

数学 メモリアル

三松佳彦

3次元接触構造の トポロジー

付) Hamilton系の周期解の存在問題と J -正則曲線 小野 薫

第1巻

2001

日本数学会

数学メモリアル編集委員会

編集委員長 柏原 正樹

編集委員

石井 志保子	太田 雅己
岡本 和夫	小澤 徹
楠岡 成雄	小林 亮一
平良 和昭	坪井 俊
西浦 廉政	野海 正俊
深谷 賢治	舟木 直久
前田 吉昭	満洲 俊樹
宮岡 洋一	三輪 哲二
脇本 実	

服部 晶夫先生の古稀をお祝いして

まえがき

本稿は当初、日本数学会の季刊誌「数学」の論説記事として3次元接触トポロジーの現状を報告するために計画されました。Symplectic トポロジーの急速な発展に引きずられるようにして、接触トポロジーも'90年代中頃から多少の注目を集めるようになってきました。接触構造の定義の易しいこと、研究手法が特に3次元の場合に視覚化され易いことも手伝って、比較的安易に近付けそうな印象を与えますが、実際には“非可積分”であることのためにしばしば直観は裏切られ、基礎理解が思いの外困難な分野とも言えます。また、今のところ基礎を学ぶためのまとまったよい文献は内外を問わず余り見当たりません。そこで、元々の原稿においても最先端の紹介に先立つ基礎的な導入部の必要を感じ、簡単な解説を試みました。ところがその結果、「論説」の原稿としては長すぎるものが出来てしまいました。

「数学」と「メモアール」の両編集委員会のお計らいにより、この原稿を日本語メモアールとして刊行することに計画を変更して頂けることになりました。両編集委員会には心より御礼申し上げます。

この計画変更に伴い、前半の基礎的な導入部分を十分とは言えないまでも拡充し、図を増やして読者が理解し易くなるよう努力をしてみました。然し乍、元の原稿が極めて切り詰めた表現により最少のページ数により多くの数学的内容を盛り込もうとしたものでしたので、未だに次々と読み進める教科書のようなスタイルからは程遠いと言わざるを得ません。この点は、読者諸氏に寛容と忍耐をお願いすることになります。

一方、この機会に小野 薫氏が“Hamilton 系の周期解の存在問題と J- 正則曲線”と題する素晴らしい解説文を寄稿して下さることになりました。筆者としても望外の喜びと言えます。この文章は、1996年1月の研究集会「接触幾何学とその周辺」に於ける小野氏の連続講演の予稿に若干の補筆修正を加えて頂いたものです。筆者も96年以来座右に置き、本稿作成中も常に参照しています。Symplectic topology と Hamilton 系の第一人者による含蓄の深いこの文献は読者にとっても貴重なものとなりましょう。小野氏には深く深く感謝の意を表したいと思います。

本稿をご覧頂ければ分かるように、Yakov Eliashberg 氏はこの分野を切り開いてきたリーダーです。筆者は Eliashberg 氏から多くのことを学び、また、多くの感銘を受けました。本稿の作成にはその他にも、foliator を中心とする T.I.T. 土曜セミナー（通

称土セミ)の方々, 皆川 宏之氏, 田中 実氏, 神田 雄高氏, 鳥巢 伊知郎氏を始めとする多くの方々の御協力を頂きました。この場を借りて御礼申し上げます。また, 文部省/日本学術振興会の科学研究費補助金基盤研究(C)(2) 課題番号 09640130 の助成を受けました。

最後になってしまいました, 学部から修士にかけて筆者は服部晶夫先生に御指導頂きました。その頃から葉層構造論に興味を持ち始め, 位相幾何学の中では若干異なる方向へ進んで居りましたが, foliators の中に在っては筆者の研究上の志向が服部先生の御教育の影響を強く受けていることは明らかでした。更にこの数年, 葉層構造と接触構造の間を往来するようになって symplectic 幾何との関連も深まり, 服部先生をはじめ, 服部セミナー門下の素晴らしく優秀な先輩・後輩諸氏のお陰で多くのことを学ぶことが出来ました。それは本稿にも大きく影響しています。

本年6月に古稀をお迎えになり, 益々お元気に数学の研究を続けておられる服部晶夫先生に本稿を捧げたいと存じます。

1999年12月31日

三松 佳彦

目次

第 I 部	3次元接触トポロジー	1
0	序, 定義と例	1
0.1	緒言	1
0.2	定義と基礎概念	2
0.3	接触構造の基本例	7
1	接触トポロジーの開幕 (Bennequin) に至るまで	16
1.1	接触構造の剛性	16
1.2	3次元多様体上の接触構造の存在定理	20
2	3次元接触トポロジーの幕開け: Tight な接触構造と Bennequin の不等式	25
2.1	Tight vs. Over Twisted	25
2.2	Tight 性と Bennequin の不等式	27
2.3	(S^3, ξ_0) に対する Bennequin の不等式の証明について	30
3	Fillable な接触構造と Tight 性	34
3.1	Tight な接触構造	34
3.2	Fillable な接触構造	35
3.3	J -Convexity	38
3.4	概複素曲面内の実曲面	41
3.5	Bishop の定理	44
3.6	Fillable \Rightarrow Tight: Gromov の証明	47
3.7	Fillable \Rightarrow Bennequin の不等式	49
4	接触構造と葉層構造: Confoliation の理論を中心として	51
4.1	接触構造論と葉層構造論の類似	51
4.2	葉層構造からの摂動による接触構造の生成: Confoliation の理論	54
4.3	Taut な葉層構造と Fillable な接触構造	59
4.4	葉層構造の Reeb 成分と接触構造の Tight 性	60

5	Anosov 流と双接触構造	63
5.1	Anosov 流と Strong Filling	63
5.2	射影的 Anosov 流と双接触構造	70
5.3	双接触構造の Tight 性	76
6	Eliashberg · Giroux · 神田らによる 3 次元接触トポロジー	80
6.1	Giroux による凸曲面の理論	80
6.2	Tight な接触構造の分類 · 非存在	82
6.3	Tight な接触構造の手術に依る構成	84
7	Seiberg-Witten 理論による最近の接触トポロジーの発展	89
7.1	Kronheimer-Mrowka の有限性定理	89
7.2	ホモロジー 3 球面等への応用	91
8	Weinstein 予想に関する Hofer の仕事と接触ホモロジー	93
8.1	有限エネルギー曲面	93
8.2	Weinstein 予想に関する Hofer の仕事	95
8.3	接触ホモロジー	97
 第 II 部 Hamilton 系の周期解の存在問題と J- 正則曲線		107
0	序	107
1	Weinstein 予想	108
2	Rabinowitz の証明	110
3	Contact manifold の symplectization	114
4	Hofer の仕事	118
5	更に続く話題	125

第I部

3次元接触トポロジー

三松 佳彦 (中央大学 理工学部)

0 序, 定義と例

0.1 緒言

奇数次元多様体上の局所的に最も非可積分な超平面場を接触構造と呼ぶが, 近年の symplectic 幾何, 特に4次元を中心とする symplectic トポロジーの発展に伴い, (Arnol'd の言¹をまねるならばその弟分にあたる) 3次元接触幾何・トポロジーが大分注目を集める様になった.

Symplectic 構造が偶数次元多様体上の 2-形式で定まる構造であるのに対し, 接触構造は奇数次元に於ける 1-形式による構造であり, 従ってその研究手法もより (位相) 幾何学的である. 特に, 現在進展中の 3次元接触トポロジーにおいては, 1・2次元部分多様体 (つまり knot や曲面) に着目するトポロジー的手法が重要である (1, 2, 6 節). 一方, 3次元接触多様体を境界もしくは無限遠とする 4次元 symplectic 多様体に J-正則曲線の理論や Seiberg-Witten 理論等の解析的大道具を適用することにより, 既に多くの重要な結果が得られている (3, 7, 8 節). 特に最近の Hofer の仕事などは, 元々接触構造論にあった二つの顔, つまり超平面場としてのトポロジカルな側面と, それを定める接触 1-形式とその形式に付随する接触流の幾何学・力学系としての側面を以前より強く結びつけ始めている. これは更に Eliashberg-Hofer-Givental' による Contact Homology という概念を生み, symplectic 多様体の Gromov-Witten 不変量や mirror 対称性を調べる Symplectic Field Theory という姿にまで成長しようとしている. 本稿では基本的には前者のトポロジカルな立場から始める. それは, 大域的解析学の準備と応用を述べるための筆者の力が不足していることによるのみならず, 将来, より多くの事柄がトポロジカルな言葉で記述されることを願っているからでもある. 実際には理論の発展の現在に於ける最先端においては, 双方の議論が複雑に絡み合っていることも事実である.

ところで, 90年代に入ってから 3次元多様体上の余次元 1 葉層構造論と 3次元

¹“接触幾何は symplectic 幾何の odd dimensional twin である”—Arnol'd. Contact で考えて symplectic で証明するのだそう. 最近 Eliashberg は “symplectic topology が contact topology の sister である”と言っている [E6].

