義する．この時 $\theta_{x_1,x_2}{}^* = \theta_{x_2,x_1}$ である．

$T \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ がコンパクトであるとは T が $\{\theta_{x_1,x_2};\ x_i \in E_i\}$ で生成される $\mathcal{L}(E_2, E_1)$ の閉部分環に属することである．

コンパクト作用素の全体を $\mathcal{K}(E_2, E_1)$ と記す．又, $E_1 = E_2 = E$ の時

$$\mathcal{K}(E, E) = \mathcal{K}(E)$$

とする．

(注 2.10) 任意の $T \in \mathcal{L}(E)$ に対して $T\theta_{x,y} = \theta_{Tx,y}$ となることにより, $\mathcal{K}(E)$ は両側閉イデアルであることが分かる．

命題 2.11. $M(\mathcal{K}(E)) \cong \mathcal{L}(E)$.

(例 2.12) ヒルベルト B-加群 $E = B$ を考える．左から B の元をかける写像を考える．この時, $\langle bx, bx\rangle = (bx)^*bx = x^*b^*bx$. よって

$$\|\langle bx, bx\rangle\| = \|x^*b^*bx\| \le \|x\|^2\|b\|^2.$$

したがってこの写像は有界．又

$$\langle bx, y\rangle = x^*b^*y = \langle x, b^*y\rangle.$$

したがって共役可能．写像 $B \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ は等長写像である．この写像の像 $= \mathcal{K}(E)$ となることを示す．(u_λ) を B の近似単位元とすると,

$$\|b - bu_\lambda\|,\ \|b - u_\lambda b\| \longrightarrow 0.$$

したがって $\|\theta_{b,u_\lambda} - b\| \longrightarrow 0$. このことは $B \subset \mathcal{K}(E)$ となることを示している．一方, 任意の階数 1 写像 $\theta_{x,y}$ は xy^* を左からかける写像と一致．したがって $B = \mathcal{K}(E)$.

$E = B$ を一般化した他の例については, $\mathcal{K}(B^n) = M_n(B)$, $\mathcal{K}(\mathcal{H}_B) = \mathcal{K} \otimes B$ となる (此処で $\mathcal{K}$ は可分無限次元ヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体).

(例 2.13) B は 1 を持つとする．ヒルベルト B-加群に関して次は同値である:
(1) E は B-加群として有限生成かつ射影的．
(2) $\mathcal{K}(E) = \mathcal{L}(E)$.
(3) $1 \in \mathcal{L}(E)$ はコンパクト．
(4) $1 \in \mathcal{L}(E)$ は有限階数写像である．

(注 2.14) (例 2.13) から分かるように，$\mathcal{K}(E)$ の元はバナッハ空間 E 上の有界線形作用素としてコンパクトにはならない．

定義 2.15. ヒルベルト B-加群 E が**可算生成** (countably generated) であるとは，可算集合 $X \subset E$ が存在し，X の生成する閉部分加群が E と一致することである．

次の定理は Kasparov 理論において最も重要な結果の一つである．

定理 2.16. (Kasparov の安定化定理). E が可算生成である時，

$$\mathcal{H}_B \oplus E \cong \mathcal{H}_B.$$

定理 2.16 は，適当な $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B \oplus E, \mathcal{H}_B)$ が存在して，

$$U^*U = 1_{\mathcal{H}_B \oplus E}, \quad UU^* = 1_{\mathcal{H}_B}$$

となると主張している．特に，任意の可算生成ヒルベルト加群 E に対して射影子 $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ が存在して

$$E \cong P\mathcal{H}_B.$$

Kasparov 流の Kasparov 積において重要な 2 つの代数的操作を定義しておく．

定義 2.17. (1) **外部テンソル積** (outer tensor product). B_1, B_2 を C^* 環. E_1, E_2 をそれぞれ B_1, B_2 上のヒルベルト加群とする．テンソル積 $B_1 \otimes B_2$(一意的には定まらない)-加群 $E_1 \otimes E_2$ をつくる．代数的テンソル積 $E_1 \odot E_2$ 上の $B_1 \otimes B_2$-値内積を

$$\langle \xi_1 \otimes \xi_2, \eta_1 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \xi_1, \eta_1 \rangle \otimes \langle \xi_2, \eta_2 \rangle$$

で定義し, 完備化を $E_1 \otimes E_2$ とする.

(2) **内部テンソル積** (inner tensor product). A, B を C^* 環, E_1 をヒルベルト A-加群, E_2 をヒルベルト B-加群, $\pi : A \longrightarrow \mathcal{L}(E_2)$ $*$準同型とする. π を通して E_2 は左 B-加群の構造を持つ. そこで代数的テンソル積 $E_1 \odot_A E_2$ 上で B-値内積を

$$\langle \xi_1 \otimes \xi_2, \eta_1 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \xi_2, \pi(\langle \xi_1, \eta_1 \rangle)\eta_2 \rangle$$

で定義する. この内積は必ずしも非退化ではない. そこで部分加群

$$N = \{\, x \in E_1 \odot_A E_2 \; ; \; \langle x, x \rangle = 0 \,\}$$

を考え, $\big(E_1 \odot_A E_2\big)/N$ の完備化を $E_1 \otimes_A E_2$, あるいは $E_1 \otimes_\pi E_2$ と記す.

先に $\mathbb{Z}_2$-次数付きヒルベルト空間を考えたが, この概念は自然な形でヒルベルト C^*-加群に対して定義され, $T \in \mathcal{L}(E)$ が偶次数, 奇次数であることも定義される.

定義 2.18. A, B を C^* 環とする. A-B **双加群** (A-B bimodule) とは $\mathbb{Z}_2$-次数付きヒルベルト B-加群 E と $*$準同型 $\pi : A \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ で, 任意の $a \in A$ に対して $\pi(a)$ が偶次数となるものの対 (E, π) のことである.

定義 2.19. A-B 双加群 (E, π) と奇次数 $F \in \mathcal{L}(E)$ との 3 つ組 (E, π, F) で次の条件を満たすものの全体を $\mathbb{E}(A, B)$ で表わす:
任意の $a \in A$ に対して
(1) $\pi(a)(F^2 - 1) \in \mathcal{K}(E)$,
(2) $[\pi(a), F] \in \mathcal{K}(E)$.
任意の $a \in A$ に対して $\pi(a)(F^2 - 1) = 0$, $[\pi(a), F] = 0$ となる 3 つ組は退化していると言われる. 退化した 3 つ組の全体を $\mathbb{D}(A, B)$ で表わす.

(例 2.20) $B = \mathbb{C}$ の時, $\mathbb{E}(A, \mathbb{C})$ は Atiyah の $Ell(A)$.

(例 2.21) $B = C(X)$, X: コンパクトとする. この時, ヒルベルト B-加群 E はあるヒルベルト空間の連続場 (H_x) の連続断面の全体と一致する. このメカニズムを見よう. I_x を任意の $\eta \in E$ に対して $\langle \xi, \eta \rangle(x) = 0$ となる $\xi \in E$ の全体とする. I_x は E の閉部分加群であり, $H_x = E/I_x$ とおくと H_x は $\langle \bar{\xi}, \bar{\eta} \rangle = \langle \xi, \eta \rangle(x) \in \mathbb{C}$ に

よってヒルベルト空間になる (但し $\bar{\xi}$ は ξ の H_x におけるクラス). こうしてヒルベルト空間の族 (H_x) が得られる. $((H_x), E)$ は X 上のヒルベルト空間の連続場となる. 連続場の定義は Appendix の定義 A.1 参照.

この記述を用いると, $T \in \mathcal{L}(E)$ は $*$ 強連続な有界線形作用素の族 (T_x) となる. $*$ **強連続**とは, 連続な断面 $\xi = (\xi_x)$ に対して $(T_x\xi_x), (T_x^*\xi_x)$ が連続な断面となることである. 一方, $T \in \mathcal{K}(E)$ はノルム連続な族 (T_x) で与えられる. ノルム連続性の定義は少し「トリッキー」であるが, (H_x) が同じヒルベルト空間である場合を考えておけば十分である. 特に, $x \longmapsto \|T_x\|$ は連続な関数である. 一方, $T \in \mathcal{L}(E)$ に対しては, ノルムの半連続しか保証されない. (連続関数の sup として: $\|T_x\| = \sup\{\|T_x\xi_x\| \,; \xi \in E, \|\xi\| = 1\}$)

X が閉多様体である時, $\mathbb{E}(C(X), C(Y))$ の元の例は, X 上の位数 0 の楕円型擬微分作用素の Y をパラメータ空間とする族により与えられる.

C^* 環 A, B に対して $\mathbb{E}(A, B)$ を適当な同値関係 (ホモトピー) で割って $KK(A, B)$ をつくるのであるが, 此処では細かな定義に踏み込まないことにする. (興味のある人, 又は必要とされる人には参考文献として [42], [25] 等を挙げておく.) 大事な事実だけ列挙しておく.

(i) 「和」の定義は予想されるように

$$(E, \pi, F) + (E', \pi', F') = (E \oplus E', \pi \oplus \pi', F \oplus F')$$

とすれば, これが $KK(A, B)$ に和を定義する.

(ii) $(E, \pi, F) \in \mathbb{D}(A, B)$ は $KK(A, B)$ の 0 を表わす.
ホモトピーが「弱い」ホモトピーであることは, 「退化している (E, π, F) は $(0, 0, 0)$ とホモトピックである.」と言う事実から想像されるであろう.

(iii) A-B 双加群 E に対して, $-E$ でヒルベルト加群としては同じ E であるが, 偶, 奇を入れ替えたものとする. このとき

$$-[E, \pi, F] = [-E, \pi, -F].$$

この証明も $(E, \pi, F) + (-E, \pi, -F)$ が退化した元 $\in \mathbb{D}(A, B)$ にホモトピックであることを示すことにより与えられる.

擬準同型との関係. $(\phi_+, \phi_-) : A \to E \triangleright \mathcal{K} \otimes B$ を適当に取り換えて, 同値な

$(\phi_+, \phi_-) : A \to M(\mathcal{K} \otimes B) \triangleright \mathcal{K} \otimes B$ を考える.

$$E = \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_B, \quad \pi = \begin{pmatrix} \phi_+ & 0 \\ 0 & \phi_- \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば, $(E, \pi, F) \in \mathbb{E}(A, B)$. この対応がこの $KK(A, B)$ の記述の同値性を与える.

以上見たように, $KK(A, B)$ の元は, A から B への $*$ 準同型の一般化, 又は, A-B 双加群という 2 つの「顔」を持っている. 第 1 の顔に関して Kasparov 積は $*$ 準同型の合成に対応している. では第 2 の顔に関してはどう記述されるであろうか.

A-B 双加群 E, B-C 双加群 E' が与えられて, A-C 双加群を構成するには, 内部テンソル積 $E \otimes_B E'$ が最も自然な対象であろう. 問題は作用素 F の構成である. Kasparov 積の最も一般的な形:

$$KK(A, B_1 \otimes D) \times KK(D \otimes B_2, C) \longrightarrow KK(A \otimes B_2, B_1 \otimes C)$$

で困難さをみてみよう.

X, Y を閉多様体として, $A = C(X)$, $B_1 = C = D = \mathbb{C}$, $B_2 = C(Y)$ の場合を考える.

$$KK(C(X), \mathbb{C}) \times KK(C(Y), \mathbb{C}) \longrightarrow KK(C(X \times Y), \mathbb{C}).$$

P_X を位数 0 の ($L^2(X)$ に作用している) 楕円型擬微分作用素で ${P_X}^*$ がパラメトリックスを与えているものとしよう. この時,

$$E_X = L^2(X) \oplus L^2(X), \quad F_X = \begin{pmatrix} 0 & {P_X}^* \\ P_X & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば (E_X, F_X) は $C(X)$-$\mathbb{C}$ 双加群となる. 同様なもの (E_Y, F_Y) を考える. この 2 つの対象の積を考える時, $C(X) \otimes C(Y)$-$\mathbb{C}$ 双加群としては

$$E = E_X \otimes E_Y \cong L^2(X \times Y) \oplus L^2(X \times Y) \oplus L^2(X \times Y) \oplus L^2(X \times Y).$$

E 上で作用素 F を "作用素のテンソル積"

$$F = F_X \sharp F_Y$$

で定義しようと考えるのは自然である.

$$F = \begin{pmatrix} 0 & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 \otimes P_Y & {P_X}^* \otimes 1 \\ P_X \otimes 1 & -1 \otimes {P_Y}^* \end{pmatrix}$$

である．ここで問題が生じる．(E,F) が双加群となる為には，任意の $f \in C(X \times Y)$ に対して交換子 $[F,f]$ がヒルベルト空間上のコンパクト作用素である必要がある．$[F,f]$ を計算してみれば，例えば $[1 \otimes P_Y, f]$ がコンパクトでなければならない．$f = 1 \otimes g, g \in C(Y)$ の場合を考えると $[1 \otimes P_Y, 1 \otimes g] = 1 \otimes [P_Y, g]$．これは決してコンパクトにならない．即ち，$(E,F)$ は決して双加群にならない．

X, Y 上にリーマン計量を固定し，$\Delta_X = 1+$ ラプラシアン，$\Delta_Y = 1+$ ラプラシアンとする．

$$M = (\Delta_X \otimes 1 + 1 \otimes \Delta_Y)^{-1}(\Delta_X \otimes 1),$$
$$N = (\Delta_X \otimes 1 + 1 \otimes \Delta_Y)^{-1}(1 \otimes \Delta_Y)$$

を考え，

$$F = M^{\frac{1}{2}}(F_X \otimes 1) + N^{\frac{1}{2}}(1 \otimes F_Y)$$

とおく．すると，(E,F) は条件をみたす．

以上の構成をモデルにしてカスパロフ積を考える．

$$[(E_D, F_A)] \in KK(A,D), \quad [(E_B, F_D)] \in KK(D,B)$$

とする．先ず A-B 双加群としては，$E = E_D \otimes_D E_B$ をとる．上の例では $F_A \otimes 1, 1 \otimes F_B$ を考えたが，一般にはこの時点で問題が生じる．それは，一般に，F_D は D の左作用とは可換でない．したがって $1 \otimes F_D$ は E 上の作用素として意味をなさない．そこで $1 \otimes F_D$ を意味のあるもので置き換える必要がある．それが Connes-Skandalis によって導入された「F_D-接続」の概念である．

定義 2.22. $G \in \mathcal{L}(E)$ が **F_D-接続** (F_D-connection) であるとは，全ての $\xi \in E_D$ に対して

$$T_\xi \circ F_D - (-1)^{\deg \xi \ \deg F_D} G \circ T_\xi \in \mathcal{K}(E_B, E),$$
$$F_D \circ T_\xi{}^* - (-1)^{\deg \xi \ \deg F_D} T_\xi{}^* \circ G \in \mathcal{K}(E, E_B)$$

(但し，$T_\xi(\eta) = \xi \otimes \eta$) が成立することである．

(注 2.23) F_D が D の作用素と可換ならば，$1 \otimes F_D$ は F_D- 接続である．

(注 2.24) F_D-接続は必らず存在する (Connes-Skandalis).

G を F_D-接続とする．正, 偶次数作用素 $M, N \in \mathcal{L}(E)$ で,

$$F = M^{\frac{1}{2}}(F_A \otimes 1) + N^{\frac{1}{2}}G$$

とおいた時, (E, F) が条件をみたすものが存在する．此処で「Kasparov の技術的補題」が用いられる．ここで得られた F はそれ自身, F_D-接続となる．

定理 2.25. (E_D, F_A), (E_B, F_D), $E = E_D \otimes_D E_B$ とする．この時, ホモトピーを除いて一意的に以下の (i), (ii) をみたす A-B 双加群 (E, F) が存在する:

(i) F は F_D-接続,

(ii) 任意の $a \in A$ に対して, $a[F_A \otimes 1, F]a^* \geq 0 \mod \mathcal{K}(E)$.

この様にして Kasparov 積が構成される．

既に述べた様に, 構成において Kasparov の技術的補題という存在定理が用いられており, この補題自身はヒルベルト C^*-加群の安定化定理を用いている．この様な事情から, $x \in KK(A, D), y \in KK(D, B)$ に対して $x \otimes_D y$ を計算する為には, x, y の代表元 $(E_D, F_A), (E_B, F_D)$ に対して, $E = E_D \otimes_D E_B$ を考え, 適当な $F \in \mathcal{L}(E)$ で (E, F) が A-B 双加群となるものを先ず見つけ, F が定理 2.25 の条件 (i), (ii) を満たすことをチェックするしか一般的には方法はない．その辺りを具体例でチェックしよう．

自然な写像 $\mathbb{C} \to C^*(S)$ が KK-同値であることを双加群の言葉でチェックしよう．任意の C^* 環 B に対して $1_B \in KK(B, B)$ は恒等写像 $B \to B$ により代表されている．したがって B-B 双加群としては $(B, 0)$, *i.e.* $H^+ = B, H^- = 0, F = 0$ で表わされる． $A = C^*(S)$ として自然な $*$ 準同型 $j : \mathbb{C} \to A$ の類 $\in KK(\mathbb{C}, A)$ を x, 第 1 節で構成された類を $y \in KK(A, \mathbb{C})$ とし, $x \otimes_A y = 1_{\mathbb{C}}$ となることを示す．

y の代表元として

$$E = H \oplus H, \quad H = \ell^2(\mathbb{N})$$
$$\phi_+ : A \longrightarrow B(H) \quad \text{自然な表現}$$
$$\phi_- : A \longrightarrow B(H) \quad \text{を} \quad \phi_-(a) = S\phi_+(a)S^*$$

で定義すると, $\phi_+ \oplus \phi_-$ が A の E への左作用を与え,

$$y = \left[E, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

一方 $x = [A, 0]$ であるから

$$A \otimes_A E = H \oplus H_+, \quad \text{但し } H_+ = \ell^2(\mathbb{N}_+).$$

$\mathcal{L}(H \oplus H_+) = B(H \oplus H_+)$ の元 F をみつけて $(H \oplus H_+, F)$ が $1_{\mathbb{C}} \in KK(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ を代表することを言いたいのであるから, 逆を考えてみる.

$$F = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

とおいてみる. $a : H_+ \to H$, $b : H \to H_+$. そこで, 候補として a を自然な包含写像 $H_+ \hookrightarrow H$, b を射影 $SS^* : H \to H_+$ としてみる. 直接計算で $F^* = F$.

$$1 - F^2 = \begin{pmatrix} 1 - SS^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{K}(H \oplus H_+),$$

さらに $[F, \alpha] \in \mathcal{K}(H \oplus H_+)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ が言え, $(H \oplus H_+, F)$ は $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$ 双加群となる. この類が $1_{\mathbb{C}}$ を表わす.

命題 2.26. $KK(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ の元は $\left(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \begin{pmatrix} 0 & S \\ T & 0 \end{pmatrix}\right)$ ($\mathcal{H}$: ヒルベルト空間) の形のもので, $\mathbb{C}$ の $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ への左作用は 1 が恒等写像として働らき, $S, T \in B(\mathcal{H})$ は $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ を法としてユニタリーであり, さらに $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ を法として $T^* = S$ となるものにより代表される. そして同型

$$KK(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

は

$$\left[\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \begin{pmatrix} 0 & S \\ T & 0 \end{pmatrix}\right] \longrightarrow \operatorname{index} T$$

により与えられる.

$-1_{\mathbb{C}}$ を考えたい. $-1_{\mathbb{C}}$ は $1_{\mathbb{C}}$ の偶奇を入れ替えたものである. 1 次元ヒルベルト空間 $\mathbb{C}$ を $(H_+)^\perp = \mathbb{C}\delta_0$ と同一視しておく. この時,

$$[H \oplus H_+, F] + (-1_{\mathbb{C}}) = [H \oplus (H_+ \oplus \mathbb{C}), F] = [H \oplus H, F].$$

したがって命題 2.26 で記述されている同型 $KK(\mathbb{C},\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ を通してみれば

$$[H \oplus H, F] = \mathrm{index}(SS^*) = 0.$$

したがって

$$[H \oplus H_+, F] = 1_{\mathbb{C}}.$$

証明すべきことは

$$x \otimes_A y = [H \oplus H_+, F].$$

これを示すには, F が定理 2.25 の条件 (i), (ii) を満たすことを言えばよい (加群の方はテンソル積で構成してあるから).

$F_A = 0, F_B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ として

(i) F は F_B-接続,

(ii) 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $\alpha[F_A \otimes 1, F]\bar{\alpha} \geqq 0 \mod \mathcal{K}(H \oplus H_+)$.

の 2 つの条件をチェックする. $F_A = 0$ であるから (ii) は自明. (i) については F_B-接続の定義に戻って直接計算で確かめられる.

Kasparov 積に慣れる為, 読者自ら, もう一つの等式

$$y \otimes_{\mathbb{C}} x = 1_A$$

を確かめられることをお勧めする.

以上見た様に, $KK(A,B)$ の最大の特徴は,「$KK(A,B)$ の元は $K_0(A) \to K_0(B)$, $K_1(A) \to K_1(B)$ という写像を導く」ことであった. アーベル群の準同型

$$KK(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K_0(A), K_0(B)) \oplus \mathrm{Hom}(K_1(A), K_1(B))$$

を J. Rosenberg - C. Schochet は調べた. 彼らの結果を述べる為に, C^* 環のある類 (class) を考えよう.

$\mathcal{N}$ を全ての可換 C^* 環を含む可分 C^* 環の族で (1) KK-同値, (2) 帰納極限, (3) $A, B \in \mathcal{N}, \varphi : A \to B$, $*$ 準同型 $\Longrightarrow C_\varphi \in \mathcal{N}$, 但し

$$C_\varphi = \{(x,f)\ ;\ x \in A, f : [0,1] \to B \text{ 連続 }, f(0) = \varphi(x), f(1) = 0\}$$

という 3 つの操作で閉じているもののうちで最小のものとする.

定理 2.27 (普遍係数定理). $A \in \mathcal{N}$ ならば, 任意の C^* 環 B に対して完全列

$$
\begin{aligned}
0 &\longrightarrow \mathrm{Ext}(K_0(A), K_1(B)) \oplus \mathrm{Ext}(K_1(A), K_0(B)) \\
&\longrightarrow KK(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K_0(A), K_0(B)) \oplus \mathrm{Hom}(K_1(A), K_1(B)) \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

が存在する. この完全列は分解する (但し自然ではない).

定理 2.27 は, $KK(A, B)$ のアーベル群としての構造は $K_*(A), K_*(B)$ で完全に決まると主張している.

$\mathcal{N}$ は全ての B に対して定理 2.27 で与えられる完全列が成立する C^* 環の全体と一致する. 又, 可換 C^* 環と KK-同値である C^* 環の全体とも一致する. $\mathcal{N}$ は全ての I-型 C^* 環を含み, 又, 最大最小テンソル積で閉じ, $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{F}_n$ による接合積でも閉じている.

族 $\mathcal{N}$ は E. Kirchberg による 純粋無限と呼ばれる C^* 環の分類理論において重要な位置を占めている.

3.3 拡大

この節では Kasparov の KK 理論と密接な関係を持つ C^* 環の拡大理論を考える.

例を考えよう. X を多様体, Y を境界を持った多様体としよう. 連続写像 $f : \partial Y \to X$ が与えられた時, Y を X に f を通して張り付けることにより, 位相空間

$$Z_f = X \cup_f Y$$

が得られ, 列

$$0 \to C_0(Y \backslash \partial Y) \to C_0(Z_f) \to C_0(X) \to 0$$

は完全である. X, Y を指定しても f のとり方を替えることにより, 様々な Z_f が得られる. この様に見れば, C^* 環の完全列とその分類をしようと言うこともそんなに不自然なことではない.

定義 3.1. C^* 環の完全列 $0 \to A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C \to 0$ を C の A による**拡大** (extension of C by A) と言う. $*$ 準同型 $\gamma : C \to B$ で $\beta \circ \gamma = id_C$ となるものが存在する時,

拡大は**自明** (trivial) であると言う. $\alpha(A)$ が B の本質的イデアルである時, 拡大は**本質的** (essential) であると言う.

K 理論における最も重要な出来事の一つが BDF 理論 [4] の展開であった. Brown-Douglas-Fillmore は次の形の拡大を考えた：

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \dashrightarrow E \longrightarrow C(X) \longrightarrow 0,$$

ここで何時ものように $\mathcal{K}$ は可分無限次元ヒルベルト空間のコンパクト作用素の全体であり, X はコンパクト・ハウスドルフ空間である.

冒頭の拡大の例は, 可換環の可換環による拡大であった. 何故, $\mathcal{K}$ と言う可換環の対極にある C^* 環による拡大を考えるのか「ピンとこない」かもしれないが, それも当然で, BDF 理論のきっかけが作用素論における問題にあったからである.

定義 3.2. $T \in B(\mathcal{H})$ とする. $T^*T - TT^* \in \mathcal{K}$ となるとき T は**本質的正規** (essentially normal) と呼ばれる.

別の言葉で言えば, **Calkin 環** $Q(\mathcal{H}) = B(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ における T の像 $\overline{T}$ が正規作用素となるとき T は本質的正規である. $\overline{T}$ のスペクトラムを T の**本質的スペクトラム** (essential spetrum) と言い, $\sigma_e(T)$ と記す. フレドホルム作用素の定義を思い出せば:

$$\lambda \notin \sigma_e(T) \iff \lambda I - T \text{ : フレドホルム.}$$

さて BDF 理論のきっかけは次の問題である.

<u>問題：</u> コンパクト集合 $X \subset \mathbb{C}$ が与えられた時, X を本質的スペクトラムとする本質的正規作用素を (適当な同値関係で) 分類する.

BDF 理論は, 上記分類が X の位相的データで定まることを主張する. ほんの少し詳しく見ることにしよう.

最も基本的な分類は**ユニタリー同値** (unitary equivalence) によるものである:

$$T_1, T_2 \text{ がユニタリー同値} \underset{\text{def}}{\iff} \exists U \in B(\mathcal{H})(\text{ユニタリー}) s.t.\ T_1 = UT_2U^*.$$

T_1, T_2 がユニタリー同値なら明らかに $\sigma_e(T_1) = \sigma_e(T_2)$ であるが, 逆は必ずしも成立しない.

定義 3.3. ユニタリー $U \in B(\mathcal{H})$ が存在して $T_1 - UT_2U^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ となるとき, T_1, T_2 は**コンパクトを法としてユニタリー同値** (unitarily equivalent modulo compacts) であると言う.

T_1, T_2 が $\mathcal{K}$ を法としてユニタリー同値なら $\sigma_e(T_1) = \sigma_e(T_2)$ である.

さて E_T を $B(\mathcal{H})$ の中で　$T, I, \mathcal{K}(\mathcal{H})$ により生成される C^* 環とする. $\overline{T} \in Q(\mathcal{H})$ は正規作用素であるから $Q(\mathcal{H})$ で可換 C^* 環を生成し, Gel'fand 理論で $\sigma_e(T)$ 上のある連続関数 t と同一視される. $\beta(I) = I, \beta(T) = t, \beta(\mathcal{K}(\mathcal{H})) = \{0\}$ は全射的 $*$ 準同型 $\beta : E_T \to C(\sigma_e(T))$ に拡張し

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow E_T \longrightarrow C(\sigma_e(T)) \longrightarrow 0$$

は本質的拡大となる.

逆に, コンパクト集合 $X \subset \mathbb{C}$ として, 単位元を保つ本質的拡大

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}) \longrightarrow E \longrightarrow C(X) \longrightarrow 0$$

が与えられたとしよう. 自然な包含写像 $X \hookrightarrow \mathbb{C}$ を関数とみなしたものも z と記す. $T \in E$ を z の持ち上げとしよう. $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は E の本質的イデアルであるから, $E \subset B(\mathcal{H})$ とみなすことができ, このことから T は本質的正規であり, $X = \sigma_e(T)$ となることが分かる. 又, E は T と I により生成される. このようにして, 与えられた $X \subset \mathbb{C}$ を本質的スペクトラムとする本質的正規作用素の分類の問題は, $C(X)$ の $\mathcal{K}$ による拡大の分類の問題に翻訳される.

定義 3.4. 2 つの拡大 $0 \to \mathcal{K} \to E_i \to C(X) \to 0$, $i = 1, 2$ に対してユニタリー $U \in B(\mathcal{H})$ が存在して, 図式 :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & Ad(U) & \downarrow & \phi & \downarrow & & \shortparallel & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

が可換となるとき, 2 つの拡大は**ユニタリー同値** (unitarily equivalent) であると言う.

定義 3.5. $\mathrm{Ext}(X) = \{\ C(X)$ の $\mathcal{K}$ による拡大 $\}$/ユニタリー同値.

自然な対応で $\mathrm{Ext}(X)$ は X を本質的スペクトラムとする本質的正規作用素の $\mathcal{K}$ を法とするユニタリー同値類と 1:1 対応を持つ. こうなると, 問題は, どのようにして $\mathrm{Ext}(X)$ を計算するかということになる. 代数的手法を用いるため $\mathrm{Ext}(X)$ にアーベル群の構造を入れることを考える.

和の定義 拡大の「和」を定義する際, 可換環の拡大であることは何処でも用いない. 一般の C^* 環 A の $\mathcal{K}$ による拡大を考える:

$$\tau_i:\ 0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow E_i \xrightarrow{\pi_i} A \longrightarrow 0 \quad (i = 1, 2).$$

先ず

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 & z \\ y & x_2 \end{pmatrix};\ y, z \in \mathcal{K}, x_i \in E_i, \pi_1(x_1) = \pi_2(x_2) \right\}$$

は C^* 環である. (ノルムをどう入れるか読者自ら考えられたし.) $\pi : E \to A$ を

$$\pi\left(\begin{pmatrix} x_1 & z \\ y & x_2 \end{pmatrix}\right) = \pi_1(x_1)(= \pi_2(x_2))$$

で定義すれば, π は全射であり

$$\mathrm{Ker}\,\pi = M_2(\mathcal{K}) \subset E.$$

$M_2(\mathcal{K})$ は $\mathcal{K}$ に同型であり, 同型はホモトピーを除いて一意的に定まる. 一つの同型を固定し, 完全列

$$\tau:\ 0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

が得られる. この様にして拡大の**直和** (direct sum) $\tau = \tau_1 \oplus \tau_2$ が定義され, 特に $A = C(X)$ の場合を考えると, 直和はコンパクトを法としたユニタリー同値と両立し, $\mathrm{Ext}(X)$ は可換半群の構造を持つ.

一般の C^* 環 A の拡大に対しても, コンパクトを法としたユニタリー同値の概念が定義され, 同値類の集合 $ext(A)$ に上と同様に「和」が定義され, $ext(A)$ は可換半群となる. 読者は此処で, 記号 $ext(A)$ が誤植ではないかと思われたかもしれない

が, 今の段階でこの記号を使ったことには理由がある. A が可換であるかないかにより「コンパクトを法としたユニタリー同値類」の集合が異なった性質を持つ.

命題 3.6. X をコンパクト距離付け可能な空間とする. $C(X)$ の $\mathcal{K}$ による自明な拡大はコンパクトを法としたユニタリー同値を除いて一意的に存在する.

そこで自明な拡大の一つを τ_0 とする.

命題 3.7. 任意の本質的拡大 τ に対して, 直和 $\tau \oplus \tau_0$ は τ にコンパクトを法としたユニタリー同値である. したがって τ_0 の類は可換半群 $\mathrm{Ext}(X)$ の単位元である.

定理 3.8(Brown-Douglas-Fillmore). コンパクト距離付け可能な空間 X に対して $\mathrm{Ext}(X)$ は群である, *i.e.* 任意の拡大 τ に対して, 拡大 τ' が存在し, $\tau \oplus \tau'$ は τ_0 にコンパクトを法としてユニタリー同値となる.

BDF 理論の (トポロジーの側から見た) ハイライトが次の結果である.

定理 3.9. $X \mapsto \mathrm{Ext}(X)$ はコンパクト距離付け可能な空間の圏からアーベル群の圏へのホモトピー不変, 共変関手である. 実際 $\mathrm{Ext}(X) \cong K_1(X)$ (Spanier-Whitehead 双対性を通して定義されるホモロジー K-群).

一般の C^* 環 A に対しては, 命題 3.6 が成立しない. つまり自然な単位元が存在しないというわけである. そこで自明な拡大の全体を一纏めにする. 自明な拡大の類の全体は $ext(A)$ の部分半群となる.

定義 3.10. 自明な拡大の類全体のなす部分半群による $ext(A)$ の商半群を $\mathrm{Ext}(A)$ と記す. 拡大 τ の $\mathrm{Ext}(A)$ における類を $[\tau]$ と記す.

命題 3.7 に対応する命題が $\mathrm{Ext}(A)$ で成立し, この時点で $\mathrm{Ext}(A)$ は単位元を持つ可換半群の構造を持つ. 一般の A に対しては $\mathrm{Ext}(A)$ の元は必ずしも逆元を持たない.

定義 3.11. 記号 $\mathrm{Ext}^{-1}(A)$ で拡大の類 $[\tau]$ で拡大 $[\tau']$ が存在し $[\tau]+[\tau']=0$ となるものの全体を表わす. $\mathrm{Ext}^{-1}(A)$ はアーベル群である.

定理 3.12(Kasparov). A が可分核型なら $\mathrm{Ext}^{-1}(A)=\mathrm{Ext}(A)$.

核型性の定義 (第 1 章定義 8.9) を思い出すと, 何処で核型性が必要となるのかチョット分かりにくいかもしれない. 上の定理の証明においては「完全正値写像」を用いた核型性の特徴付けが用いられる.

A,B を C^* 環として $f:A\to B$ を線形写像とする.

定義 3.13 任意の $x\geq 0$ に対して $f(x)\geq 0$ となる時 f は**正値写像** (positive map) と呼ぶ.

任意の $k\in\mathcal{N}$ に対して, 自然な f の拡張

$$f\otimes\mathrm{id}_k : M_k(A)\longrightarrow M_k(B)$$

が正値写像である時, f は**完全正値写像** (completely positive map) と呼ばれる.

(注 3.14) $*$ 準同型 $\Longrightarrow$ 完全正値.

拡大 $\tau:0\to\mathcal{K}\to E\xrightarrow{\pi}A\to 0$ に対して, 完全正値断面 $s:A\to E$ が存在する時, 拡大 τ は**半分裂** (semi-splitting) であるという. 比較的簡単な議論で「$[\tau]\in\mathrm{Ext}^{-1}(A)\Rightarrow\tau$: 半分裂」はでる.

命題 3.15(Kasparov). τ : 半分裂 $\Rightarrow[\tau]\in\mathrm{Ext}^{-1}(A)$.

A が可分核型だとすると, 任意の $*$ 全射 $B\to A$ に対して完全正値断面 $s:A\to B$ が存在する (Choi-Effros). したがって A が可分核型なら任意の拡大は半分裂となり, $\mathrm{Ext}^{-1}(A)=\mathrm{Ext}(A)$ が得られる.