接触構造の関係が注目される様になった。葉層構造は完全積分可能な平面場であり、接触構造とは水と油のようなものであるが、実際、双方における研究手法(埋め込まれた曲面との交わりでできるベクトル場の追跡など)や支配的な考え方(h-原理など)の類似は以前から多くの人々に‘何となく’認識されていた。特に Eliashberg, Gromov, Thurston の双方における仕事は、何かもっと具体的な関連が隠されていることを示唆していたが、その一端が Eliashberg-Thurston の *confoliation* と呼ばれる理論として登場した(4節)。実は、更にこの二つに knot 理論を加えた三位一体こそが本当の姿に違いないと想像しているのは筆者だけではなく。

この様な3次元接触トポロジーの現状について(甚だ個人的な視点から)の報告が本稿の本来の使命であるが、3次元接触構造は未だ多くの人々には馴染みが薄いので、先ず、定義及び幾つかの基本例と共にその数学的な背景を眺め(0節)、次に3次元接触構造の基礎を復習(1節)してから、本題に入ることにする。本稿の前半(3節まで)については[E4], [Gi2]に良い概説がある。[AG], [MS1]等には本節の内容がより詳しく解説されている。

0.2 定義と基礎概念

この小節では接触構造に関する基礎的な概念の定義を形式的に与えてしまう。0.3節に挙げる基本的な例等も同時に参照されよ。本稿では、symplectic 幾何の基礎的な事項は既知とするが、最低限の定義だけは与えることにする。Symplectic 幾何については最近良い解説書が幾つか出版された。日本語のものでは先ず何と云っても[F], 洋書では[AG], [MS1]等がある。[A]は古典力学の立場からの素晴らしい入門書で、symplectic 構造は勿論、接触構造の基礎も解説されている。

定義 0.2.1 $(2n-1)$ 次元多様体 M 上の C^∞ -級の超平面場 ξ が **接触構造** であるとは、 ξ が局所的に $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0$ を満たす(つまり M の体積要素を与える) C^∞ -級の非特異 1-形式 α により $\xi = \ker \alpha$ として定義されることをいう²。この条件は余次元 1 超平面場としては最も積分可能性が低いことを意味している³。このような非特異 1-形式 α を **接触 1-形式** という。

²平面場の微分可能性に関しては当面 C^∞ -級のもの以外考えないことにする。接触構造を一つ考える限りは、1-形式が接触形式であることが C^1 -級位相で open condition である事と Gray の剛性定理 1.1.3 により、それで十分である。後に 4.5 節や補題 1.1.4 に於いて、二つの接触構造の組及び葉層構造との関連により、微分可能性のより低い平面場を扱う。ベクトル場に関しては C^∞ -級のものだけを扱う。

³逆に Frobenius の定理としてよく知られているように $\alpha \wedge d\alpha = 0$ は超平面場 $\ker \alpha$ の完全積分可能性と同値である。3次元の場合については補題 1.1.4 も見よ。

従来、特に微分幾何においては、大域的な接触1-形式 α を指定したときの組 (M, α) を **接触多様体** と呼ぶが、トポロジーにおいては最近では接触平面場との組 (M, ξ) を指すことも多い。

(局所的な) 接触1-形式の例としては、(局所) 座標 $(z, x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1})$ に於いて

$$\alpha_1 = dz + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i dy_i - y_i dx_i) \quad \text{又は} \quad \alpha_2 = dz + \sum_{i=1}^{n-1} x_i dy_i$$

などが標準的である⁴。これらが接触形式であることを計算してみると、

$$\begin{aligned} d\alpha_1 &= d\alpha_2 = \sum_{i=1}^{n-1} dx_i \wedge dy_i, \\ \alpha_1 \wedge (d\alpha_1)^{n-1} &= \alpha_2 \wedge (d\alpha_2)^{n-1} \\ &= (n-1)! dz \wedge dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge dy_{n-1} \end{aligned}$$

となる。 α_1 については、各 i 毎に (x_i, y_i) を極座標 (r_i, θ_i) に変換すると

$$\alpha_1 = dz + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 d\theta_i$$

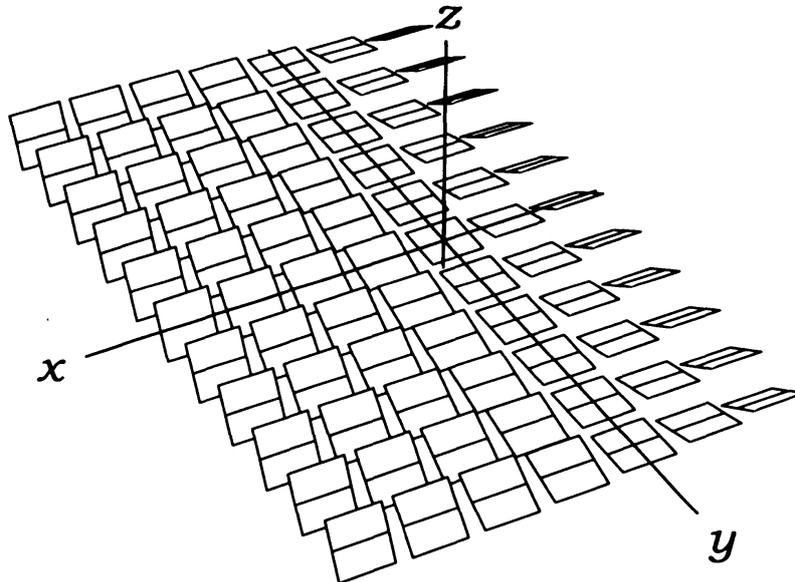
とも表せ、回転対称性及び平行移動 $\frac{\partial}{\partial z}$ による対称性が明らかである。 α_2 については $\mathbb{R}^n = \langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} \rangle$ による対称性がすぐ見える。

この二つの接触形式については、後で 0.2.7 に定義する Reeb ベクトル場が共に $\frac{\partial}{\partial z}$ となっている。実際、 $\Phi : (x_i, y_i, z) \mapsto (x_i, y_i, z + \varphi(x_i, y_i))$ という形の微分同相で α_1 と α_2 が写りあう⁵。

⁴ α_1 の係数 $\frac{1}{2}$ は趣味の問題である。 $d\alpha$ が標準的 symplectic 形式 $\sum_{i=1}^{n-1} dx_i \wedge dy_i$ に適合するよう調整している。

⁵容易なので演習問題として確かめて見よ。これらの接触形式を \mathbb{R}^2 上の主 \mathbb{R} -束の全空間上の主 \mathbb{R} -接続形式と思えば、曲率が一致していること： $d\alpha_1 = d\alpha_2 = \sum dx_i \wedge dy_i$ に他ならない。

図 0.2.2



$$\ker[\alpha_2 = dz + xdy]$$

定義 0.2.3 $2n$ 次元多様体 W 上の非退化な閉 2-形式 ω を **symplectic 構造** 又は **symplectic 2-形式** と云い, (W, ω) を **symplectic 多様体** と云う. ここで‘非退化である’とは ω^n が W 上至る所非自明なことを指す.

注意 0.2.4 1) $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0$ という性質は α を $f\alpha$ に取り替えても変わらない. (ここで f は零にならない任意の M 上の微分可能な関数である.) 即ち, 超平面場 $\xi = \ker\alpha$ を定める非特異 1-形式 α の選び方に依らない.

2) 更に $(4k-1)$ 次元 (特に 3 次元) の場合は f の符号にも依らず ξ のみで $\alpha \wedge (d\alpha)^{2k-1}$ が多様体 M の向きを与える. 従ってこのような次元の多様体 M が接触構造 ξ を持てば, 仮に ξ が超平面場として向き付け不可能であったとしても, M は常に向き付け可能である. 既に (接触構造とは別の理由で) 向き付けられている多様体上では, 接触構造が定める向きと多様体に与えられた向きが一致するとき, その接触構造は **正 (positive)** であるといい, そうでない場合は **負 (negative)** であるという. 平面場としての向き付けを持つ正の接触構造は自然に横断方向の向きも定めることになるが, その意味で **co-oriented** と呼ばれる. 座標 (x, y, z) の自然な向き付け $dx \wedge dy \wedge dz$ に対し上の例では $\alpha_1 \wedge d\alpha_1 = \alpha_2 \wedge d\alpha_2 = dx \wedge dy \wedge dz$ となるので, $\ker\alpha_1$ と $\ker\alpha_2$ は共に正の接触構造である.

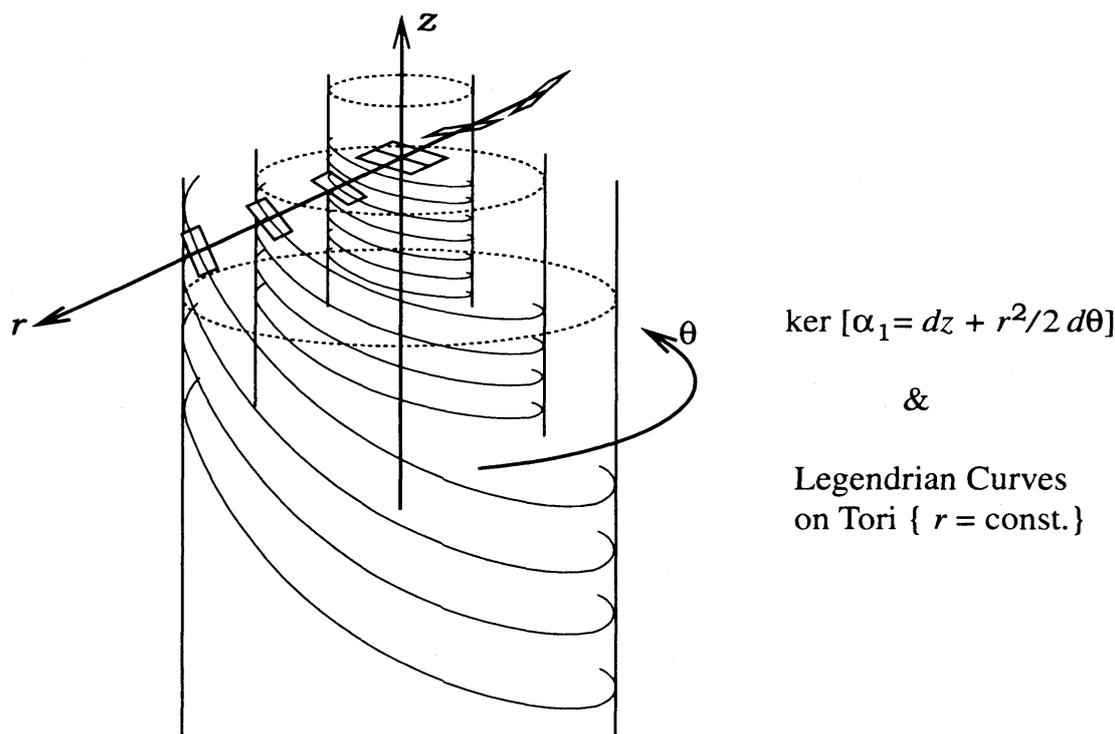
3) 2-形式 $d\alpha$ は各点 p の接触超平面 ξ_p に symplectic 構造を与えている. 接触

1-形式 α を $f\alpha$ ($f > 0$) に取り替えると ξ_p に定まる symplectic 構造は $f(p)d\alpha_p$ となる. 従って接触構造 ξ が各接触平面 ξ_p に symplectic 構造の共形類を定めている.

4) Symplectic 構造は, 多様体の各点の接空間に制限しても意味のある無限小の線形な構造 (非退化性, 即ち symplectic ベクトル空間) が, ある可積分性 ($d\omega = 0$) により多様体中に広がった構造であると考えられる. 一方, 接触構造はより非線形な構造である. これは接触構造が symplectic 構造の射影化であるという考え方の一つの所以である.

接触構造の方が超平面場というより具体的な幾何学的構造なので, 目に見えやすい印象を与えるが, その非可積分性・非線形性が実際の取り扱いをやや困難にしている. 多少慣れてくれば, symplectic 構造は目には見えにくい, 多くのことを記述するためのとても良い言語であるといえよう.

図 0.2.5



定義 0.2.6 $(2n - 1)$ 次元多様体上の接触構造においては部分多様体でその各点の接空間が接触超平面に含まれるものの最大次元は $n - 1$ (3次元接触構造なら1次元) である⁶. その様な部分多様体を **Legendre 部分多様体** という.

⁶以下の易しい演習問題から従う. “ $2k$ 次元の symplectic ベクトル空間 (V, ω) 内の $\omega|_L = 0$ となる部分空間 L の次元は k 以下である.”

同様に, $2n$ 次元 symplectic 多様体 (W, ω) の部分多様体 L で $\omega|_L = 0$ となるものの⁷の最大次元は丁度 n である. そのような部分多様体を **Lagrange 部分多様体** という⁸.

定義 0.2.7 1) 接触 1-形式 α を指定すると

$$\alpha(X_\alpha) = 1, \quad \iota_{X_\alpha} d\alpha = 0$$

を満たすベクトル場 X_α が一意的に定まる ($\alpha(X_\alpha) = 1, \mathcal{L}_{X_\alpha} \alpha = 0$ としても同値). これを接触 1-形式 α に付随する **Reeb ベクトル場** といい, Reeb ベクトル場が生成する流れを **Reeb 流** もしくは **接触流** と言う.

2) (与えられた接触形式 α を保つことは課さないが) 接触平面場 $\xi = \ker \alpha$ を保つベクトル場, 即ち, ある関数 g が存在して $\mathcal{L}_X \alpha = g\alpha$ を満たすベクトル場 X を **接触ベクトル場** という.

上の例では α_1, α_2 共に $\frac{\partial}{\partial z}$ が Reeb ベクトル場となっている. 下に述べるように Reeb ベクトル場は時間に依らない Hamilton ベクトル場を等エネルギー曲面に制限したものと見做せる. Reeb ベクトル場 X_α は接触構造 ξ のみならず接触 1-形式 α , 従って $d\alpha$ も保つ.

注意 0.2.8 1) 接触ベクトル場 X が接触形式 α に対し $\alpha(X) = 1$ を満たせば, X は α の Reeb ベクトル場 X_α に一致する⁹. 即ち, ある与えられた接触形式 α に対して $\alpha(X) = f$ となる接触ベクトル場 X は, $f \neq 0$ となる所では接触 1-形式 $f^{-1}\alpha$ の Reeb ベクトル場になっている.

2) 1) により, 一般に TM/ξ の滑らかな切断に対し, それのリフトとなる接触ベクトル場が一意的に存在することが容易に分かる (読者の演習問題).

定義 0.2.9 $(2n-1)$ 次元接触多様体 (M, α) に対し $2n$ 次元多様体 $W = (0, \infty) \times M$ 上の 2-形式 $\omega = d(t\alpha)$ ($t \in (0, \infty)$) は exact な symplectic 構造を W に与える. これを (M, α) または (M, ξ) の **symplectization** と言う¹⁰. このとき t を Hamiltonian

⁷この条件だけなら isotropic 部分多様体と云う.

⁸'Symplectic 幾何に於いてはあらゆる重要な概念は何らかの意味で Lagrange 部分多様体と見做せる' という有名な Weinstein の哲学があり, 同様に Legendre 部分多様体という概念も重要である. Eliashberg によれば接触トポロジーとは接触平面場と Legendre 部分多様体を研究する学問である.

⁹微分形式の Lie 微分についての Cartan の公式 $\mathcal{L}_X = \iota_X d + d\iota_X$ を使って $\mathcal{L}_X \alpha = g\alpha$ の左辺を書き直し, 両辺に X を代入すれば分かる.

¹⁰この様に $2n$ 次元の symplectic 構造とその境界又は end の射影化としての $(2n-1)$ 次元接触構造が symplectic と contact の基本関係であるが, 後に述べる様に $(2n-2)$ 次元 symplectic 構造との関係も重要である.

とする Hamilton ベクトル場 X_t を $M = \{t = 1\}$ に制限したものは α に付随する Reeb ベクトル場 X_α に他ならない. W は M 上の実 1 次元ベクトル束 $\{1\text{-形式 } \beta; \beta|_\xi = 0\} = (TM/\xi)^*$ の全空間から零切断を除いたものの α の属する連結成分と見做せ, このとき symplectic 形式 ω の primitive $t\alpha$ は W 上の tautological な 1-形式 β に他ならない.

従って symplectic 多様体上の Hamilton ベクトル場の閉軌道の存在・個数の評価を与える Arnol'd 予想の接触多様体 version = Weinstein 予想が自然に問題となる (8 節). Arnol'd 予想については [FO], [F], [O2] を, Weinstein 予想については先ず本巻 Part II [O1] を, 更には [L], [W1] 等も参照せよ.

予想 0.2.10 (Weinstein 予想) 閉接触多様体 (M, α) の Reeb ベクトル場 X_α は必ず閉軌道を持つ.

以下本稿では特別に断らない限り, 有向多様体上の超平面場として向きの付いた接触構造だけを扱うことにする.

0.3 接触構造の基本例

幾つかの, 重要な接触構造の例を見てみよう. ここに紹介する 3 次元多様体上の接触構造は総て 'fillable' 若しくは 'tight' と呼ばれる良い性質を持つ. これらの概念については 2 節及び 3 節において説明する.