$\mathrm{Ext}^{-1}(A)$ と Kasparov KK-群との関係をみよう. $KK(\cdot,\cdot)$ の第一変数を固定した時完全列は第二変数に関して 6 項完全列を生む. 第一変数に $A\otimes C_0(\mathbb{R})$ を代入し, 完全列 $\tau:0\to\mathcal{K}\to E\to A\to 0$ に対してこのメカニズムを適用すると, 完全列の

一部として

$$KK^1(A \otimes C_0(\mathbb{R}), A) \longrightarrow KK^0(A \otimes C_0(\mathbb{R}), \mathcal{K})$$

が得られる. 同型 $KK^1(A \otimes C_0(\mathbb{R}), A) \cong KK(A \otimes C_0(\mathbb{R}), A \otimes C_0(\mathbb{R}))$, $KK(A \otimes C_0(\mathbb{R}), \mathcal{K}) \cong KK(A \otimes C_0(\mathbb{R}), \mathbb{C}) \cong KK^1(A, \mathbb{C})$ を通して得られる写像 $KK(A \otimes C_0(\mathbb{R}), A \otimes C_0(\mathbb{R})) \to KK^1(A, \mathbb{C})$ を δ と記し, 環 $KK(A \otimes C_0(\mathbb{R}), A \otimes C_0(\mathbb{R}))$ の単位元を 1_A とする.

定理 3.16(Kasparov). 写像 $[\tau] \mapsto \delta(1_A)$ は同型 $\mathrm{Ext}^{-1}(A) \cong KK^1(A, \mathbb{C})$ を与える.

Kasparov 積

$$K_1(A) \times KK^1(A, \mathbb{C}) \longrightarrow KK(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$$

を介して, 写像 $[\tau] \mapsto \delta(1_A)$ は

$$\gamma : \mathrm{Ext}^{-1}(A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K_1(A), \mathbb{Z})$$

と解釈される. γ を直接的に記述すると次の様になる. $\tau : 0 \to \mathcal{K} \to E \to A \to 0$ の生む 6 項完全列に現われる境界写像 $K_1(A) \to K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$ が $\gamma([\tau])$ である.

Ker γ を考えよう. $[\tau] \in \mathrm{Ker}\,\gamma$ とすると, 6 項完全列が分裂し, 完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow K_0(E) \longrightarrow K_0(A) \longrightarrow 0$$

が得られ, これはアーベル群の間の準同型

$$\mathrm{Ker}\,\gamma \longrightarrow \mathrm{Ext}(K_0(A), \mathbb{Z})$$

を生む.

定理 3.17. $A \in \mathcal{N}$ に対して次の形の完全列が存在する:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(K_0(A), \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{-1}(A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K_0(A), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

(注 3.18) 読者も既にお気づきのように, 定理 3.17 は定理 2.27 の特別な場合である.

以上, C^* 環 A の $\mathcal{K}$ による拡大を考察したが

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \otimes B \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

の形の拡大を考えると「コンパクトを法としてユニタリー同値」も**弱ユニタリー同値** (weak unitary equivalence) という形で一般化され,
$\mathrm{Ext}(A,B)$ が構成され, 逆を持つ元の全体として $\mathrm{Ext}^{-1}(A,B)$ が得られる. 上記諸結果は自然な形で成立する. 例えば

定理 3.19(Kasparov). A が可分核型であるとすると,

$$\mathrm{Ext}^{-1}(A,B) = \mathrm{Ext}(A,B).$$

以上大雑把ではあるが KK-理論の骨格をみてきた. この辺りのこと [22], [42] 参照. 最近出版された [23] も K-ホモロジーと「coarse geometry」の関わり合いを知る上で面白い本である.

第4章　フォン・ノイマン環

80 年代前半の S. Hurder による Godbillon-Vey 類の消滅と葉層フォン・ノイマン環の構造との関係, 80 年代後半の V. Jones による結び目多項式に対する貢献 etc. を通して「フォン・ノイマン環」という言葉に触れる機会が増えた. 本章では理論の大枠について説明する. 筆者はフォン・ノイマン環に関しては素人であるから, Jones による部分因子の指数理論, 最近の D. Voiculescu による非可換確率論等ホットな話題には触れないことを予めお断りしておく.

4.1　定義と例

以下説明を読んで頂ければ分かるように, 測度論が人工的だと感じられるように, フォン・ノイマン環の理論も人工的であることを警告しておくことにする.

定義 1.1.　$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とする. $B(\mathcal{H})$ の単位元を持つ $*$ 部分環 M で弱位相に関して閉であるものを**フォン・ノイマン環** (von Neumann algebra) と言う. 弱閉ならばノルム閉だから, フォン・ノイマン環は C^* 環である.

以下, $\mathcal{H}$ が可分である場合を念頭に説明する. 幾何学との関係で現われるヒルベルト空間は大体が可分である. 何処で可分性が必要になるかは一々説明しない.

(例 1.2)　(Ω, μ) 測度空間. $L^\infty(\Omega) \subset B(L^2(\Omega, \mu))$. $L^\infty(\Omega)$ は単位元を持つ可換 C^* 環であるから, あるコンパクト空間 X が存在して C^* 環として $L^\infty(\Omega) \cong C(X)$ となる. この X は 超ストーン 空間 (Hyper-stonean space) と呼ばれる空間である.

(例 1.3)　Γ: 可算離散群とする. $\ell^2(\Gamma)$ 上で左正則表現で生成されるフォン・ノイマン環を $W^*(\Gamma)$ と記し, **群フォン・ノイマン環** (group von Neumann algebra) と

言う.

先に触れた様にフォン・ノイマン環は C^* 環であるが, ある特徴を持っている. 幾何学に現われる C^* 環は大かた可分であるが, フォン・ノイマン環は, 有限次元でない限りノルム位相に関して可分にならない.

(例 1.4) $B(\mathcal{H})$ を考える. $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ を $\mathcal{H}$ の ONS とする. 数列 $\alpha = (\alpha_n)$ で $\alpha_n \in \{0,1\}$ となるものを考える. $T_\alpha \in B(\mathcal{H})$ を

$$T_\alpha \phi = \sum_n \alpha_n \langle \phi, e_n \rangle e_n$$

で定義する. この時, $\{T_\alpha\}_\alpha$ は非可算集合で $\|T_\alpha - T_\beta\| = 1$ $(\alpha \neq \beta)$. したがって $\{T_\alpha\}$ を可算集合で近似できない.

上の例で用いられたアイデアを使えば $L^\infty[0,1]$ は C^* 環として非可分であることが示される.

フォン・ノイマン環の例をもう少し紹介しておこう.

(例 1.5) $M_1 \subset B(\mathcal{H}_1), M_2 \subset B(\mathcal{H}_2)$ フォン・ノイマン環とする. ヒルベルト空間の直和 $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ 上で

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in B(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \; ; \; a \in M_1, b \in M_2 \right\}$$

はフォン・ノイマン環になる. これを M_1 と M_2 の**直和**と言い, $M_1 \oplus M_2$ と記す.

(例 1.6) ヒルベルト空間のテンソル積 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上で $\{a \otimes b;\ a \in M_1, b \in M_2\}$ により生成されるフォン・ノイマン環を $M_1 \otimes M_2$ と記し, M_1 と M_2 の**テンソル積**と言う.

定義 1.7. $N \subset B(\mathcal{H})$ 部分集合に対して

$$N' = \{\, T \in B(\mathcal{H}) \; ; \; TS = ST, \forall S \in N \,\}$$

はフォン・ノイマン環である. N' を N の**可換子環** (commutant) と言う.

$N'' = (N')'$ を N の **2 重可換子環** (double commutant) と言う.

次の定理は最も基本的な結果で J. von Neumann による.

定理 1.8 (Double Commutant Theorem). $M \subset B(\mathcal{H})$ を 1 を含む $*$ 部分環とする. この時, M'' は M の弱かつ強閉包である.

4.2 因子環

この節で紹介する結果、特にフォン・ノイマンの (直積分への) 分解理論においてヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が可分であることは本質的である. 可分でない場合に反例が存在することが知られている.

定義 2.1. フォン・ノイマン環 R が**因子環** (factor) であるとは, R の中心 $Z = R \cap R'$ がスカラーとなることである.

2 重可換子環定理の系として, R が因子環なら R' も因子環となることが分かる.
C^* 環の世界では単純環を重要視する. (C^* 環の世界で単純環は可換 C^* 環の対極にあると考えられる.) フォン・ノイマン環の範疇で同じことを考えたらどうなるであろうか. 先ず, 例を考えよう.

(例 2.2) $N = \{ \phi \in L^\infty[0,1] \,;\, \phi = 0 \quad a.e.\ [0,\frac{1}{2}] \}$ を考える. N は弱閉, $*$ 両側イデアルとなる. この時, $N = L^\infty[\frac{1}{2},1]$ であり

$$L^\infty[0,1] = N \oplus L^\infty[0,\frac{1}{2}] \quad \text{(フォン・ノイマン環の直和)}.$$

この例のように, 一般的に M をフォン・ノイマン環, N を弱閉, $*$ 両側イデアルとする. この時, M が働らくヒルベルト空間が直和に分解し, M がフォン・ノイマン環の直和に分解する.
例 2.2 において, $[0,\frac{1}{2}]$ の代わりにどんどん小さな区間を考えれば, $L^\infty[0,1]$ はどんどん小さなフォン・ノイマン環の直和に分解してゆくが, 「分解しつくす」為には直積分の概念が必要となる.

直積分の概念を考える為に, 先ず同型という言葉の意味を考えよう. M_1, M_2 をそれぞれ $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 上のフォン・ノイマン環とする. M_1, M_2 が**空間的に同型** (spatially isomorphic) であるとは, ユニタリー $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ が存在して $UM_1U^* = M_2$ となることである. 一方, M_1 と M_2 が C^* 環として同型である時, M_1, M_2 は **$*$ 同型** ($*$-isomorphic) であると言う. $B(\mathcal{H})$ から $B(\mathcal{H}^n)$ への写像を $T \to T \oplus \cdots \oplus T$ で定義すれば, これは空間的には同型でないが, $*$ 同型である例となっている.

(Ω, μ) を測度空間, (H_ω) を Ω 上のヒルベルト空間の可測場とする. ヒルベルト空間の可測場の定義については, 章末の Appendix 参照. L^2-断面のつくるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を

$$\mathcal{H} = \int_\Omega^\oplus H_\omega d\mu(\omega)$$

と記し, (H_ω) の**直積分**と言う.

定義 2.3. $\mathcal{H} = \int_\Omega^\oplus H_\omega d\mu(\omega)$ とする. $A \in B(\mathcal{H})$ が**分解可能** (decomposable) であるとは, 本質的に作用素の場 $\omega \longmapsto A(\omega)$ が存在して, 任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $(A\xi)(\omega) = A(\omega)\xi(\omega)$ がほとんど全ての ω に対して成立することである.

$A \in B(\mathcal{H})$ が分解可能かつ $A(\omega) = f(\omega)I_\omega$ (但し $f(\omega) \in \mathbb{C}, I_\omega \in B(\mathcal{H}_\omega)$ 単位元) となる時, A を**対角化可能** (diagonalizable) と言う.

(注 2.4) $(A(\omega)), (A'(\omega))$ を分解可能な $A \in B(\mathcal{H})$ の 2 つの分解とする. この時

$$A(\omega) = A'(\omega) \quad \text{a.e.}\ \omega.$$

命題 2.5. $M = \{ A \in B(\mathcal{H}) ;\ A \text{ 分解可能} \}$ はフォン・ノイマン環である.

定義 2.6. $\mathfrak{A}$ を C^* 環, $\varphi : \mathfrak{A} \to B(\mathcal{H})$ $*$ 表現が分解可能であるとは, $*$ 表現 $\varphi_\omega : \mathfrak{A} \to B(\mathcal{H}_\omega)$ が存在し, 任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $\varphi(A)$ は $(\varphi_\omega(A))$ なる分解を持つことである.

定義 2.7. $\mathcal{H} = \int_\Omega^\oplus H_\omega d\mu(\omega)$ とする. フォン・ノイマン環 $M \subset B(\mathcal{H})$ が分解可能で (M_ω) が 1 つの分解であるとは, M の可分な C^* 部分環 $\mathfrak{A}$ で M の中で強位相に関して稠密なものが存在し, 恒等写像 $\iota : \mathfrak{A} \to B(\mathcal{H})$ が分解可能で, (ι_ω) を 1 つ

の分解とすると $\iota_\omega(\mathfrak{A})$ はほとんど全ての ω に対して M_ω の中で強位相に関して稠密となることである.

(注 2.8)　定義 2.7 で分解 (M_ω) は $\mathfrak{A}$ のとり方によらない.

$M \subset B(\mathcal{H})$ が分解可能である時

$$M = \int_\Omega^\oplus M_\omega d\mu(\omega)$$

と記す.

定理 2.9.　フォン・ノイマン環 M が分解可能作用素全体の作るフォン・ノイマン環に含まれているならば, M は分解可能である.

定理 2.10.　$\mathcal{H}$ を可分ヒルベルト空間, $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$ を可換なフォン・ノイマン環とする. 局所コンパクト, 可分, 完備距離, 測度空間 (Ω, μ) が存在し, 又 (Ω, μ) 上のヒルベルト空間の可測場 (H_ω) が存在し,

$$\mathcal{H} \cong \int_\Omega^\oplus H_\omega d\mu(\omega).$$

このユニタリーを通して, $\mathcal{A} \cong \{$ 対角化可能作用素 $\}$ である.

定理 2.11.　$\mathcal{H} \cong \int_\Omega^\oplus H_\omega d\mu(\omega)$ を定理 2.10 における分解とする. この時, フォン・ノイマン環 $M \subset B(\mathcal{H})$ がこの分解に関して分解可能である必要十分条件は $M \subset \mathcal{A}'$ となることである.

$M \subset \mathcal{A}'$ とする.　$\{A(\omega);\ A \in M\}$ で生成される H_ω 上のフォン・ノイマン環を M_ω とすると, (M_ω) は M の分解であり, *i.e.*

$$M \cong \int_\Omega^\oplus M_\omega d\mu(\omega).$$

特に任意の M に対して $\mathcal{A} = Z(M)$ (中心) をとった時, ほとんど全ての $\omega \in \Omega$ に対して M_ω は因子環であり, M の因子環の直積分への分解が得られる. この分解理

論を**フォン・ノイマンの分解理論** (reduction theory) と言う．この理論から, M が因子環であることと, 弱閉両, 側イデアルを持たないと言う意味で単純であるということと同値になる．

4.3 分類

C^* 環とフォン・ノイマン環の大きな違いは, C^* 環は射影子をあまり持たないが, フォン・ノイマン環は豊富に有するということである．例えば, X を連結コンパクトとすると $C(X)$ の射影子は 0 と 1 のみである．一方, $L^\infty[0,1]$ を考えれば $\mu(\Omega) > 0$ となる可測集合の特性関数は全て射影子である．この様に, フォン・ノイマン環は多くの射影子を持つことに着目し, 射影子の性質に基づいてフォン・ノイマン環を分類する．

定義 3.1. M をフォン・ノイマン環とする． $E \in M$ 射影子とする．

(1) E: **アーベリアン** (abelian) $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ EME (これはフォン・ノイマン環): 可換フォン・ノイマン環.

(2) E: **有限** (finite) $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $F \le E, F \sim E$ (同値) なら $F = E$.

(3) E: **無限** (infinite) $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ E は有限でない.

(4) E: **純粋無限** (purely infinite) $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ E は 0 でない有限部分射影子を含まない.

(5) E: **固有無限** (properly infinite) $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ E は 0 でない有限中心部分射影子を含まない.

(注 3.2) 定義 3.1 (5) において E: 中心射影子 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $E \in Z(M)$.

定義 3.3 M をフォン・ノイマン環とする.

M : **有限** (finite) $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1 : 有限射影子

M : **半有限** (semifinite) $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1 が有限射影子の直和に分解.

以上の言葉を用いてフォン・ノイマン環のタイプを分類する.

定義 3.4.

M : **I-型** (type I) $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1 がアーベリアン射影子の直和に分解.
特に, n 個の互いに同値な, アーベリアン射影子の直和に分解する時, I_n-型 (type I_n)

M : $\mathbf{II_1}$**-型** (type II_1) $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ M は有限で, 0 でないアーベリアン射影子を含まない.

M : $\mathbf{II_\infty}$**-型** (type II_∞) $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ M は半有限で, 0 でないアーベリアン射影子を含まない.

M : **III-型** (type III) $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $1 \in M$ が純粋無限.

(例 3.5)　$L^\infty[0,1]$ は I_1 型. フォン・ノイマン・テンソル積 $M_n(\mathbb{C}) \otimes L^\infty[0,1]$ は $\mathrm{I_n}$-型.

定理 3.6.　フォン・ノイマン環 $M \subset B(\mathcal{H})$ に対して, M の互いに直交する中心射影子 P_n $(n \leq \dim \mathcal{H}), P_c, P_{c_\infty}, P_\infty$ で和が 1 であり

(1) $P_n M P_n$ は $\mathrm{I_n}$-型, 又は $P_n = 0$,

(2) $P_c M P_c$ は II_1-型, 又は $P_c = 0$,

(3) $P_{c_\infty} M P_{c_\infty}$ は II_∞-型, 又は $P_{c_\infty} = 0$,

(4) $P_\infty M P_\infty$ は III-型, 又は $P_\infty = 0$

となるものが存在する.

この定理は特に, M が

$$M = M_{\mathrm{I}} \oplus M_{\mathrm{II}_1} \oplus M_{\mathrm{II}_\infty} \oplus M_{\mathrm{III}}$$

と分解されると主張している.

(注 3.7)　$\mathrm{I}, \mathrm{II}_1, \mathrm{II}_\infty$, III-型は排他的 (同時に 2 つの型になることはない). 又, M が $\mathrm{I}_m, \mathrm{I}_n$-型ならば $m = n$.

定理 3.8.　M が因子環である場合, どれか 1 つの型である. さらに,

(1) 極小射影子 (minimal projection) が存在 $\Longrightarrow$ I-型

1 が n 個の極小射影子の和 $\Longrightarrow$ $\mathrm{I_n}$-型,

(2) 極小射影子は存在しないが, 0 でない有限射影子が存在 $\Longrightarrow$ II- 型,

(3) 0 でない有限射影子は存在しない $\Longrightarrow$ III-型.

(例 3.9) M: I-型因子環 $\Longrightarrow M \cong B(\mathcal{H})$ ($*$ 同型)

M: $\mathrm{I_n}$-型因子環 $\Longrightarrow M \cong M_n(\mathbb{C})$ ($*$ 同型)

M を II-型因子環とすると, 極小射影子が存在しないから, 互いに直交する無限個の射影子が存在する. したがって M のベクトル空間としての次元は無限次元である.

(例 3.10) II-型のフォン・ノイマン環

Γ: 離散群が**無限共役類群** (infinite conjugacy class group, ICC-group) であるとは任意の $g \in \Gamma$ に対する共役類 $\{hgh^{-1}\ ;\ h \in \Gamma\}$ が $g = e$ の場合を除いて無限集合となることとする.

Γ: ICC-群 $\Longrightarrow W^*(\Gamma)$ は II_1-型因子環である.

典型的 ICC-群としては $\mathbb{F}_n$, あるいは閉リーマン面 (種数 $g \geq 2$) の基本群がある.

$\dim \mathcal{H} = \infty$ として $B(\mathcal{H})$ は I_∞-型因子環. そこでフォン・ノイマン環のテンソル積 $W^*(\Gamma) \otimes B(\mathcal{H})$ を考えれば, これは II_∞-型の因子環になる.

(例 3.11) III-型因子環 (Powers の因子環). 先ず, C^* 環の帰納極限

$$M_2 \to M_4 \to M_8 \to \cdots, \quad a \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

を考える. その帰納極限は M_{2^∞} と記される. 各 M_{2^n} 上の状態 ϕ_n を

$$\phi_1(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = (1-t)a + td,$$
$$\phi_{n+1}(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = (1-t)\phi_n(a) + t\phi_n(a)$$

で帰納的に定義すると (ϕ_n) は埋め込み $M_{2^n} \to M_{2^{n+1}}$ と両立する. したがって M_{2^∞} 上の状態 ρ_t が定義される.

$$\pi_t : M_{2^\infty} \to B(H_t)$$

を ρ_t に付随した GNS-表現として R_t で, $\pi_t(M_{2^\infty})$ で生成されるフォン・ノイマン環とする.

$$\begin{aligned}
0 < t < \tfrac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad R_t \text{ は III-型因子環}, \\
&\qquad\ R_t \cong R_{t'} \ (* \text{ 同型}),\ 0 < t, t' < \tfrac{1}{2} \Longrightarrow t = t', \\
t = 0 \quad &\Longrightarrow \quad R_0 \ \text{ は } \mathrm{I}_\infty\text{-型因子環}, \\
t = \tfrac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad R_{\frac{1}{2}} \ \text{ は } \mathrm{II}_1\text{-型因子環}.
\end{aligned}$$

さらに　$R_t \cong R_{1-t}$　$(*$ 同型)

定理 3.12.　M: フォン・ノイマン環. X-型 (X=I, II, III) とすると M' も X-型である. (細かなレベルでは全ての可能性が実際に生じる.)

フォン・ノイマン環が有限, 半有限, 無限ということを別の角度から見てゆこう. M: フォン・ノイマン環. $\mathcal{P}$ で M の射影子全体, Z: M の中心とする.

定義 3.13.　中心値トレースとは, 線形写像 $\tau : M \to Z$

(i) $\tau(AB) = \tau(BA), \quad A, B \in M,$

(ii) $\tau(c) = c, \quad c \in Z$

(iii) $A > 0 \quad \Longrightarrow \quad \tau(A) > 0.$

勿論, 常に中心値トレースが存在する訳ではなく, もし, 存在したとすると M は有限となってしまう. 実際, $E \sim F \leq E$ とすると部分等長写像 $V : R(E) \to R(F)$ が存在. したがって

$$\tau(E - F) = \tau(V^*V) - \tau(VV^*) = 0$$

よって $E - F = 0$.

定義 3.14.　$\rho : M \to \mathbb{C}$ 線形写像が中心的 (central) とは

$$\rho(AB) = \rho(BA), \quad {}^\forall A, {}^\forall B \in M.$$

$$
\begin{aligned}
&M \text{ 上のトレース} &&\Longleftrightarrow &&\text{正値中心的線形汎関数.}\\
&\text{トレース的状態} &&\Longleftrightarrow &&\text{正値中心的線型汎関数であって } \rho(1)=1.\\
&\rho:\ \text{忠実} &&\Longleftrightarrow &&A \geq 0, A \neq 0 \text{ ならば } \rho(A) > 0.
\end{aligned}
$$

忠実なトレースが在れば, M は有限である. M が因子環である時, $Z = \mathbb{C}1$ により, 中心値トレース τ に対して $\tau(A) = \rho(A)I$ と書け, ρ は忠実トレースとなる.

定義 3.15. **中心値次元関数** (centre-valued dimension function) とは, 写像 $\Delta : \mathcal{P} \to Z$ で

(i) $\Delta(E) > 0,\ E \neq 0,\ E \in \mathcal{P}$,

(ii) $\Delta(E+F) = \Delta(E) + \Delta(F), \quad EF = 0$,

(iii) $E \sim F$ (同値) $\implies \Delta(E) = \Delta(F)$,

(iv) $Q \in \mathcal{P},\ Q \in Z \implies \Delta(Q) = Q$.

(v) $Q \in \mathcal{P},\ Q \in Z,\ E \in \mathcal{P} \implies \Delta(QE) = Q\Delta(E)$.

となるもののことである.

(例 3.16) $M = M_n(\mathbb{C})$ とする. $\Delta(E) = \frac{d(E)}{n} I$, $d(E) : E$ の階数とすれば中心値次元関数.

(例 3.17) M : 有限とすると, 中心値トレース τ が一意に存在. この τ を $\mathcal{P}$ に制限したものを Δ とすれば

(vi) $\Delta(E) = \Delta(F) \quad \Longleftrightarrow \quad E \sim F$,

(vii) $\Delta(E) \leq \Delta(F) \quad \Longleftrightarrow \quad E \precsim F$ ($\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists E' \leq F$ s.t. $E \sim E'$).

(viii) $\{E_\alpha\}$ を直交する $\mathcal{P}$ の族, $E = \sum E_\alpha$ とすると, $\Delta(E) = \sum_\alpha \Delta(E_\alpha)$.

定理 3.18. M: 有限, Δ: 中心値次元関数とする.

(i) M: I_n-型ならば

$$
\Delta \text{ の値域} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} Q_j \ ;\ Q_1, \cdots, Q_n \text{互いに直交する } Z \text{ の射影子} \right\}
$$

(ii) M: II_1-型ならば

Δ の値域 $= \{A \in \underset{\text{閉単位球}}{(Z)_1} \ ; A > 0\}$

特に, M: 因子環であるとき

M: I_n-型 $\Longrightarrow$ 値域 $= \{\frac{j}{n} \ ; j = 0, \cdots, n\}$

M: II_1-型 $\Longrightarrow$ 値域 $= [0,1]$.

$D(M) = \mathcal{P}/\sim$ を考える. 関係「$\precsim$」は, 一般には半順序でしかないが, M が因子環であるとすると全順序になる, *i.e.* 何時でも 2 つの射影子を比較することができる. 明らかに $D(M)$ に順序が導入される. 又, $D(M)$ は部分半群になる (直交する代表元 $\in \mathcal{P}$ がとれれば和が考えられる). M が非自明有限直和因子を持たないとすると, このことは常に可能で $D(M)$ は半群となる. 実際 Murray-von Neumann は M が因子環である時, $D(M)$ は半順序部分半群として次の様になることを示した.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n\text{-型} &\Longrightarrow D(M) \cong \{0,1,2,\cdots,n\}, \\
\mathrm{I}_\infty\text{-型} &\Longrightarrow D(M) \cong \{0,1,2,\cdots,\infty\}, \\
\mathrm{II}_1\text{-型} &\Longrightarrow D(M) \cong [0,1], \\
\mathrm{II}_\infty\text{-型} &\Longrightarrow D(M) \cong [0,\infty], \\
\mathrm{III}\text{-型} &\Longrightarrow D(M) \cong \{0,\infty\}.
\end{aligned}$$

このことから特に II-型の特徴が分かる. それは, 任意の射影子 p は

$$p = q + r, \quad r \sim q$$

と分解できる, *i.e.* 半分にできることである. これが II-型の大きな特徴である. III-型に関して言えば, 任意の 0 でない射影子は 1 に同値であると言っている.

トレースという概念が既に現われたが, トレースの観点から型を調べてみよう.

定義 3.19. 写像 $\phi : M_+ \to [0,\infty]$ が**重み** (weight) であるとは

$$\phi(A+B) = \phi(A) + \phi(B), \quad \phi(\lambda A) = \lambda\phi(A), A \in M_+, \lambda \geq 0$$

となることである. 但し $\infty + a = \infty$, $0 \cdot \infty = 0$ とみなす.

重み ϕ が**正規** (normal) であるとは,

$$\phi(\sup A_\alpha) = \sup \phi(A_\alpha), \quad A_\alpha \in M_+$$

が成立することである.

(注 3.20) 重みが正規であるということは, 測度論で有名な Fatou の補題のアナロジーが成立するということである. 勝手な重みに対して成立するわけではないから定義としている.

ϕ: 重みに対して $R_\phi = \{ A \in M \; ; \; \phi(A^*A) < \infty \}$ とおくと, R_ϕ は左イデアルになる. 何故ならば不等式

$$A^*x^*xA \leq \|x\|^2 A^*A$$

が成立するからである. M_ϕ で ${R_\phi}^* R_\phi$ の張る線形部分空間を表わす.

定義 3.21.

$$\phi: \text{有限} \iff M_\phi = M$$
$$\phi: \text{半有限} \iff M_\phi \subset M \quad \text{弱稠密.}$$

ϕ は M_ϕ 上の線形汎関数を定めるだけだが, ϕ がトレースであるとは,

$$\phi(A^*A) = \phi(AA^*), \quad A \in M_\phi$$

となることである. 以上の言葉を用いると,

定理 3.22.

M : III-型 $\iff$ 半有限正規トレースは存在しない.

M : 半有限 $\iff$ 任意の $A \geq 0$, $A \neq 0$ に対して半有限正規トレース τ で $\tau(A) \neq 0$ となるものが存在する.

M : 有限 $\iff$ 任意の $A \geq 0$, $A \neq 0$ に対して有限正規トレース τ で $\tau(A) \neq 0$ となるものが存在する.

4.4 モジュラー理論 (冨田-竹崎理論)

Connes の仕事に度々現われるモジュラー理論の概略を紹介しておこう.

大雑把に言って, M と可換子環 M' の関係を記述するのが, この理論である. 例で考えてみよう. 離散群 Γ に対して (今までと少し記号を変えて), $\mathcal{L}(\Gamma), \mathcal{R}(\Gamma)$ でそれぞれ $\ell^2(\Gamma)$ 上で左正則, 右正則表現で生成されるフォン・ノイマン環を表わすとする. この時, $\mathcal{R}(\Gamma) = \mathcal{L}(\Gamma)', \mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{R}(\Gamma)'$ が生成する.

ベクトル $\delta_e \in \ell^2(\Gamma)$ に注目しよう. δ_e は次の性質を持っている.

(1) $a \in \mathcal{L}(\Gamma),\ a\delta_e = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 0$,
(2) $[\mathcal{R}(\Gamma)\delta_e]$ ($= \mathcal{R}(\Gamma)\delta_e$ で生成される閉部分空間) $= \ell^2(\Gamma)$.

(1) が成立する時, δ_e はフォン・ノイマン環 $\mathcal{L}(\Gamma)$ の**分離ベクトル** (separating vector), (2) の時, δ_e は**生成ベクトル** (又は**巡回ベクトル**) (cyclic vector) と言う.

定理 4.1 (冨田). フォン・ノイマン環 $M \subset B(\mathcal{H})$ が分離巡回ベクトル u を持ったとする. この時, 全射的共役線形等長写像 $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, 可逆正値自己共役作用素 Δ が存在し,
(1) $J^2 = 1$, (2) $J\Delta^{it} = \Delta^{it}J$, (3) $Ju = \Delta u = u$,
(4) $JMJ = M'$, (5) $\Delta^{it}M\Delta^{-it} = M$,
が成立する.

Δ を u に対応する**モジュラー作用素** (modular operator) と言う. $\sigma_t(\cdot) = \Delta^{it}\cdot\Delta^{-it}$ は M の $*$ 自己同型となり, $\{\sigma_t\}$ は 1 径数自己同型群となる. $\{\sigma_t\}$ を**モジュラー自己同型群** (modular automorphism group) と言う. 冨田の定理は, M が分離巡回ベクトルを持てば自動的に時間発展を持つといっている. 勿論自明なものに退化してしまわない保証はない. その辺りを少し考察してみよう.

定義 4.2. フォン・ノイマン環 M 上の 1 径数自己同型群 $\{\alpha_t\}$ が与えられたとする. $\{\alpha_t\}$ が状態 ω に関して **KMS 条件** (KMS-condition)
(KMS は Kubo-Martin Schwinger の頭文字) を満たすとは, 任意の $a, b \in M$ に対して

$$\{\, z \in \mathbb{C}\,;\, 0 \leq \mathrm{Im} z \leq 1 \,\}$$

上の有界連続関数 f で, 領域の内部で正則であり

$$\begin{aligned} f(t) &= \omega(\alpha_t(a)b), \\ f(t+i) &= \omega(b\alpha_t(a)) \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R},$$

となるものが存在することである．

直観的に言えば, ω がトレース状態からどれだけ離れているかを計っている．

(σ_t) が分離巡回ベクトル u に対するモジュラー自己同型群だとすると当然予想される様に, (σ_t) は u の定めるベクトル状態に関してモジュラー条件をみたす．

命題 4.3. 1 径数自己同型群 (α_t) が状態 ω に関してモジュラー条件をみたすとする．もし $\alpha_t = 1\ (t \in \mathbb{R})$ ならば ω はトレース状態であり, 逆に, ω が忠実, トレース状態だとすると, 全ての t に対して $\alpha_t = 1$ となる．

最初の主張も実は自明ではない．以下紹介するように複素関数論の結果を必要とする．

任意の t に対して $\alpha_t = 1$ とする．$\omega(ab) = \omega(ba)$ が任意の a, b に対して成立することを示すわけだが, 与えられた条件は適当な g があって $g(t) = \omega(\alpha_t(a)b), g(t+i) = \omega(b\alpha_t(a))$ が成立するということである．仮定により, $g(t), g(t+i)$ はそれぞれ定数．そこで適当な数を g にかけて $g(t)$ は実数としてよい．すると Schwartz の鏡像の原理により g は領域

$$\{\, z \in \mathbb{C} : -1 \leq \mathrm{Im} z \leq 1 \,\}$$

上に拡張し, 内部に正則．領域内部の実軸上で定数だから全体で定数．したがって

$$g(0) = \omega(ab) = g(i) = \omega(ba).$$

逆の証明は, 任意の α_t に対して

$$\omega((\alpha_t(a) - a)^*(\alpha_t(a) - a)) = 0$$

を示すことにより与えられる．

ω を忠実な状態として GNS-構成を考えると, ω はベクトル状態であり, 上の議論により, 少なくとも 1 つ ω に関してモジュラー条件を満たす自己同型群が存在する．

定理 4.4. ω を忠実正規状態とする．この時 ω に関してモジュラー条件を満たす 1-径数自己同型群は一意的に存在する．

さて, ω, ω' を忠実正規状態とする. ω, ω' に関するモジュラー自己同型群をそれぞれ $\{{\sigma_t}^{\omega}\}, \{{\sigma_t}^{\omega'}\}$ とする.

定理 4.5. 強位相で連続な写像 $t \mapsto u_t \in U(M)$ $(= M$ のユニタリー) が存在して

$$
{\sigma_t}^{\omega}(a) = u_t {\sigma_t}^{\omega'}(a) {u_t}^*,
$$
$$
u_{s+t} = u_s {\sigma_s}^{\omega'}(u_t)
$$

が成立する. この時 $\{{\sigma_t}^{\omega}\}$ と $\{{\sigma_t}^{\omega'}\}$ は**コサイクル共役** (cocycle conjugate) であると言う.

特に ω' がトレースならば, ${\sigma_t}^{\omega}$ は内部自己同型となる.

上の定理 4.5 は, M がトレース状態を持たない時 $\{\sigma_t\}$ は面白いと主張している.

$\{\sigma_t\}$ を状態 ω に対するモジュラー自己同型群とする. フォン・ノイマン接合積 $M \rtimes_\sigma \mathbb{R}$ と双対作用 $\hat{\sigma}$ が考えられるが上の議論から, ω のとり方によらず, 空間的同型を除いて一意的にフォン・ノイマン環が決まる.

一般に, $M \rtimes_\sigma \mathbb{R}$ は半有限であり, M 自身が半有限だとすると, $M \rtimes_\sigma \mathbb{R}$ は $M \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R})$ と分解してしまう. (ここで $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ はリー群 $\mathbb{R}$ の群フォン・ノイマン環である.) したがって半有限 M に対して $M \rtimes_\sigma \mathbb{R}$ を考えることは意味がない.

定理 4.6 (竹崎). M が III-型 $\Longrightarrow$ $M \rtimes_\sigma \mathbb{R}$ は II_∞-型. 又

$$
(M \rtimes_\sigma \mathbb{R}) \rtimes_{\hat{\sigma}} \hat{\mathbb{R}} \cong M \otimes B(L^2(\mathbb{R})) \ (*\text{同型})
$$

が存在する.

上の定理は**竹崎双対定理**と呼ばれるものであり, III-型が「canonical」な形で II_∞-型の接合積として書けると主張している.