例 0.3.1 (最も基本的な例) \mathbb{C}^n の標準的な計量による単位球面 S^{2n-1} 上には, Hopf fibration $S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ のファイバーに垂直な超平面場として標準的接触構造 $(S^{2n-1}, \xi_0 = \ker \alpha_0)$, $\alpha_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i dy_i - y_i dx_i$ が定義される. 但し勿論標準座標を $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ ($i = 1, \dots, n$) としている. これが接触構造となることは,

$$\alpha_0 \wedge (d\alpha_0)^{n-1} = \frac{(n-1)!}{2} \iota_R dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

(ここで, R は \mathbb{C}^n の拡大を引き起こす半径方向のベクトル場 $R = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ を表す) により直ぐ分かる¹¹. この接触構造は標準的 symplectic 構造 $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ (の primitive $\lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i dy_i - y_i dx_i$) の射影化と考えられ¹², 標

¹¹ここで実は更に $\frac{1}{2} \iota_R \omega_0 = \alpha_0$ となっていること, 及び, $\sqrt{-1}R$ が Reeb ベクトル場 X_{α_0} に一致していることにも注意せよ. その意味は 0.3.6 と 3 節で説明する.

¹² \mathbb{C}^n の拡大を引き起こす半径方向のベクトル場 R は $\ker \lambda_0$ に含まれることに注意.

標準的接触構造と呼ばれる。Hopf fibration の各ファイバーは Reeb ベクトル場の積分曲線となっている。

標準的接触構造 ξ_0 を定義する接触形式は総て α_0 の関数倍であるが、それらは以下の様に、やはり λ_0 の制限として得ることができる。

$\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ の点を極座標により $(p, r) \in S^{2n-1} \times \mathbb{R}_+$ と表し、 $(2n-1)$ 次元球面 S^{2n-1} の星状埋め込み $\varphi: S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ を $\varphi(p) = (p, f(p))$ (但し、 $f(p) > 0$) とおくと、接触 1-形式 $\varphi^*\lambda_0 = f^2\alpha_0$ を得る。3次元球面上の(2節で説明する) tight と呼ばれるクラスの接触構造を定義する接触形式は、Eliashberg の定理 6.2.1 により、本質的に以上で尽くされることが分かる。

また、 S^{2n-1} 上の標準的接触構造から 1 点を除いたものは、 \mathbb{R}^{2n-1} 上の標準的接触構造 $\ker \alpha_1$ (または $\ker \alpha_2$) に同型である。確かめられよ。

例 0.3.2 (古典力学的な例) 任意の n 次元多様体 V の余接束 $W = T^*V$ 上の標準的 symplectic 構造 $\omega_0 = dp \wedge dq$ は標準的な primitive $\alpha_0 = pdq$ を持つ ($\omega_0 = d\alpha_0$)。ここで $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ は多様体 V の局所座標、 $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ は \mathbf{q} により定まる余接空間の線形座標である。 V の (W のではない!) 局所座標による ω_0 と α_0 のこの定義は、良く知られているように、局所座標の取り方に依らない。このとき、 V に Riemann 計量を与え、単位余接球面束 $M = S^{n-1}(T^*V)$ に α_0 を制限すると M 上に **Liouville 1-形式** と呼ばれる接触形式が得られる。

ここで Riemann 計量により単位接球面束と単位余接球面束を同一視しておけば、Liouville 1-形式に付随する Reeb ベクトル場 X が生成する流れ ϕ_t は Riemann 多様体 V の測地流に他ならない (読者の演習問題)。又、その軌道はポテンシャルが無い場合の V 上の質点の古典力学の運動方程式の解と言ってもよい。従ってこの場合の Weinstein 予想は閉 Riemann 多様体上の閉測地線の存在を意味する¹³。

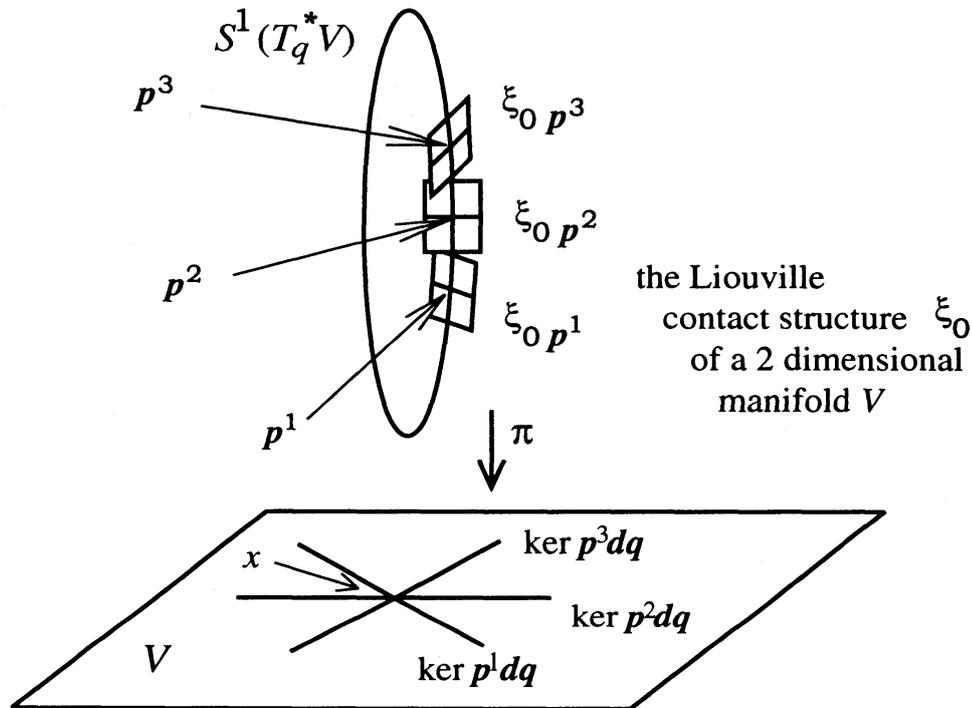
Liouville 1-形式と測地流は V の Riemann 計量に強く依存するが、**Liouville 接触構造** ξ_0 は V のみで定まる。単位余接球面 $S^{n-1}(T_q^*V)$ を余接空間の射影化 $(T_q^*V \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+$ と見做せば、点 $q \in V$ のファイバーの各点 $p \in M$ に於いて $\xi_{0p} = d\pi^{-1}(\ker[p: T_q^*V \rightarrow \mathbb{R}])$ となるので、Liouville 接触構造 ξ_0 は V のみで定まる。ここで π は射影的余接球面束の射影、 $d\pi$ はその微分写像 $T_p S^{n-1}(T^*V) \rightarrow T_q V$ を表す。

各ファイバーは Legendre 部分多様体であるが、一般の Legendre 部分多様体、及び Reeb ベクトル場 (=測地流) でそれを流して得られる族の V への射影は wave

¹³Lyusternik-Fet [LF] により、任意の閉 Riemann 多様体上に非自明な閉測地線が少なくとも一本は存在することが知られている

front (波面) と呼ばれる. Front が許容する特異点は幾何学的な特異点理論に於いて重要で興味深い研究対象である. [II] を参照せよ.

図 0.3.3



Front の重要な例として次のようなものがある. V の勝手な部分多様体 V_1 に対し, 単位余接球面束 $S^{n-1}(T^*V)$ の部分多様体 $CN(V_1)$ を

$$CN(V_1) = \{p \in S^{n-1}(T_q^*V); q \in V_1, T_q^*V_1 \subset \ker p\}$$

により定義する. $CN(V_1)$ は Legendre 部分多様体になることが容易に分かる. Reeb 流でこれを時間 t 流して V へ射影したものは V_1 からの距離が t の点の集合を含む.

例 0.3.4 (1 階 (偏) 微分方程式)

$(n - 1)$ 次元多様体 N 上の微分可能な関数の 1-jet の空間 $M' = J^1(N; \mathbb{R})$ にも tautological な接触構造 ξ_1 が存在する. つまり, N の局所座標を (x_2, \dots, x_n) , 関数の値を y , 偏微分係数を $p_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$ とおけば, 自然な接触 1-形式 $\alpha_1 = dy - \sum_{2 \leq i \leq n} p_i dx_i$ が得られる. N 上の微分可能な関数 $y = f(x_2, \dots, x_n)$ は, N の M' への Legendre 埋め込みを $x \mapsto (x, f(x), df_x)$ により自然に与えている. 1 階の偏微分方程式 $F(x_2, \dots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}) = 0$ をこの空間 M' で調べるのは自然である. ここでは, 超曲面 $F(x_2, \dots, x_n, y, p_2, \dots, p_n) = 0$ 上に $\alpha_1 = 0$ で定義される超

平面場の積分多様体, 即ち, Legendre 部分多様体がもとの偏微分方程式の解を‘概ね’表す.

$q_1 = -y, q_i = x_i, p_1 = 1, p_i = p_i$ とおくことにより, この接触構造 (M', ξ_1) を例 0.3.2 の単位余接束 $M = S^{n-1}(T^*N \times \mathbb{R})$ 上の接触構造 (M, ξ_0) へ埋め込む (fibre 方向の compact 化) ことができるが, これは陰関数の立場をとることに相当し, 上で‘概ね’と言ったのはこのことに他ならない.

$N = \mathbb{R}, (M' = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, p)\}, \xi_1 = \ker[dy - pdx])$ の場合に次のような一見簡単そうな位相的な問題を考えてみる.

(1) (M', ξ_1) の単純 Legendre 曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t), p(t))$ であって, 次の3条件を満たすものを考える. $\gamma(0) = (0, 0, 0), \gamma(1) = (1, y(1), 0), 0 < t < 1$ のとき $p(t) > 0$. もし $x(t) = t$ ととれるならば, $y(1) > 0$ は明らかだが, そうでない場合にも3条件を満たしていれば $y(1) > 0$ が結論されるであろうか?

(2) $D = \{(x, y); 0 \leq x, y \leq 1\}$ の (M', ξ_1) への埋め込み F であって, 次の3条件を満たすものを考える. $F|_{\partial D} = (\text{Id}, p = 0)$, $\text{Int}D$ に於いては $p > 0$, F は常に ξ_1 に横断的. この条件の下では $F(D)$ と ξ_1 の交わりとして定まる $F(D)$ 上の1次元の葉層は単純で, $F(\partial D)$ 上の点 $(0, y_1, 0)$ から出た積分曲線は $F(D)$ の内部に留まることなく ∂D 上のある点 $(1, y_2, 0)$ にたどり着くことが容易に分かる¹⁴. このとき F を $F(x, y) = (x, y, p = f(x, y))$ の形に取れば, (1) と同様に $y_1 < y_2$ が結論されるが, そうでない場合も埋め込み F が3条件を満たしていれば $y_1 < y_2$ が結論されるであろうか?

(1) は γ が3条件を満たす単純 Legendre 曲線の中で $(x(t) = t, y \equiv 0, z \equiv 0)$ に isotopic ならば正しい. 従って (2) も正しいが, これらは高度に非自明な命題であって, 2節で紹介する, Legendre knot に対する Bennequin の不等式, 及び, 接触構造の tight 性の特別な表現となっている.

例 0.3.5 (量子力学的な例) $(2n-2)$ 次元 symplectic 多様体 (N, ω) の symplectic 形式 ω が整係数のコホモロジー類を定めるとき曲率形式が丁度 $2\pi\sqrt{-1}\omega$ となるような $U(1)$ -接続を許容する複素直線束 \mathcal{L} が (Gauge 群の作用を除いて一意的に) 存在する. これを (N, ω) の **前量子化** 又は **前量子束** という ([F] 参照). この接続形式を \mathcal{L} の単位円周束 M に制限すると接触多様体 (M, α) が得られる. 各ファイバー

¹⁴内部に留まるとすると, Poincaré-Bendixson の定理により周期軌道が特異点に集積することになるが, 今, F の横断性より特異点はない. 周期軌道が存在すれば Jordan 閉曲線の定理により $F(D)$ 内の円板を囲むことになるが, 円板の euler 標数 = 1 よりやはりその内部に特異点が存在することになり矛盾する.

は Reeb 流の閉軌道である. $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ 上の標準的 symplectic 構造 ω_0 に以上の操作を施せば例 0.3.1 を得る.

一般に \mathcal{L} の全空間から零切断を除いたものは (M, α) の symplectization (の \pm の end を逆にしたもの) に他ならないことを注意しておく.

$n = 2$ の場合は, 閉曲面 Σ 上の非自明な euler 類を持つ S^1 -束の至る所曲率の消えない S^1 -接続が決める水平分布が接触構造を与える. このとき接触構造の正負は euler 類の正負とは逆になる.

例 0.3.6 (多変数複素解析に於ける強擬凸性) 複素多様体 Ω 上に proper で下に有界な狭義多重劣調和関数 ϕ が存在するとき **Stein 多様体**¹⁵ であるといい, その正則値 a の sub-level set $W = \phi^{-1}((-\infty, a])$ は **強擬凸領域** (または **Grauert 領域**), その境界 $M = \partial W$ は **強擬凸境界**¹⁶ となる.

このとき $\lambda = -J^*d\phi$ が M 上の接触形式 $\alpha = \lambda|_M$ を与え, 接触構造 $\xi = \ker\alpha$ を得る. これは $\xi = TM \cap J(TM)$ としても同じである. 但し, ここで, J は Ω の接空間 $T_x\Omega$ を複素ベクトル空間と考えると $\sqrt{-1}$ 倍する automorphism, 即ち概複素構造である. ϕ の狭義多重劣調和性により $\omega = -d(J^*d\phi)$ が Kähler 構造を W に与え, 更に接触構造 ξ とは $\omega|_\xi > 0$ なる関係を持つことが分かるが, このことは 3.2 節 で詳説する.

$\Omega = \mathbb{C}^n$, $\phi(z_1, \dots, z_n) = 4^{-1} \sum_{1 \leq k \leq n} \|z_k\|^2$ として $\phi = 1$ とおけば例 0.3.1 を得る. より代数的な方法としては, $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ に埋め込んだ射影的代数多様体 V から射影超平面 $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$ (またはその管状近傍) を切りとると, その境界 $\partial(V \setminus \mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1})$ に上で述べた接触構造が得られる訳である.

特異点とも接触構造の関係は深い¹⁷. 複素曲面の孤立特異点を距離による ε -球面で切り取れば, 上記の様にして 3 次元接触構造を得る (7 節, [OO]). 例えば, \mathbb{C}^3 の原点に特異点を持つ超曲面 $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0\}$ と半径 ε の球面 S_ε^5 との交わりをとれば所謂 **Poincaré ホモロジー 3-球面** とその上の接触構造を得る. これは実際には S^3 上の標準的接触構造 ξ_0 を Lie 群 S^3 上の左不変超平面場と見たときに, 位数 120 のある完全部分群¹⁸ で左から割ってできるものに他ならない.

¹⁵Stein 多様体とは \mathbb{C}^N に正則かつ proper に埋め込まれる複素多様体であるといってもよい. $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ に埋め込まれた射影多様体を特異点がでないように $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ で切れば代数的な有限型の Stein 多様体を得る. 3.2 を見よ.

¹⁶関数 ϕ が境界の近傍だけで定義されている場合にも強擬凸境界という. 3.2 でより詳しく解説する.

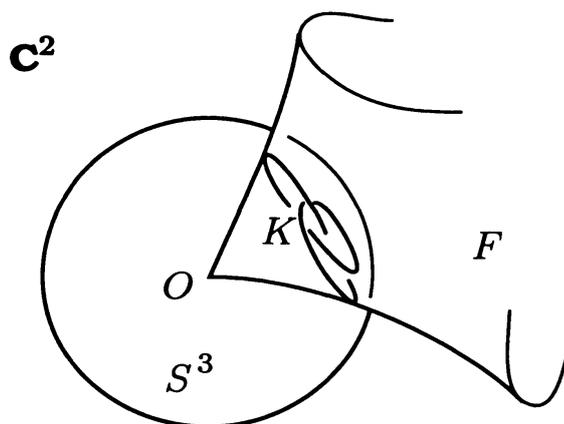
¹⁷Bennequin の接触構造の研究の原点はこの辺にあったと想像される.

¹⁸ \mathbb{R}^3 の正 12 面体 (又は正 20 面体としても同じ) を不変にする $SO(3) = \{\pm 1\} \setminus S^3$ の部分群 — 正 12 面体群と呼ばれる位数 60 の部分群 — の S^3 における逆像

より一般に, \mathbb{C}^3 の原点に特異点を持つ超曲面を定数項のない z_1, z_2, z_3 の多項式により定義することができる. 上と同様に S^5_ϵ との交わりをとれば接触多様体を得る. (高次元でも同じことが出来る. Brieskorn 多様体などと呼ばれている.) 複素曲面としてどのような特異点解消が存在するか, 等は特異点理論の中心的な問題であったが, symplectic 多様体としての特異点解消のトポロジーを研究することが最近可能になってきた. この様な特異点の中で, 有理 2 重点 (A, D, E 特異点と呼ばれることもある) の中に, 上の Poincaré 球面の場合 (E_8 型) を含む単純楕円特異点と呼ばれるクラスがある. これらに対する最近の結果を 7 節に紹介する.

また, 複素次元を一つ下げて, \mathbb{C}^2 内の原点に孤立特異点を持つ複素曲線 F を ϵ -球面で切り取れば, S^3 の標準的接触構造 (S^3, ξ_0) 上の横断的 knot $K = F \cap S^3$ を得る. 例えば直ぐ分かるように, $\{z_1^p + z_2^q = 0\}$ を考えると torus(p, q)-knot を横断的 knot として得る. 代数的 knot と呼ばれるものの代表例である.

図 0.3.7



強擬凸性は接触構造とその凸性の一つの重要な源である.