4.5 Dixmier トレース

$B(\mathcal{H})$ 上で半有限正規トレースは通常の Tr のみであることは, 良く知られた事実である. 正規性を落とすと他に色々存在する. 通常 Dixmier トレースと呼ばれている. その中のある 1 つが特に非可換幾何において重要である.

$\mathbb{R}$ 上の有界実関数の全体を B_1 とする. G を "$ax+b$"-群とする. G は B_1 に自然に作用する. B_1 上には正値線形汎関数 m で

(1) m は G-不変, (2) $m(1)=1$

をみたすものが存在する. 正値性と G-不変性により, $f\in B_1$ がコンパクトな台を持てば $m(f)=0$ となることが示される.

$B=\{S=(s_1,s_2,\cdots)\ ;\ s_j\in\mathbb{R},\ (s_j)$ 有界列$\}$ を考える.

補題 5.1 (Dixmier). B 上の線形汎関数 $s\mapsto \mathrm{Lim}\ s$ で次の条件を満たすものが存在する:

(1) $s\geq 0 \implies \mathrm{Lim}\ s\geq 0$, (2)$\mathrm{Lim}\ (1,1,\cdots)=1$,

(2) $\mathrm{Lim}\ (s_1,s_2,s_3,\cdots)=\mathrm{Lim}\ (s_1,s_1,s_2,s_2,s_3,\cdots)$,

(3) $s,t\in B,\ s_n-t_n\to 0 \implies \mathrm{Lim}\ s=\mathrm{Lim}\ t$.

Lim の構成は, $s\in B$ に対して $f_s\in B_1$ を

$$f_s(x)=s_i,\quad x\in[i-1,i)\cup(-i,-i+1]$$

で定め, $\mathrm{Lim}\ s=m(f_s)$ とする. (1), (2) は直ち. (3) は m の G-不変性, (4) は正値性から Lim の B 上でのノルム連続性が出ることによる.

さて, $\mathcal{H}$ を可分ヒルベルト空間とする. $T\in\mathcal{K}(\mathcal{H})_+$ の特性値を

$$\lambda_1(T)\geq\lambda_2(T)\geq\cdots\searrow 0$$

としておく.

Dixmier トレースを作るには, 上の補題の Lim の他にもう 1 つデータが要る. $a_n>0$ なる実数の列 $(a_1,a_2,\cdots)$ で

$$a_n\to\infty,\quad a_1\geq a_2-a_1,\cdots,a_{n+1}-a_n\geq a_{n+2}-a_{n+1},\ n\geqslant 1$$

かつ

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \to 1$$

となるものを 1 つ固定する.

$$P = \{\, T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_+ \,;\quad n \to \infty \text{ の時},\quad \lambda_1(T) + \cdots + \lambda_n(T) = O(a_n) \,\}$$

とおく. $S, T \in P \Longrightarrow S + T \in P$ が示され, $T \in P$ に対して

$$S_n(T) = \frac{1}{a_n}(\lambda_1(T) + \cdots + \lambda_n(T))$$
$$\phi(T) = \mathrm{Lim}\ (S_n(T)) \in [0, \infty]$$

とすれば, ϕ はトレースとなる. もし T が有限階数ならば $\phi(T) = 0$.

特に $a_n = \log n$ としたものが Connes により用いられている.

定義 5.2 (Connes). $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ が**位数 (order)** $\alpha > 0$ **の無限小** $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ T の特性値を $\lambda_1(T) \geq \lambda_2(T) \geq \cdots \searrow 0$ とした時

$$n \to \infty \text{ の時},\quad \lambda_n(T) = O(n^{-\alpha}).$$

$\alpha = 1$ の時を考えよう. この時, $n \to \infty$ に対して

$$\lambda_1(T) + \cdots + \lambda_n(T) \sim 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \log n.$$

即ち $\lambda_1(T) + \cdots + \lambda_n(T) = O(\log n)$.
したがって $\dfrac{1}{\log n}(\lambda_1(T) + \cdots + \lambda_n(T))$ は有界.

今, T' を位数 > 1 である無限小とすると,

$$\frac{1}{\log n}(\lambda_1(T') + \cdots + \lambda_n(T')) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

したがって Dixmier トレースは位数が丁度 1 のものだけを拾っていることが分かる. この性質が非可換幾何におけるポイントとなる.

4.6 Appendix. ヒルベルト空間, C^* 環の連続場, 可測場

連続場. 位相空間 Ω をパラメーターとする, バナッハ空間の族 $\mathcal{B} = (\, B_\omega)_{\omega \in \Omega}$ を考える.

定義 A.1. $\Theta \subset \prod B_\omega$ とする. 対 $(\mathcal{B}, \Theta)$ が次の条件を満たす時, $(\mathcal{B}, \Theta)$ は Ω 上の**バナッハ空間の連続場** (continuous field of Banach spaces) であると言う:

(1) Θ は $\prod B_\omega$ の線形部分空間,

(2) 各点 $\omega \in \Omega$ で $\{ x(\omega) \, ; \, x \in \Theta \}$ は B_ω で稠密,

(3) 各 $x \in \Theta$ に対して, 写像 $\omega \mapsto \|x(\omega)\|$ は連続,

(4) $x \in \prod B_\omega$ とする. もし, 各点 $\omega \in \Omega$ で, 任意に与えられた $\epsilon > 0$ に対して, 適当な $x' \in \Theta$ が存在して, ω のある近傍で $\| x(\omega) - x'(\omega) \| \leq \epsilon$ となったとすると, 実は x は Θ に属する.

(注 A.2) 定義 A.1, (4) は「Θ の元により局所的に一様に近似されるなら, それ自身 Θ の元である」ことを要求している. 一種の完備性.

上の注から推察されるように, (1)-(3) を満たす族 $\Theta_0 \subset \prod B_\omega$ が在れば, Θ_0 の元で局所的に一様近似されるベクトル場全体を Θ とすれば, $\Theta_0 \subset \Theta$ であり, Θ は (1)-(4) を満たす. したがって, (1)-(3) を満たす Θ_0 を見つけることが本質である.

(ポイント A.3) 連続場を考える際, もし $\coprod B_\omega$ に適当な位相が入れば, 自然な写像 $\coprod B_\omega \to \Omega$ に "ファイバー空間" もどきの構造が入り, 連続な断面の全体が Θ となる筈である. 然しながら, (B_ω) は対ごとに異なる場合もあり, $\coprod B_\omega$ に位相を入れにくい. そこで, 望ましい性質を持つベクトル場 (断面) の族を指定し, それをもって連続性があたえられたとみなそう, と言うのが基本的な考え方である.

定義 A.1 において, 各 B_ω が特にヒルベルト空間であるとしよう. この場合**ヒルベルト空間の連続場**と言う. この時, $x, y \in \Theta$ に対して, 写像

$$\omega \mapsto \langle \, x(\omega) \, , \, y(\omega) \, \rangle$$

は自動的に連続となる. 理由は簡単で, ノルムと内積を結ぶ等式

$$\langle v \, , w \, \rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - i\|v+iw\,|^2 + i\|v-iw\|^2)$$

が在るからである.

定義 A.2. 定義 A.1 において各 B_ω が C^* 環だとしよう. この時ベクトル場の全

体 $\coprod B_\omega$ は $*$ 多元環の構造を持つ. Θ が $\coprod B_\omega$ の $*$ 部分多元環である時, $\Theta \subset \prod B_\omega$ は C^* **環の連続場** (continuous field of C^*-algebras) と呼ばれる.

バナッハ空間の連続場の場合と同様に, C^* 環の族 (B_ω) に対して $*$ 部分多元環 $\Theta_0 \subset \coprod B_\omega$ で (1)-(3) を満たすものがあれば、(1)-(4) を満たす $\Theta \supset \Theta_0$ が一意的に定まる.

可測場. ヒルベルト空間の族 $\mathcal{H} = (H_\omega)$ を考えよう. 可測場を考えたい訳だから, パラメーター空間 Ω を測度空間とし, 条件 (3) は「連続」を「可測」で置き換えればよい. 問題は, (4) の「完備性」をどう解釈するかである.

定義 A.3. $\Theta \subset \prod H_\omega$ とする. 対 $(\mathcal{H}, \Theta)$ が次の条件を満たす時, $(\mathcal{H}, \Theta)$ は Ω 上の**ヒルベルト空間の可測場** (measurable field of Hilbert spaces) であると言う:

(1) Θ は $\prod H_\omega$ の線形部分空間,

(2) 各点 $\omega \in \Omega$ で $\{ x(\omega) \,;\, x \in \Theta \}$ は H_ω で稠密,

(3) 各 $x \in \Theta$ に対して, 写像 $\omega \mapsto \|x(\omega)\|$ は可測,

(4) $x \in \prod H_\omega$ とする. もし, 全ての $y \in \Theta$ に対して, 関数 $\Omega \mapsto \langle x(\omega)\, , y(\omega)\, \rangle$ が可測ならば, 実は x は Θ に属する.

第 2 節で紹介したヒルベルト空間の可測場は「可算性」を持っている. $(\mathcal{H}, \Theta)$ を可測場としよう. 部分集合 $\Lambda \subset \Theta$ を考える. 各 $\omega \in \Omega$ において $\{ \xi(\omega) \,;\, \xi \in \Lambda \}$ の生成する線形部分空間が H_ω において稠密となる時 Λ は**全的** (total) あるいは**線形稠密** (linearly dense) であると言う. 第 2 節に現れるヒルベルト空間の可測場は, 可算線形稠密な $\Lambda \subset \Theta$ を持つ.

第5章　サイクリック・コホモロジー

5.1　定義と例

A を C^* 環, τ を A 上のトレースとする. 行列上の通常のトレースと組み合わせて, $M_n(A)$ 上のトレース τ_n が次式で定まる:

$$\tau_n(a) = \sum_{i=1}^{n} \tau(a_{ii}), \quad a = (a_{ij}) \in M_n(A).$$

トレースであることから, 射影子 $p, q \in M_n(A)$ が安定同値ならば $\tau_n(p) = \tau_n(q)$ が得られ, 写像

$$\tau_* : K_0(A) \longrightarrow \mathbb{R}$$

が導かれる. $K_0(A)$ での和の定義が射影子の直和であることから, τ_* は加法的であることが分かる. このようにしてトレースが在れば $K_0(A)$ から数値的不変量が取り出せる. 然しながらトレースは何時も存在するとは限らない. 一つ解り易い例をみよう.

$\mathcal{H}$ を可算無限次元ヒルベルト空間とする. 自然数 $n \geq 2$ に対して $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ で

(a)　$\mathcal{H}_j$ 無限次元,

(b)　$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$

となるものがとれる. $S_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_j$ を等長写像とすると

(c)　$S_j^* S_j = 1$,

(d)　$S_1 S_1^* + \cdots S_n S_n^* = 1$.

$B(\mathcal{H})$ で $S_1, \ldots, S_n$ により生成される C^* 環を $\mathcal{O}_n$ と記す. $\mathcal{O}_n$ はトレースを持たない. 仮にトレース τ があったとしよう. $\tau(1) = \lambda$ とおけば

$$\lambda = \tau(1) = \sum \tau(S_j S_j^*) = \sum \tau(S_j^* S_j) = \sum \tau(1) = n\lambda.$$

したがって $\lambda = 0$.

すると　τ の正値性より, $0 \le a \le 1$ なる任意の元 $a \in \mathcal{O}_n$ に対して $\tau(a) = 0$. このことから任意の $a \in \mathcal{O}_n$ に対して $\tau(a) = 0$ が示される.

(注 1.1)　$\mathcal{O}_n$ は Cuntz 環と呼ばれ, 作用素環論において非常に重要な C^* 環である. 最近では Wavelet の理論とも関わりあっている.

もう一つ例を見ておこう. $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{R})$ を種数が 2 以上の閉リーマン面の基本群とし, $PSL_2(\mathbb{R})$ の S^1 への一次分数変換を通しての $C(S^1)$ への作用を α とする. この時, 被約接合積 $C(S^1) \rtimes_{\alpha,red} \Gamma$ はトレースを持たない. 何故ならば, トレースは S^1 上の Γ 不変測度に対応し, 後者が存在しないからである.

(注 1.2)　C^* 環 $C(S^1) \rtimes_{\alpha,red} \Gamma$ は負定曲率を持った閉リーマン面の単位円束上の Anosov 葉層の C^* 環と KK-同値である. 実際は更に強い, **強森田同値** (strong Morita equivalence) となっている.

以上の例のように非常に重要な例でありながらトレースを持たないものが存在する. むしろトレースを持つものの方が少数派だといえるであろう. では, そのような C^* 環に対して, 何か K_0 から数値的不変量を取り出す術はないであろうか. 実はそれがサイクリック・コサイクルなのである. 簡単な例を考える.

k を偶数とし, $M_n(\mathbb{C})$ 上の $(k+1)$ 線形汎関数 ϕ_k を

$$\phi_k(X_0, \ldots, X_k) \;=\; \mathrm{tr}(X_0 \cdots X_k)$$

で定義すると

(1) $\phi_k(X_k, X_0, \ldots, X_{k-1}) \;=\; \phi_k(X_0, \ldots, X_k)$,

(2) $\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \phi_k(X_0, \ldots, X_j X_{j+1}, \ldots, X_{k+1})$
$$+(-1)^{k+1}\phi_k(X_{k+1}X_0, X_1, \ldots, X_k) = 0$$

が成立する. この性質を抽象化したものがサイクリック・コサイクルの概念である. 定義の前に, 上で考えた ϕ_k が交代形式ではない点に注意しよう. 交代形式はトポロジー, 幾何学ではありふれたものであるが, 行列環のような基本的なものの上に交代形式ではない面白い多重線形写像が在るというわけである.

定義 1.3. A を $\mathbb{C}$ 上の多元環, ϕ を A 上の $(k+1)$-線形写像とする. $a_0, \ldots, a_k \in A$ に対して

$$\phi_k(a_0, \ldots, a_k) = (-1)^k \phi_k(a_k, a_0, \ldots, a_{k-1})$$

となる時, ϕ は**サイクリック・k-コチェイン** (cyclic k-cochain) と呼ばれる.

サイクリック・k-コチェインの全体を $C_\lambda^k(A)$ で表わす. $b : C_\lambda^k(A) \to C_\lambda^{k+1}(A)$ を次式で定義する:

$$(b\phi)(a_0, \ldots, a_{k+1}) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \phi_k(\ a_0, \ldots, a_j a_{j+1}, \ldots, a_{k+1}) + (\ -1)^{k+1} \phi_k(a_{k+1} a_0, a_1, \ldots, a_k).$$

この時, $b^2 = 0$ が成立し, $\{C_\lambda^k(A), b\}$ はコチェイン複体になる. $Z_\lambda^k(A) = \{\ \phi \in C_\lambda^k(A)\ ;\ b\phi = 0\ \}$ の元を **k-コサイクル** (k-cocycle) という.

定義 1.4. $\{\ C_\lambda^*(A), b\ \}$ のコホモロジーを $H_\lambda^*(A)$ と記し, A の**サイクリック・コホモロジー** (cyclic cohomology of A) と呼ぶ.

以下サイクリック・コホモロジーの基本的性質を解説する. 此処では幾何学との関連あるいは非可換幾何を念頭において考えることにする. したがって純ホモロジー代数的側面については触れないことにする. その点に興味のある読者は参考文献の [31] 参照.

サイクリック・コホモロジーの例を調べよう.

(例 1.5) $A = \mathbb{C}$ とする. この時, 任意の $\phi \in C_\lambda^k(A)$ は値 $\phi(1, \ldots, 1)$ により定まり, 巡回性より $C_\lambda^{2k+1}(A) = 0$ となる. したがってコチェイン複体は $\mathbb{C} \to 0 \to \mathbb{C} \to \cdots$ の形となる. よって

$$H_\lambda^{2k}(A) \simeq \mathbb{C}\ ,\ H_\lambda^{2k+1}(A) = 0.$$

(例 1.6) A を任意の $\mathbb{C}$-多元環, τ を A 上のトレースの性質 (*i.e.* $\tau(ab) = \tau(ba)$) を持つ汎関数, $\delta\ :\ A \to A$ を微分で $\tau(\delta(a)) = 0, a \in A$ となるものとする. この時

$$(a_0, a_1) \longmapsto \tau(a_0 \delta(a_1))$$

はサイクリック 1-コサイクルになる.

より一般に, $\delta_1, \ldots, \delta_n$ をお互いに交換可能な微分として, $\tau(\delta_j(a)) = 0, a \in A$ が成立するとしよう. この時

$$\phi(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \tau(\, a_0 \delta_{\sigma(1)}(a_1) \cdots \delta_{\sigma(n)}(a_n)\,)$$

はサイクリック・n-コサイクル.

後で使う具体例を導入しよう.

(例 1.7) $\mathbb{R}^n$ 上の非有界作用素 $M_j = x_j, D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, n$ を考える. 急減少関数 $\in \mathcal{S}(\,\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,)$ を積分核とする $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の積分作用素の全体を $\mathcal{K}^\infty$ とする. $\mathcal{K}^\infty$ は $\mathcal{L}^1(L^2(\mathbb{R}^n))$ の $*$ 部分代数である. $\mathcal{K}^\infty$ 上の微分 $\delta_1, \ldots, \delta_{2n}$ が

$$\delta_{2j}(a) = [M_j, a],\ \delta_{2j-1}(a) = [D_j, a],\ j = 1, \ldots, n,\ a \in \mathcal{K}^\infty$$

で定義され, $\delta_j \delta_k = \delta_k \delta_j$, さらに $\mathrm{Tr}(\delta_j(a)) = 0, a \in \mathcal{K}^\infty$. $a^0, \cdots a^{2n} \in \mathcal{K}^\infty$ に対して

$$\omega(a^0, \cdots, a^{2n}) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) \mathrm{Tr}(a^0 \delta_{\sigma(1)}(a^1) \cdots \delta_{\sigma(2n)}(a^{2n})\,)$$

とおけば ω はサイクリック・2n-コサイクルである.

(例 1.8) M を向き付けられた閉多様体とし, $f_0, \ldots, f_n \in C^\infty(M)$ に対して

$$\omega(\, f_0, \ldots, f_n\,) = \int_M f_0 df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$$

とおけば, ω は $C^\infty(M)$ 上のサイクリック・n-コサイクル.

例 1.8 のように $\mathbb{C}$-代数 A が位相代数である時 (この例では Fréchet 代数) には連続コチェインを考えるのが自然であろう. ω は連続コチェインである. 例 1.8 で $M = S^1$ とする. $f_0, f_1 \in C^\infty(S^1)$ が実数値である時, 写像 $x \mapsto (f_0(x), f_1(x)) \in \mathbb{R}^2$ による S^1 の像が囲む $\mathbb{R}^2$ 内の領域の符号付き面積と $\omega(f_0, f_1)$ は一致する (Stokes の定理).

さて $M_n(\mathbb{C})$ に戻ろう. 各 $2n$-コサイクル ϕ_{2n} は $\phi_0 = \mathrm{tr}$ と $M_n(\mathbb{C})$ の元を掛けるという操作により構成される. こう見ると ϕ_{2n} と ϕ_{2n+2} を関連づける何らかの操作が存在するのではないかと考えられる. 実際, 任意の A に対して線形写像

$$S \;:\; H^n_\lambda(A) \;\longrightarrow\; H^{n+2}_\lambda(A)$$

が存在し, $S\phi_{2n} = C_n\phi_{2n+2}$ (ここで現われる C_n は次元 n によって定まる定数で, 後で述べる K-群とのペアリングに現われる定数と関連している).

定義 1.9.

$$H^{ev}(A) = \lim_{\to} H_\lambda^{2n}(A)\ ,\ H^{odd}(A) = \lim_{\to} H_\lambda^{2n+1}(A)$$

とおき $H^*(A) = H^{ev} \oplus H^{odd}(A)$ を A の**安定サイクリック・コホモロジー** (stabilized cyclic cohomology of A) という.

(例 1.10) $A = C^\infty(M)(M : C^\infty$-多様体) として連続サイクリック・コホモロジーを考えると (Connes)

$$H^{ev}(C^\infty(M)) = H_0^{DR}(M : \mathbb{C}) \oplus H_2^{DR}(M : \mathbb{C}) \oplus \cdots ,$$
$$H^{odd}(C^\infty(M)) = H_1^{DR}(M : \mathbb{C}) \oplus H_3^{DR}(M : \mathbb{C}) \oplus \cdots ,$$

ここで $H_j^{DR}(M : \mathbb{C})$ は j-次元 de Rham ホモロジーである.

(例 1.11) X コンパクト・ハウスドルフ空間として C^* 環 $C(X)$ を考えると $H_\lambda^0(C(X))$ = 複素 Radon 測度全体, $S : H_\lambda^{2n}(C(X)) \to H_\lambda^{2n+2}(C(X))$ は同型であり $H_\lambda^{2n+1}(C(X)) = \{0\}, n = 0, 1, 2, \ldots$. したがって $H^{ev}(C(X))$ = 複素 Radon 測度全体, $H^{odd}(C(X)) = 0$.

(例 1.12) 例 1.11 を一般化して A を 1 を持つ核型 C^* 環とすると $H_\lambda^{2n+1}(A) = 0, n = 0, 1, \ldots$ であり $S : H_\lambda^{2n}(A) \to H_\lambda^{2n+2}(A)$ は同型である. したがってこの場合

$$H^{ev}(A) = H_\lambda^0(A), H^{odd}(A) = 0.$$

サイクリック・コホモロジーに関する代数的操作を定義しておこう. $A, B : \mathbb{C}$-多元環に対して, カップ積

$$H_\lambda^m(A) \otimes H_\lambda^n(B) \longrightarrow H_\lambda^{m+n}(A \otimes B)$$

が定義される.

この写像の構成 etc は結構面倒である. 詳細は [9] でみつけることができる. $\omega \in H_\lambda^m(A), \eta \in H_\lambda^n(B)$ に対して, 上の写像による $H_\lambda^{m+n}(A \otimes B)$ における像を ω と η の**カップ積**と呼び $\omega\sharp\eta$ と記す.

カップ積の重要な例を見ておこう.

(例 1.13) $B = \mathbb{C}$ として $H_\lambda^2(\mathbb{C})$ の生成元を $\sigma(1,1,1) = 2\pi i$ ととる. 先に紹介した S は, カップ積

$$\begin{array}{ccc} H_\lambda^m(A) & \longrightarrow & H_\lambda^{m+2}(A) \\ \omega & \longmapsto & \omega\sharp\sigma \end{array}$$

の定数倍である.

(例 1.14) $B = M_n(\mathbb{C})$ とすると, $A \otimes B = M_n(A)$ だから, $\mathrm{tr} \in H_\lambda^0(B)$ とカップ積をとることにより次の写像が定まる：

$$\begin{array}{ccc} H_\lambda^k(A) & \longrightarrow & H_\lambda^k(M_n(A)) \\ \phi & \longmapsto & \phi\sharp\mathrm{tr}. \end{array}$$

この $\phi\sharp\mathrm{tr}$ は次の簡単な記述を持つ.

$$(\phi\sharp\mathrm{tr})(a^0, \ldots, a^k) = \sum_{j_0,\ldots,j_k} \phi(a^0_{j_0 j_1}, a^1_{j_1 j_2}, \ldots, a^k_{j_k j_0}),$$

ここで $a^0, \ldots, a^k \in M_n(A), a^i_{pq}$ は a^i の (p,q)-成分である.

5.2 K-理論との関係

第一節の冒頭でトレース τ があれば加法的 $\tau_* : K_0(A) \to \mathbb{C}$ が得られることを見た. トレースと言うのは A 上のサイクリック・0-コサイクルである. トレースが K_0 上に定める加法的写像を一般化して

定義 2.1 $[e] \in K_0^{alg}(A), [\phi] \in H_\lambda^{2n}(A)$ に対して

$$\langle [e], [\phi] \rangle = (2\pi i)^{-n}\,(n!)^{-n}(\phi\sharp\mathrm{tr})(e, \ldots, e)$$

とおくと, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は双一次写像 (正確には, 第 1 変数に関して加法的, 第 2 変数に関して $\mathbb{C}$-線形) を定め, $\langle [e], S[\phi] \rangle = \langle [e], [\phi] \rangle$ が成立する.

上の定義式から $[e]$ に関して加法的であるとの主張に疑問を持つ読者もいるかもしれない. $K_0^{alg}(A)$ での和の定義と $\phi\sharp\mathrm{tr}$ の記述を思い出せば, $[e]$ に関して加法的であることが分かる.

命題 2.1 で与えられたペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が非退化であるかどうかは多元環 A による. 例えば $X = S^2$ を考えると, $K_0(C(S^2)) \cong K^0(S^2) \cong \mathbb{Z}^2$. 生成元は自明直線束の類と Bott 束の類である. $H_\lambda^0(C(S^2))$ は Radon 測度の全体, したがって任意の元は確率測度の複素線形和として表わされる. 任意のベクトル束 E に対して

$$\langle[E],[\mu]\rangle = \dim E,$$

が全ての確率測度 μ に対して成立する. 即ちこの場合サイクリック・コホモロジーはベクトル束の次元しか読み取らない. したがってペアリングは退化している.

では $A = C(S^2)$ を考える代わりに $C^\infty(S^2)$ を考えてみるとどうなるであろうか. 自然な包含写像 $C^\infty(S^2) \hookrightarrow C(S^2)$ が同型

$$K_0^{alg}(C^\infty(S^2)) \cong K_0^{alg}(C(S^2)) \cong K_0(C(S^2))$$

を導くことがしられている. このことは各類 $[E]$ が C^∞-ベクトル束によって代表されることに対応している. 代数的には $C^\infty(S^2)$ が $C(S^2)$ の中で**正則的に閉** (holomorphically closed) であるということによる.

定義 2.2　A は 1 を持つ C^* 環, $\mathcal{A}$ を稠密な $*$ 部分代数で, $1 \in \mathcal{A}$ だとする. $\mathcal{A}$ が**正則関数解析で閉じている** (closed under holomorphic functional calculus), 又は**正則的に閉** (holomorphically closed) であるとは任意の自然数 n に対して, もし $a \in M_n(\mathcal{A})$ が $M_n(A)$ で可逆ならば, 実は $a^{-1} \in M_n(\mathcal{A})$ となることである.

補題 2.3　もし $\mathcal{A}$ が A 内で正則的に閉ならば, 自然な包含写像 $\mathcal{A} \hookrightarrow A$ は同型

$$K_0^{alg}(\mathcal{A}) \cong K_0(A)$$

を導く.

以上の議論をまとめておく: M をコンパクト多様体とするとペアリング

$$\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle : K^0(M) \times H^{ev}(C^\infty(M)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

が得られた. 以上は偶コサイクルに関してであったが, 奇コサイクルについてはどうなるであろうか? 我々は現在までのところに C^* 環に対してのみ $K_1(A)$ を定義した. A が核型だとすると, $H_\lambda^{2n+1}(A) = 0$. したっがて $K_1(A)$ と奇コサイクルのペアリングは意味をなさない. そこで $K_1(A)$ をより広いクラスの $\mathbb{C}$ 代数に対して定義することを考えると, 第2章定義 2.1 はバナッハ環に対して意味をなすことが分かる.

命題 2.4 次の公式は双一次ペアリング $K_1(A) \times H_\lambda^{2m-1}(A) \to \mathbb{C}$ を定める:

$$\langle [u], [\phi] \rangle = \frac{1}{(2\pi i)^m (\frac{m-1}{2}) \cdots (\frac{1}{2})} (\phi \sharp \mathrm{tr})(u^{-1} - 1, u - 1, u^{-1} - 1, \cdots, u - 1).$$

さらに $\langle [u], S[\phi] \rangle = \langle [u], [\phi] \rangle$ が成立. したがって $K_1(A)$ と $H^{odd}(A)$ のペアリングが定義される.

$C^\infty(M)$ はバナッハ環ではなく Fréchet 代数である. 一般に, $\mathcal{A}$ を Fréchet 代数とした時の (位相的) K-群は以下のように定義する: $\mathcal{A}$ が 1 を持つ場合に定義すればよい. 先ず, 群 $GL_\infty(\mathcal{A})$ を考える. $u, v \in GL_\infty(\mathcal{A})$ が同値 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 区分的 C^1 である道 u_t が存在して $u_0 = u, u_1 = v$. $K_1(\mathcal{A}) := GL_\infty(\mathcal{A})/$同値関係.

このような直接的定義をしなければならない理由は, 一般に $\mathcal{A}$ の可逆元の全体 $GL(\mathcal{A})$ が位相群にならないことである. 例えば, $C^\infty(S^1)$ の元 f が可逆だったとする, *i.e.* f は決して 0 にならないとする. この時 $1/f$ の各セミノルムを f のセミノルムで評価することはできない.

(例 2.5) $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ の場合を考えると, サイクリック・コホモロジーと K-群のペアリング

$$K_*(C^\infty(M)) \times H^*(C^\infty(M)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

は自然な同型 $K_*(C^\infty(M)) \cong K^*(M), H^*(C^\infty(M)) \cong H_*^{DR}(M : \mathbb{C})$ を通してペアリング

$$K^*(M) \times H_*^{DR}(M : \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

となる. このペアリングは Chern 指標 $K^*(M) \to H^*(M : \mathbb{Q})$ を通してホモロジー類の上で値をとるトポロジストにはお馴染みのものである.

以上サイクリック・コホモロジーをコホモロジー理論として解説するために $\mathbb{C}$-多元環から出発したが, サイクリック・コホモロジーは C^* 環の K-群から数値的不変

量を取り出す道具として導入した経緯を思い起こせば, 定義域が正則的に閉であるサイクリック・コサイクルはその為の役割を果たすことができる. 別の言葉で言えば K-群に関するデータを得ようとすることが目的ならば, ある特定の正則的閉部分 $*$ 代数を考えるのではなく, 種々のコサイクルで定義域が正則的閉であるものなら皆役に立つ可能性がある. 非可換幾何学では,「初めにコサイクルありき」というわけである. 何か綺麗な例をさがそう.

$C(S^1)\rtimes_{\alpha,red}\Gamma$ を第5章 (注 1.1) の直ぐ後の例の C^* 環としよう. Connes は Γ 上の $C^\infty(S^1)$ に値を持つ群 2-コサイクルを用いて Godbillon-Vey 類に対応するサイクリック・コサイクルを作った. 先ず稠密な $*$ 部分代数 $C_c^\infty(S^1\times\Gamma)$ 上で代数的に 2-コサイクルを構成し, それが正則的閉である $*$ 部分代数 $\mathcal{A}$ に拡張することを示した. $\mathcal{A}$ はあるノルムによる $C_c^\infty(S^1\times\Gamma)$ の閉包という形で得られるから, 分かったような分かってないようなものである. ポイントは「$H^*(\mathcal{A})$ なんかは計算のしようもないが $\mathcal{A}$ 上には面白いコサイクルがあり, それが $K_0(\mathcal{A})$ 上の加法的写像を導く」ということである. $\mathcal{A}$ と $A=C(S^1)\rtimes_{\alpha,red}\Gamma$ との関係は $C^\infty(M)$ と $C(M)$ の関係に類似している. この辺りに非可換微分位相幾何学の精神がよく現われている. 位相的データ $K_0(A)$ を知る為に「微分構造」$\mathcal{A}$ を補助的に使うのである.

サイクリック・コサイクルが組織的に作られるメカニズムとして Fredholm 加群の概念がある. 詳しいことは, 例えば [9] 参照. この他, entire cyclic cohomology, それと関連した θ-総和可能 Fredholm 加群等, 大事な概念があることに注意を喚起してこの章を終えることにする.

第6章　変形量子化とその応用

今まで見てきた C^* 環論 K-理論, サイクリック・コホモロジーが旨く噛み合った例をこの章で紹介しよう.

6.1　変形量子化

変形量子化は可換多元環の変形理論（deformation theory）と物理学における量子化（quantization）という2つの概念の融合である.

M. Gerstenhaber [19] は解析的変形理論である複素多様体の変形理論の代数的カウンターパートとしての変形理論を考えた.

A を多元環として、A を係数とする形式的巾級数環 $A[[t]]$ を考える. $A[[t]]$ 上の結合律を満たす積

$$(1.1)\qquad f : A[[t]] \times A[[t]] \longrightarrow A[[t]]$$

で、$a, b \in A \subset A[[t]]$ に対して

$$f(a,b) = F_0(a,b) + tF_1(a,b) + t^2F_2(a,b) + \cdots$$

と書く時、$F_0(a,b) = ab$(A における元々の積) となるものを A の**変形** (deformation) という. 積が結合律を満たすというのは、$a, b, c \in A$ に対して、等式

$$aF_1(b,c) - F_1(ab,c) + F_1(a,bc) - F_(a,b)c = 0$$

が成立することを意味する. これは F_1 が A のそれ自身を係数とする Hochschild 2-コサイクルであると言っている. F_1 を、この変形の**無限小変形** (infinitesimal deformation) と言う. 又、変形 f を A の F_1 の方向への変形とも言う.

一方、お題目風に言えば、量子化とは古典系から量子系へ移行するプロセスのこと

で、数学的には、関数という可換な対象に、作用素という非可換な対象を、「対応原理」(Correspondence Principle) が成立するように対応させる手続きのことである.

復習： C^∞ 多様体 M がポアソン多様体であるとは、歪対称双一次写像

$$\{\ ,\ \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

で、以下の性質を持つものが存在することである：

(1) $\{\ ,\ \}$ は各変数に関して微分である、

(2)（ヤコビ等式） $\{a,\{b,c\}\} + \{b,\{c,a\}\} + \{c,\{a,b\}\} = 0$, $a,b,c \in C^\infty(M)$.

$\{\ ,\ \}$ は**ポアソン括弧積** (Poisson bracket) と呼ばれる.

シンプレクティック多様体はシンプレクティック構造から自然に定まるポアソン括弧積によりポアソン多様体となる.

定義 1.2. M をポアソン多様体とする. $C^\infty(M)$ の変形

$$f : A[[t]] \times A[[t]] \longrightarrow A[[t]]$$

で $f(a,b) - f(b,a) = it\{a,b\} + \cdots$ となるものを、ポアソン多様体の**変形量子化** (deformation quantization) という.

変形量子化で特に、無限小変形 $F_1 = \{\ ,\ \}$ となるものを $*$ 積と呼ぶ.

変形量子化が存在すれば $*$ 積が存在することが知られている. シンプレクティック多様体は必ず $*$ 積を持つことが知られている [13]. ポアソン多様体一般については、懸案であったが 1997 年に M. Kontsevich より変形量子化の存在が示された. $*$ 積は通常 $a * b, a, b \in C^\infty(M)[[t]]$ と記される.

変形量子化はあくまで形式的変形であり (1.1) において t に値を代入することは、$t = 0$ 以外には意味をなさない. でも作用素環論的に意味を持たせようと考えるのが次節の話題である.

6.2 量子化と C^* 環

量子化として最もよく知られているのが, Weyl 量子化である.