例 0.3.8 (3次元 Lie 群による例) 単連結非可換 3次元 Lie 群 G で co-compact な離散部分群 Γ を許容する (つまり unimodular な) ものは $S^3 = SU(2)$, $\widetilde{PSL}(2; \mathbb{R})$, $SL(2; \mathbb{Z})$ の双曲元による suspension で定義される可解 Lie 群 $Solv^{19}$, 3次元 Heisen-

¹⁹ $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ には $SL(2; \mathbb{R})$ が abel 群の構造を保って自然に作用するが, 一つ元 $A \in SL(2; \mathbb{R})$ を指定して, その作用で mapping torus M_A を作ると compact な 3次元多様体を得られる. その普遍被覆が自然な 3次元 Lie 群の構造を持つ. これらは A によらずに皆 solvable であるが, 特に A が双曲的, 即ち, $\text{tr}A > 2$ の場合に $Solv$ という名前を付ける. A は正の異なる固有値を二つ持つので, 固有方向へ座標変換すれば, 一方向へは拡大, 他方向へは縮小である. \mathbb{Z}^2 への A の作用により \mathbb{Z} の \mathbb{Z}^2 による拡大をとったものが Γ であり, $Solv$ 自身は suspension の方向に相当する \mathbb{R} を \mathbb{R}^2 で拡大したもの (半直積) である.

berg 冪零 Lie 群 Nil^{20} , 2次元 euclid 空間の向きを保つ等長変換のなす群 (2次元 euclid 運動群) の普遍被覆群 $\widetilde{Euc}(2)^{21}$ の5種類がある. G 上の左不変な接触構造は自然に $M = \Gamma \backslash G$ 上に誘導される. ここではその様な例を見てみる.

T^3 上の接触構造の族

$$\xi_k = \ker[\cos(kz)dx - \sin(kz)dy], \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

は, $\widetilde{Euc}(2)$ 上の左不変接触構造の商である. 図 5.2.7 を参照せよ. この接触構造の族はは 5 節, 6 節では何度も登場し, 重要な役割を果たす.

注意 0.3.9 1) Lie 群 (若しくは位相群) G が **unimodular** であるとは G 上の左不変測度 $dvol$ (scalar 倍を除いて一意的) が右不変にもなっていることである. 一般には $R_g^* dvol = \Delta(g) \cdot dvol$ により連続な準同型写像 $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}^\times$ が得られるが²², unimodular であるとはこの準同型 Δ が自明となることに他ならない. 従って G が perfect (特に半単純) なら unimodular である. また G が co-compact な離散部分群 Γ を許容する場合には, 商多様体 $M = \Gamma \backslash G$ 上での積分を考えれば, M には G が右から作用するので,

$$\Delta(g) \int_M dvol = \int_M R_g^* dvol = \int_M dvol$$

により $\Delta(g) \equiv 1$ となり unimodular であることが分かる.

2) n 次元 Lie 群が unimodular であるかどうかは, G の Lie 環 \mathfrak{g} の任意の元による無限小変換で $dvol \in \wedge^n \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}$ が不変かどうかを見ればよい. つまり,

$$\mathcal{L}_X(dvol) = d\iota_X dvol = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

と言い換えられる. 従って, $\iota_{(\cdot)} dvol : \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^{n-1} \mathfrak{g}^*$ が同型であることに注意すれば, \mathfrak{g} が unimodular であることは, Lie 環 \mathfrak{g} のコホモロジーにおいて $[dvol] \neq 0 \in H^n(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ となること, 若しくは $H^n(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) \neq 0$ (従って $\cong \mathbb{R}$) と同値である. 特に co-compact な離散部分群 Γ を許容する場合は, 同型写像 $\int_{\Gamma \backslash G} : H^n(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) = \wedge^n \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ を導く.

3) 3次元 Lie 環を分類することは極めて容易だから, 3次元の unimodular Lie

²⁰ Nil は $SL(2; \mathbb{R}) \ni A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ により suspension をとって得られる群であるが, $SL(3; \mathbb{R})$ の部分群 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ に他ならない.

²¹ Thurston の 8 種の幾何の中では空間としては euclid 空間 (の商), つまり abelian と見做される.

²² R_g は $g \in G$ による右移動を表す. $\Delta(g)$ は G 上の定数関数.

群が総て co-compact な離散部分群を許容することを, 直接分類により確かめることも容易である. また unimodular 性と 2) の注意により任意の $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$ に対して $\alpha \wedge d\beta = \beta \wedge d\alpha \in \wedge^3 \mathfrak{g}^*$ となることが分かる.

さて, 3次元 Lie 環 \mathfrak{g} の双対 $\mathfrak{g}^* = \{ \text{Lie 群 } G \text{ 上の左不変 1-形式} \}$ 上には非可積分性を計る双 1 次形式

$$\nu: \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge^3 \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge d\beta$$

が定義され, unimodular ならば対称形式となる. 又, ν が非自明であることと \mathfrak{g} が非可換であることは同値である²³. ν を \mathfrak{g}^* の各元 α に対する 2 次形式として見ると, $\nu(\alpha, \alpha) > 0$ [resp. < 0] ならば $\xi = \ker(\alpha)$ は正の [resp. 負の] 接触構造を, $\nu(\alpha, \alpha) = 0$ ならば $\xi = \ker(\alpha)$ は葉層構造を G 上に定義し, これらは左 G -不変であるから, 自然に $\Gamma \backslash G$ 上にも誘導される.

Lie 環 $\mathfrak{psl}(2; \mathbb{R})$ の場合に ν を計算してみよう. $\mathfrak{psl}(2; \mathbb{R})$ の基底として

$$h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \ell = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

をとり, h^*, ℓ^*, k^* を $\mathfrak{psl}(2; \mathbb{R})^*$ の双対基底とする. Lie 環の [,] 積

$$[k, h] = \ell, \quad [\ell, k] = h, \quad [h, \ell] = -k$$

より

$$dh^* = -\ell^* \wedge k^*, \quad d\ell^* = -k^* \wedge h^*, \quad dk^* = h^* \wedge \ell^*$$

が得られるので, $dvol = h^* \wedge \ell^* \wedge k^*$ により $\wedge^3 \mathfrak{psl}(2; \mathbb{R})^* \cong \mathbb{R}$ を正規化しておくとし,

$\nu(\cdot, \cdot)$	h^*	ℓ^*	k^*
h^*	-1	0	0
ℓ^*	0	-1	0
k^*	0	0	1

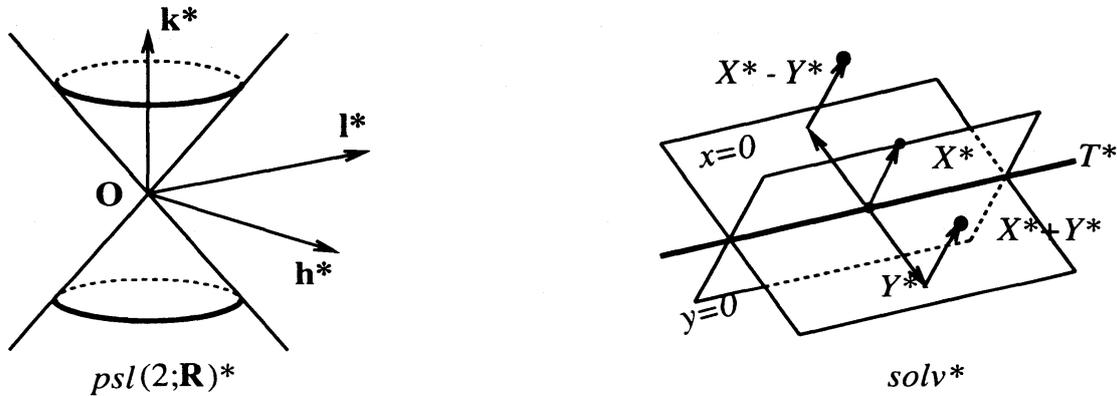
を得る. 従って $M = \Gamma \backslash \widetilde{PSL}(2; \mathbb{R})$ 上の左不変 1-形式 h^* や ℓ^* 等は負の接触構造を定め, k^* は正の接触構造を定める. 一方 $\ell^* - k^*$ は葉層構造を定めているが,

²³この対称形式 ν は Lie 環 \mathfrak{g} に定義される Killing 形式とは $\mathfrak{su}(2)$ 及び $\mathfrak{psl}(2; \mathbb{R})$ においては本質的に一致するが, 一般には異なる. type (p, q, n) (但し, $p, q = \max \dim[\text{正, 負定値部分空間}], n = \dim[\text{anihilator}]$) でその違いを見てみると, Killing 形式では $\mathfrak{soln}, \mathfrak{nil}$ に対して $(1, 0, 2), (0, 0, 3)$ であるのに対し, ν では各 $(1, 1, 1), (1, 0, 2)$ となる.

この葉層構造が負定曲率曲面の測地流に付随する Anosov 葉層構造と呼ばれるものである。ここで、測地流は h により生成されており、Anosov 流となっている (5 節参照)。

以下の図は $psl(2; \mathbb{R})$ と $solv$ の場合の二次形式 $\nu(\alpha, \alpha)$ の様子を表したもので、描かれている曲面は所謂 light cone (光錐) $\{\alpha \in \mathfrak{g}^*; \nu(\alpha, \alpha) = 0\}$ である。Lie 環 $solv$ は基底 X, Y, T により $[X, Y] = 0, [T, X] = X, [T, Y] = -Y$ として記述でき、双対基底を使って $solv^* = \{xX^* + yY^* + tT^*\}$ という座標を入れた。

図 0.3.10



上の古典力学的例 0.3.2 に於いて底空間を定曲率の球面 S^2 , トーラス T^2 , 双曲的曲面にとった場合、それぞれ $G = S^3, \widetilde{Euc}(2), \widetilde{PSL}(2; \mathbb{R})$ のモデルとなっている²⁴。特に 3 次元トーラス $T^3 = \mathbb{R}^3/2\pi\mathbb{Z}^3$ 上の $\widetilde{Euc}(2)$ のモデルは $\xi_k = \ker[\cos(kz)dx - \sin(kz)dy]$, ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) なる具体的表示を持つ。一方、同様の底空間の量子力学的例 0.3.5 も $G = S^3, Nil, \widetilde{PSL}(2; \mathbb{R})$ のモデル²⁴ を与えている。

図 0.3.10 にあるように、 $\widetilde{PSL}(2; \mathbb{R})$ と $Solv$ の場合に限り ν は不定値となり、null vector が定義する葉層構造と共に興味深い現象を引き起こす。このことについては 5 節で解説する。

²⁴ $\widetilde{PSL}(2; \mathbb{R})$ の場合、接触構造の性質は $Solv$ の場合よりも $\mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ の元のとりに強く依存する。5.1 節を参照。

1 接触トポロジーの開幕 (Bennequin) に至るまで

この節では、3次元接触構造の位相幾何学の本質的な始まりと考えられている Bennequin の学位論文 [B1] が登場する直前までを、接触構造の基礎的事項と共に振り返る。

1.1 接触構造の剛性

一般に、 $(2n-1)$ 次元多様体 M 上の超平面場 ξ (又は1-形式 α) が接触構造 (又は接触形式) であることは、 C^1 -位相で安定な条件であるが、更に以下の二つの定理の意味で rigid である。(勿論、symplectic 幾何においても同様の定理が成り立っている。[F], [O2], [MS1] 参照。)

定理 1.1.1 (Darboux 座標) $(2n-1)$ 次元接触多様体 (M, α) の任意の点 $p \in M$ は以下のような Darboux 座標近傍 $(U; x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, z)$ を持つ。

$$\alpha|_U = dz + \sum_{i=1}^{n-1} x_i dy_i, \quad p = (0, \dots, 0).$$

結論としては、勿論上以外のどの様な接触1-形式の表示を指定しても良い。

証明 は以下のようにすればよい。先ず、局所的に Reeb 流 ϕ_t による商空間に $d\alpha$ が定める symplectic 構造に対して Darboux 座標の定理を適用し、次に、考えている近傍を、その symplectic 多様体上の主 \mathbb{R} -束で曲率形式が丁度 $d\alpha$ になる接続形式 α を許容するものの全空間の開集合と見做せばよい²⁵。

3次元の場合にもう少し詳しく見てみる²⁶。

第1段階 点 p の十分小さい近傍上で Reeb ベクトル場 X_α の各流線を1点につぶした商空間に自然に symplectic 形式 $d\alpha$ が誘導される。今この商写像を π と表す。この2次元の商空間に $d\alpha = dx \wedge dy$ となる座標 (x, y) を導入することは極めて容易である²⁷。点 p の近傍上の関数 $x \circ \pi$ と $y \circ \pi$ を改めて x, y と書くことにする。

²⁵ここでは幾何的に見やすいことと、1次元低い方の symplectic 構造との関係を尊重して、 $(2n-2)$ 次元 symplectic 構造についての Darboux 座標の定理を用いて証明している。symplectization をとって $2n$ 次元の symplectic 構造に Darboux の定理を適用し、指定されている接触形式が symplectization 上に定める Hamiltonian を調べて接触形式に対する Darboux 座標を求める方法もある。[F] 等を参照せよ。

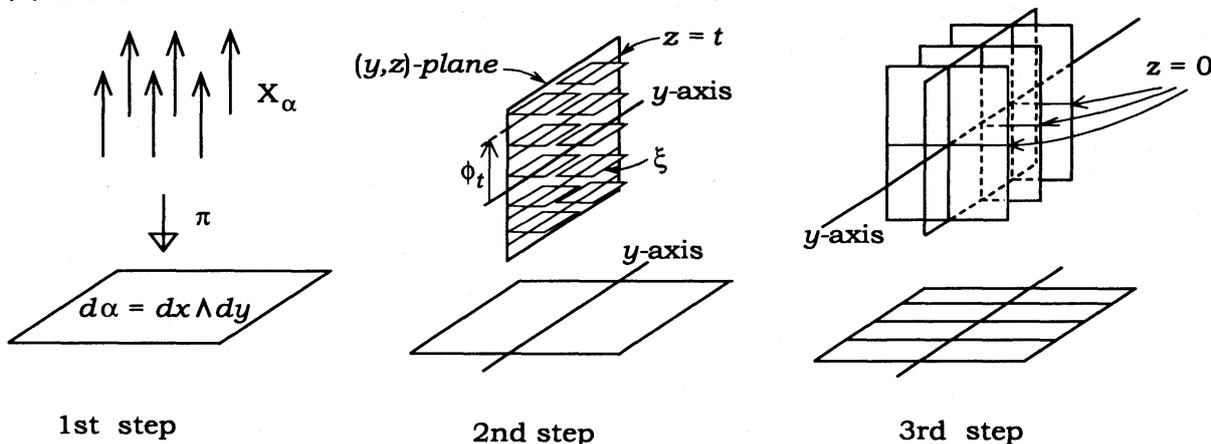
²⁶この証明を高次元化するには、“ y -軸”を“Lagrange/Legendre 部分多様体”と書き替えていけばよい。

²⁷読者自ら証明を試みられよ。

第2段階 $\{x = 0\}$ ($= (y, z)$ -平面となるべき集合) は Reeb 流 ϕ_t で保たれ, 接触平面場 $\xi = \ker \alpha$ と横断的である. そこで平面 $\{x = 0\}$ と ξ との交わりにより $\{x = 0\}$ 上に定まる1次元葉層の勝手な一本の葉を y -軸 $= \{x = z = 0\}$ とし, 平面 $\{x = 0\}$ 上での座標関数 z の値を Reeb 流 ϕ_t により定める. 即ち, $z|_{\phi_t(y\text{-軸})} = t$ とおく.

第3段階 (x, z) -平面に平行な面 $\{y = \text{一定}\}$ と ξ との交わりによりできる葉層の各葉を x -軸 と平行な軸 $= \{y = z = \text{一定}\}$ として座標関数 z を点 p の近傍上に拡張する. Reeb 流 ϕ_t が持つ対称性により, 初めに (x, y) -平面 $= \{z = 0\}$ だけを決めておき, 第2段階と同様に $z|_{\phi_t((x, y)\text{-平面})} = t$ としても同じである.

図 1.1.2



このようにして得られた局所座標 (x, y, z) に対し, Reeb ベクトル場 $X_\alpha = \frac{\partial}{\partial z}$, $\alpha(\frac{\partial}{\partial x}) = 0$ となることは, 構成と第3段階の注意から分かる. 従って, ある関数 f と g により $\alpha = g dz + f dy$ と表されるが, $\alpha(\frac{\partial}{\partial z}) = 1$ より $g \equiv 1$ が分かる. また, $\iota_{\frac{\partial}{\partial z}} d\alpha = 0$ より $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ となり, $d\alpha = \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy$ を得, 第1段階より $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ が従う. 構成より, (y, z) -平面 $= \{x = 0\}$ 上 $f = 0$ だから近傍全体で $f \equiv x$ となり, 結局 $\alpha = dz + x dy$ と表示される. Q.E.D

定理 1.1.3 (Gray, [Gr]) $(2n - 1)$ 次元閉多様体 M 上の接触構造の1径数族 ξ_t ($0 \leq t \leq 1$) は, ξ_t を与える接触1形式の1径数族 α_t を勝手にとれば,

$$\dot{\Phi}_t(p) = Y_t(\Phi_t(p)), \quad \alpha_t \wedge \dot{\alpha}_t \wedge (d\alpha_t)^{n-2} = \iota_{Y_t}(\alpha_t \wedge (d\alpha_t)^{n-1})$$

で定まる isotopy Φ_t で追跡される. つまり, $\xi_t = (\Phi_t)_* \xi_0$ が成立する. 但し, Φ_t と Y_t は α_t のとり方に依らない.