$T^*\mathbb{R}^n$ 上の関数 a にたいして $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の作用素 L_a が

$$(L_a\phi)(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^*\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>} a(\frac{x+y}{2},\xi)\phi(y)dyd\xi$$

で定まる．勿論上式が意味を持つ為には a に条件を課さなければならない．例えば a が急減少関数なら L_a はコンパクト作用素である（実際はさらに強くトレース族作用素である）．Weyl 量子化の特徴は, a が実数値関数ならば L_a が自己共役となることである．Weyl 量子化によく似たものに Kohn-Nirenberg 量子化がある．これは上と同じく $T^*\mathbb{R}^n$ 上の関数 a に

$$(Op(a)\phi)(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^*\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>} a(x,\xi)\phi(y)dyd\xi$$

で $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の作用素 $Op(a)$ を対応させる．この場合 a が実数値でも $Op(a)$ は自己共役にはならない．

$0<\hbar\leq 1$ とする．$a\in\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ に対して, 作用素 $L_a^{(\hbar)}$ が

$$(L_a^{(\hbar)}\phi)(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^*\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>} a(\frac{x+y}{2},\hbar\xi)\phi(y)dyd\xi$$

で定まる．容易に分かることであるが, 任意の $a,b\in\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ に対して $c\in\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ が存在して, $L_a^{(\hbar)}L_b^{(\hbar)} = L_c^{(\hbar)}$ となる．この c は一意的に定まる．このことは $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ に新しい積が, $a*_\hbar b = c$ で定義されることを意味する．自明なことではないが

$$\lim_{\hbar\to 0}||L_a^{(\hbar)}|| = ||a||_\infty = \sup_{(x,\xi)\in T^*\mathbb{R}^n}|a(x,\xi)|$$

が成立する．もう一点．$T^*\mathbb{R}^n$ は自然なシンプレクティック構造を持つ．附随したポアソン構造を考える．$a,b\in\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^n)$ に対して

$$||\frac{1}{i\hbar}[L_a^{(\hbar)},L_b^{(\hbar)}] - L_{\{a,b\}}^{(\hbar)}|| \longrightarrow 0 \quad (\hbar\to 0)$$

が成立する．この性質を**対応原理** (Correspondence principle) という．上の式は, 作用素の交換子 $[L_a^{(\hbar)},L_b^{(\hbar)}]$ の $\hbar=0$ での微分が $i\{a,b\}$ であると "主張" する．これは変形量子化の定義における要件に対応する．Weyl 量子化のこのような性質の抽象化が次の厳密変形量子化である．

定義 2.1.([40]) ポアソン多様体 M の**厳密変形量子化** (strict deformation quontization) とは, 可換多元環 $C^\infty(M)\cap C_0(M)$ の部分多元環 $\mathcal{A}$ で $C_0(M)$ の中で稠

密かつ, ポアソン括弧積に関して閉じているものが存在し, $\mathcal{A}$ 上に積 $*_\hbar$, involution $*^\hbar$, C^* ノルム $\|\cdot\|_\hbar$ の族 $(0 \leq \hbar < \epsilon)$ が存在し, $\hbar = 0$ の時には, 積, involution, ノルム $\|\cdot\|_0$ は $C_0(M)$ 上の通常のものであり, さらに

(1) $\hbar \mapsto \|a\|_\hbar$ は連続,

(2) $\|\frac{1}{i\hbar}(a *_\hbar b - b *_\hbar a) - \{a, b\}\|_\hbar \longrightarrow 0 \quad (\hbar \to 0)$

となるもののことである.

Weyl 量子化の場合, 各 $\hbar > 0$ に対して, involution は関数の複素共役, ノルムは $\|a\|_\hbar = \|L_a^{(\hbar)}\|$ で決めてやればよい. Weyl 量子化と並んで最もよく知られている厳密変形量子化の例が非可換トーラスである.

非可換トーラス $(\mathbb{T}^2_\theta)_\theta$ は $[0, 1)$ 上の C^* 環の連続場をなすが, 実は $\mathbb{T}^2$ の標準的シンプレクティック構造に関する厳密変形量子化を与える. 古典フーリエ解析によれば, $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ は $\mathbb{Z}^2$ 上の急減少列の全体 $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$ と同一視されるが, $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$ に非可換 C^* 環の構造を入れ, 完備化したものが $\mathbb{T}^2_\theta$ 達なのである.

定義 2.1 において, ノルム $\|\cdot\|_\hbar$ に関して $\mathcal{A}$ を完備化したものを $A_\hbar$ とすれば, (1) は $(A_\hbar)$ は連続場となることを保証する.

(注 2.2) ポアソン多様体に対して厳密変形量子化が何らかの意味で一意的に存在するかどうか定かでない. とても大雑把にいえば, 1 階微分を指定して C^∞-関数を構成することであるから, 一意性があるようには思えないが, 例えば $\mathbb{T}^2$ に対して, 非可換トーラスとは "異なる" 厳密変形量子化が存在するかどうか知られていない.

コンパクト・ポアソン多様体 M に対して, 厳密変形量子化の定義は $C^\infty(M)$ が結合律を満たす非可換 $*$ 多元環の構造の 1 径数族を持つことを要求している. これは非常に強い要請であり, この条件は満たさないが対応原理が成立する状況がある. 例えば, 開単位円盤 $\mathbb{D}$ 上でテープリッツ作用素を用いた量子化がそうである. これらを抽象化した「C^* 環的量子化」の概念がある. この辺りのこと [29], [30], [34], [35] 参照.

6.3 擬微分作用素の指数定理

Kohn-Nirenberg 量子化の定義式は何処かで見たことがあるであろう.

定義 3.1. $a \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ とする. 任意の多重指標 α, β に対して $C_{\alpha,\beta} > 0$ が存在し

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|\xi|)^{m-|\alpha|-|\beta|}, \quad (x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n$$

が成立する時, a は **位数 m の表象** (symbol of order m) であるという.

a が位数 m の表象である時, Kohn-Nirenberg 量子化で与えられる $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の作用素 $Op(a)$ を **位数 m の擬微分作用素** (pseudodifferential operator of order m) という. $m \le 0$ ならば $Op(a)$ は有界であり, $m < 0$ ならばコンパクトである.

擬微分作用素のなかで特に重要なのが楕円型擬微分作用素である.

定義 3.2. a を位数 m の表象とする. 適当な $C > 0, R > 0$ をとれば, $|x|^2 + |\xi|^2 \ge R$ なる $(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n$ に対して

$$|a(x,\xi)| \ge C(|x|+|\xi|)^m$$

となる時 a は**楕円型** (elliptic) であるという.

a が楕円型である時 $Op(a)$ を楕円型の擬微分作用素という.

以上スカラー値表象を考えたが, 行列値表象 $a \in M_N(C^\infty(T^*\mathbb{R}^n))$ が考えられ, $Op(a)$ は $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$ 上の作用素を定める. 楕円型性も定義される. M. Shubin が定義 1.1 で定める表象の族を初めて考察し [43], 特に a が楕円型なら $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$ 上の非有界作用素として $\mathrm{Ker}Op(a), \mathrm{Coker}Op(a)$ が有限次元であることを示した. したがって

$$\mathrm{index}\, Op(a) = \dim \mathrm{Ker}Op(a) - \dim \mathrm{Coker}Op(a)$$

が定義される. index $Op(a)$ を a の言葉で記述するのが Atiyah-Singer 型指数公式である.

表象 $a \in M_N(C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)) = C^\infty(T^*\mathbb{R}^n, M_N(\mathbb{C}))$ の位数が正であるとしよう.

この時

$$e_a = \begin{pmatrix} (1+a^*a)^{-1} & (1+a^*a)^{-1}a^* \\ a(1+a^*a)^{-1} & a(1+a^*a)^{-1}a^* \end{pmatrix}$$

は $T^*\mathbb{R}^n$ 上の $M_{2N}(\mathbb{C})$ の射影子に値を持つ C^∞-関数であり, a の位数が正であることにより

$$\widehat{e}_a = e_a - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_0(T^*\mathbb{R}^n, M_{2N}(\mathbb{C})).$$

行列値微分 $2n$-形式 $\widehat{e}_a(d\widehat{e}_a)^{2n}$ と行列環上で通常のトレース tr を考える. 位数 >0 という仮定から

$$\mathrm{tr}(\widehat{e}_a(d\widehat{e}_a)^{2n})$$

は $T^*\mathbb{R}^n$ 上の可積分関数となる.

定理 3.3.

$$\mathrm{index}\, Op(a) = \frac{1}{(2\pi i)^n\, n!}\int_{T^*\mathbb{R}^n} \mathrm{tr}(\widehat{e}_a(d\widehat{e}_a)^{2n}).$$

この定理の証明が量子化を用いて得られる. それが次節の中身である.

6.4 C^* 環とサイクリック・コサイクルの連続場

a を位数 m の表象として, $0 < \hbar \leq 1$ に対して

$$a_\hbar(x,\xi) = a(x,\hbar\xi), \quad (x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n$$

とおけば, $a_\hbar$ も又, 位数 m の表象となる.

プランク定数 $\hbar \to 0$ とした時, 古典系を復元することになっているから, $\hbar \to 0$ の時作用素 $Op(a_\hbar)$ は $a \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ を各点毎に掛ける $L^2(T^*\mathbb{R}^n)$ 上の作用素 M_a に収束する筈である. この点を作用素環論的にどのように意味づけられるか考えてみよう. それが C^* 環の連続場である. 例を考えよう.

(例 4.1.) $\Omega = [0,1], A_0 = C_0(T^*\mathbb{R}^n), A_\hbar = \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^n)), \hbar > 0$. とする. $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ に対して, 先に導入したように $a_\hbar(x,\xi) = a(x,\hbar\xi)$, $\hbar > 0$ とし

$$\rho_\hbar(a) = \begin{cases} Op(a_\hbar) & , \hbar > 0 \\ M_a & , \hbar = 0 \end{cases}$$

とする.

この時 $\Theta_0 = \{(\rho_\hbar(a))_\hbar\ ;\ a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^n)\}$ は C^* 環の連続場の定義 (定義 A) の (i)-(iii) を満たす. したがって $\Theta \subset \prod A_\hbar$ がとれて $(A = (A_\hbar), \Theta)$ は連続場となる. この連続場は原点以外では定常場 (constant field) になっていることに注意.

以上 Kohn-Nirenberg 量子化を用いたが, Weyl 量子化を用いても全く同じ構造が入る.

さて (A, Θ) を Ω 上の連続場としよう. 各 $A_\hbar$ に 1 を添加して得られる族 $A^\sim = (A_\hbar^\sim)$ に対して適当な $\Theta^\sim$ をみつけて, $(A^\sim, \Theta^\sim)$ が又, 連続場になること, あるいは $N > 0$ を固定して $(M_N(A_\hbar))_\hbar$ を考えると, この族にも連続場の構造が入ることは, 自明ではないが確かに成立する.

定理3.3 の等式をよく見よう. $\ker Op(a), \mathrm{Coker} Op(a)$ への正射影をそれぞれ P_+, P_- とする. P_+, P_- は類 $[P_+] - [P_-] \in K_0(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N))$ を定め

$$\text{(4.2)} \qquad \text{解析的指数} = \text{左辺} = \langle [P_+] - [P_-], \mathrm{Tr} \rangle$$

である.

$C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^n, M_{2N}(\mathbb{C}))$ 上でサイクリック 2n-コサイクル ε を

$$\varepsilon(f^0, \ldots, f^{2n}) = \int_{T^*\mathbb{R}^n} \mathrm{tr}(f^0 df^1 \wedge \cdots \wedge df^{2n})$$

で定義すると, ε は正則的閉である $*$ 部分代数に拡張する.

e_a は $M_{2N}(\mathbb{C})$ の射影子に値を持つ C^∞-関数で

$$e_a - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_0(T^*\mathbb{R}^n, M_{2N}(\mathbb{C})).$$

したがって $[e_a] - [\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)] \in K_0(C_0(T^*\mathbb{R}^n, M_{2N}(\mathbb{C}))$. そして

$$\text{(4.3)} \qquad \text{位相的指数} = \text{右辺} = \langle [e_a] - [\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}], \varepsilon \rangle.$$

さて 2 つの量, 解析的指数, 位相的指数を結びつければ証明は終わる訳である. 一見して解るように両者の性格は大いに異なっている. 先ず第一に, (4.2) で用いられるサイクリック・コサイクルは Tr, *i.e* 0-コサイクルである. しかるに (4.3) ではサイクリック $2n$-コサイクルが用いられている. 第二の違いは K_0-類そのものの性質である. 類 $[P_+] - [P_-]$ において P_+, P_- は 1 を持たない C^* 環 $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^n))$ そのものに属しているが, 類 $[e_a] - [\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$ において, $e_a, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 1 を付け加えた環 $C_0(T^*\mathbb{R}^n, M_{2N}(\mathbb{C}))$ に属している. この様に見てくると, 解析的指数, 位相的指数

を結び付ける為にはどちらかを大幅に書き替えなければならないであろうと推測される.

$M_{2N}(\mathbb{C})$ の tr と第5章で考察した ω とのカップ積を改めて ω と書くことにする. ω は $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N))$ 上の正則的閉な定義域を持つ $2n$-コサイクルである. 各 $\hbar > 0$ に対して $\omega_\hbar = \omega$ とし, $\omega_0 = \varepsilon$ とおく. この時 $(\omega_\hbar)$ はサイクリック $2n$-コサイクルの連続場となる. 此処で連続性は以下述べるように強連続の意味である.

補題 4.4. $\xi_0, \ldots, \xi_{2n}$ を連続場 (A, Θ) の連続ベクトルで, 各 $\hbar$ に於いて $\xi_j(\hbar)$ は $\omega_\hbar$ の定義域に入っているとする. この時

$$\hbar \longrightarrow \omega_\hbar(\xi_0(\hbar), \ldots, \xi_{2n}(\hbar))$$

は $[0,1]$ 上連続である.

(注 4.5) 連続場 $(\omega_\hbar)$ を $(0,1]$ に制限すると自明な場である.

補題 4.6.

$$\langle [P_+] - [P_-], \mathrm{Tr} \rangle = \langle [P_+] - [P_-], \omega \rangle.$$

本質は $S^n\mathrm{Tr}$ と ω がコホモローガスとなることである.

残った手順は K_0-類 $[P_+] - [P_-]$ を $[e_a] - [\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$ に似たもので置き換えることである.

$a \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n, M_N(\mathbb{C}))$ を各点毎に掛ける $L^2(T^*\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$ 上の作用素 M_a は (非有界) 閉作用素を定める. したがってそのグラフは $L^2(T^*\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ の閉部分空間であり. このグラフへの正射影が e_a である.

擬微分作用素 $Op(a_\hbar)$ は $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$ 上の閉作用素を与える. そのグラフへの正射影を $e_\hbar$ とする.

補題 4.7. $K_0(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N))$ の元として

$$[P_+] - [P_-] = [e_\hbar] - [\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}].$$

今 $e_0 = e_a$ とおく. 指数定理の証明の鍵は次の命題である.

命題 4.8. $(e_\hbar)$ は連続ベクトル場である.

$\hbar > 0$ での連続性は「表象が近かったならば作用素が近い」. 難関は $\hbar = 0$ での連続性であり, 証明は漸近展開等, 擬微分作用素論の標準的テクニックを使う.

(定理 3.3 の証明)

$$\begin{aligned}
\text{解析的指数} &= \langle [P_+] - [P_-], \mathrm{Tr} \rangle \\
&= \langle [e_1] - [\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}], \omega_0 \rangle \\
&= \langle [e_\hbar] - [\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}], \omega_\hbar \rangle \\
&= \langle [e_0] - [\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}], \omega_0 \rangle \\
&= \langle [e_a] - [\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}], \varepsilon \rangle \\
&= \text{位相的指数}.
\end{aligned}$$

(注 4.9) 与えられた表象に対して Weyl 量子化で定義される作用素を Weyl 擬微分作用素という. 定理 3.3 は Weyl 擬微分作用素に対しても成立する.

あとがき

この稿は 1998 年 9 月に開かれた "Surveys in Geometry" の為に準備したものに加筆したものである. 締切が迫る中での準備であったため,「後で説明する」と言いながら結局その事にふれずじまいに終わってしまった事等, 稚拙な部分を訂正することもできた. この機会を与えてくれた関係諸氏, 原稿に丹念に目を通して有益なサヂェスションを下さったレフェリーに感謝しつつ筆をおくことにする.

参考文献

[1] C. Anantharaman-Delaroche, Systèm dynamiques non commutatifs et moyennabilité, Math. Ann. **279**(1987), 297–315.

[2] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras.* Mathematical Sciences Research Institute Publications, **5**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1986.

[3] L.G. Brown, R.G. Douglas and P.A. Fillmore, Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^*-algebras, *Proc. Conf. on Operator Theory*, Lecture Notes in Math. **345**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[4] ———, Extensions of C^*-algebras and K-homology, Ann. of Math. **105**(1977), 265-324.

[5] O. Bratteli, Inductive limits of finitedimensional C^*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **171**(1972), 195-234.

[6] M. Choda and T. Natsume, Reduced C^*-crossed products by free shift, Ergodic Theory and Dynamical System **18**(1998), 1055–1096.

[7] A. Connes, An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^*-algebra by an action of $\mathbb{R}$, Adv. in Math. **39**(1981), 31-55.

[8] ———, A survey of foliations and operator algebras, *Operator algebras and applications, Part 1*, pp. 521–628, Proc. Sympos. Pure Math., 38, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[9] ———, Non-commutative differential geometry, Parts I and II, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **62**(1985), 257-360.

[10] ——, Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation, *Geometric methods in operator algebras (Kyoto, 1983)*, pp. 52–144, Pitman Res. Notes in Math., **123**, longman, Harlow, 1986.

[11] ——, *Noncommutative Geometry*. Academic Press, San Diego, 1994.

[12] A. Connes and G. Skandalis, The longitudinal index theorem for foliations, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto **20**(1984), 1139–1183.

[13] M. de Wilde, P.B.A. Lecomte, Existence of star-product and of formal deformations in Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifold, Lett. Math. Phys. **7**(1983), 487-496.

[14] G.A. Elliott, On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite dimensional algebras, J. Algebra **38**(1976), 29-44.

[15] G. A. Elliott, T. Natsume and R. Nest, The Heisenberg group and K-theory, K-theory, **7** (1993), 409–428.

[16] ——, The Atiyah-Singer index theorem as passage to the classical limit in quantum mechanics, Comm. Math. Phys. **182**(1996), 505–533.

[17] T. Fack, K-théorie bivariante de Kasparov. Bourbaki Seminair, vol. **1**,1982/83, 149–166, *Astérisque*, 105–106, Soc. Math. France, Paris,1983.

[18] P. A. Fillmore, *A user's guide to operator algebras*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York, 1996.

[19] M. Gerstenhaber, On the deformation of rings and algebras, Ann. of Math. **79**(1964), 59-103.

[20] M. Gromov, Hyperbolic groups, *Essays in group theory*. Mathematical Sciences Research Institute Publications, **8**, 75-263. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1987.

[21] P. R. Halmos and V. S. Sunder, *Bounded integral operators on L^2-spaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **96**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[22] N. Higson, A primer on KK-theory, *Operator Theory: operator algebras and applications, Part 1 (Durham, NH, 1988)*. 239–283, Proc. Sympos. Pure Math., **51**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[23] N. Higson and J. Roe, *Analytic K-homology*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2000.

[24] L. Hörmander, *Analysis of linear partial differential operators III*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **274**, Springer-Verlag, 1985.

[25] K. K. Jensen and K. Thomsen, *Elements of KK-theory*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.

[26] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentas of the theory of operator algebras*. vol. I - IV. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.

[27] G. Kasparov, The operator K-functor and extensions of C^*-algebras, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Math.**44**(1980), 571-636.

[28] 加藤敏夫, 位相解析. 共立出版.

[29] S. Klimek and A. Lesniewski, Quantum Riemann surfaces I, the unit disc, Comm. Math. Phys.**146**(1992), 105-122.

[30] ———, Quantum Riemann surfaces I, the discrete series, Letters in Math. Phys. **24** (1992), 125-139.

[31] 増田哲也, Conne の巡回理論の周辺, 数学 **41**(1989), 208–222.

[32] J. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*. Annals of Mathematics Studies, **72**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971.

[33] G. J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*. Academic Press, Boston, MA, 1990.

[34] T. Natsume, C^*-algebraic deformation quantization of closed Riemann surfaces, *Proceedings of the SNB-Workshop on C^*-algebras*, Münster, Germany 1999, Eds. J. Cuntz and S. Echterhoff,142-150.

[35] ______ and R. Nest, Topological approach to quantum surfaces, Comm. Math. Phys. **202**(1999), 65-87.

[36] G.K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups.* Academic Press, London, 1979.

[37] M. Pimsner and D. Voiculescu, Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C^*-algebras, J. Operator Theory **4** (1980), 93–118.

[38] ______, K-groups of reduced crossed products by free groups, J. Operator Theory **8** (1982), 131–156.

[39] L. E. Pursell, The ring $C(X, R)$ considered as a subring of the ring of all real-valued functions, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 820–821.

[40] M.A. Rieffel, Deformation quantization of Heisenberg manifolds, Comm. Math. Phys. (1989), 531-562.

[41] J. Renault, *A groupoid approach to C^*-algebras.* Lecture Notes in Math. **793**, Springer-Verlag, 1980.

[42] G. Skandalis, Kasparov's bivariant K-functor and applications, Exposition. Math. **9** (1991), 193–250.

[43] M.A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory.* Springer Verlag, 1987.

[44] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979.

[45] N. E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^*-algebras, A friendly approach.* Oxford Science Publications, Oxford University Press, 1993.

索 引

第II部

非可換幾何学と指数定理

森吉仁志

目 次

序：指数定理の実例

最も簡単な実例から指数定理の話を始めよう。単位円周 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ をとり、S^1 上の L^2 関数の成すヒルベルト空間 $L^2(S^1)$ を考える。このとき $\{e^{2n\pi ix} \mid x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z}\}$ は $L^2(S^1)$ の正規直交基底を与える。ここで $\{e^{2n\pi ix} \mid n \geq 0\}$ の生成する閉部分空間を $\mathcal{H}$ とおき、P を $L^2(S^1)$ から $\mathcal{H}$ への直交射影とする。このとき上の基底は $D = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dx}$ の固有関数から成り、$\mathcal{H}$ は D の非負固有値に対応する部分空間であることを注意しておこう。いま

$$\varphi : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

という S^1 上の C^∞ 関数をひとつとる。そして φ の掛算により定まる $L^2(S^1)$ 上の有界作用素を再び φ で表し、これを P で切り落とした

$$T_\varphi = P\varphi P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

という作用素を考える。この T_φ を φ の定める Toeplitz 作用素という。このとき $\ker T_\varphi$ および $\ker T_\varphi^*$（T_φ^* は T_φ の共役作用素を表す）は有限次元のベクトル空間になることが確かめられる。一般に作用素 T に対して $\ker T$ および $\ker T^*$ が有限次元であるとき、より正確には作用素 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ の像 $\operatorname{im} T$ が閉部分空間であって $\ker T$ および $\mathcal{H}/\operatorname{im} T$ が有限次元であるとき、これを Fredholm 作用素とよび、その指数 (index) を

$$\operatorname{Ind} T = \dim \ker T - \dim \ker T^*$$

と定める。このとき Toeplitz 作用素の指数について次の定理が成り立つ。

定理 1 (Gohberg-Krein [27]).

$$-\operatorname{Ind} T_\varphi = \deg \varphi = \frac{1}{2\pi i}\int \varphi^{-1} d\varphi = \operatorname{Tr}(\varphi^{-1} P\varphi - P).$$

ここで $\deg\varphi$ は φ の回転数を表す。回転数とは（適当に選んだ）$H^1(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ の生成元 u に対して $\langle\varphi^*u,\ [S^1]\rangle$ で定まる整数である。第 3 項は微分型式の積分を表す。また第 4 項でおいて、$\varphi^{-1}P\varphi$ と P はともに巾等元であり、さらに $\varphi^{-1}P\varphi-P$ はコンパクト作用素になっている。このときコンパクト作用素の全体を $\mathcal{K}$ で表し、Tr により $\mathcal{K}$ 上の通常のトレイス写像を表した（正確には $\varphi^{-1}P\varphi-P$ が trace class に属する作用素のとき、第 3 の等号が成り立つとしておこう；しかし Tr を $\mathcal{K}$ の K_0 群 $K_0(\mathcal{K})$ から $\mathbb{Z}$ への写像と考えるときにはこの仮定は不要である）。この定理は Atiyah-Singer 指数定理に先立って 1957 年頃に得られたものであるが、定理に現れるいくつかの不変量に本稿の主題となる概念の原型が既に認められる。簡単にまとめるとこれらは次のようになる：

- $\mathrm{Ind}\,T_\varphi$: Fredholm 作用素の指数（解析不変量）；
- $\deg\varphi$: 回転数（位相幾何不変量）；
- $\int\varphi^{-1}d\varphi$: φ の定める Chern-Simons 型式の積分（微分幾何不変量）；
- $\mathrm{Tr}\,(\varphi^{-1}P\varphi-P)$: トレイスの値（非可換幾何不変量）.

このように多岐に亘る概念が結び付けられて現れてくるが故に、指数定理とは非常に深い内容をもつ定理と考えられる。本稿では、上述した解析的、位相幾何的、微分幾何的、そして非可換幾何的視点から、指数定理の解説を与えることを目標とする。

理解を深めるために証明の概略を示そう。定理に現れる不変量はすべて φ をホモトピーで動かしても変化しない。従って $\varphi(x)=e^{2k\pi ix}$ のときに確かめるならば十分である。このとき簡単な計算で、

$$-\mathrm{Ind}\,T_\varphi=k=\deg\varphi$$

が判る。さらに $\{e^{2\pi inx}|\ n\geq -k\}$ の生成する部分空間を $\mathcal{H}_k$ とかけば、$\varphi^{-1}P\varphi$ は $L^2(S^1)$ から $\mathcal{H}_k$ への射影であることが確かめられ、

$$\mathrm{Tr}\,(\varphi^{-1}P\varphi-P)=k$$

であることも判る。よって定理が示された。

上に述べた S^1 上の Toeplitz 作用素に対する指数定理は、奇数次元の閉多様体へ一般化できる [12, 13, 14]。また偶数次元の閉多様体上では以下に述べる指数定理が

成立する（詳しくは節 1.4 を参照）。まず S^1 のかわりに一般の偶数次元閉多様体 M をとり、これにリーマン計量を与え、スピン構造を仮定しておく。このとき $\dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dx}$ にかわって、Dirac 作用素とよばれる 1 階楕円型微分作用素 D が M 上に定まる。閉多様体上では D は Fredholm 作用素である。いま M が偶数次元なので、D の作用するスピノールの空間は偶スピノールの空間と奇スピノールの空間の直和に分解し、D は偶スピノールの空間から奇スピノールの空間への作用素 D^+ を定める。ここで D^+ の指数を

$$\operatorname{Ind} D = \dim\ker D^+ - \dim\ker(D^+)^*$$

と表そう。このとき次の定理が成り立つ。

Atiyah-Singer 指数定理 .

$$\operatorname{Ind} D = \langle \widehat{A}(M),\ [M]\rangle = \int_M \widehat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right).$$

ここで $\widehat{A}(M)$ は全 $\widehat{A}$ 類とよばれる M のコホモロジー類、$[M]$ は基本ホモロジー類を表し、$\langle\ ,\ \rangle$ は自然な対写像を表す。また、$\widehat{A}\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right)$ はリーマン曲率型式 R を用いて定義される $\widehat{A}$ 多項式とよばれる M 上の微分型式を表す。

さらに別の方向への一般化を考えてみよう。いま S^1 の普遍被覆空間 $\mathbb{R}$ をとり、$L^2(\mathbb{R})$ を考える。この空間には被覆変換群 $\mathbb{Z}$ が作用している。ここで先に述べた $\mathcal{H}$ の代わりとして以下に定める空間を考える。ここで $L^2(\mathbb{R})$ 上の自己共役作用素 $D = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dx}$ 関して、D の非負固有値に対応する部分空間を $\mathcal{H}_o$ とする。いま $L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\widehat{\mathbb{R}})$ へのフーリエ変換を T と表し、$L^2(\widehat{\mathbb{R}})$ から $L^2([0,+\infty))$ 上への射影作用素 $\widehat{P}$ をとって $P = T^{-1}\widehat{P}T$ とおくとき、これは $\mathcal{H}_o = \operatorname{im} P \subset L^2(\mathbb{R})$ と定められる部分空間でもある。具体的に言うと、上半平面で正則な関数の $\mathbb{R}$ 上での L^2 境界値が成す部分空間が $\mathcal{H}_o$ である。これは先に述べた S^1 の例において、単位円板上で正則な関数の S^1 での境界値が成す部分空間が $\mathcal{H}$ であることと対応する。ここで P は、被覆変換群 $\mathbb{Z}$ が定める $L^2(\mathbb{R})$ 上のユニタリ作用素と可換であることに注意しておく。実際 Hilbert 変換の公式

$$F\xi(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{i}{\pi}\int\limits_{|x-y|>\epsilon}\frac{\xi(y)}{x-y}dy$$

を用いると

$$P = \frac{1+F}{2}$$

であることが確められるので、この式より P が被覆変換群 $\mathbb{Z}$ と可換であることは容易に判る。ここで前と同様に C^∞ 関数

$$\varphi : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

をとり、これを被覆空間 $\mathbb{R}$ に持ち上げて得られる関数を同じく φ で表す。そして Toeplitz 作用素の構成にならって再び

$$T_\varphi = P\varphi P : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

とおく。これを φ の定める Wiener-Hopf 作用素と呼ぶ。被覆空間 $\mathbb{R}$ はコンパクトではないので、T_φ はもはや Fredholm 作用素ではない。しかしながら次の定理が成り立つ。

定理 2.

$$\deg \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \varphi^{-1} d\varphi = \tau(\varphi^{-1} P\varphi - P).$$

ここで τ は以下の様にして定められる C^* 環 $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$ のトレイスである。まず $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上の連続関数 k で、次の 2 つの条件を満たすものの全体を $C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})_c^{\mathbb{Z}}$ と表す：

1) $k(x+n, y+n) = k(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$;

2) 上の性質より k を商空間 $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})/\mathbb{Z}$ 上の連続関数とみなすとき、その台はコンパクトである。

このとき k を核関数とする作用素が $L^2(\mathbb{R})$ 上に定まり、第一の性質からこの作用素は被覆変換群 $\mathbb{Z}$ の作用と可換であることも判る。ここでヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素ノルムに関して $C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})_c^{\mathbb{Z}}$ の閉包をとり、これより定まる C^* 環を $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$ と表す。そして $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$ 上のトレイス $\tau : \mathcal{K}_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ を、$k \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})_c^{\mathbb{Z}}$ に対して

$$\tau(k) = \int_0^1 k(x,x)dx$$

により定義する。右辺に現れる積分領域は、$[0,1]$ に限らず $\mathbb{R}$ への $\mathbb{Z}$ 作用に関する任意の基本領域として構わない。また P が $\mathbb{Z}$ 作用と可換であるから、$\varphi^{-1}P\varphi - P$ も

$\mathbb{Z}$ 作用と可換な作用素であることを注意しておこう。このときトレイス τ を用いて定まる値 $\tau(\varphi^{-1}P\varphi - P)$ を Wiener-Hopf 作用素 T_φ の指数と定義するならば、上の定理は Wiener-Hopf 作用素に対する指数定理の一般化と解釈できる。

註 1. 1) この定理は被覆空間に対する奇数次の Γ 指数定理と考えられる。この点ついては 3.2 節 および [1, 46, 23, 32] を参照されたい。

2) 定理で得られる Tr の値は依然として整数値である。さらに Atiyah [1] で指摘されているように、定理に現れてくる幾何不変量は底空間の幾何不変量に帰着してしまう。しかし解析不変量に関しては上述の Wiener-Hopf 作用素の指数のような新たな不変量が関与する。

3) 厳密に言うと作用素 $\varphi^{-1}P\varphi - P$ は $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$ には属さない。そのようにするためには P を取り替える必要がある。今の場合 $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$ の弱閉包として定まる von Neumann 環を W と表すと、$\varphi^{-1}P\varphi - P$ は W に属する。このとき τ は W 上のトレイスに拡張されるので、W において $\tau(\varphi^{-1}P\varphi - P)$ を考えればよい。

再び簡単な証明を定理につけてみよう。まず $A = \varphi^{-1}P\varphi - P$ とおくと

$$A\xi(x) = \frac{1}{2}(\varphi^{-1}[F,\varphi]\xi)(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{i}{2\pi}\int\limits_{|x-y|>\epsilon}\frac{\varphi^{-1}(x)(\varphi(y)-\varphi(x))}{x-y}\xi(y)dy$$

となるから、対応する核関数（今のところ連続関数である保証はない）は $x \neq y$ のとき

$$k(x,y) = \frac{i}{2\pi}\frac{\varphi^{-1}(x)(\varphi(y)-\varphi(x))}{x-y}$$

で与えられる。ここで φ は C^∞ であるから

$$\lim_{x\to y}\frac{i}{2\pi}\frac{\varphi^{-1}(x)(\varphi(y)-\varphi(x))}{x-y} = -\frac{i}{2\pi}\varphi^{-1}(x)\varphi'(x)$$

であり、

$$\tau(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \varphi^{-1}(x)\varphi'(x)dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}\varphi^{-1}d\varphi$$

となって定理が成り立つ。

それでは指数の値が整数ではない例について述べよう。そのような指数定理は Connes により最初に見出された ([17] を参照)。ここではそれと異なる例を与える。まず 2 次元トーラス T^2 をとり、T^2 を埋めつくすような無理数 θ の傾きを持つ直線の集まりを考える。一般にこのような構造を葉層構造 (foliation) といい, この葉層は

特に Kronecker 葉層 $\mathcal{F}_\theta$ とよばれる。正確には次のようにして Kronecker 葉層を定義する。まず $\mathbb{R}\times S^1$ を直線 $\mathbb{R}\times\{t\}$ $(t\in S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ の集まりと考えておく。このような直線の一つ一つを葉といい、葉の集まりを葉層という。ここで $\mathbb{R}\times S^1$ に次の $\mathbb{Z}$ 作用を導入する：$n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$n(x,t)=(x+n,t+n\theta).$$

この作用の軌道空間は T^2 と同相になり、さらにこの作用は $\mathbb{R}\times S^1$ の葉を葉に移すから、$\mathbb{R}\times S^1$ の葉の像として軌道空間 T^2 上にも葉が定義される。つまり $\mathbb{R}\times S^1$ 上の葉層構造が T^2 上に降下する。これが Kronecker 葉層の定義である。別の言い方をすれば、$T^2=\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の座標を (x,y) として、$\partial/\partial x+\theta\partial/\partial y$ と表されるベクトル場が与える流れ (flow) を葉とする葉層が Kronecker 葉層である。従ってこの場合、$\mathbb{R}\times S^1$ および T^2 に定まった葉層とは局所自由な $\mathbb{R}$ 作用の軌道に外ならない。このとき T^2 上の Kronecker 葉層は $\mathbb{R}$ 作用に関してエルゴード的であり、$\mathbb{R}\times S^1$ の葉層はそうでないことに注意しておこう。$\mathbb{R}\times S^1$ の葉層ではそれぞれの葉の埋め込みが proper embedding になっている。このことは、Kronecker 葉層を $\mathbb{R}\times S^1$ に引き上げると葉層がほどけてしまうと表現できる。この $\mathbb{R}\times S^1$ は後述する葉層のホロノミー被覆の例となっており、これが 5.2 節に述べる Connes による葉層多様体上の指数定理において基本的な役割を果たす。

これまで指数は作用素が与えられたとき直ちに定義された。しかし一般化された指数定理に関しては、作用素が属する C^* 環をあらかじめ選んでおかないと指数は定義できない。端的に言えば、一般化された指数定理において指数は数値ではなく選んでおいた C^* 環の K 群の元なのである。そこで Kronecker 葉層に対して、対象となる C^* 環 $C^*(T^2,\mathcal{F}_\theta)$ を定義しよう。この C^* 環は非可換トーラスあるいは無理数回転環とよばれる C^* 環と強森田同値な C^* 環となる。

まず $\mathbb{R}\times S^1$ の葉に沿う核関数の族で、前に定めた $\mathbb{Z}$ 作用と可換なものの全体をとる。つまり $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times S^1$ 上の連続関数 k で次の 2 つの条件を満たすものの全体を考える：

1) $k(x+1,y+1,t+\theta)=k(x,y,t)\quad(x,y,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times S^1$;

2) 上の性質より k を $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times S^1)/\mathbb{Z}$ 上の連続関数とみなすとき、その台はコンパクトである。

このような k の全体を $C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times S^1)_c^{\mathbb{Z}}$ と表そう。ここで $t\in S^1$ を固定し $k(x,y,t)$ を (x,y) の関数と考えると、これを核関数とする $L^2(\mathbb{R}\times\{t\})$ 上の作用素 k_t が定まる。そして

$$\|k\| = \max_{t\in S^1}\|k_t\|$$

とおき（右辺は作用素ノルムを表す）、このノルムを用いて $C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times S^1)_c^{\mathbb{Z}}$ を完備化して得られる C^* 環を $C^*(T^2,\mathcal{F}_\theta)$ と表す。さらに $C^*(T^2,\mathcal{F}_\theta)$ 上のトレイス $\tau: C^*(T^2,\mathcal{F}_\theta)\to\mathbb{C}$ を次のように定める[1]：

$$\tau(k) = \int_{S^1} dt \int_0^1 dx k(x,x,t)dx.$$

いま S^1 上の平行移動で測度 dt が保たれることから、τ がトレイスの性質：$\tau(k\ell) = \tau(\ell k)$ を満たすことが確かめられる。ここで葉に沿う楕円型微分作用素の族 $D = (D_t)_{t\in S^1}$ を、$\mathbb{R}\times\{t\}$ 上で $D_t = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dx}$ と定める。さらに各 $L^2(\mathbb{R}\times\{t\})$ 上の Hilbert 変換 F_t が定める作用素の族を $F=(F_t)$ と表し、$P=(1+F)/2$ という射影作用素の族を考える。ここで C^∞ 関数

$$\varphi: T^2\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

をとり、商空間 $(\mathbb{R}\times S^1)/\mathbb{Z}$ と T^2 を同一視しておいて、これを $\mathbb{R}\times S^1$ へ引き上げた関数を考える。この関数を再び φ で表し、φ を各 $L^2(\mathbb{R}\times\{t\})$ に掛算作用素として作用させる。ここで $\varphi^{-1}P\varphi - P$ という作用素を考えよう。このとき次の定理が成り立つ ([23] も参照せよ)。

定理 3. *Kronecker* 葉層 $(T^2,\mathcal{F}_\theta)$ に対し、上で述べたように T^2 と $(\mathbb{R}\times S^1)/\mathbb{Z}$ を同一視して $\mathcal{F}_\theta$ を $(\mathbb{R}\times S^1)/\mathbb{Z}$ 上の葉層と見なしておく。このとき

$$\tau(\varphi^{-1}P\varphi - P) = \frac{1}{2\pi i}\int_{T^2}\varphi^{-1}d\varphi\wedge dt$$

が成り立つ。またすべての $\varphi: T^2\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ を考えるとき、$\tau(\varphi^{-1}P\varphi - P)$ の値域は $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z}$ に一致する。

実際に $\varphi(x,t) = e^{2\pi i(\theta x - t)}$ として τ の値を計算して見よう。まず $\varphi(x,t) = \varphi(x+1, t+\theta)$ の成り立つことを確かめておく。そして前と同様の議論により各 $L^2(\mathbb{R}\times\{t\})$

[1] このとき $C^*(T^2,\mathcal{F}_\theta)$ は非自明なイデアルを持たない C^* 環である。そして $C^*(T^2,\mathcal{F}_\theta)$ 上の忠実なトレイスは定数倍を除いて一意的に定まる。

において

$$(\varphi^{-1}P\varphi - P)\xi(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{i}{2\pi}\int_{|x-y|>\epsilon}\frac{\varphi^{-1}(x,t)(\varphi(y,t)-\varphi(x,t))}{x-y}\xi(y,t)dy$$

が成立つ。従って作用素 $\varphi^{-1}P\varphi - P$ の核関数 $k(x,y,t)$ は

$$k(x,y,t) = \frac{i}{2\pi}\frac{\varphi^{-1}(x,t)(\varphi(y,t)-\varphi(x,t))}{x-y}$$

で与えられる。このとき φ が C^∞ 関数であることから $k(x,y,t)$ は $x=y$ において連続であり、特に $k(x,x,t)=\theta$ となるので、

$$\tau(\varphi^{-1}P\varphi - P) = \int_{S^1}dt\int_0^1\theta dx = \theta$$

が成立つ。一方簡単な計算で

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{T^2}\varphi^{-1}d\varphi\wedge dt = \theta$$

も確かめられる。

註 2. 一般に $\varphi : T^2 \to GL(n;\mathbb{C})$ という C^∞ 関数に対して上のような指数定理が証明される。そのとき指数定理の幾何不変量には、奇数次の Chern 指標 $\mathrm{ch}(\varphi)$ が現れる ([12] を参照せよ)。

また前と同様に、厳密に言えば $\varphi^{-1}P\varphi - P$ は $C^*(T^2,\mathcal{F}_\theta)$ の元ではなく、その弱閉包として定義される von Neumann 環に属する元である。この von Neumann 環はすべての θ に対して同型となり、それは一意的に存在する hyperfinite II_∞ 型因子であることが知られている。一方定理の与える τ の値域 $\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z}$ を考えると、$C^*(T^2,\mathcal{F}_\theta)$ は θ の値によって必ずしも同型でないことが判る。実際異なる θ と θ' に対しては、行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in SL(2;\mathbb{Z})$ により $\theta' = (a\theta+b)/(c\theta+d)$ が成立つときに限ってその値域が一致する。一方 Kronecker 葉層 $\mathcal{F}_\theta$ に対してこの条件が成立つとき、$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in SL(2;\mathbb{Z})$ が引起こす T^2 上の可微分同相写像を通じて Kronecker 葉層 $\mathcal{F}_\theta$ は互いに同型となる。従って定理の結果を用いると、異なる θ に対して $C^*(T^2,\mathcal{F}_\theta)$ を実際に区別することができる[2]。

[2]射影作用素 P に修正を施し、巾等元の差 $\varphi^{-1}P\varphi - P$ が $C^*(T^2,\mathcal{F}_\theta)$ に属するようにできる。一方でこれらの巾等元の差は K 群（定義は後述）$K_0(C^*(T^2,\mathcal{F}_\theta)$ を生成する。そして $\tau(\varphi^{-1}P\varphi - P)$ は写像 $\tau_* : K_0(C^*(T^2,\mathcal{F}_\theta)) \to \mathbb{R}$ を引き起こす。このとき $C^*(T^2,\mathcal{F}_\theta)$ は $\mathrm{im}\,\tau_*$ によって区別される。

第1章　Atiyah-Singer 指数定理と Dirac 作用素

まず M を境界の無いコンパクトな多様体とする。そのような多様体を本稿では閉多様体とよんでおく。このとき M のリーマン計量や適当な幾何構造を用いて、M 上のベクトル束の切断の空間に作用する楕円型微分作用素を構成する方法がいろいろと知られている。典型的な例は、C^∞ 関数に作用するラプラシアンであり、またその拡張として微分型式の空間 $\Omega(M)$ に作用する Laplace-Beltrami 作用素 $\Delta = d\delta + \delta d$ である。一般に、閉多様体上に楕円型微分作用素 T 与えられたとき、$\ker T$ と $\ker T^*$ はともに有限次元の線型空間であることが知られている。このとき Atiyah-Singer 指数定理 [6, 7] とは、楕円型微分作用素 T の指数：

$$\operatorname{Ind} T = \dim\ker T - \dim\ker T^*$$

を多様体の幾何不変量で記述した公式であると言うことができる。そして Atiyah-Singer 指数定理を具体的な作用素に適用する場合、以下の 4 例が幾何学的に特に重要である。

- 向き付け可能な閉多様体上の Euler 作用素
- 複素閉多様体上の Dolbeault 作用素
- 有向閉多様体上の符号数作用素
- スピン閉多様体上の Dirac 作用素

以下では、まずこれらの作用素に対する Atiyah-Singer 指数定理を具体的に述べてみよう。本章の内容に関しては、吉田 [48]、古田 [24]、Lawson-Michelsohn [36], Roe [43] を標準的な参考書として挙げておく。

1.1 向き付け可能な多様体上の Euler 作用素

M を向き付け可能で境界の無いコンパクト多様体とし、M にリーマン計量を与えておく。ここで Ω^{ev}, Ω^{odd} によりそれぞれ偶数次元、奇数次元の微分型式の空間を表し、作用素

$$d + \delta : \Omega^{ev} \to \Omega^{odd}$$

を考える。ただし d は外微分作用素、δ は余微分 (d の形式的共役作用素) を表す。この作用素を Euler 作用素と呼んでおこう。ここで $\chi(M)$ を M のオイラー数とすると、調和積分論により

$$\mathrm{Ind}\,(d + \delta) = \chi(M)$$

が成り立つ。もし M が M が奇数次元だとすると、$\chi(M) = 0$ であることが知られている。従って以下では M が偶数次元であると仮定しよう。そしてリーマン計量より定まるリーマン曲率型式を R で表し、オイラー類を与える $\mathfrak{so}(2n)$ の不変多項式、即ち Pfaffian を e で表す。この不変多項式は $\det^{1/2}$ とも表される；定義については Kobayashi-Nomizu [35] を参照せよ。この不変式に $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R$ を代入して得られるコホモロジー類を $e(M)$ と表し、M の基本ホモロジー類を $[M]$ で表す。このとき Euler 作用素に対する Atiyah-Singer 指数定理は次のように述べられる：

定理 1.1 (Euler 作用素の指数定理).

$$\mathrm{Ind}\,(d + \delta) = \chi(M) = \langle e(M), [M] \rangle = \int_M e\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R\right).$$

よく知られるように、これは Gauss-Bonnet 定理に外ならない。

1.2 複素閉多様体上の Dolbeault 作用素

M を複素多様体とし、Hermite 計量を与えておく。また M はコンパクトで境界を持たないとしておく。ここで M 上の $(0,q)$ 型微分型式の空間 $\Omega^{0,q}$ と、この空間に作用する Dolbeault 作用素 $\bar{\partial}$ を考える。そして共役作用素を $\bar{\partial}^*$ で表しておく。ここで

$$\Omega^{ev} = \bigoplus_{q:even} \Omega^{0,q}, \quad \Omega^{odd} = \bigoplus_{q:odd} \Omega^{0,q}$$

とおき、作用素

$$\bar\partial + \bar\partial^* : \Omega^{ev} \to \Omega^{odd}$$

を考える。この場合も調和積分論により、$\bar\partial + \bar\partial^*$ の指数は Dolbeault コホモロジー群 $H^{0,q}(M)$ の次元を用いて

$$\mathrm{Ind}\,(\bar\partial + \bar\partial^*) = \sum (-1)^q \dim H^{0,q}(M)$$

と表される。ここで右辺に現れた Dolbeault コホモロジー群の次元の交代和を M の算術種数とよび、$\chi(M,\mathcal{O})$ で表そう。一方 M の Chern 類 $c_i(M)$ をとり、巾級数 $x/(1-e^{-x})$ の定める乗法列に Chern 類を代入して得られる多項式 ([30] を参照) を M の Todd 類とよび、$Td(M)$ と表す。具体的には $c_i = c_i(M)$ とおいて、

$$\begin{aligned} Td(M) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_2 + c_1^2) + \frac{1}{24}c_2c_1 \\ - \frac{1}{720}(c_4 - c_3c_1 - 3c_2^2 - 4c_2c_1^2 + c_1^4) + \cdots \end{aligned}$$

で与えられる多項式である。これは、計量からきまる曲率型式 R を用いて $f(x) = x/(1-e^{-x})$ に $\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}R$ を代入し、det をとって得られる微分型式 $\det f\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right)$ の定めるコホモロジー類と定義してもよい。この微分型式を $Td\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right)$ と表す。このとき作用素 $\bar\partial + \bar\partial^*$ に Atiyah-Singer 指数定理を適用すると、次の Hirzebruch-Riemann-Roch 定理 [30] が導かれる:

定理 1.2 (算術種数定理).

$$\mathrm{Ind}\,(\bar\partial + \bar\partial^*) = \chi(M,\mathcal{O}) = \langle Td(M),\ [M]\rangle = \int_M Td\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right).$$

1.3 有向閉多様体上の符号数作用素

M を境界の無い向き付けられたコンパクト多様体とし、リーマン計量を与えておく。再び M は偶数次元と仮定しよう。ここで Hodge 作用素 $*$ を用いて $\epsilon\omega = i^{p(p-1)+n} * \omega,\ \omega \in \Omega^p$ と定めると、$\epsilon^2 = 1$ が成立つ。さらに

$$\Omega^+ = \{\omega \in \Omega^*(M) |\ \epsilon\omega = \omega\}, \quad \Omega^- = \{\omega \in \Omega^*(M) |\ \epsilon\omega = -\omega\}$$

とおく。ここで $D = d + \delta$ と定めると、$D\epsilon = -\epsilon D$ が成り立つことにより、

$$D : \Omega^+ \to \Omega^-$$

という作用素が定義される。これを M の符号数作用素とよんでおく。ここで調和積分論を用いると、M の符号数 $\mathrm{sign}(M)$、即ち M のコホモロジー環のカップ積より定まる 2 次型式 $B(u,v) = \langle u \cup v, [M] \rangle$ の符号数に $\mathrm{Ind}\, D$ は一致することが確かめられる [7]。一方 M の Pontrjagin 類 $p_i(M)$ をとり、これを巾級数 $f(x) = \dfrac{x/2}{\tanh x/2}$ の定める乗法列に代入して得られる Pontrjagin 類の多項式 $L(M)$ を考える。これを Hirzebruch L 類という。具体的には $p_i = p_i(M)$ として、

$$\begin{aligned} L(M) = 1 + \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2) + \frac{1}{945}(62p_3 - 13P_2p_1 + 2p_1^3) \\ + \frac{1}{14,175}(381p_4 - 71p_3p_1 - 19p_2^2 + 22p_2p_1^2 - 3p_1^4) + \cdots \end{aligned}$$

で与えられる多項式である。これは、リーマン曲率型式 R を多項式 $f(x) = \dfrac{x/2}{\tanh x/2}$ に代入し、Pfaffian をとった微分型式 $\det^{1/2} f\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right)$ の定めるコホモロジー類と定義してもよい。この微分型式を $L\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right)$ と表す。このとき符号数作用素に対し、Atiyah-Singer 指数定理は次の Hirzebruch による多様体の符号数に関する指数定理 [30] を導く:

定理 1.3 (Hirzebruch 指数定理).

$$\mathrm{Ind}\, D = \mathrm{sign}(M) = \langle L(M),\ [M] \rangle = \int_M L\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right).$$

1.4 スピン多様体上の Dirac 作用素

M をスピン多様体とする。このとき M 上に Dirac 作用素とよばれる楕円型微分作用素を定義しよう。その構成法については次節で詳しく説明するので、ここでは簡略に述べておく。いまリーマン計量を M に与えておく。スピン多様体とは直交標構束 (orthogonal frame bundle) の構造群 $SO(n)$ が非自明な二重被覆群 $Spin(n)$ に持ち上げられる多様体として定義される。位相幾何学の言葉を用いると、向き付けられた多様体 M がスピン多様体であるという条件は M の第 2 Stiefel-Whitney 類が消え

ることと同値である。上で述べた構造群 $Spin(n)$ を持つ主束を Q とする。ここでスピン表現とよばれる $Spin(n)$ の表現空間 Δ を用いて、ベクトル束 S を $S = Q \underset{Spin}{\times} \Delta$ として定義する。これを M のスピン束とよぶ。このとき Dirac 作用素 D は、S の C^∞ 切断の空間 $\Gamma(M, S)$ に作用する自己共役な 1 階楕円型微分作用素として定義される。ここで M が偶数次元ならば、S は 2 つのベクトル束の直和 $S^+ \oplus S^-$ に分解する。そして D を $\Gamma(M, S^+)$ に制限して

$$D^+ : \Gamma(M, S^+) \to \Gamma(M, S^-)$$

という楕円型微分作用素が定まる。ここで M を閉多様体とすると、D^+ の指数

$$\operatorname{Ind} D = \dim \ker D^+ - \dim \ker(D^+)^*$$

に対する Atiyah-Singer 指数定理は次のように述べられる。

定理 1.4 (Dirac 作用素に対する Atiyah-Singer 指数定理 [6, 7]).

$$\operatorname{Ind} D = \langle \widehat{A}(M),\ [M] \rangle = \int_M \widehat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R\right).$$

ここでリーマン曲率型式 R を関数 $f(x) = \dfrac{x/2}{\sinh x/2}$ に代入し、

$$\widehat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R\right) = \det{}^{1/2} f\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R\right)$$

として M 上の閉微分型式を定義する。この微分型式の定めるコホモロジー類を $\widehat{A}(M)$ と表す。これは M の $\widehat{A}$ 類と呼ばれ、以下のような M の Pontrjagin 類 p_i の多項式に一致する：

$$\begin{aligned}\widehat{A}(M) = 1 - \frac{1}{24}p_1 + &\frac{1}{5760}(-4p_2 + 7p_1^2) \\ &- \frac{1}{957,680}(16p_3 - 44p_2p_1 + 31p_1^3) + \cdots .\end{aligned}$$

1.5 拡張された Dirac 作用素

本来の Atiyah-Singer 指数定理とは、境界の無いコンパクト多様体 M 上において一般の楕円型微分作用素 D の指数を D の主表象と M の幾何不変量で表示した公式

と言うことができる。作用素の指数という解析不変量が実はその主表象と多様体の幾何的な性質で決定されることは驚くべき事実であり、それはまた Atiyah-Singer 指数定理が発表された時に人々に与えた衝撃の一つであった。そして一般の楕円型微分作用素に対する指数定理の証明は、実は拡張された Dirac 作用素を扱うことに帰着される。そしてこれまで例として挙げた作用素は何れも拡張された Dirac 作用素になっている。

この拡張された Dirac 作用素を本節では導入しよう。本来の Dirac 作用素 D は、相対論的に不変であるように Schrödinger 方程式を量子化する過程で P. A. M. Dirac が導入した $\mathbb{R}^4$ 上の微分作用素である。しかし（質量 0 のとき）本来の Dirac 作用素 D の二乗は Klein-Gordon 方程式

$$\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial t^2}, \qquad (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$$

に一致するので、D は楕円型ではなく 1 階の双曲型微分作用素である。Atiyah-Singer 指数定理で本質的役割を果たすのは 1 階楕円型微分作用素である Dirac 作用素で、この作用素は Atiyah-Singer [7] において初めて導入された。Atiyah によると、初め彼等はスピン多様体の整数値不変量である $\widehat{A}$ 種数が楕円型の Dirac 作用素の指数に一致するであろうと予想し、これを証明した。そしてその後で、一般の楕円型作用素の指数が位相幾何不変量で記述可能であろうというロシア学派の予想を Smale から知らされて、一般的な立場から再度この問題に取り組んで指数定理の証明に至ったという。ここでは楕円型の Dirac 作用素を $\mathbb{R}^3$ 上の回転作用の量子化、つまり軌道角運動量の量子化と関連づけて説明しよう。古典的に軌道角運動量とはベクトル積 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ で与えられるベクトル量である。この $\boldsymbol{L}$ の各成分関数を正準量子化して得られる量子化作用素とは、まず $L^2(\mathbb{R}^3)$ に作用する微分作用素であり、そして $\mathbb{R}^3$ 上の $SO(3)$ の回転作用が与える無限小変換、即ち関数に作用するリー微分になっている。このときヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ には、Hamiltonian の量子化作用素であるラプラシアン $\Delta=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ (+potential) と、角運動量の大きさの 2 乗である $\boldsymbol{L}^2$ の量子化作用素となる $\hat{\boldsymbol{L}}^2$（これは球面に沿うラプラシアンである）と、$\boldsymbol{L}$ の 1 つの成分 L_i（i は $1,2,3$ のいずれか）の量子化作用素 $\hat{L}_i$ という 3 つの作用素が可換に作用しており、さらにこれらの 3 つの物理量は完全系を成している：つまりこれらの自己共役作用素は同時対角化可能であり、それぞれの固有値を与えることで固有ベクトルは phase を除き一意に決定される。従って量子力学の導く予言によれば、

例えば水素原子の状態はこれらの物理量のスペクトルを観測することで完全に決定されるはずであるし、またこれらの作用素のスペクトル（固有値）を決定すれば水素原子が与える物理的スペクトルの値も予言できるはずである。しかし実際の観測においては 1 本のスペクトルがしばしば 2 本に分裂することから、上のような量子化は十分には正しくないと考えられた。そしてこの欠陥を克服するために、Pauli によってスピンの概念が導入されることになる。つまり量子化における正しいヒルベルト空間は $L^2(\mathbb{R}^3)$ ではなくて $L^2(\mathbb{R}^3)\otimes\mathbb{C}^2$ であり、その上に作用する正しいリー群は $SO(3)$ ではなく、その二 d 被覆群である $SU(2)\cong Spin(3)$ （$SO(n)$ の非自明な二重被覆群を $Spin(n)$ とよぶ）であると考えられたのである。このことを数学的に言い直してみよう。まず $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル束 $S=\mathbb{R}^3\times\mathbb{C}^2$ を考える。これをスピン束という。そしてヒルベルト空間として S の L^2 切断の空間 $L^2(\mathbb{R}^3,S)\cong L^2(\mathbb{R}^3)\otimes\mathbb{C}^2$ を選ぶ。次にスピン束 S 上で（$SO(3)$ の作用には帰着されない）$SU(2)$ の作用を考え、この作用の無限小変換として現れるリー微分 J_i を $\hat{L}_i$ の代りとする。ここでベクトル量 $\boldsymbol{J}=(J_i)$ を全角運動量とよぶ。そして軌道角運動量の大きさの 2 乗である $\boldsymbol{L}^2$ を全角運動量の大きさの 2 乗である $\boldsymbol{J}^2$ に置き換える。このときラプラシアン Δ に置き換わるべき作用素として現れるものが、（質量 0 の）$\mathbb{R}^3$ 上の Dirac 作用素 D なのである。ここで D は、J_i とは可換であるが L_i とは可換にならないことを注意しておく。この D は具体的に

$$D=\sigma_1\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}+\sigma_2\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}+\sigma_3\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_3}=\sum_{i=1}^{3}c_i\nabla_i$$

として与えられる。ここで σ_i は Pauli のスピン行列：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\quad\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

であり、$c_i=-i\sigma_i$, $\nabla_i=\partial/\partial x_i$ である。このとき c_i たちはクリフォード関係式：$c_i^2=-1$, $c_ic_j+c_jc_i=0\ (i\neq j)$ を満たしている。またこの式より $D^2=\Delta\otimes 1$ が成り立つことも判る。

さらに $\mathbb{R}^2$ 上の Dirac 作用素を、$\mathbb{R}^3$ 上の Dirac 作用素 D を $\mathbb{R}^2=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3\}$ に制限して得られる作用素と定義しよう。すなわち

$$D=\sum_{i=1}^{2}c_i\nabla_i=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}0&\partial/\partial x-i\partial/\partial y\\\partial/\partial x+i\partial/\partial y&0\end{pmatrix}=\frac{2}{i}\begin{pmatrix}0&\partial/\partial z\\\partial/\partial\bar{z}&0\end{pmatrix}$$

と定める。ただし $\partial/\partial\bar{z} = (\partial/\partial x + i\partial/\partial y)/2 \quad \partial/\partial z = (\partial/\partial x - i\partial/\partial y)/2$ である。ここで Cauchy-Riemann 作用素 $\partial/\partial\bar{z}$ とその共役作用素が自然に現れることに注意しておこう。また 2 次元の Dirac 作用素は 3 次元の場合と異なる性質をもつ。いま $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ という分解に応じてスピン束を $S = S^+ \oplus S^-$ と分解し、L^2 切断の成すヒルベルト空間も $\mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ と分解しておく。ここで $\mathcal{H}^+$ の元を偶スピノール、$\mathcal{H}^-$ の元を奇スピノールとよぶ。このとき 2 次元の Dirac 作用素 D は偶奇を反転させる作用素になっている。

それでは $\mathbb{R}^{2n}$ 上の Dirac 作用素をこの作用素を用いて定義してみよう。空間の直積をとるとヒルベルト空間はテンソル積になると考えるならば、$\mathbb{R}^{2n}$ のヒルベルト空間は $L^2(\mathbb{R}^2, S)^{\otimes n}$ となる。そして $L^2(\mathbb{R}^2, S)^{\otimes n}$ に作用する Dirac 作用素 D を

$$D(\xi_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \xi_n) = (\pm) \sum_{i=1}^{n} \xi_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} D\xi_i \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \xi_n, \quad \xi_i \in L^2(\mathbb{R}^2, S)$$

と定める。ただし D はスピノール $\xi_i \in L^2(\mathbb{R}^2, S)$ の偶奇に関して反微分として作用させる（このことを示すために記号 $\hat{\otimes}$ を用いた）。こうして与えられた作用素 D は $\mathbb{R}^{2n}$ 上のスピン束 $S = \mathbb{R}^{2n} \times (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ の L^2 切断の空間 $L^2(\mathbb{R}^{2n}, S)$ に作用する自己共役な 1 階楕円型微分作用素で、$D^2 = \Delta \otimes 1$ を満たすことが判る。さらに $\mathbb{R}^2$ 上のスピン束の偶奇を自然に S へ拡張すると、$\mathbb{R}^{2n}$ 上のスピン束も $S = S^+ \oplus S^-$ として偶部分と奇部分に分解する。この分解 $S^+ \oplus S^-$ に応じて偶奇に関する次数作用素 ϵ を

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

として定義すると、$\mathbb{R}^{2n}$ 上の Dirac 作用素 D は $D\epsilon = -\epsilon D$ を満たしている。即ち D はスピノールの偶奇を反転させる。

一般の多様体 M に対しても M がスピン構造を有するときスピン束と呼ばれるベクトル束 $S \to M$ が存在する。ここで M にリーマン計量を与えておくと、リーマン接続が S の接続 ∇ を自然に定め、Dirac 作用素 $D\colon \Gamma(M, S) \to \Gamma(M, S)$ が

$$D\xi = \sum c_i \nabla_i \xi$$

として定義される。ここで接空間の正規直交基底 $\{e_i\}$ より定まる e_i のクリフォード積を c_i と表し、e_i 方向への共変微分を ∇_i と表した。このとき D は自己共役な 1 階楕円型微分作用素となる。詳細については [48, 24, 36, 43] を参照せよ。

さらに M が偶数次元のときにはスピン束が $S = S^+ \oplus S^-$ と分解し、この分解に応じて次数作用素 ϵ を

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義するとき $D\epsilon = -\epsilon D$ が成り立つ：すなわち Dirac 作用素は

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}, \qquad (D^+)^* = D^-$$

と表される。

これまでは M にスピン構造を仮定して Dirac 作用素を構成したが、より重要であるのは M がスピン ^{c} 構造を持つときに定義される Dirac 作用素である。以下でその概略を説明する。詳細については再び [48, 24, 36, 43] を参照されたい。いまスピン ^{c} 群を

$$Spin^c(n) = Spin(n) \underset{\{\pm 1\}}{\times} U(1)$$

と定義する。ここで $\{\pm 1\}$ は $Spin(n)$ の中心群である。すると $Spin^c(n)$ から $SO(n)$ へ自然な全射準同型が存在する。そして多様体 M の正規直交標構束の構造群 $SO(n)$ がこの準同型を通じて $Spin^c(n)$ へ持ち上げられているとき、M をスピン ^{c} 多様体という（この持ち上げ方には $U(1)$ の任意性がある)。このときスピン ^{c} 多様体上にもスピン束 S が定義され、スピン多様体のときと同様に Dirac 作用素 $D\colon \Gamma(M,S) \to \Gamma(M,S)$ が構成できる。

また M 上に計量つきのベクトル束 E が与えられたとき、E を係数とするスピノールの空間、即ち C^∞ 切断の空間 $\Gamma(M, S\otimes E)$ 上へ Dirac 作用素 D を拡張することができる。この作用素を D^E と表す。具体的に書けば、D^E は S の接続 ∇ と E の接続 ∇^E を用いて

$$D^E = \sum c_i(\nabla_i \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_i^E)$$

で与えられる。この作用素を E を係数とする Dirac 作用素、あるいは E と結合した Dirac 作用素という。そしてスピン ^{c} 多様体が偶数次元のとき、D^E も D と同様に

$$D^E = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}, \qquad (D^+)^* = D^-$$

と分解する。ここで M が閉多様体とすると、D^E の指数

$$\operatorname{Ind} D^E = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^-$$

が定まる。このとき D^E に対する Atiyah-Singer 指数定理は次のように述べられる。

定理 1.5 (Atiyah-Singer [6, 7]). 偶数次元のスピン ^{c} 閉多様体 M をとり、これにリーマン計量を与えておく。このとき M 上のベクトル束 E を係数とする *Dirac* 作用素 D^E に対して

$$\operatorname{Ind} D^E = \int_M \widehat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^E\right)$$

が成り立つ。ここで R は M のリーマン曲率型式、R^E は E の曲率型式を表し、

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^E\right) = \operatorname{Tr}\exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^E\right)$$

である。

第2章　K 群と指数定理

2.1　C^* 環の K 理論と位相的 K 理論

この小節では C^* 環の K 理論と位相的 K 理論について必要な定義や性質を簡単に復習しておく。K 群の詳しい性質については夏目氏の解説 [38, 第 2 章] および Blackerdar [16], Wegge-Olsen [49] を参考にされたい。

まずコンパクトハウスドルフ空間 X に対して、$K^0(X)$ は X 上のベクトル束の同型類の集合の成す半群（和はベクトル束の Whitney 和）の普遍アーベル群、即ち Grothendieck 群として定義される。このとき $K^0(X)$ の任意の元は、X 上の 2 つのベクトル束 E, F の形式的な差 $E-F$ として表現される。また X が局所コンパクトハウスドルフ空間の場合には X の 1 点コンパクト化 X^+ を考えて、$K^0(X) = \{E-F \in K^0(X^+) | \operatorname{rk} E = \operatorname{rk} F\}$ と定める。さらに高次の K 群を $K^{-i}(X) = K^0(X \times \mathbb{R}^i)$ $(i \geq 0)$ と定義する。このとき K^{-i} 群の間には周期 2 の同型が成り立つ：

$$K^{-i+2}(X) \cong K^{-i}(X).$$

K 群に関するこの性質を Bott 周期性という。これより $i > 0$ に対しても $K^i(X) = K^{i-2j}(X)$ $(j > 0)$ と定めることができる。また K 群は周期 2 の同型をもつから、しばしば $K^{-i}(X)$ を $K^i(X)$ と同一視する。

次にコンパクトなリー群 G（有限群を含む）が空間 X に作用していると仮定する。このとき単なるベクトル束の代りに G 作用が付随したベクトル束（これを G ベクトル束という）を考える。すると以上に述べた Grothendieck 群の構成を G 作用を込めて考えることで、G ベクトル束の K 群を定義できる。こうして定まる K 群を G 同変 K 群とよび、この群を $K_G^*(X)$ と表す。

一方コンパクトハウスドルフ空間 X が与えられたとき、X の連続関数環 $C(X)$ は、

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

をノルムとして可換な C^* 環になる。また X が局所コンパクトハウスドルフ空間の場合にはその 1 点コンパクト化 $X^+ = X \cup \{\infty\}$ をとり、

$$C_o(X) = \{f \in C(X^+) |\ f(\infty) = 0\}$$

とおいて可換 C^* 環を構成できる（これは単位元を持たない C^* 環である)。この C^* 環は、上のノルムによる $C_c(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid$ コンパクト台を持つ連続関数 $\}$ の C^* 環としての完備化と考えてもよい。逆に Gel'fand-Naĭmark の定理によって、任意の可換 C^* 環は適当な局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対する $C_o(X)$ と同型になる。従って可換 C^* 環を考えることは、局所コンパクトハウスドルフ空間を考えることと全く同値である。一方可換でない C^* 環も当然ながら存在し、Gel'fand の定理によると、一般の C^* 環はヒルベルト空間上の有界作用素全体の C^* 環 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ のある閉 $*$ 部分環と同型になることが知られている。

そして可換とは限らない一般の C^* 環 $\mathcal{A}$ に対しても K 群 $K_*(\mathcal{A})$ が定義される。特に $\mathcal{A} = C_o(X)$ のとき、この K 群は先に定義した位相的 K 群 $K^*(X)$ と自然に同型となる。このことから C^* 環に対する K 理論は、位相空間に対する K 理論を包含していると言ってよい。この事実が非可換幾何学を考えるための最初の足がかりとなる。

まず C^* 環 $\mathcal{A}$ が単位元 $\mathbf{1}$ をもつ時を考えよう。ここで $\mathcal{A}$ を成分とする次数 n の行列環を $M_n(\mathcal{A})$ で表す。このとき埋め込み

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を考え、$M(\mathcal{A}) = \bigcup_n M_n(\mathcal{A})$ とおく。さらに $M(\mathcal{A})$ に属する巾等元全体の集合 $\{e \in M(\mathcal{A}) \mid e = e^2\}$ を $P(\mathcal{A})$ で表す。ここで連結成分の集合 $\pi_0 P(\mathcal{A})$ は

$$e_0 \oplus e_1 = \begin{pmatrix} e_0 & 0 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix}$$

を和として半群を成す。

定義 2.1. 半群の $\pi_0 P(\mathcal{A})$ の普遍アーベル群、すなわち Grothendieck 群を $K_0(\mathcal{A})$ と表し、$\mathcal{A}$ の K_0 群という。

次にユニタリ元の全体 $\{u \in M(\mathcal{A}) \mid uu^* = 1\}$ を $U_n(\mathcal{A})$ で表す。このとき埋め込み

$$u \longmapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考え、$U(\mathcal{A}) = \bigcup_n U_n(\mathcal{A})$ とおく。このとき連結成分の集合 $\pi_0 U(\mathcal{A})$ は

$$u_0 \oplus u_1 = \begin{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & u_1 \end{pmatrix}$$

を和としてアーベル群を成す。

定義 2.2. アーベル群 $\pi_0 U(\mathcal{A})$ を $K_1(\mathcal{A})$ と表し、$\mathcal{A}$ の K_1 群という。

また単位元をもつ C^* 環 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ と準同型写像 $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が与えられたとき、自然な写像 $\rho_* : K_i(\mathcal{A}) \to K_i(\mathcal{B})$ $(i = 0, 1)$ が定まる。

註 2.3. 連続写像 $\varphi : X \to Y$ は C^* 環の準同型写像 $\varphi^* : C_o(Y) \to C_o(X)$ を導く。従って射に関して共変的である C^* 環の K_* 群は、射に関して反変的である位相空間の K^* 群に対応する。

次に C^* 環 $\mathcal{A}$ が単位元をもたないとする。いま $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ の元 (a, x) を $a + x \cdot 1$ と表し、$(a + x \cdot 1)(b + y \cdot 1) = (ab + xb + ya) + xy \cdot 1$ により $\mathcal{A}^+$ 上に積を定める。このとき $\mathcal{A}^+$ は単位元 1 をもつ C^* 環であり、自然な写像 $\pi : \mathcal{A}^+ \to \mathbb{C}$, $\pi(a + x \cdot 1) = x$ が存在する。

定義 2.4. C^* 環 $\mathcal{A}$ が単位元をもたないとき、$K_i(\mathcal{A}) = \ker[\pi_* : K_i(\mathcal{A}^+) \to K_i(\mathbb{C})]$ を $\mathcal{A}$ の K 群という。

ここで K 群がもついくつかの重要な性質をまとめておこう。

1) 安定性 自然に $K_*(\mathcal{A})$ は $K_*(\mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C}))$ と同型である。

2) ホモトピー不変性 C^* 環 $\mathcal{A}$ を値とする閉区間上の連続関数環を $C([0,1], \mathcal{A})$ と表し、$0, 1$ での値をとる準同型写像をそれぞれ ι_0, $\iota_1 : C([0,1], \mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ とおく。与えられた準同型写像 ρ_0, $\rho_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対し、準同型写像 $\rho : \mathcal{A} \otimes C[0,1] \to \mathcal{B}$ が存在して $\rho \circ \iota_i = \rho_i$ $(i = 0, 1)$ であるとき、ρ_0 と ρ_1 はホモトープという。このとき K 群上に誘導される準同型写像 $(\rho_0)_*$, $(\rho_i)_*$ は互いに一致する。

2) 6 項完全系列 短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B} \longrightarrow 0$$

が与えられたとき、次の完全系列が存在する。

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{I}) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(\mathcal{B}) \\ {\scriptstyle\partial}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ K_1(\mathcal{B}) & \xleftarrow[\pi_*]{} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow[\iota_*]{} & K_1(\mathcal{I}) \end{array}$$

3) Bott 周期性 いま $C_o(\mathbb{R}^2)$ により、無限遠点で 0 となる $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数全体を表す。このとき同型写像

$$K_i(\mathcal{A}) \cong K_i(\mathcal{A} \otimes C_o(\mathbb{R}^2)) \qquad (i = 0, 1)$$

が存在する。

註 2.5. ヒルベルト空間上のコンパクト作用素の全体を $\mathcal{K}$ で表す。この C^* 環は、先に与えた自然な包含写像に関する $M_n(\mathbb{C})$ の帰納極限から定まる C^* 環と同型になる。このとき自然に $K_*(\mathcal{A})$ は $K_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{K})$ と同型である。一般に、$\mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$ と $\mathcal{B} \otimes \mathcal{K}$ が同型であるとき、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は安定同型であるという。そして C^* 環に関して、安定同型性は強森田同値性と同等の概念であることが知られている。従って強森田同値な C^* 環の K 群は自然に同型になることが知られる。

群作用をもつ空間に対する同変 K 理論に戻ろう。この場合にも同変 K 理論は C^* 環の K 理論に包含される。このことを理解するために、群作用が定める接合積とよばれる C^* 環を導入する。接合積は局所コンパクト群の作用があれば定まるが、一般の定義は Pedersen [42] に譲って、ここでは離散群に対する接合積だけを定義しておこう。離散群 G が局所コンパクトハウスドルフ空間 X に（右から）作用しているとする。このとき接合積 $C_o(X) \rtimes G$ とよばれる C^* 環を次のように定義する：まず $g \in G$ に対応する形式的ユニタリ元 U_g を導入し、それらの元の積を $U_g U_h = U_{gh}$ $(g, h \in G)$ と定めておく。そしてコンパクト台を持つ X 上の連続関数環 $C_c(X)$ の元を係数とする形式的な有限和 $\sum_{g \in G} a_g U_g$ $(a_g \in C_c(X))$ を考える。そして 2 つの形式和 $a = \sum_{g \in G} a_g U_g$, $b = \sum_{h \in G} b_h U_h$ に対して、それらの和と積を

$$a + b = \sum_g (a_g + b_g) U_g, \qquad ab = \sum_{g,h} a_g g(b_h) U_{gh}$$

と定める。ここで X 上の G 作用を用いて $g(b_h)(x) = b_h(xg)$ $(x \in X)$ と表した。群 G が作用する環 $C_c(X)$ を係数とする G の群環と考えれば、接合積の定義は了解しやすいであろう。このような元の全体を $C_c(X, G)$ と表し、ここに次の様にして $*$ 作用素を定める：

$$\left(\sum_g a_g U_g\right)^* = \sum_g g^{-1}(\bar{a}_g) U_{g^{-1}}.$$

さらに $x \in X$ に対して $G_x = \{(y, g) \in X \times G \mid yg = x\}$ とおき、G_x 上の L^2 関数（いまの場合は ℓ^2 点列と呼ぶ方が妥当であろう）の成すヒルベルト空間を $\mathcal{H}_x$ とする。ここで $\mathcal{H}_x$ 上に実現される $C_c(X, G)$ の $*$ 表現 π_x を

$$(\pi_x(a)\xi)(y, h) = \sum_g a_g(y)\xi(yg, g^{-1}h), \quad (y, h) \in G_x$$

により定める。そして $\mathcal{H}_x$ 上の作用素ノルムを用いて $C_c(X, G)$ 上の $*$ ノルムを

$$\|a\| = \sup_{x \in X} \|\pi_x(a)\|$$

と定義し、このノルムで $C_c(X, G)$ を完備化して得られる C^* 環を G 作用による $C_o(X)$ の接合積とよぶ。これを $C_o(X) \rtimes G$ と表す。

離散群あるいはリー群 G が局所コンパクトハウスドルフ空間 X に作用しているとき、同様にして接合積 $C_o(X) \rtimes G$ が一般に定義される。このとき G 作用は固有作用である必要はない。これらの接合積の K 群は一般には判明し難い。しかし G がコンパクトリー群あるいは有限群の場合には、K 群に関して

$$K_*(C_o(X) \rtimes G) \cong K_G^*(X)$$

という同型の成り立つことが知られている [28]。このことからコンパクトリー群あるいは有限群に対する同変 K 理論は C^* 環の K 理論に包含されると考えられる。

2.2 K 群と作用素の指数

閉多様体 M 上の楕円型微分作用素 T は Fredholm 作用素を与える。このとき T の指数を

$$\operatorname{Ind} T = \dim\ker T - \dim\ker T^*$$

と定義した。ここでコンパクト作用素全体の成す C^* 環を $\mathcal{K}$ と表すとき、指数 $\mathrm{Ind}\,T$ は $K_0(\mathcal{K})$ の元として解釈されることを説明しよう。まず M にリーマン計量を与えて、2 乗可積な関数全体の成すヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ とおく。このとき M は完備なリーマン多様体であることから、M 上で形式的に自己共役な微分作用素は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素に一意的に拡張する。この自己共役作用素を D とすると、Stone の定理によって $\{e^{itD}\}_{t\in\mathbb{R}}$ というユニタリ作用素の 1 径数群が存在する。ここで断面曲率が有界な完備リーマン多様体においては、自己共役な楕円型微分作用素 D が有限伝播速度 (finite propagation speed) を持つという事実が基本的である (Roe [43] を参照)。これを用いて次の補題が示される [43, p. 63][47]:

補題 2.6. コンパクトで境界の無い多様体 M 上の自己共役な楕円型微分作用素 D を考える。いま $\mathbb{R}$ 上の急減少関数 f が与えられたとき、

$$f(D) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itD}dt$$

により定められる $\mathcal{H}$ 上の作用素は *smoothing operator* となり、この作用素は C^∞ 級の核関数を持つ。

この補題からさらに次の命題が成り立つ。

命題 2.7. 上の補題と同じ仮定の下で、D に依存する C^* 環の準同型写像

$$\rho : C_o(\mathbb{R}) \to \mathcal{K}$$

が存在し、急減少関数 f に対しては $\rho(f) = f(D)$ が成り立つ。ここで $\mathcal{K}$ は $\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素の全体を表す。

註 2.8. 指数定理を拡張する際に必要となるので、基本となる補題とそれから導かれる命題を一般的な形で述べた。しかし境界の無いコンパクト多様体上では以下のようにして簡単に ρ を構成することができる。いま D は楕円型微分作用素であるからよく知られているように、$\mathcal{H}$ は D の固有空間の直和に分解し各固有空間の次元は有限となる。ここで固有値 λ の固有空間を V_λ と表す。このとき $\mathcal{H}$ 上の作用素 $\rho(f)$ は、各 V_λ 上で $\rho(f)|V_\lambda = f(\lambda)\mathrm{Id}$ となる作用素として与えられる。

さて偶数次元の多様体上で定義された Dirac 作用素を思い出そう。このとき次数作用素とよばれる自己共役作用素が存在して、$\epsilon D + D\epsilon = 0$ が成り立っていた。一

方 $\mathbb{R}$ 上に反転を行う変換 $\epsilon(x) = -x$ $(x \in \mathbb{R})$ を考え、これにより位数 2 の巡回群 $\mathbb{Z}_2$ が $\mathbb{R}$ に作用しているとする。この作用に関する接合積を $C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ と表す。ここで U_e, U_ϵ を各々単位元と $\mathbb{Z}_2$ の生成元に対応する形式的ユニタリ元とすれば、接合積の任意の元 a は f_0, $f_1 \in C_o(\mathbb{R})$ を用いて $a = f_0U_e + f_1U_\epsilon$ と表される。以下ではしばしば U_e を 1 と考えて省略し、また U_ϵ も ϵ と略記する。

命題 2.9. このとき C^* 環の準同型写像

$$\rho : C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to \mathcal{K}$$

が一意的に存在し、急減少関数 f_0, f_1 に対しては

$$\rho(f_0U_e + f_1U_\epsilon) = f_0(D) + f_1(D)\epsilon$$

が成立つ。この ρ を D の定める指数準同型写像とよぶ。

この ρ を用いて Dirac 作用素 D の指数を定義する。そのために $C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ の K 群を調べよう。これに関して C^* 環の準同型

$$\sigma : C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}, \quad \sigma(f_0 + f_1\epsilon) = f_0(0) + f_1(0)$$

が存在し、この準同型写像 σ_* が実は K 群の同型を導くことが確かめられる。即ち、$K_0(C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}$, $K_1(C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2) = 0$ が成り立つ。いま、この同型を通じて $1 \in K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ に対応する $K_0(C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2)$ の生成元を e と表そう。

定義 2.10. 偶数次元多様体上の Dirac 作用素 D に対し、指数準同型 ρ を用いて

$$\operatorname{Ind} D = \rho(e) \in K_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

と定める。これを D の指数という。

ここで生成元 $e \in K_0(C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2)$ の具体的な表示をひとつ与えておく。いま

$$e_x = \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)} + \frac{1-x^2}{2(1+x^2)}\epsilon, \qquad e_1 = \frac{1-\epsilon}{2}$$

とおくと、e_x と e_1 はともに射影元である。そして $\lim_{x\to\pm\infty} e_x = e_1$ であるので、相対 K 群の元として [16, §5.4]

$$e_x - e_1 \in K_0(C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2)$$

が定まる。これが生成元 e のひとつの表示である（他の表示についても後述する）。

奇数次元多様体上の Dirac 作用素 D に対しても指数を定義しておこう。（ただし奇数次元コンパクト多様体上では、これから定義する指数は自明となる）。奇数次元多様体上の Dirac 作用素に関して次数作用素は存在しないが、命題 2.7 によって D に依存する準同型（これも指数準同型と呼ぶ）

$$\rho : K_*(C_o(\mathbb{R})) \to K_*(\mathcal{K})$$

が存在する。ここで $K_1(C_o(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$ の生成元 u を用いて

$$\operatorname{Ind} D = \rho(u) \in K_1(\mathcal{K}) \tag{2.2}$$

と定める。コンパクト作用素全体の C^* 環 $\mathcal{K}$ については $K_1(\mathcal{K}) = 0$ なので、今の場合は常に $\operatorname{Ind} D = 0$ である。

さて偶数次元の場合に話を戻す。このとき Dirac 作用素は

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}, \qquad (D^+)^* = D^-$$

という形をしており、その指数は

$$\operatorname{Ind} D = \dim \ker D^+ - \dim \ker D^-$$

と定義されていた。この定義との整合性を調べてみよう。まず

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in C_o(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{C}) : \ a,\ d \text{ は偶関数、} c,\ d \text{ は奇関数} \right\}$$

とおくとき、同型写像

$$\iota : C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to \mathcal{A}$$

が

$$\iota(f) = \begin{pmatrix} f^{ev} & f^{odd} \\ f^{odd} & f^{ev} \end{pmatrix}, \qquad \iota(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

により与えられることを注意しよう。但し $f \in C_o(\mathbb{R})$ に対して、$f^{ev}(x) = (f(x) + f(-x))/2$、$f^{odd}(x) = (f(x) - f(-x))/2$ とおいた。ここで次の条件を満足する $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $\varphi,\ \psi$ を選んでおく：

1) φ は偶関数、ψ は奇関数である；

2) $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ $(x \in \mathbb{R})$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\pm\infty) = 1$, $\psi^2 = \varphi(1-\varphi)$ が成立つ。

このとき

$$e_x = \begin{pmatrix} 1-\varphi & \psi \\ \psi & \varphi \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

は容易に確かめられるように射影元であり、さらに $e_x - e_1 \in \mathcal{A}$ が成り立つ。このことから $e_x - e_1$ は $K_0(\mathcal{A})$ の元を定め [16, §5.4]、さらに $e_x - e_1 \in K_0(\mathcal{A})$ は生成元であることが確かめられる。そして先に選んだ生成元 $e \in K_0(C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2)$ は、同型写像 $\iota : C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to \mathcal{A}$ を通じて $e_x - e_1 \in K_0(\mathcal{A})$ に対応する。従ってこの同一視の下で、$\operatorname{Ind} D = \rho(e_x) - \rho(e_1) \in K_0(\mathcal{K})$ が成り立つ。いま上の条件 1) 2) に加えて $1-\varphi$ の台が 0 の十分小さい近傍に含まれると仮定しよう。すると D に関する固有値 λ $(\lambda \neq 0)$ の空間 V_λ 上では

$$\rho(e_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho(e_1)$$

となり、固有値 0 の空間、即ち $\ker D$ 上では

$$\rho(e_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。従って Tr が導く同型写像[1] を用いて $K_0(\mathcal{K})$ と $\mathbb{Z}$ を同一視するとき、

$$\operatorname{Tr}(\rho(e_x) - \rho(e_1)) = \operatorname{Tr}\,(\rho(e_x)|\ker D - \rho(e_1)|\ker D) = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^-$$

が成り立つ。

この議論おいては、固有値 0 が D の孤立した点スペクトルという性質が肝要であることに注意しておく。

[1]ここでトレイス Tr は同型写像 $K_0(\mathcal{K}) \to \mathbb{Z}$ を導く。後述の命題 3.1 を参照。

第3章　群作用と指数定理

3.1　G 同変指数定理

Atiyah と Singer は指数定理を以下のような作用素へさらに拡張した：

- コンパクト多様体上のコンパクトなリー群あるいは有限群作用と同変な作用素 [7, I,III] [5, II]；
- 正規被覆空間 $M \to M/\Gamma$ に持ち上げられた作用素 [1, 46]；
- 作用素の族 $(D_x)_{x\in X}$ [7, IV].

第一の場合を考えよう。このとき作用素の指数は群の表現空間の差として定義される。いまコンパクトリー群 G が多様体に作用しており、作用素 D は G 作用について同変であると仮定する。このとき D の G 同変指数を

$$\mathrm{Ind}_G D = \ker D^+ - \ker D^- \in R(G)$$

と定義する。つまり $\ker D^+$ と $\ker D^-$ を G の表現空間と見なし、その形式的な差を G の表現環 $R(G)$ の元と考えるのである。ここで $R(G)$ は、G の既約表現全体を基底として $\mathbb{Z}$ 上生成される自由アーベル群を表す。

次に C^* 環の K 群を用いて G 同変指数を定義しよう。一般にリー群や無限離散群が局所コンパクトハウスドルフ空間 X に作用しているとき、接合積と呼ばれる C^* 環 $C_o(X) \rtimes G$ が定義される [38, 第 1 章][42]。いまリー群 G が一点に作用していると考えて、(被約な) 接合積をつくる。これを被約 C^* 群環とよび、一般に C^*_rG と表す。ただし本論説では簡単のために単に C^*G と表すことにしよう。この C^* 環は、コンパクト台を持つ G 上の連続関数たちに合成積 (convolution product)

$$(\varphi * \psi)(g) = \int_G \varphi(gh^{-1})\psi(h)dh$$

を導入して、$L^2(G)$ 上の作用素ノルムにより C^* 完備化を行って得られる C^* 環としても定義される。そして G がコンパクトのとき、その構造はよく判っている。いま G の既約表現全体の集合を $\widehat{G}$ とする。このとき C^*G は、既約表現 $V \in \widehat{G}$ の準同型環 $\mathrm{End}(V)$ がつくる直和 $\bigoplus_{V\in\widehat{G}} \mathrm{End}(V)$ を C^* 完備化した環と同型になる。このとき $\mathrm{End}(V)$ は有限次元の行列環に同型であり、従って $\mathbb{C}$ と強森田同値である。強森田同値な C^* 環の K 群は自然に同型となるから、結局

$$K_0(C^*G) = \bigoplus_{V\in\widehat{G}} K_0(\mathrm{End}(V)) = \bigoplus_{\widehat{G}} \mathbb{Z} = R(G)$$

が成立つ。より具体的に述べるならば、既約表現 $V \in R(G)$ と、C^*G の直和因子 $\mathrm{End}(V)$ に属する階数 1 の射影元が互いに対応している。

ここで G 同変な Dirac 作用素 D が与えられたとしよう。この場合にも指数準同型が定義され、D の指数が定まる。実際指数準同型は

$$\rho : C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to \mathcal{K} \otimes C^*G$$

として与えられ、$K_0(\mathcal{K} \otimes C^*G) \cong K_0(C^*G)$ の元として指数が定義される。このときも固有値 0 が D の孤立した点スペクトルであることから、既約表現と階数 1 の射影元の同一視の下に $R(G)$ に属する Atiyah-Singer の G 同変指数と $K_0(C^*G)$ に属する指数 (2.1) が一致することを証明できる。

さて Atiyah-Segal-Singer [5, 7] で示されたように、G 同変指数定理においては作用素の G 同変指数が定める G 表現の指標を、G の固定点集合の情報を用いて記述することが可能であった。この G 同変指数が定める G 表現の指標と $K_0(C^*G)$ の元である指数の関係を述べよう。

一般に C^* 環 $\mathcal{A}$ が与えられたとき、連続汎関数 $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ で

$$\tau(ab) - \tau(ba) = 0, \qquad a, b \in \mathcal{A}$$

であるものを $\mathcal{A}$ のトレイスという。このとき射影元 $e \in \mathcal{A}$ に $\tau(e)$ を対応させることで、τ は加法的写像

$$\tau : K_0(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$$

を誘導する。つまり同値な射影元に対して τ は同一の値を与える。これは、後述する巡回コホモロジー群と K 群の対写像に関する最も重要かつ簡単な例を示しているので、この事実を命題として挙げておこう。

命題 3.1. いま $\mathcal{A}$ を（単位元を持つ）C^* 環とし、$\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ をトレイスとする。このとき 2 つの射影元 e_0, e_1 が $K_0(\mathcal{A})$ の同じ元を定めていれば、

$$\tau(e_0) = \tau(e_1)$$

が成り立つ。

証明. まず 2 つの射影元 e_0, e_1 が K_0 群において同値であるとは、（必要ならば行列環とのテンソル積 $\mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C})$ を考えて）e_0 と e_1 を端点とする射影元の連続な族 $(e_t)_{t\in[0,1]}$ が存在することであった。このとき族 $e = (e_t)$ が $t \in [0,1]$ に関して微分可能であるとしておこう。いま t に関する e の微分を $\dot{e}$ で表しておくと

$$\tau(e_1) - \tau(e_0) = \int_0^1 \tau(\dot{e})dt$$

となる。ここで $\dot{e} = (e^2)^{\cdot} = \dot{e}e + e\dot{e}$ より $\dot{e} = [\dot{e}(2e-1), e]$ に注意すると

$$\tau(\dot{e}) = \tau([\dot{e}(2e-1), e]) = 0$$

となり、$\tau(e_0) = \tau(e_1)$ が成り立つ。 □

さて C^*G の元 a に対して $\mathrm{End}(V_\lambda)$ における直和成分 a_λ をとり、$\tau_\lambda(a) = \mathrm{Tr}\, a_\lambda$ とおく。ここで Tr は行列に対する通常のトレイスである。このとき各既約表現 V_λ に対して定まる τ_λ が C^*G 上のトレイスを定めることは明らかである。従って上の命題より τ_λ は $K_0(C^*G)$ から $\mathbb{C}$ への写像を与える。いま V を任意の G 表現として、これを $\sum_\lambda n_\lambda V_\lambda$ と既約分解しておく。ここで $\mathrm{End}(V_\lambda)$ に属する階数 1 の射影元を e_λ とすれば、V に対応する射影元 e_V は $\sum n_\lambda e_\lambda$ で与えられる。このとき $\tau_\lambda(e_V) = n_\lambda$ が成り立つ。故に $K_0(C^*G)$ の元 e に対して $\tau_\lambda(e)$ の値をすべて求めれば、e が決定されることになる。一方表現論でよく知られるように、コンパクト群の表現空間 V は指標 $\mathrm{Tr}\,(g|V)$ を求めることで一意に決定される。したがって作用素 D の G 同変指数を G の表現空間と考えて指標を計算することと、$K_0(C^*G)$ の元である D の指数を τ_λ に代入して値を計算することは同値になる。こうして我々の定義した指数と Atiyah-Segal-Singer の G 同変指数 [5, 7] を結びつけることが出来る。

3.2 Γ 指数定理

次に正規被覆空間 $M \to M/\Gamma$ に持ち上げられた作用素に対する指数定理を考えよう。正規被覆空間とは離散群 Γ の自由かつ固有な作用をもつ空間 M のことをいう。ここで M/Γ は作用に関する商空間を表す。このとき Γ が有限群ならば、指数定理は前節の G 同変指数定理に帰着する。ここで興味があるのは Γ が無限群の場合である。

このような無限被覆空間上の作用素 D の指数を定義するためには、作用素の解析的性質をさらに調べておく必要がある。1963 年に Atiyah-Singer [6] が指数定理を発表したとき、当初の証明は K 理論とコボルディズム理論を用いて与えられた（例えば [40] を参照せよ）。そして Atiyah-Singer はその後の論文 [7] において擬微分作用素の理論を援用し K 理論を用いて鮮やかな証明を与えた。そしてその数年後に Patodi [41] や Atiyah-Bott-Patodi [2] は熱核を用いた指数定理の解析的証明を与えた。ここでその証明の内容を一瞥しておこう。

多様体 M がコンパクトのとき、自己共役な正値楕円型微分作用素 D^2 の熱核 e^{-tD^2} は trace class に属する作用素となる（例えば Gilkey [26] を参照せよ）。従って偶数次元の多様体上の Dirac 作用素 D とその次数作用素 ϵ に関して、ϵe^{-tD^2} は trace class に属する作用素であり、このとき

$$\operatorname{Ind} D = \operatorname{Tr}(\epsilon e^{-tD^2}) \qquad (t > 0)$$

が成り立つ。実際、定義 2.10 の指数 $\rho(e)$ を与える射影元 (2.3) を表す関数 φ, ψ を $1 - \varphi(x) = e^{-tx^2}$ と選んでおけば、$\operatorname{Tr}(\rho(e)) = \operatorname{Tr}(\epsilon e^{-tD^2})$ となり上式が導かれる。従って命題 3.1 により、この値は $t > 0$ によらない。ここで D^2 に関する固有値 $\lambda \geq 0$ の固有空間上で e^{-tD^2} は $e^{-t\lambda}$ 倍として作用するから、$\ker D^+$ 上への射影作用素 e_+ と $\ker D^-$ 上への射影作用素 e_- を用いて $t \to +\infty$ における ϵe^{-tD^2} の極限を

$$\lim_{t \to +\infty} \epsilon e^{-tD^2} = \begin{pmatrix} e_+ & 0 \\ 0 & -e_- \end{pmatrix}$$

と表すことが出来る。従ってトレイスをとって

$$\operatorname{Tr}(\epsilon e^{-tD^2}) = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^-$$

が成立つ。一方 $t \to 0$ とすると ϵe^{-tD^2} の核関数は $M \times M$ の対角部分に集中する。ここで対角部分の各点 $x \in M$ においてトレイス Tr_x をとると $t \to 0$ で極限が

存在し、その極限は指数定理に現れた $\widehat{A}$ 型式 $\widehat{A}(M)$ に一致することが証明される。従って

$$\mathrm{Ind}\, D = \int_M \widehat{A}(M)$$

が成り立つ。これが Patodi や Atiyah-Bott-Patodi による指数定理の証明の概略である。ここで熱核 e^{-tD^2} 自体に関しては、$t \to 0$ のとき $\mathrm{Tr}_x\, e^{-tD^2}$ の値は発散することを注意しておく。ところが次数作用素 ϵ をかけてトレイスをとると、$t \to 0$ のとき

$$\mathrm{Tr}\,(\epsilon e^{-tD^2}) = \mathrm{Tr}\,(e^{-tD^-D^+}) - \mathrm{Tr}\,(e^{-tD^+D^-}) = \infty - \infty$$

という打ち消しが起こり、その差として残された有限量が作用素の指数であると了解される。

恐らくはこの証明からの示唆も得て Atiyah [1] は被覆空間へ持ち上げられた作用素に対する指数定理を展開した (Singer [46] も参照せよ)。いま被覆空間 M 上の Dirac 作用素 D から定まる閉部分空間 $\ker D^+$, $\ker D^-$ 上への射影作用素を e_+, e_- とする。ここで被覆変換群 Γ の von Neumann 群環 $W^*\Gamma$ と有界作用素全体のなす von Neumann 環 $\mathcal{L}$ のテンソル積を $W^*\Gamma \otimes \mathcal{L}$ と表す。このとき Atiyah は e_+, e_- が、$W^*\Gamma \otimes \mathcal{L}$ に属することを確かめ、この von Neumann 環のトレイス τ を用いて D の Γ 指数を

$$\mathrm{Ind}_\Gamma D = \tau(e_+) - \tau(e_-)$$

と定義し、さらに

$$\mathrm{Ind}_\Gamma D = \int_{M(\Gamma)} dx\ \mathrm{Tr}_x(\epsilon k_t(x,x))$$

が $t > 0$ に依らず成り立つことを示した。ここで $k_t(x,y)$ は e^{-tD^2} の積分核を表し、$M(\Gamma)$ は M に作用する被覆変換群 Γ の基本領域を表す。

この定理を我々が定義した指数を用いて理解し直そう。被覆変換群 Γ が M に作用するとき序章の定理 2 と同様にして、$M \times M$ 上の連続関数 k で：

1) $k(x\gamma, y\gamma) = k(x,y)$, $(x,y) \in M \times M$, $\gamma \in \Gamma$;

2) 上で与えた対角作用の下で k を $(M \times M)/\Gamma$ 上の連続関数とみるとき、その台はコンパクト；

であるような k を核関数とする $L^2(M)$ 上の作用素の集合を考え、これを C^* 完備化して得られる C^* 環 $\mathcal{K}_\Gamma$ を用意しておく。正確にはベクトル束 $S \to M$ を係数とする Hilbert 空間 $L^2(M,S)$ を考えるべきであるが簡単のために S を省略する。この $\mathcal{K}_\Gamma$ をさらに von Neumann 環に完備化したものが前述の $W^*\Gamma \otimes \mathcal{L}$ である。そして $\mathcal{K}_\Gamma$ 上のトレイス $\tau : \mathcal{K}_\Gamma \to \mathbb{C}$ を

$$\tau(k) = \int_{M(\Gamma)} dx k(x,x)$$

により与える。ここで $M(\Gamma)$ は M 上の Γ 作用に関する基本領域を表す。2 章で述べたように断面曲率が有界な完備リーマン多様体上では Dirac 作用素に対して指数準同型

$$\rho : C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to \mathcal{K}_\Gamma$$

が定まる。この指数準同型を用いると von Neumann 環 $W^*\Gamma \otimes \mathcal{L}$ を経由せずに $\tau(\operatorname{Ind} D)$ が定まり、作用素の表象計算 [25, 22] を行って Atiyah による Γ 指数定理

$$\tau(\operatorname{Ind} D) = \int_{M/\Gamma} \widehat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right)$$

が証明される。ここでトレイス τ で値をとる以前に $\operatorname{Ind} D$ は既に $K_0(\mathcal{K}_\Gamma)$ の元として定義されていることに注意する。実際上の指数準同型を用いて、定義 2.1 と同様にすればよい。、このとき C^* 群環 $\mathcal{K}_\Gamma$ は $C^*\Gamma$ に強森田同値なので、それらの K 群は自然に同型である。従って与えられた被覆空間 $M \to M/\Gamma$ の不変量として $\operatorname{Ind} D \in K_0(C^*\Gamma)$ が定義されることになる。この $\operatorname{Ind} D \in K_0(C^*\Gamma)$ は後述する Novikov 予想において重要な役割を演じる。

また奇数次元多様体上の Dirac 作用素に対する指数準同型

$$\rho : C_o(\mathbb{R}) \to \mathcal{K}_\Gamma$$

を用いると定義 2.2 と同様にして、$\operatorname{Ind} D \in K_1(C^*\Gamma)$ が定義されることに注意しておく。C^* 環が $\mathcal{K}$ のとき、即ち群 Γ が自明のとき指数 $\operatorname{Ind} D \in K_1(\mathcal{K})$ は常に 0 であったが、一般の C^* 群環に対してこの指数は必ずしも自明ではない。例えば被覆空間 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の作用素 $D = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dx}$ に対して $\operatorname{Ind} D$ が非自明であることをフーリエ変換を用いて証明できる。さらにこの D の定める指数準同型 $\rho : K_1(C_o(\mathbb{R})) \to K_1(C^*\mathbb{Z})$ は同型写像であることも示される。この事実は後述する Novikov 予想が $\Gamma = \mathbb{Z}$ に対して成立つことを示しており、深い結果と考えられる。

3.3 等質空間上の Connes-Moscovici 指数定理

Connes-Moscovici [21] はコンパクトとは限らないユニモジュラーリー群 G の等質空間 G/H 上で G 同変指数定理を展開した。まず G をユニモジュラーリー群、H をそのコンパクト部分群として、等質空間 $M = G/H$ を考える。ここで G 上に与えられた不変測度 dg、体積 1 に正規化された H 上の不変測度 dh を固定して、M 上の G 不変測度 ω_M を $dg = \omega_M dh$ であるように選んでおく。さらに M 上に G 不変なリーマン計量を選んでおき、M 上のスピン束 $S \to M$ に作用する Dirac 作用素 D を考えよう。このとき D の指数が住む C^* 環を以下のように定める。まず φ をコンパクト台を持つ G 上の連続関数とすると、

$$k(x, y) = \varphi(xy^{-1}), \quad x, y \in G$$

は G の右対角作用で不変な $M \times M$ 上の関数となり、これを核関数として k は $L^2(G)$ 上の作用素を定める。このようにして $C_c(G)$ の元が定める作用素の集合の C^* 閉包をとって得られる C^* 環を C^*G と表す。これは $C_c(G)$ に合成積を入れて定義される G の被約 C^* 群環と同型となる。そしてトレイス $\tau : C^*G \to \mathbb{C}$ を

$$\tau(\varphi) = \varphi(e) \quad (\ e \in G \text{ は単位元})$$

として定める。ここで τ は ∞ も値に許すトレイスである。実はこのことが非可換'微分'幾何学の構築と密接に関わってくるので、その様子を次の例で詳細に調べてみよう。

まず $G = \mathbb{R}$ とするとフーリエ変換により $C^*\mathbb{R}$ は $C_o(\mathbb{R})$ に同型となる。この同型を通じて $C^*\mathbb{R}$ のトレイス τ は $C_o(\mathbb{R})$ のトレイス：

$$\hat{\tau} : C_o(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \qquad \hat{\tau}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$$

に対応する。この $\hat{\tau}$ の定義をみれば、τ の値として ∞ も許さなければならないことが了解されるであろう。$\mathbb{R}$ 上の関数が無限遠点で 0 であっても、その $\mathbb{R}$ 上の積分は有限とは限らないからである。このとき $C_o(\mathbb{R})$ の中で $\hat{\tau}$ の値が有限な関数だけを取り出すことが、連続関数環に含まれる微分可能な関数だけを取り出すという微分幾何学の態度に対応していると考えられる。後述するように、一般の C^* 環に対しこのような扱いやすい部分環を取り出すことが、非可換微分幾何学の構築に関わってくる。

さて等質空間 M は偶数次元であると仮定しよう。このとき M 上の Dirac 作用素は G の自然な作用と可換であり、また M への G 作用が固有であることから、Dirac 作用素 D に対して指数準同型

$$\rho : C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to C^*G$$

が定義される。そして前と同様に $e \in K_0(C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2)$ を生成元として、$\operatorname{Ind} D = \rho(e)$ として D の指数を定める。一方 M 上のスピン束 $S \to M$ には自然に G 不変な接続が与えられ、G 不変な曲率 R が定まる。ここで G のリー環 $\mathfrak{g}$ において H のリー環 $\mathfrak{h}$ に関する直交補空間を $\mathfrak{m}$ と表す。このとき不変曲率 R は $\bigwedge^2 \mathfrak{m}^* \otimes \operatorname{End}(S_e)$ の元と見なされる。そして巾級数 $f(x) = \dfrac{x/2}{\sinh x/2}$ を用いて $\widehat{A}$ 型式とよぶ M 上の不変微分型式を

$$\widehat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right) = \det{}^{1/2} f\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right) \in \bigwedge{}^* \mathfrak{m}^*$$

で与えるとき、次の定理が成り立つ。

定理 3.2 (Connes-Moscovici [21]).

$$\tau(\operatorname{Ind} D) = \widehat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right)\Big/ \omega_M.$$

右辺は $\widehat{A}$ 型式の最高次の項を不変測度 ω_M を用いて表すときの係数を意味する。

ここで $\operatorname{Ind} D$ は C^* 群環 C^*G の射影元の差として定められたが、これを von Neumann 群環 W^*G の射影元の差と考える。いま $\ker D^+$, $\ker D^-$ 上への射影作用素をそれぞれ e_+, e_- と表すと、この $\operatorname{Ind} D$ は $e_+ - e_-$ に同値となる。従って定理 3.2 を用いると、右辺の幾何不変量が非自明ならば $\ker D^+$ あるいは $\ker D^-$ が非自明な G 表現であることが判る。この定理に先立って、半単純リー群 G の cocompact な離散部分群 Γ に対する Γ 指数定理を用いることで、Atiyah-Schmid [4] は半単純リー群 G の任意の離散系列表現が適当な作用素 D の $\ker D$ として実現されることを証明した。離散系列表現をこのように幾何的に実現することは、半単純とは限らないリー群に対しても望まれるところである。しかし一般のリー群に対して cocompact な離散部分群の存在は期待できないので、上の議論はそのままでは通用しない。この点を克服することが、上述の指数定理に対する Connes-Moscovici の動機につながっていると推測される。

第4章　Baum-Connes 予想

ここまで作用素の指数を整数から C^* 環の K 群の元へ拡張し、指数定理を一般化してきた。こうした指数定理を展開する動機のひとつには、離散群 Γ が定める C^* 群環 $C^*\Gamma$ の構造に対する関心がある。作用素環の研究者にとっては、von Neumann 環の研究が始まった当初から常に群環は興味を惹く重要な対象であった。また多様体の基本群となっている離散群に対しては、幾何的視点からもその群環は興味深い対象となる。

しかし無限離散群 Γ の群環に関して我々の持つ知識は意外な程に少ない。例えば 1970 年代後半に Bass は次のような極めて素朴な問題を提示している：
Γ を捻れ元のない (torsion free) 離散群とする。このとき $\mathbb{Z}$ 上の群環 $\mathbb{Z}[\Gamma]$ は整域か、つまり $\mathbb{Z}[\Gamma]$ において $ab = 0$ ならば a あるいは b は 0 か。

また Kadison と Kaplansky は $C^*\Gamma$ に関して次のような予想を立てた：
Γ を捻れ元のない離散群とする。このとき被約 C^* 群環 $C^*\Gamma$ には 0 と 1 以外の射影元は存在しない。

もしそのような射影元 e が存在したとすれば、$e(1-e) = 0$ が成り立つので $C^*\Gamma$ は整域ではない。従って Kadison-Kaplansky 予想は C^* 群環に対する Bass 予想の類比とも考えられる。現在のところ何れの予想に関しても完全な解決は得られていない。

ここで Kadison-Kaplansky 予想について考えてみよう。この予想は $C^*\Gamma$ の中に自明でない射影元を見つけることが困難な問題であることを示唆している。ここで対象を $C^*\Gamma$ から行列環とのテンソル積 $C^*\Gamma \otimes M_n(\mathbb{C})$ へまで緩めてみよう。すると K_0 群 $K_0(C^*\Gamma)$ が自明でないならば、抽象的ではあるが $C^*\Gamma \otimes M_n(\mathbb{C})$ に属する非自明な射影元の存在が保証される。しかし $C^*\Gamma$ に対する関心があるならば、単なる存在保証を超えて非自明な射影元を構成的に（例えばリー群の表現を Dirac 作用素 D の $\ker D$ として実現するようなやり方で）捉えたいという要求も当然ながら生じ

る。このような問題意識が指数定理の一般化を促した動機のひとつと考えられる。恐らくこのような動機に支えられて、一般の離散無限群に対し Baum-Connes はある予想を提出した [9, 10, 11]。まず叙述が複雑になることを避けて、条件を付けて予想を述べる。予想の完全な形については後述する。

Baum-Connes 予想 . いま Γ は捻れ元を持たない無限離散群とし、Γ の普遍分類空間が多様体 M で実現されていると仮定する。このとき作用素の指数を対応させることで定義される写像：

$$\mu : K^i(M) \to K_{i+k}(C^*\Gamma) \qquad (i = 0,\ 1)$$

が存在し、これが同型写像となる。ここで $\dim M = k$ である。

多様体 M が $\pi_1(M) = \Gamma,\ \pi_i(M) = 0\ (i > 1)$ をみたすときに、M は Γ の普遍分類空間となることを注意しよう。この条件は、M の普遍被覆空間が可縮であり $\pi_1(M) = \Gamma$ であると言い換えることもできる。

写像 μ は本質的に次のように定義される：左辺の位相的 K 群 $K^i(M)$ の元 e をベクトル束 E で代表しておき、E を係数とする M 上の Dirac 作用素 D^E を考える。このとき

$$\mu(e) = \mathrm{Ind}\,(D^E)$$

と定める。

ここで予想の成り立つ例をいくつか示す。

例 4.1 ($\Gamma = \mathbb{Z}^n$). このとき M として n 次元トーラス T^n を選んでよい。一方フーリエ変換から $C^*\mathbb{Z}^n = C(T^n)$ であり、ここで μ を通じて、

$$K^*(T^n) \cong K_{*+n}(C^*\mathbb{Z}^n)$$

が成り立つ。2つの K 群が抽象的に同型であることは計算から簡単に示されるが、μ を通じて同型となる事実は深い結果である。実際このことの系として、後述の Novikov 予想が $\mathbb{Z}^n$ に対して成立することが従う。また系として、一般の $K(\Gamma, 1)$ 多様体は正のスカラー曲率を持つリーマン計量を許さないという Gromov-Lawson 予想が、トーラス T^n に対して成り立つことも確かめられる。さらに先に述べた Kadison-Kaplansky 予想が $\mathbb{Z}^n$ に対して成り立つことも、系として従う。

例 4.2 ($PSL_2(\mathbb{R})$ **の離散部分群**). 今 Γ には捻れ元がないと仮定しておいたので、$PSL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群であるような Γ は上半平面 $\mathbb{H}$ に自由に作用する。ここで M として商空間 $\mathbb{H}/\Gamma$ で与えられるリーマン面をとることができる。このとき $K^*(M)$ は簡単に計算できるが、$K_*(C^*\Gamma)$ を直接に計算することは非常に困難である。しかし $PSL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群に対して Baum-Connes 予想が成り立つことから、$K_*(C^*\Gamma)$ を求めることが出来る。

上では離散群に条件をつけて予想を述べたが、Baum-Connes は一般の離散群 Γ に対して予想を提出している [9, 10, 11]。Baum-Connes 予想に先立ち、後述する Novikov 予想を確かめるために Kasparov [34] は $SO(n,1)$ もしくは $SU(n,1)$ の離散部分群に対し上述の μ が同型写像となることを証明した。また Kasparov は一般のリー群（連結成分は有限個）の離散部分群に対して、μ が $\mathbb{Q}$ 上単射であることも証明している。

ここで Baum-Connes 予想の完全な記述とその解釈を述べておこう。一般の離散群 Γ を考え、これが多様体 M に作用しているとする。ここで接合積 $C_o(M) \rtimes \Gamma$ をとってその K 群を考えるとき、これらの K 群の間の射は何から定まるであろうか。Γ 作用を持つ 2 つの多様体 M, N の間の Γ 同変写像 $f : M \to N$ があれば、これが K 群の間の射を引き起こすことが期待される。実際 M 上の Γ 作用が固有であるとき、作用素の指数の定義を一般化することで

$$f_! : K_*(C_o(M) \rtimes \Gamma) \to K_*(C_o(N) \rtimes \Gamma)$$

という射が定まる。もし Γ が有限群であれば、この $f_!$ は位相幾何学でよく知られる同変 Gysin 写像に外ならない。いま Γ 作用から作られる接合積を対象とするカテゴリーを考えよう。このカテゴリーの終対象は何であるかというと、一点への Γ 作用が定める接合積、つまり $C^*\Gamma$ である。このとき K 群上では $f : M \to \{\ 1 点\ \}$ が

$$f_! : K_*(C_o(M) \rtimes \Gamma) \to K_*(C^*\Gamma)$$

という準同型写像を導いている。一方固有な Γ 作用を持つ多様体 M と固有な Γ 同変写像からなるカテゴリーを考える。このカテゴリーの終対象とは固有な Γ 作用に対する普遍束 $\underline{E}\Gamma$ である。このとき $f : M \to \{\ 1 点\ \}$ により定まる $f_!$ の帰納極限として

$$\mu : K_*^{\Gamma}(\underline{E}\Gamma) \to K_*(C^*\Gamma)$$

という写像が定義される。このとき μ は同型写像であろうという主張が一般の無限群に対する Baum-Connes 予想の内容である。ここで $K_*^\Gamma(\underline{E}\Gamma)$ は空間 $\underline{E}\Gamma$ の Γ 同変な K ホモロジー群を表す。もし Γ が捻れ元を持たないならば、Γ の普遍分類空間を $B\Gamma$ として、$K_*^\Gamma(\underline{E}\Gamma)$ は $K_*(B\Gamma)$ に同型となる。従って粗くいえば Baum-Connes 予想とは、固有な Γ 作用を持つ空間からなるカテゴリーの終対象と、一般の Γ 作用が定める接合積という C^* 環からなるカテゴリーの終対象は、K 理論的に同型だという主張なのである。

Baum-Connes 予想が正しいとすれば、いくつかの興味ある予想がこれに従って証明される。その予想を以下に列挙してみよう。

Kadison-Kaplansky 予想． 無限離散群 Γ が捻れ元を持たないとき、0 と 1 を除くと $C^*\Gamma$ は射影元を含まない。

この予想は μ が全射であれば成り立つ。

Novikov 予想． 有向閉多様体 M の基本群が Γ に同型であると仮定する。ここで $f : M \to B\Gamma$ を M の普遍被覆空間の分類写像とする。このとき

$$f_*(L(M) \cap [M]) \in H_*(B\Gamma; \mathbb{Q})$$

は M のホモトピー不変量である。ここで $L(M)$ は Hirzebruch による M の L 類を表す。

この予想は μ が $\mathbb{Q}$ 上単射であれば成立する。

Gromov-Lawson 予想． 有向閉多様体 M がスピン構造を持つと仮定する。上と同様に $f : M \to B\Gamma$ を M の普遍被覆空間の分類写像とする。このとき M が正のスカラー曲率をもつリーマン計量を許すならば、

$$f_*(\widehat{A}(M) \cap [M]) = 0 \in H_*(B\Gamma; \mathbb{Q})$$

が成り立つ。ここで $\widehat{A}(M)$ は M の $\widehat{A}$ 類を表す。

この予想も μ が $\mathbb{Q}$ 上単射であれば成立する。さらに詳しくは [11, 36] を参照されたい。

第5章　葉層多様体上の指数定理

5.1　亜群 C^* 環

この節では幾何的に興味深い非可換 C^* 環である亜群 C^* 環について解説する。

まず亜群の概念に至るために、接合積 $C_o(X)\rtimes G$ における積を詳しく調べて見る。群 G が同相写像により局所コンパクトハウスドルフ空間 X に（右から）作用しているならば、接合積 $C_o(X)\rtimes G$ が定義される。接合積の元 $a=\sum_{g\in G}a_gU_g$, $b=\sum_{h\in G}b_hU_h$ に対して積は

$$ab=\sum_{g,h}a_g g(b_h)U_{gh}$$

で与えられた。ここで a,b を $X\times G$ 上の関数として $a(x,g)=a_g(x)$, $(x,g)\in X\times G$ と考えると、上式は

$$(ab)(x,k)=\sum_{gh=k}a(x,g)b(xg,h)$$

と同値である。このとき右辺を群環の合成積に準じて解釈してみよう。

いま $X\times G$ から X への2つの射 s, r を、

$$s(x,g)=xg,\quad r(x,g)=x$$

と定めておき、$\alpha=(x,g)$, $\beta=(y,h)\in X\times G$ に対して $s(\alpha)=r(\beta)$ が成り立つときに限り

$$\alpha\beta=(x,gh)$$

として積を定義する。また任意の $\alpha=(x,g)\in X\times G$ に対しその逆元を

$$\alpha^{-1}=(xg,g^{-1})$$

と定める。下の図で見るとおり、2つの元の積 $\alpha\beta$ は2つの矢印 α,β の合成に、逆元は逆向きの矢印に対応していると考えられる：

$$\underset{x}{\bullet}\xleftarrow{\alpha}\underset{xg}{\bullet}\xleftarrow{\beta}\underset{xgh}{\bullet}\qquad\qquad \underset{x}{\bullet}\xrightarrow{\alpha^{-1}}\underset{xg}{\bullet}$$

こう考えると接合積における積の定義は次のように書き換えられる：

$$(ab)(\gamma) = \sum_{\alpha\beta=\gamma} a(\alpha)b(\beta) = \sum_{\beta} a(\gamma\beta^{-1})b(\beta).$$

積が条件付きで定義されていることを除けば、右辺は正に群環の合成積の定義である。

もう一つ例を挙げて説明しよう。局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対し、コンパクト台をもつ $X \times X$ 上の連続関数が与えられると、これを積分核として $L^2(X)$ 上の作用素が定まる。ここで k, ℓ をこのような 2 つの関数とするとき、これらから定まる作用素 K, L の合成 KL に対応する積分核 $k\ell$ は

$$(k\ell)(x,z) = \int_X dy k(x,y)\ell(y,z)$$

で与えられる。ここで $X \times X$ から X への 2 つの射 s, r を、$s(x,y) = y$, $r(x,y) = x$ とおき、$\alpha = (x,y)$, $\beta = (z,w) \in X \times X$ に対して $s(\alpha) = r(\beta)$ が成り立つときに限って積を

$$\alpha\beta = (x,w)$$

と定め、また $\alpha = (x,y) \in X \times X$ の逆元を

$$\alpha^{-1} = (y,x)$$

と定める。このとき積分核の合成は

$$(kl)(\gamma) = \int_{\alpha\beta=\gamma} dy\ k(\alpha)l(\beta) = \int_{\beta} d\beta\ k(\gamma\beta^{-1})l(\beta)$$

と表される。これも合成積と考えてよいであろう。

このように s (*source*) と r (*range*) を定める 2 つの射をもつ集合であって：

- $s(\alpha) = r(\beta)$ のとき積 $\alpha\beta$ が定まり；
- 任意の α に対して逆元 α^{-1} 存在する；

ものを亜群と呼ぶ。亜群に対して位相と測度が付与されているとき、コンパクト台をもつ連続関数の全体 $C_c(G)$ に合成積が定まる。このとき $C_c(G)$ の C^* 完備化として亜群 C^* 環 C^*G が定義される。正確な定義については Connes [17] を参照されたい。

亜群の例をさらに幾つか挙げよう。

例 5.1 (Γ 同変な積分核の成す C^* 環 $\mathcal{K}_\Gamma$). 離散群 Γ が被覆変換群として、空間 X に作用しているとする。即ち $X \to X/\Gamma$ は正規被覆空間である。このとき $X \times X$ の 2 点 $\alpha = (x, y)$, $\alpha' = (x', y')$ に対し、ある $\gamma \in \Gamma$ が存在して $(x\gamma, y\gamma) = (x', y')$ が成り立つときに α は α' に同値であると定める。このとき商集合 $G = (X \times X)/\sim$ から X/Γ への写像 s, r を

$$s(\alpha) = [y], \quad r(\alpha) = [x]$$

と定めると、G は亜群の構造をもつ。ここで X/Γ がコンパクトと仮定しておくと、亜群 C^* 環 C^*G は連続な積分核をもち $L^2(X)$ への Γ 作用と可換な作用素の生成する C^* 環 $\mathcal{K}_\Gamma$ と同型になる。

例 5.2 (Kronecker 葉層 C^* 環). トーラス T^2 上の Kronecker 葉層 $\mathcal{F}_\theta$ とは、T^2 上のベクトル場 $\partial/\partial x + \theta\partial/\partial y$ が定める流れであった。ここで θ は無理数としておく。この流れに沿って T^2 内の 2 点を結んで得られる有向線分（これは端点と向きのみで決まる）の全体を G とおき、写像 s, $r : G \to T^2$ を

$$s(\gamma) = \gamma \text{ の始点}, \quad r(\gamma) = \gamma \text{ の終点},$$

と定める。このとき積は有向線分の合成、逆元は逆向きの線分と定義して G に亜群構造を入れることができる。こうして定まる亜群を $\mathcal{F}_\theta$ のホロノミー亜群といい、その亜群 C^* 環を Kronecker 葉層 $\mathcal{F}_\theta$ の葉層 C^* 環とよび、$C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ と表す。

序章で述べたように $T^2 = (\mathbb{R} \times S^1)/\mathbb{Z}$, $(x, t) \sim (x+1, t+\theta)$ とみて、$\mathbb{R} \times \{t\}$ を写した像が T^2 における $\mathcal{F}_\theta$ の葉であると考えるとき、ホロノミー亜群は

$$G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1)/\mathbb{Z}, \qquad (x, y, t) \sim (x+1, y+1, t+\theta)$$

という商空間と同一視できる。ここで写像 s, r は

$$s(x, y, t) = (y, t), \quad r(x, y, t) = (x, t)$$

として与えられる。ここで群 $\mathbb{Z}$ の作用が S^1 方向にも生じているが、この点を除くと G の亜群 C^* 環の元とは $t \in S^1$ をパラメターとする $\mathbb{Z}$ 作用と可換な作用素の族と考えられる。序章ではこのようにして $C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ を定義した。

註 5.3. 群 $\mathbb{Z}$ の生成元が単位円 S^1 へ無理数 θ の回転として作用しているとき、その作用に関する接合積 $C(S^1) \rtimes \mathbb{Z}$ を無理数回転環とよぶ。このとき $C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ は無理

数回転環とコンパクト作用素全体の C^* 環 $\mathcal{K}$ とのテンソル積に同型になる。この事実は、$T^2 = \{(x,y) \in S^1 \times S^1\}$ において $\{x\} \times S^1$ の各点を流れに沿って移動させるとき、x 方向に一周して生じる $\{x\} \times S^1$ 上の変換が θ の回転であることの帰結として得られるのである。

5.2 葉層多様体上の Connes 指数定理

M を p 次元の葉層構造 $\mathcal{F}$ をもつコンパクト多様体とする。いま M 上にホロノミー不変な横断測度 ν が存在すると仮定しよう。Ruelle-Sullivan によれば、このとき次のようにして p 次カレント C_{RS} が定まる。

$$\int_{C_{RS}} \omega = \sum_i \int_{T_i} d\nu \int_{V_i \times \{t\}} \varphi_i \omega.$$

ここで ω は M 上の p 型式であり、φ_i は葉層構造に適合した局所座標系 $U_i \cong V_i \times T_i$(T_i が $\mathcal{F}$ に横断的な切片) に従属する 1 の分割で、$\int_{V_i \times \{t\}}$ は U_i 内の葉 $V_i \times \{t\}$ $(t \in T_i)$ に沿う積分を、$\int_{T_i} d\nu$ は横断測度 ν に関する積分を表す。このとき横断測度がホロノミー不変であることから C_{RS} は M 上の閉カレントになる。さらに C_{RS} は、葉に沿う微分型式のつくる複体 $\Omega(\mathcal{F})$ に関して

$$C_{RS} \colon \Omega^p(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}$$

という写像を定め、$C_{RS}(d'\omega) = 0$ をみたす。ここで d' は葉に沿う外微分を表す。

次に葉 L に沿う曲線 $\gamma : [0,1] \to L$ が与えられたとき、$\gamma(0)$ で $\mathcal{F}$ と横断的な切片 T_0 から $\gamma(1)$ で $\mathcal{F}$ と横断的な切片 T_1 への写像芽として、γ に沿うホロノミーが定義される。ここで端点が一致し同じ葉に沿う 2 つの曲線 γ, γ' に対して、それらの曲線が定めるホロノミー写像が一致するとき γ と γ' は同値であると定義する。このとき同値類の集合

$$G = \{\gamma \mid \gamma \text{ は葉に沿う曲線 }\}/\sim$$

を葉層多様体 $(M, \mathcal{F})$ のホロノミー亜群という。ここで

$$s(\gamma) = \gamma \text{ の始点}, \quad r(\gamma) = \gamma \text{ の終点},$$

として、条件 $s(\gamma) = r(\gamma')$ が成立つときに 2 つの曲線の合成により積 $\gamma\gamma'$ を定め、逆元 γ^{-1} は向きを逆にした曲線と定義する。こうしてホロノミー亜群 G に亜群構造

が定義される。また葉層構造 $\mathcal{F}$ に適合した局所座標系を利用して、ホロノミー亜群 G に多様体の構造が定まることも判る。ただしこの多様体は一般には Hausdorff 性を有さないことを注意しておく。

ここで葉に沿うリーマン計量を M 上に1つ選んでおき、各葉上に体積要素を定めておく。そして点 $x \in M$ の属する葉を L_x と表し、$\widetilde{L}_x = \{\gamma \mid s(\gamma) = x\}$ とおく。これを L_x のホロノミー被覆という。このとき G の終写像 r の制限が被覆写像 $r : \widetilde{L}_x \to L_x$ を与えている。そして L_x の体積要素を $\widetilde{L}_x$ に引上げて、測度の族 $d\mu = \{d\mu_x\}_{x\in M}$ を G 上に定めておく。この測度族は亜群の右作用に関し同変である。ここでホロノミー亜群 G 上のコンパクト台をもつ連続関数 φ, ψ に対して、

$$(\varphi\psi)(\alpha) = \int_{\widetilde{L}_x} \varphi(\alpha\beta^{-1})\psi(\beta)d\mu_x(\beta) \qquad (\alpha,\ \beta \in \widetilde{L}_x)$$

により合成積を定義する。そしてコンパクト台をもつ G 上の連続関数全体の集合を完備化して定まる亜群 C^* 環を、葉層多様体 $(M,\mathcal{F})$ の葉層 C^* 環という。これを $C^*(M,\mathcal{F})$ と表す。

いま $(M,\mathcal{F})$ がホロノミー不変な横断測度 ν をもつと仮定する。このとき Ruelle-Sullivan カレント C_{RS} と葉に沿う体積要素の族 $dv_{\mathcal{F}}$ を用いて、$C^*(M,\mathcal{F})$ のトレイス $\tau : C^*(M,\mathcal{F}) \to \mathbb{C}$ が次で与えられる：

$$\tau(\varphi) = \sum_i \int_{T_i} d\nu \int_{V_i\times\{t\}} \varphi_i\varphi dv_{\mathcal{F}}.$$

ここで φ はコンパクト台をもつ G 上の連続関数であり、上式では φ を $M \cong \{\gamma \in G \mid \gamma$ は1点写像 $\}$ に制限して考えている。

ここで不変横断測度が定めるトレイスの具体例をひとつ示す。Kronecker 葉層 $\mathcal{F}_\theta$ を、商空間 $M = (\mathbb{R}\times S^1)/\mathbb{Z}$, $(x,t) \sim (x+1, t+\theta)$ において $\mathbb{R}\times\{t\}$ が葉であるような葉層構造と考える。ここで S^1 上の1型式 dt は平行移動の作用により不変であるから、これを用いて $\mathcal{F}_\theta$ に不変横断測度を与える。ここで前節のように $C^*(M,\mathcal{F}_\theta)$ は次の条件を満たす核関数の集合の C^* 完備化であると考える。即ち核関数 k は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times S^1$ 上の連続関数であって：

1) $k(x+1, y+1, t+\theta) = k(x,y,t)$, $\quad (x,y,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times S^1$ をみたし;

2) $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times S^1)/\mathbb{Z}$ 上の連続関数とみるとき、その台はコンパクトである。

このときホロノミー群は

$$G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1)/\mathbb{Z}$$

で与えられ、$M \cong \{[(x,x,t)] \in G\}$ であるから、上で定めたトレイス τ は序章で用いた

$$\tau(k) = \int_{S^1} dt \int_0^1 k(x,x,t)dx$$

に一致する。このとき S^1 への $\mathbb{Z}$ 作用が測度 dt を保つことからトレイスの満たすべき性質 $\tau(ab) = \tau(ba)$ の成立つことが示される。

ここで一般のコンパクト葉層多様体 $(M,\mathcal{F})$ に対し、葉が偶数次元と仮定して葉に沿う Dirac 作用素の族 $D = (D_L)_{L\in\mathcal{F}}$ を考える。そして D_L をホロノミー被覆 $\widetilde{L}$ に持ち上げて得られる微分作用素 $D_{\widetilde{L}}$ の族を再び $D = (D_{\widetilde{L}})$ と表す。このとき D を用いて指数準同型

$$\rho : C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to C^*(M,\mathcal{F})$$

を定義できることが確められる。そして ρ により D の指数を

$$\mathrm{Ind}\, D = \rho(e) \in K_0(C^*(M,\mathcal{F}))$$

と定義する。但し e は $K_0(C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2)$ の生成元である。ここで葉層多様体 $(M,\mathcal{F})$ がホロノミー不変な横断測度を持つと仮定しよう。このとき次の定理が成り立つ。

定理 5.4 (Connes 葉層指数定理 [17]). コンパクト葉層多様体 $(M,\mathcal{F})$ に対して、上述の仮定の下に

$$\tau(\mathrm{Ind}\, D) = \int_{C_{RS}} \widehat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_{\mathcal{F}}\right)$$

が成立する。ここで $\int_{C_{RS}}$ は不変横断測度の定める *Ruelle-Sullivan* カレントである。また $R_{\mathcal{F}}$ は葉に沿うリーマン計量が定める曲率型式を表し、$\widehat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_{\mathcal{F}}\right) \in \Omega(\mathcal{F})$ は対応する $\widehat{A}$ 型式を表す。

定理の適用例をひとつ挙げておこう。まず Kronecker 葉層 $\mathcal{F}_\theta$ と 1 次元トーラス $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の積による葉層 $\mathcal{F}$ を考える。つまり $L = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times Y\}$ とおいて、$\mathcal{F}$ は 3 次元トーラス

$$T^3 \cong L \times S^1/\sim, \quad (x,y,t) \sim (x+1, y, t+\theta)$$

上の葉層であり、その葉は $L\times\{t\}$ $(t\in S^1)$ で与えられる。ここでホロノミー亜群 G をとって $\mathcal{F}$ をほどいてみよう。するとホロノミー亜群は

$$G=(L\times L\times S^1)/\sim \quad (x,y,x',y',t)\sim(x+1,y,x'+1,y',t+\theta)$$

で与えられる。ここで $L\times S^1$ 上の自明な直線束 $Q=L\times S^1\times\mathbb{C}$ をとり、ここに $\mathbb{Z}$ 作用を

$$n(x,y,t,z)=(x+n,y,t+n\theta,e^{2n\pi iy}z)$$

と定める。但し $n\in\mathbb{Z}$, $(x,y,t,z)\in L\times S^1\times\mathbb{C}$ である。この作用による同一視で、Q は T^3 上の複素直線束を与える。これも Q と表しておく。そして上の作用で不変な接続 ∇ を、$(x,y,t)\in L\times S^1$ 上に

$$\nabla_{\partial/\partial x}=\partial/\partial x,\quad \nabla_{\partial/\partial y}=\partial/\partial y+2\pi ix$$

と定める。この接続の曲率型式 R^Q は簡単な計算により

$$R^Q=2\pi idxdy$$

となる。ここで上に与えた T^3 上のベクトル束 Q に係数をもち葉層 $\mathcal{F}$ に沿う Dirac 作用素の族 D^Q をホロノミー被覆に引上げる。このとき各葉のホロノミー被覆 $L\times\{t\}$ $(t\in S^1)$ へ引上げられた Dirac 作用素 D_t は、

$$D_t=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}0 & \nabla_{\partial/\partial x}-i\nabla_{\partial/\partial y}\\ \nabla_{\partial/\partial x}+i\nabla_{\partial/\partial y} & 0\end{pmatrix}$$

で与えられる。一般に、Q を係数とし葉層に沿う Dirac 作用素族 D^Q に対しても定理 1.5 と同様に Connes 葉層指数定理が拡張され ([17] を参照)、

$$\tau(\mathrm{Ind}\,D^Q)=\int_{C_{RS}}\widehat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_{\mathcal{F}}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^Q\right)$$

が成立つ。いま葉層指数定理をこの例に適用すると、右辺は非自明な値

$$\int_{S^1}dt\int_{[0,1]\times Y}-dxdy=-1$$

になる。従って Dirac 作用素族の指数 $\mathrm{Ind}\,D^Q\in K_0(C^*(T^3,\mathcal{F}))$ は非自明であることが判る。

この構成をよく見ると葉層に沿う Dirac 作用素族 $D^Q=(D_t)_{t\in S^1}$ は、実は写像

$$\pi : T^3 \cong (L\times S^1)/\sim\ \to T^2, \quad \pi(x,y,t)=(x,y)$$

により T^2 上の Dirac 作用素を持ち上げた作用素になっている。従って作用素族 D^Q は横断方向に関しては一定で、この例において葉層指数定理は T^2 上の Dirac 作用素に対する通常の指数定理とあまり差異がない。

5.3 横断基本類と葉層指数定理

葉層多様体において、横断基本類という巡回コホモロジー類（次章を参照）を用いた指数定理が Connes [19] で証明されている。ここでその定理の与える公式を述べておこう。

余次元 q の葉層構造 $\mathcal{F}$ をもつコンパクト多様体 M を考える。ここで葉層に沿う Dirac 作用素族 D が与えられたとき、余次元 q の偶奇に応じ指数準同型写像 $\rho : C_o(\mathbb{R})\rtimes\mathbb{Z}_2$あるいは $C_o(\mathbb{R})\to C^*(M,\mathcal{F})$ が存在し、これを用いて

$$\operatorname{Ind} D\in K_q(C^*(M,\mathcal{F}))$$

の定まることが確められる。そして葉層 $\mathcal{F}$ が横断的に向付け可能であるとき、横断基本類とよばれる巡回コホモロジー類が定義される。これを $[M/\mathcal{F}]$ と表す。巡回コホモロジーについては次章で詳しく述べる。

定理 5.5 (Connes [19]). コンパクト葉層多様体 $(M,\mathcal{F})$ が上述の仮定を満たすとする。このとき葉層に沿う *Dirac* 作用素族 D の指数 $\operatorname{Ind} D$ と横断基本類 $[M/\mathcal{F}]$ に関して K 群と巡回コホモロジー群との対写像 $\langle\ ,\ \rangle$（次章参照）をとると

$$\langle \operatorname{Ind} D, [M/\mathcal{F}]\rangle=\int_M \widehat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_{\mathcal{F}}\right)$$

が成り立つ。ここで葉に沿うリーマン計量が定める曲率型式を $R_{\mathcal{F}}$ と表し、対応する $\widehat{A}$ 型式を $\widehat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_{\mathcal{F}}\right)\in\Omega(\mathcal{F})$ と表す。

葉層多様体に対しては、葉層構造の二次特性類が幾何不変量に関与する指数定理も Connes により見出されており ([19] を参照)、指数と巡回コホモロジー群との対写像をとって実数値が現れる点で興味深い。これについては、Connes [19] あるいは次章に述べる森吉-夏目 [37] を参照されたい。

第6章　指数定理の一般化

この章ではいくつかの指数定理の一般化について述べよう。そのために必要となるいくつかの事項について説明する。

6.1　巡回コホモロジー群

いま $\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}$ 上の代数とするとき（C^* 環を考えるときにはこの節の最後に述べる注意を参照すること）、$\mathcal{A}$ から $\mathbb{C}$ への $(n+1)$ 重線形写像 $\tau: \mathcal{A}^{n+1} \to \mathbb{C}$ が巡回条件：

$$\tau(a_0, a_1, \cdots, a_n) = (-1)^n \tau(a_n, a_0, \cdots, a_{n-1}), \qquad a_i \in A$$

を満たすとき、これを $\mathcal{A}$ 上の n 次巡回コチェインという。n 次巡回コチェインの全体を $CC^n(\mathcal{A})$ で表し、コバウンダリ写像 $b: CC^{n-1}(\mathcal{A}) \to CC^n(\mathcal{A})$ を

$$\begin{aligned} b\tau(a_0, a_1, \cdots, a_n) = &\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \tau(a_0, \cdots, a_k a_{k+1}, \cdots, a_n) \\ &+ (-1)^n \tau(a_n a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \end{aligned}$$

と定める。このとき $b^2 = 0$ が成り立ち、複体 $(CC^*(\mathcal{A}),\ b)$ が定まる。

定義 6.1. 複体 $(CC^*(\mathcal{A}),\ b)$ のコホモロジー群を $\mathcal{A}$ の巡回コホモロジー群とよび、これを $HC^*(\mathcal{A})$ で表す。

例 6.2. $\mathbb{C}$ 上の代数 $\mathcal{A}$ に対し、$\mathcal{A}$ 上のトレイス $\tau: \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ が存在すると仮定する。このとき

$$b\tau(a, b) = \tau(ab) - \tau(ba)$$

であるから、トレイスの条件より τ は 0 次の巡回コサイクルを与える。また

$$S^n \tau(a_0, a_1, \cdots, a_{2n}) = \tau(a_0 a_1 \cdots a_{2n})$$

とおくとき、$S^n\tau$ は $2n$ 次の巡回コサイクルになる。

例 6.3. $\mathcal{A}=C^\infty(S^1)$ とする。ここで d により外微分をあらわすとき、

$$\tau(a_0,a_1)=\int_{S^1} a_0da_1,\qquad a_0,a_1\in\mathcal{A}$$

は 1 次巡回コサイクルである。実際 Stokes の定理より、

$$\begin{aligned}0=&\int d(a_0a_1)\\=&\int a_0da_1+\int a_1da_0\\=&\tau(a_0,a_1)+\tau(a_1,a_0).\end{aligned}$$

となり τ は巡回条件を満たし、また d が反微分であることから、

$$\begin{aligned}b\tau(a_0,a_1,a_2)=&\int a_0a_1da_2-\int a_0d(a_1a_2)+\int a_2a_0da_1\\=&\int a_0a_1da_2-\int a_0(da_1)a_2-\int a_0a_1da_2+\int a_2a_0da_1\\=&0\end{aligned}$$

となる。これと同様にして、一般に $C^\infty(M)$ に対し M の k 次のサイクル C を用いて

$$\tau(a_0,a_1,\cdots,a_k)=\int_\sigma a_0da_1\cdots da_k$$

と定めるとき、τ が k 次巡回コサイクルであることも確かめられる。

註 6.4. 可換とは限らない一般の環に対しても巡回コホモロジー群を考えることができる。この例を考慮すると、一般の環に対して巡回コホモロジー群を考えることは非可換ド・ラーム理論を展開することであるということができる。

例 6.5. いま $\mathcal{A}$ 上の n 次巡回コサイクル τ が与えられたとする。このとき $\mathcal{A}\otimes M_k(\mathbb{C})$ 上の巡回コサイクル $\hat\tau$ が

$$\hat\tau(a^{(0)},a^{(1)},\cdots,a^{(n)})=\sum_{i_0,i_1,\cdots,i_n}\tau(a^{(0)}_{i_0i_1},a^{(1)}_{i_1i_2},\cdots,a^{(n)}_{i_ni_0})$$

で与えられる。ここで $\mathcal{A}\otimes M_k(\mathbb{C})\cong M_k(\mathcal{A})$ とみて、$a^{(m)}_{ij}$ は $a^{(m)}\in M_k(\mathcal{A})$ の (i,j) 成分を表す。

以下ではこうして定めた $\hat\tau$ を単に τ で表し、また断りなしに $\mathcal{A}$ 上の巡回コサイクルを上のようにして $\mathcal{A}\otimes M_k(\mathbb{C})$ 上の巡回コサイクルに拡張しておく。

註 6.6. ここで重要な注意を述べておく。これまでは $\mathcal{A}$ は単なる $\mathbb{C}$ 上の代数であったが、$\mathcal{A}$ が位相（ノルム）を持つ環、例えば C^* 環の場合には、巡回コチェインがそのノルム関して連続であることを要求してコホモロジー群を考える。しかし多様体上の関数環を考えても判るように、もし $\mathcal{A}$ として連続関数環 $C(M)$ をとるならば、上述の例 6.3 で述べたような興味あるコサイクルは有界でなくなる。しかし $\mathcal{A}$ を微分可能関数全体 $C^\infty(M)$ に制限して、これに Fréchet 位相を入れておけば、このコサイクルは有界となる。実際、微分幾何学において我々が扱う対象は単なる連続関数環ではなく微分可能関数環 $C^\infty(M)$ である。これはまた、単なる局所コンパクトハウスドルフ空間ではなく可微分多様体を考えていることにも対応する。このことから推測されるように、非可換微分幾何学を展開するには、単なる非可換 C^* 環ではなくその中に稠密に含まれておりより強い位相をもったバナッハ環を考察することが必要となる。多様体の場合には連続関数環の中に C^∞ 関数環という自然な対象が含まれている。しかし一般の非可換 C^* 環に対して、そのような良い対象を自然に見出すことは稀である。そのため現時点での非可換幾何学の大きな課題のひとつとして、一般の非可換 C^* 環に対してその部分集合である‘非可換 C^∞ 関数環’という対象をいかに見出すか、あるいは‘非可換 C^∞ 関数環’を許容する性質の良い非可換 C^* 環をどのようなものと考えるかという問題が挙げられる。この問題についての解答はまだ確立しておらず、群作用から定まる接合積や葉層 C^* 環などの幾何的構造をもつ対象に対する‘非可換 C^∞ 関数環’がある程度研究されるに留まっている。

6.2 K 群と巡回コホモロジー群の対写像

次に指数定理の一般化の際に重要となる K 群と巡回コホモロジー群の対写像を定義しよう。ここで $\mathcal{A}$ はバナッハ環であるとし、巡回コサイクルに対しては前節で述べたように連続性を要求しておく。また $\mathcal{A}$ は単位元をもつと仮定しておく（この仮定ははずすことができる）。まず 3 章で証明した命題 3.1 により、同値な 2 つの射影元に対してトレイスの値は一致することを思い出そう。これが最も簡単な K 群と巡回コホモロジー群の対写像の例である。一般の場合における対写像の定義も次に述べるように簡明であるが、本質的な点はこの対写像が K 群と巡回コホモロジー群の代表元の取り方に依存しないことである。この事実の証明はここでは省略するが、それは非可換 Chern-Weil 理論と呼ぶべき内容で、命題 3.1 の証明からその概略は想

像可能と思う。詳しくは Connes [18] を参照されたい。

定義 6.7. 対写像 $\langle\ ,\ \rangle : K_*(\mathcal{A}) \times HC^*(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ を次の式で定義する：

1) 偶数次元において射影元 $e \in K_0(\mathcal{A})$ と $\tau \in HC^{2n}(\mathcal{A})$ の対写像を、

$$\langle e,\ \tau \rangle = \tau(e, e, \cdots, e)$$

と定め、

2) 奇数次元においてユニタリ元 $u \in K_1(\mathcal{A})$ と $\tau \in HC^{2n+1}(\mathcal{A})$ の対写像を

$$\langle u,\ \tau \rangle = \tau(u^{-1} - 1, u - 1, \cdots, u^{-1} - 1, u - 1)$$

と定める。

註 6.8. 巡回コホモロジー群には安定化作用素 S が働き、その作用との整合性を得るために本来は上述の対写像に係数をつける（Connes [18] を参照）。しかし簡単のためにここでは省略した。

この対写像をいくつかの例で計算してみよう。

例 6.9. $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$, $\tau = \mathrm{Tr}$ に対して

$$\langle e,\ \tau \rangle = \mathrm{rk}\, e$$

が成立つ。つまり対写像は射影元の階数を与える。

例 6.10. 例 6.3 において $C^\infty(S^1)$ 上に定めた 1 次巡回コサイクル τ を考える。ここでユニタリ元 $u \in C^\infty(S^1)$ を $u(x) = e^{2\pi i x}$ と選ぶ。これは $u \in C(S^1)$ と思うと $K_1(C(S^1))$ の生成元を与えている。このとき

$$\langle u,\ \tau \rangle = \int_{S^1} e^{-2\pi i x} d e^{2\pi i x} = 2\pi i$$

となる。

註 6.11. このとき対写像を考えている環 $\mathcal{A}$ は、連続関数環 $C(S^1)$ ではなく C^∞ 関数環 $C^\infty(S^1)$ である。実際 $C(S^1)$ 上で τ は有界でない。一方指数定理を考えるとき、我々が知りたい作用素の指数は C^* 環の K 群に属する元である。従って一般の C^* 環 $\mathcal{A}$ に関して K 群と巡回コホモロジー群の対写像を行うには、次のような条件を考えることが必要となる：

- C^* 環 $\mathcal{A}$ の部分環 $\mathcal{A}_o \subset \mathcal{A}$ に、$\mathcal{A}$ よりも強い位相を入れてバナッハ環を構成し、包含写像 $\iota : \mathcal{A}_o \hookrightarrow \mathcal{A}$ が K 群の同型を導いている；

- 与えられた巡回コサイクル τ は $\mathcal{A}_o$ 上で連続である。

このとき K 群の代表元を $\mathcal{A}_o$ の元からとることで、$K(\mathcal{A})$ と $HC^*(\mathcal{A}_o)$ の対写像が矛盾なく定義されることが判る。

しかし上の条件を与えられた C^* 環に対して確かめることは、一般に細かな議論を要する。例えば Connes-Moscovici [22] は Gromov の定義による双曲群に対して Novikov 予想が成立することを確めたが、その証明において上のようなバナッハ環 $\mathcal{A}_o$ の存在を示す過程は不可欠の部分を占めている。これに関する詳しい考察については [19, 22] などを参照されたい。

例 6.12. 2 次元トーラスの C^∞ 関数環 $C^\infty(T^2)$ をとり、この上の巡回コサイクル τ を

$$\tau(a_0, a_1, a_2) = \int_{T^2} a_0 da_1 da_2$$

と定める。このとき射影元 $e \in C^\infty(T^2) \otimes M_k(\mathbb{C})$ に対して τ との対写像は

$$\langle e,\ \tau \rangle = \int_{T^2} \mathrm{Tr}(edede)$$

で与えられる。ここで外微分 d を自然に $\Omega^*(T^2) \otimes M_k(\mathbb{C})$ に拡張しておき、右辺ではその d を射影元 e に作用させている。一方 e を $M_k(C^\infty(T^2))$ の元とみて、これを射影元の族 $(e_x)_{x \in T^2}$ と考える。このとき自明なベクトル束 $T^2 \times \mathbb{C}^2$ の部分ベクトル束 E が各行列 $e_x \in M_k(\mathbb{C})$ の像の集合として与えられる。そして $M_k(\mathbb{C})$ 値 1 型式 ede は E の接続を定め、その曲率型式は $edede$ となることが判る。従って Chern-Weil 理論を用いると対写像の値は

$$\langle e,\ \tau \rangle = -2\pi i \langle c_1(E),\ [T^2] \rangle$$

と計算される。ここで $c_1(E)$ は E の第 1 Chern 類を表す。

例 6.13. いま k をコンパクト台をもつ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の C^∞ 関数として、これを積分核とする作用素と同一視する。このような k の全体を $\mathcal{A}$ で表し、これらの元の積は積分核の合成として定める。ここで k を $L^2(\mathbb{R})$ 上の有界作用素と考えると、$\mathcal{A}$ はコンパクト作用素全体の C^* 環 $\mathcal{K}$ の稠密な部分環である。いま $\mathbb{R}$ の座標を x として、$\mathbb{R}$

上の関数とみた x の掛算作用素を再び x で表し、さらに微分作用素 $\hat{x}=\dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dx}$ を考える。このとき $k\in\mathcal{A}$ に対して、作用素の括弧積 $[x,k]$, $[\hat{x},k]$ をとることにより、$\mathcal{A}$ 上に 2 つの微分 (derivation) が定まる。本来はそれぞれの作用素の定義域を細かく議論することになるが、ここでは $\mathcal{A}$ の性質から

$$[x,k]=(x-y)k(x,y),\quad [\hat{x},k]=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial k}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial k}{\partial y}(x,y)\right)$$

と具体的に書き下すことができるので、$[x,k]$, $[\hat{x},k]$ はともに $\mathcal{A}$ の元であることが判る 。ここで

$$\tau(a_0,a_1,a_2)=\mathrm{Tr}\,(a_0[x,a_1][\hat{x},a_2]-a_0[\hat{x},a_1][x,a_2])$$

とおくとき、τ は $\mathcal{A}$ 上の 2 次巡回コサイクルを定義する。但し

$$\mathrm{Tr}\,k=\int_{\mathbb{R}}k(x,x)dx$$

である。このとき命題 6.3 において $C^\infty(T^2)$ 上で定めた 2 次巡回コサイクルを座標で表した式

$$\int_{T^2}dxdy\left(a_0\frac{\partial a_1}{\partial x}\frac{\partial a_2}{\partial y}-a_0\frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial a_2}{\partial x}\right)$$

この例が 2 次元トーラスを非可換化した微分幾何学に関連することを示唆していると考えられる。一方 $\|\xi\|=1$ をみたす $\xi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ をとり、積分核が $k(x,y)=\xi(x)\bar{\xi}(y)$ で与えられる元 $e\in\mathcal{A}$ は、$L^2(\mathbb{R})$ に作用する階数 1 の射影作用素になる。従って e は $\mathcal{A}$ に属する射影元であり、e と τ の対写像を計算すると

$$\begin{aligned}\langle e,\ \tau\rangle &=\mathrm{Tr}\,([exe,e\hat{x}e]-e[x,\hat{x}]e)\\ &=-\ \mathrm{Tr}\,(e[x,\hat{x}]e)\end{aligned}$$

となり、よく知られた Heisenberg 正準交換関係式 $[x,\hat{x}]=i$ により

$$=-\ \mathrm{Tr}\,(ie)=-i$$

となる。従って $\mathcal{A}$ 上の巡回コサイクル τ と $C^\infty(T^2)$ 上の巡回コサイクルの類比に例 6.12 で調べた対写像の結果を合わせて考えると、これは巡回コサイクルにより $e\in\mathcal{A}$ の '非可換曲率' を測った値であり、また射影元 e の '非可換第 1 Chern 数' とみることもできる。

実際 $\mathcal{K}$ は $C_o(\mathbb{R}^2)$ の変形量子化であると解釈できる。このとき $K(C_o(\mathbb{R}^2))$ の生成元である Bott 生成元は変形量子化を経由して $\mathcal{K}$ の階数 1 の射影元に移る。一方 $K(C_o(\mathbb{R}^2)) = \mathbb{Z}$ の元は第 1 Chern 数で判定されており、Bott 生成元に対応するベクトル束の第 1 Chern 数は 1 である。ここで環を非可換に'変形'しても対写像の値は不変だと考え、また定数倍しておいて τ が上記の $C^\infty(T^2)$ 上の巡回コサイクルに変形されているとすれば、射影元 e と τ の対写像の値は正に'第 1 Chern 数'であると考えてよい。このような変形量子化に関する非可換幾何学の話題については、夏目氏の解説 [38] を参照されたい。

この例において $e \in \mathcal{A}$ の'非可換曲率'を巡回コサイクルで測る際に、非可換な関係式 $[x, \hat{x}] = i$ が本質的な役割を果していた。これに関して太田啓史は、幾何学に限らず言語学においてもそのような非可換関係が存在していることを指摘した。例えば本多勝一 [31] が既に述べているように、形容詞の順序を入換えると文章の意味に確かな差異が生じる：

渡辺刑事は血まみれになって逃げ出した賊を追いかけた。

血まみれになって渡辺刑事は逃げ出した賊を追いかけた。

太田が挙げた例はさらに簡明で、それは次のようである：

太田のきれいな奥さん。

きれいな太田の奥さん。

ここで $A =$「太田の」、$\widehat{A} =$「きれいな」、$\xi =$「奥さん」とおくと、$A,\ \widehat{A}$ がともに作用素としてベクトル ξ に働きながらも[1]、その作用の順序を変えると $A\widehat{A}\xi \neq \widehat{A}A\xi$、即ち $[A,\ \widehat{A}] \neq 0$ となっている。しかしこれだけでは $[A,\ \widehat{A}]$ の定量的評価は明確でない。ところが太田はこの事例に関して次の定量的評価を導いた。

補題 6.14 ([39]). 正準交換関係と同様に

$$[A,\ \widehat{A}] = i,$$

即ち

$$[\text{太田の}, \text{きれいな}]\ \text{奥さん} = \text{愛} \times \text{奥さん}$$

[1] これまで見てきたように非可換幾何においては微分作用素のような非有界作用素が重要な役割を果たす。それらを扱う際にはその定義域を厳密に考えておく必要がある。上の場合では ξ はともに A, B の定義域に含まれているので問題はないが、A を $A' =$「M氏の」に取り替えてしまうと ξ が A' の定義域に含まれているかどうかは自明でない。さらに時間に依る摂動を加えると ξ が A' の定義域に含まれてしまうこともあり、問題は微妙である。どのような条件を満たせば ξ が A' の定義域に含まれるのかを知ることは興味ある問題であるが、ここでは深入りしないことにする。

が成り立つ。

少なくとも筆者の知る限り、人文科学分野において非可換関係を定量的に特定した結果はこの外には見あたらない。

6.3 不変 Dirac 作用素の指数と Bott 射影元

前節で導入した対写像を用いて Dirac 作用素の指数を測って見る。まず初めに $\mathbb{R}^2$ 上の Dirac 作用素：

$$D = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & \partial/\partial x - i\partial/\partial y \\ \partial/\partial x + i\partial/\partial y & 0 \end{pmatrix}$$

を考える。このとき $\mathbb{R}^2$ が平行移動により $\mathbb{R}^2$ 自身に作用し、D はこの作用と可換になる。従って 3 章で述べた Connes-Moscovici 指数定理を適用すると $C^*\mathbb{R}^2$ のトレイス τ_o を用いて $\tau_o(\mathrm{Ind}\, D)$ が計算されるが、$\mathbb{R}^2$ は平坦なので $\tau_o(\mathrm{Ind}\, D) = 0$ である。しかしこれは $\mathrm{Ind}\, D = 0$ を意味するわけではない。実際 $\mathrm{Ind}\, D$ は $K_0(C^*\mathbb{R}^2) = \mathbb{Z}$ の生成元を与えるのである。このことを巡回コサイクルを用いて調べてみよう。

まず $\mathbb{R}^2$ の座標を (x, y) とし、$C^*\mathbb{R}^2$ 上の微分を $\partial f = [x, f]$, $\partial' f = [y, f]$ と定める。より具体的にこれらの微分は

$$\partial f = xf(x,y) \quad \partial' f = yf(x,y)$$

で与えられる。このとき 2 次巡回コサイクル τ を

$$\tau(f_0, f_1, f_2) = \tau_o(f_0\, \partial f_1 \partial' f_2 - f_0\, \partial' f_1 \partial f_2)$$

と定める。但し τ_o は $C^*\mathbb{R}^2$ のトレイスである。ここで $\langle \mathrm{Ind}\, D,\ \tau\rangle$ を計算しよう。まず 2 章で導入した C^* 環 $\mathcal{A} = C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ を考える。このとき式 2.3 により、$\varphi(x) = x^2/(1+x^2)$, $\psi(x) = x/(1+x^2)$ を用いて $K_0(\mathcal{A})$ の生成元 e は

$$e = e_x - e_1, \quad e_x = \frac{1}{1+x^2}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられていた。ここで $C^*\mathbb{R}^2$ から $C_o(\mathbb{R}^2)$ へのフーリエ変換を行ってみると Dirac 作用素 D のフーリエ変換は

$$\widehat{D} = \begin{pmatrix} 0 & \xi - i\eta \\ \xi + i\eta & 0 \end{pmatrix}$$

となる。ここで $\zeta=\xi+i\eta$ と表して、D の定める指数準同型 $\rho:\mathcal{A}\to C_o(\mathbb{R}^2)$ で e を写すと、

$$\rho(e)=\rho(e_x)-\rho(e_1)=\frac{1}{1+\zeta\bar{\zeta}}\begin{pmatrix}1 & \bar{\zeta}\\ \zeta & \zeta\bar{\zeta}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となる。上に現れた第一の射影元 $\rho(e_x)$ はよく知られた $\mathbb{R}^2$ 上の Bott 射影元に外ならない（掛算作用素 ζ のグラフ射影元とも呼ばれる）。このことから $\rho(e)$ は $K_0(C^*\mathbb{R}^2)=\mathbb{Z}$ の生成元を与えていることが判る。これらの表示を用いて対写像 $\langle \mathrm{Ind}\,D,\ \tau\rangle$ を計算してみる。巡回コサイクル τ をフーリエ変換すると

$$\widehat{\tau}(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2)=\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_0 d\varphi_1 d\varphi_2$$

となることが確かめられる。従って

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{Ind}\,D,\ \tau\rangle &= \langle \mathrm{Ind}\,\widehat{D},\ \widehat{\tau}\rangle\\
&=\rho^*(e_x,e_x,e_x)-\rho^*(e_1,e_1,e_1)\\
&=\rho^*(e_x-e_1,e_x-e_1,e_x-e_1)\\
&=\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{Tr}\left[\epsilon\frac{1}{(1+\zeta\bar{\zeta})^3}\begin{pmatrix}0 & d\bar{\zeta}\\ d\zeta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & d\bar{\zeta}\\ d\zeta & 0\end{pmatrix}\right]\\
&=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{2}{(1+\zeta\bar{\zeta})^3}d\zeta d\bar{\zeta},
\end{aligned}$$

となり、ここで $\zeta=re^{2\pi it}$ とおいて

$$=\int_0^1 dt\int_0^\infty\frac{8\pi ir}{(1+r^2)^3}dr=2\pi i$$

が成立つ。ここで以上の式変形は 1 次元複素射影曲線上の普遍直線束の第 1 Chern 数の計算過程と同一であることを指摘しておこう。

6.4 モジュラー自己同型と Godbillon-Vey 巡回コサイクル

まず Σ を種数が 2 以上の閉リーマン面とし、その普遍被覆空間を M で表す。ここで $\Gamma=\pi_1(\Sigma)$ とおくと、Γ は被覆変換群として M に作用する。さらに Γ が S^1

にも作用していると仮定しよう。このとき $(m,x)\gamma=(m\gamma,x\gamma)$ $(\gamma\in\Gamma)$ により Γ を対角的に $M\times S^1$ へ作用させて、商空間

$$N=(M\times S^1)/\Gamma$$

を考える。すると Kronecker 葉層の構成したときと同様に、N において $M\times\{t\}$ $(t\in S^1)$ の像を葉として N に葉層構造 $\mathcal{F}$ が定まる。また N は $\Sigma=M/\Gamma$ 上のバンドル束と見なキこともできる。一般に、このようにして構成される葉層多様体を葉層束という。このときホロノミー亜群は Kronecker 葉層のときと同様に

$$G=(M\times M\times S^1)/\Gamma$$

で与えられ、その葉層 C^* 環 $C^*(N,\mathcal{F})$ はコンパクト台をもつ $(M\times M\times S^1)/\Gamma$ 上の連続関数全体の集合から定義される。このような関数の集合とは、

1) 連続関数 $k:M\times M\times S^1\to\mathbb{C}$ であって、$k(x\gamma,y\gamma,t\gamma)=k(x,y,t)$, $\gamma\in\Gamma$ をみたし;

2) これを $(M\times M\times S^1)/\mathbb{Z}$ 上の連続関数とみるときコンパクト台をもつ;

という条件を満たす集合と同じである。従って葉層 C^* 環 $C^*(N,\mathcal{F})$ とは、上のような $k:M\times M\times S^1\to\mathbb{C}$ を核関数とする作用素の全体が定める C^* 環と同型になる。このとき $C^*(N,\mathcal{F})$ には次のような荷重 (weight) $\omega:C^*(N,\mathcal{F})\to\mathbb{C}$ が存在する：

$$\omega(k)=\int_{N(\Gamma)}k(x,x,t)dtdx.$$

ここで $N(\Gamma)$ は $M\times S^1$ 上の Γ 作用に関する基本領域を表す。この場合 S^1 への Γ 作用は一般に測度 dt を保っていないから、ω はトレイスとは限らないことに注意する。このとき荷重 ω は、$C^*(N,\mathcal{F})$ の弱閉包として定まる von Neumann 環上に Modular 自己同型 $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ とよばれる $\mathbb{R}$ 作用を引き起こすことが知られている（いわゆる冨田-竹崎理論である：例えば夏目 [38, 第 4 章] を参照)。そして葉層 C^* 環 $C^*(N,\mathcal{F})$ 上にも、Modular 自己同型と本質的に同じ自己同型が存在している。これを具体的に記述してみよう。今までどおり dt は S^1 上の通常の体積要素を表し、dx で Γ 不変な M 上の体積要素を表す。一方 $N=(M\times S^1)/\Gamma$ 上の体積要素を持ち上げて定まる $M\times S^1$ 上の Γ 不変な体積要素を $d\mu$ として、関数 $\psi:M\times S^1\to\mathbb{R}$ を

$$\psi=\frac{dx\times dt}{d\mu}$$

と定める。このとき $k \in C^*(N,\mathcal{F})$ に対して $\sigma_t(k) = \psi^{it}k\psi^{-it}$ と定義すると、これが $C^*(N,\mathcal{F})$ に制限された Modular 自己同型を与えている。ここで $\phi = \log\psi$ とおこう。このとき $C^*(N,\mathcal{F})$ 上の 2 次巡回コサイクルを次のように定める：

$$\tau(a_0,a_1,a_2) = \int_{N(\Gamma)} dxdt\ (a_0[\phi,a_1][\dot{\phi},a_2] - a_0[\dot{\phi},a_1][\phi,a_2]).$$

ここで $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$ であり、$N(\Gamma)$ は $M \times S^1$ 上の Γ 作用に関する基本領域である。この巡回コサイクルを Godbillon-Vey 巡回コサイクルとよぶ。ここで厳密に言うと、註 6.11 の条件を満たす C^* 環 $C^*(N,\mathcal{F})$ の Banach 部分環 $\mathcal{A}_o$ をまず構成して、τ を $\mathcal{A}_o$ 上の 2 次巡回コサイクルとして定義している。詳細に関しては [37] を参照のこと。

ここで Connes 葉層指数定理のときと同様に葉層束 N の葉に沿う Dirac 作用素の族をとり、これをホロノミー被覆へ持ち上げて得られる作用素族 $D = (D_t)_{t\in S^1}$ を考える。そして D を用いて定まる指数準同型 ρ により、$\operatorname{Ind} D \in K_0(C^*(N,\mathcal{F}))$ を定義する。このとき次の定理が成り立つ。

定理 6.15 (森吉-夏目 [37]). いま τ を *Godbillon-Vey* 巡回コサイクルとする。このとき $\operatorname{Ind} D$ と τ の対写像をとると

$$\langle \operatorname{Ind} D,\ \tau\rangle = \frac{1}{\pi i}\int_N \mathrm{gv}$$

が成り立つ。ここで gv は葉層束 N の二次特性類である *Godbillon-Vey* 類を表す。

例 6.13 に現れた巡回コサイクルや $C^\infty(T^2)$ 上の巡回コサイクルとの類比から推測するならば、この定理は Modular 自己同型から導かれる 2 つの微分に関して定まる $\operatorname{Ind} D$ の'非可換曲率'が葉層束 N の Godbillon-Vey 数と一致することを示していると考えられる。

第7章　展望と課題

この章ではこれまでに述べ残した事項や指数定理に関する現在の課題とこれからの展望について述べる。

7.1　Coarse Geometry と指数定理

これまで見てきたように、結局指数定理に現れる $\mathrm{Ind}\, D$ はすべてある種の積分核の形で表現される元として定義された。このような積分核の成す C^* 環は森田同値という概念を通じて互いに同型となり、異なる多様体上で考えた作用素の指数を比較することができたのである。例えば多様体がコンパクトであると仮定すれば、多様体上の連続な積分核の成す C^* 環は常にコンパクト作用素全体の C^* 環 $\mathcal{K}$ に同型であり、また基本群が Γ に同型である多様体に関しては、普遍被覆空間上で Γ 不変である連続積分核の成す C^* 環 $\mathcal{K}_\Gamma$ が常に $C^*\Gamma \otimes \mathcal{K}$ に同型であった。この見方は Novikov 予想における高次 L 種数のホモトピー不変性を議論する際に有効に用いられている。それだけでなく Baum-Connes 予想を考えてみても、多様体上の連続な積分核の成す C^* 環が多様体の幾何的性質と密接に関連していることは疑い無いと考えられる。従って、一般の完備なリーマン多様体 M に対しその上の積分核の全体が成す C^* 環が、M の幾何的性質をどのように反映しているかという問題が自然に浮び上がってくる。

J. Roe は完備なリーマン多様体 M について、次のような条件を満たす核関数 k の集合を考えた：正数 $\epsilon > 0$ に対して $M \times M$ の対角集合 M_Δ の ϵ 近傍を U_ϵ と表すとき、k に対してある $R > 0$ が存在し、$\mathrm{supp}\, k \subset U_R$ が成り立つ。このような性質を満たす作用素を有限伝播性をもつ（局所コンパクトな）作用素という。有界な幾何性質をもつ完備リーマン多様体上の Dirac 作用素は有限伝播性を有するので、一般に $\mathrm{Ind}\, D$ を与える核関数は、上の条件を満たす核関数の定める C^* 環に属することにな

る。従って指数定理を捉える見地からは、これは最も自然な M 上の核関数の集合と考えられる。J. Roe はこの C^* 環の K 群と対写像をとる巡回コサイクルを得るために、さらに粗コホモロジー (Coarse cohomology) という概念を導入した。粗く言えば、粗コホモロジーとは M を距離空間と考えたために非輪状になりそこねた非輪状 Alexander-Spanier 複体のコホモロジー群であると定義される。粗コホモロジーは、例えばコンパクト集合についてはいつも自明である（このとき粗コホモロジーの複体は非輪状 Alexander-Spanier 複体に一致する)。従って粗コホモロジーとは、一般の距離空間に対して粗い分類を行う理論であると考えられる。この概念はそれ自体興味深いものであるが、粗コホモロジーのコサイクルが K 群との対写像を導くという点においても関心が持たれる。こうして有限伝播性をもつ核関数の成す C^* 環により完備リーマン多様体上の Dirac 作用素に対する指数定理が記述され、さらに粗コホモロジーを用いてこの指数定理に関連する幾何不変量を与えることが可能となる。以上に述べた完備リーマン多様体上の指数定理については Roe [44, 45] を参照されたい。

7.2 K-ホモロジー群

指数定理と関連して当然言及されるべき事項であるが、本稿では殆ど述べることが出来なかった。実は指数定理とは、広く解釈するならば K-ホモロジーと K-コホモロジーの対写像であると言ってしまうこともできる。この意味で本稿中に K-ホモロジーの概念は見え隠れしているのだが、系統だって説明する余裕がなかった。殊に K-ホモロジーと K-コホモロジーの概念を統合した Kasparov [33] による KK 理論については全く触れることが出来なかった。K-ホモロジーについては Baum-Douglas [12] およびその参考文献を、KK 理論については夏目氏の解説 [38] および Blackadar [16] を参考文献として挙げておく。

7.3 奇数次元多様体に関する指数定理

奇数次元多様体上の Dirac 作用素に対しては (2.2) により作用素の指数を定義した。多様体が偶数次元のとき Dirac 作用素の指数には

$$\operatorname{Ind} D = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^-$$

という明確な解釈が存在したが、奇数次元のとき指数の幾何的な意味はまだ判明していないように思われる。例えば奇数次の指数の消滅性に関して次の事実がある。

定理 7.1. 奇数次元のコンパクト多様体 M をとり、その基本群が Γ に同型であるとする。ここで普遍被覆空間に持ち上げられた *Dirac* 作用素 D に対して $\operatorname{Ind} D \in K_1(C^*\Gamma)$ を考えるとき、$\operatorname{Ind} D \neq 0$ ならば D のスペクトルに切れ目はない。つまり $\mathrm{Spec}(D) = \mathbb{R}$ である。

この定理の系として、奇数次元のコンパクトなスピン多様体が正のスカラー曲率を持つリーマン計量を許せば、$\operatorname{Ind} D \in K_1(C^*\Gamma)$ は 0 となることが判る。同様に M が $K(\Gamma, 1)$ 多様体のとき、Γ に関する Novikov 予想が成り立つならば普遍被覆空間上の Dirac 作用素のスペクトルに切れ目がないことも従う。

また本稿で十分述べることができなかったが、奇数次元多様体 M 上の Dirac 作用素と多様体上の連続関数 $\varphi : M \to U(n)$ を用いて Toeplitz 作用素を構成し、この作用素の指数を考えることができる。いくつかの例については序章で述べておいた。Toeplitz 作用素の指数に関しては、多様体上の力学系、つまり次元 1 の葉層構造のような軌道の次元が低い場合にも残された問題は多くあるように思われる。また通常の Fredholm 作用素としての指数は、多様体が互いに同境であれば一致した。この様な性質は奇数次の指数、あるいは K 群に値をとる一般の指数に対してどのように定式化されるのであろうか。これも興味ある問題である。

参考文献

[1] M. Atiyah, *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras,* Astérisque **32** (1976), 43–72.

[2] M. Atiyah, R. Bott and V. K. Patodi, *On the heat equation and the index theorem*, Invent. Math. **19** (1973), 279–330.

[3] M. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry* I, Cambr. Phil. Soc. **77** (1975), 43–69; II, **78** (1975), 405–432; III, **79** (1976), 71–99.

[4] M. Atiyah and W. Schmid, *A geometric construction of discrete series for semisimple Lie groups*, Invent. Math. **42** (1977), 1–62.

[5] M. Atiyah and G. Segal, *The index of Elliptic operators* II, Ann. of Math. **87** (1968), 531–545.

[6] M. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds,* Bull. AMS **69** (1963), 422–433.

[7] ——— *The index of Elliptic operators* I, Ann. of Math. **87** (1968), 484–530; III, **87** (1968), 546–604; IV, **93** (1971), 119–138; V, **93** (1971), 139–149.

[8] ——— *Index theory for skew-adjoint Fredholm operators,* Publ. Math. IHES **37** (1969), 305–326.

[9] P. Baum and A. Connes, *Chern character for discrete groups*, a fête of topology, North Holland, 1987, 163–232.

[10] P. Baum and A. Connes, *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, Enseign. Math. **46** (2000), 3–42.

[11] P. Baum, A. Connes and N. Higson, *Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras*, Contemp Math. **167** (1994), 241–291.

[12] P. Baum and R. Douglas, *K-homology and index theory*, Proc. Symp. Pure Math. **38** part 1 (1982), 521–628.

[13] ——— *Index theory, bordism and K-homology*, Contemp. Math. **10** (1982) 1–31.

[14] ——— *Toeplitz operators and Poincaré duality*, Proc. Toeplitz Memorial Conf., Tel Aviv, Birkhäuer, Basel, 1982, 137–166.

[15] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1992.

[16] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, Mathematical Sciences Research Institute Publications **5**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1986.

[17] A. Connes, *A survey of foliations and operator algebras*, Proc. Symp. Pure Math. **38** (1982), 521–628.

[18] ——— *Non-commutative differential geometry* I , II, Publ. Math. IHES, **62** (1986), 257–360.

[19] ——— *Cyclic cohomology and the transversal fundamental class of a foliation*, in *Geometric Method in Operator Algebras* (H. Araki and E. G. Effros, eds.), Pitman Research Notes in Math. **123** (1986), Longman, 52–144.

[20] ——— *Noncommutative Geometry*, Academic, 1994.

[21] A. Connes and H. Moscovici, *The L^2-index theorem for homogeneous spaces of Lie groups*, Ann. of Math. **115** (1982), 291–330.

[22] ——— *Cyclic cohomology, Novikov conjecture and hyperbolic groups*, Topology **29** (1990), 345–388.

[23] R.G.Douglas, S.Hurder and J. Kaminker, *The longitudinal cocycle and the index of Toeplitz operators*, J. Func. Anal. **101** (1991), 120–144.

[24] 古田幹雄, **指数定理** *1*, 岩波講座 現代数学の展開 **17**, 岩波書店, 1999.

[25] E. Getzler, *Pseudo-differential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem*, Comm. Math. Phys. **92** (1983), 163–178.

[26] P. B. Gilkey, *Invariance theory the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo, 1995.

[27] I.Q.Gohberg and M.G.Krein, *The basic propositions on defect numbers, root numbers, and indices of linear operators* , AMS Transl. **13** (1960), 185–264.

[28] P. Green, *Equivariant K-theory and crossed products*, Proc. Symp. Pure Math. **38**(1981) Pt 1, 337–338.

[29] N. Higson, *An approach to $\mathbb{Z}/k$-index theory*, Inter. J. Math. **1** (1990), 189–210.

[30] F.Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer, 1966.

[31] 本多勝一, 日本語の作文技術, 朝日文庫, 1982.

[32] S. Hurder, *Eta invariants and the odd index theorem for coverings*, Contemp. Math. **105** (1990), 47–82.

[33] G.G.Kasparov, *The operator K-functor and extensions of C^*-algebras,* Math. USSR Izv. **16** (1981), 513–572.

[34] ______ *Lorentz group: K-theory of unitary representations and crossed products*, Sov. Math. Dokl. **29** (1984), 252–260.

[35] S.Kobayashi and K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry I,II*, Interscience, 1969.

[36] H.B.Lawson and M-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton, 1989.

[37] H. Moriyoshi and T. Natsume, *The Godbillon-Vey cyclic cocycle and longitudinal Dirac operators*, Pacific Journal of Mathematics, **172** (1996), 483–539.

[38] 夏目利一, **トポロジストの為の作用素環論入門**, 本巻所載.

[39] H. Ohta, in private communication.

[40] R. S. Palais, *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Ann. of Math. Studies **57**, Princeton, 1965.

[41] V. K. Patodi, *An analytic proof of the Riemann-Roch-Hirzebruch theorem for K'ahler manifolds*, J. Diff. Geom.. **5** (1971), 251–283.

[42] G. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, Academic, 1979.

[43] J. Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*, Pitman Research Notes in Math. **179**, Longman, 1988.

[44] ——— *Coarse cohomology and index theory on complete Riemannian manifolds*, Memoires of AMS **497**, 1993.

[45] ——— *Index theory, coarse geometry, and topology of manifolds*, CBMS regional conference series in Math. **90**, AMS, 1995.

[46] I.M.Singer, *Some remarks on operator theory and index theory* , Lect. Notes in Math. **575** (1977), 128–138.

[47] M. Taylor, *Pseudo-differential operators*, Princeton, 1982

[48] 吉田朋好, **ディラック作用素の指数定理**, 共立講座 21 世紀の数学 **22**, 共立出版, 1998.

[49] N.E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^*-algebras*, Oxford University Press, 1993.

夏目 利一（なつめ としかず）
名古屋工業大学
数学教室
〒 466-8555
名古屋市昭和区御器所町
natsu@math.kyy.nitech.ac.jp

森吉 仁志（もりよし ひとし）
慶応大学理工学部
数理科学科
〒 223-0061
横浜市港北区日吉 3-14-1
moriyosi@math.keio.ac.jp

日本数学会 数学メモアール 第2巻

作用素環と幾何学

2001年9月20日 発 行　　定 価 3900円（本体価格）

著 者 夏目 利一・森吉 仁志
発行者 〒 113-0033 東京都文京区本郷 4-25-9-203 社団法人 日本数学会
電 話 03-3816-5961

 ISBN4-931469-16-7 Printed in Japan

数学メモアール　既刊案内　　日本数学会

第1巻	3次元接触構造のトポロジー	三松 佳彦 著	2001年	2000円
第2巻	作用素環と幾何学	夏目 利一 森吉 仁志 著	2001年	3900円