証明 この定理の仕組みは、接触構造の局所的な理解のために重要なので、特に 3 次元の場合を説明する。(高次元でも証明は本質的に同じである.)

原理的には、点 p に於いて接触平面 ξ_{t_p} を変化させたいとき、($T_p M$ 内の総ての方向ではなく) ξ_{t_p} 内の方向をグルッと見渡せば、望む変化が既に実現されている方向が一つだけ見つかる、ということなのである。

もう少しだけ正確に言うと、 \mathbb{R}^3 の原点を通る平面の族の無限変形 (運動) は、その平面内のある直線を軸とする回転になる。そこで、円柱座標により接触形式を $\alpha = dz + (r^2/2)d\theta$ (これは $dz + (xdy - ydx)/2$ と同一) と表し、原点に於けるこの接触平面の無限小変形をみる。無限小回転の軸の方向に半径に沿って進めば、その半径を軸として自然に平面場が振じれてゆく。これを引き戻すように isotopy Φ_t を定義すれば、望む変化が得られる筈である。実際、その条件を infinitesimal に $\dot{\Phi}_t = Y_t$ について書き下すと $\alpha_t \wedge \dot{\alpha}_t = \iota_{Y_t}(\alpha_t \wedge d\alpha_t)$ となる。

得られた isotopy Φ_t は満足すべき常微分方程式を満たしているので、初期値問題に対する解の一意性²⁸より $\xi_t = (\Phi_t)_*\xi_0$ が成立する。 **Q.E.D.**

このベクトル場 Y_t の定義は ξ_t のみに依り、接触形式 α_t の選び方には依らないことを注意しておく。変形理論風に云うと、無限小変形は $\xi^* \otimes TM/\xi$ の切断として捉えられる。同一視 $TM/\xi \cong \mathbb{R}$ を与えることは接触形式 α を指定することに他ならないが、このとき $d\alpha$ が ξ に symplectic 構造を与えるので、同型 $d\alpha: \xi^* \rightarrow \xi$ が得られる。更にこれより自然な同型 $\xi^* \otimes TM/\xi \rightarrow \xi$ が導かれ、無限小変形が接触平面場に沿うベクトル場に対応していることが分かる。

Darboux の定理の場合とは異なり、一般に接触形式自体の族は isotopy では追跡しようがない。例えば $\alpha_t = (\exp t)\alpha_0$ 等を考えれば直ぐ分かる。

これらの結果から分かるように、接触構造 (接触平面場) のみならず、接触形式も局所不変量を持たない。どこも局所的には同じである。従って大域的な研究こそが重要となる。

接触形式には Reeb 流が付随している。大域的には Reeb 流の力学系的性質が重要な不変量を接触形式に与える。特に各閉軌道の近傍はいろいろな不変量を持ち得る。

²⁸これは各点の接空間内で考える。そうでないと (例えば $\text{Diff}(M)$ とか $\mathcal{X}(M)$ 等で考えると) 常微分方程式が C^∞ -級で正規形に書かれていても Lipschitz 連続性が保証されず、一般には解の一意性を失う。

一方、接触構造はそのような不変量すら持ち得ないのだが、Riemann 計量を入れて多様体の位相を研究するように、接触形式を固定して接触構造の位相を調べることも重要な方法である。また、一つの接触構造に対して総ての接触形式に対する Reeb 流の (閉軌道などの) 情報をうまくまとめると、接触平面場の位相についての重要な情報が得られる (8 節)。

Gray の定理における議論を、逆に平面場に沿うベクトル場の生成する流れによるその平面場の変化として、以下の補題にまとめておく。これは、葉層構造との関連に於いて後に (4, 5 節) 重要になる。

補題 1.1.4²⁹ ξ を 3 次元多様体上の C^1 -級平面場、 Y を ξ に接する勝手な非特異ベクトル場とする。このとき、

- 1) ξ が Y (の生成する flow) で保たれることと ξ が完全積分可能であることは同値である。従って余次元 1 葉層構造を定める。 ξ が C^0 -級の場合、積分可能 (各点を通る解=積分曲面が存在) であるが、一般には解の一意性が成立しない!³⁰
- 2) Flow の後ろから flow line を一点に潰す様に見ると、flow に沿って流れるときに、平面場 ξ (平面上の直線素に見える) が正の方向 (時計周りとは逆) に (正の微分係数で) 回転していることと ξ が正の接触構造であることは同値であり、負の方向 (時計周り) に微分係数を伴って回転していることと ξ が負の接触構造であることは同値である。

証明 局所座標 $(x, y, z), 0 \leq x, y, z \leq 1$ を次の 2 条件を満たす様にとる。

$$(1) \frac{\partial}{\partial x} = Y.$$

(2) $x = 0$ に於いては ξ は (x, y) -平面に平行。

これは、Darboux の定理の証明のときのように議論すれば得られる。即ち、先ずベクトル場 Y に横断的な (y, z) -平面に相当する面を埋め込む。 ξ との交わりが定めるこの面上の 1 次元葉層の各葉が $\{x = 0, z = \text{constant}\}$ となるようにこの面上に座標関数 z を定める。この面上では座標関数 y は勝手にとる。 y と z は Y の積分曲線上一定になるように拡張する。 x は最初にとった (y, z) -平面上で $x = 0$ とし、 $\frac{\partial}{\partial x} = Y$ として拡張する。

すると、 ξ を定義する 1-形式を $\alpha = dz + f(x, y, z)dy$ (但し $f(0, y, z) = 0$) という形にとることが出来る。このとき “ ξ が Y で保たれる” という事は “ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ”

²⁹ここで突然微分可能性の低い平面場が現れたが、後に接触構造とは限らない平面場も同時に扱う必要が生じるからである。接触構造だと分かっていたら原理的には滑らかなものだけ扱えばよい。

³⁰これに関わる現象については、5.2 節を見よ。

(即ち $f \equiv 0$)” に他ならない. 一般には $\alpha \wedge d\alpha = \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz$ となるので, 結局 $\frac{\partial f}{\partial x}$ の符号 (正・負・零) により, ξ が正の接触構造であるか, 負の接触構造であるか, または葉層構造であるかが定まる. Q.E.D.

1.2 3次元多様体上の接触構造の存在定理

Martinet は Lickorish の定理 (任意の有向閉 3次元多様体は S^3 の絡み目に沿う Dehn 手術により得られる, [R] 参照) を利用して次を示した.

定理 1.2.1 (Martinet, [Ma]) 任意の有向閉 3次元多様体上に正の有向接触構造が存在する.

後に Thurston-Winkelnkemper [ThW] は open book 分解³¹による証明を見出した. Giroux はやはり open book 分解と同値な ‘ f -essential 曲面’³²によるより精密で美しい理論を展開した ([Gi1]). 今のところ Heegaard 分解から直接接触構造の存在を証明する方法は知られていない.

定理 1.2.2 (Lutz, [Lu2]) S^3 上の任意の平面場に対し, これと平面場としてホモトピックな正の接触構造が存在する.

注意 1.2.3 1) S^3 上の (有向) 平面場のホモトピー類は $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ (Hopf 不変量) により分類される.

2) 任意の有向閉 3次元多様体に対しても Lutz の定理と同様の事実が彼の学位論文 [Lu1] に於いて示されていたらしい.

これらの存在定理を示すために, Lutz twist 若しくは Lutz modification と呼ばれる接触構造から新しい?接触構造を作り出す操作を説明する.

定理 1.2.4 (S^1 -Darboux 座標) 接触構造 ξ に横断的な knot Γ に対し以下を満たす管状近傍 $U_\varepsilon(\Gamma)$ と円柱座標 (r, θ, z) が存在する.

$$(1) \quad U_\varepsilon(\Gamma) = \{(r, \theta, z); r^2 < \varepsilon, z \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\} \supset \Gamma = \{r = 0\}.$$

$$(2) \quad \xi|_{U_\varepsilon(\Gamma)} = \ker [\cos r^2 dz + \sin r^2 d\theta].$$

³¹閉曲面から円板を幾つか除いたものを F とし, ∂F 上で恒等写像となる F の微分同相 f の mapping torus M_f の境界の 2-tori を, 縦と横を逆にして solid tori で埋めると閉 3次元多様体が出来上がる. 逆に閉 3次元多様体のこの様な表示を **open book 分解** という. [R] 等を参照せよ.

³²これは open book 分解を Morse 関数の言葉で記述した概念である. 6 節に見るように [Gi1] は必読.

ここでは定理 1.1.1 の普通の Darboux 座標の場合とは異なり, 予め接触形式を指定することはできない.

証明 は $\{x = 0\}$ に相当する ‘壁’ を勝手に選んでしまうと, 定理 1.1.1 の場合と同様に出来る.

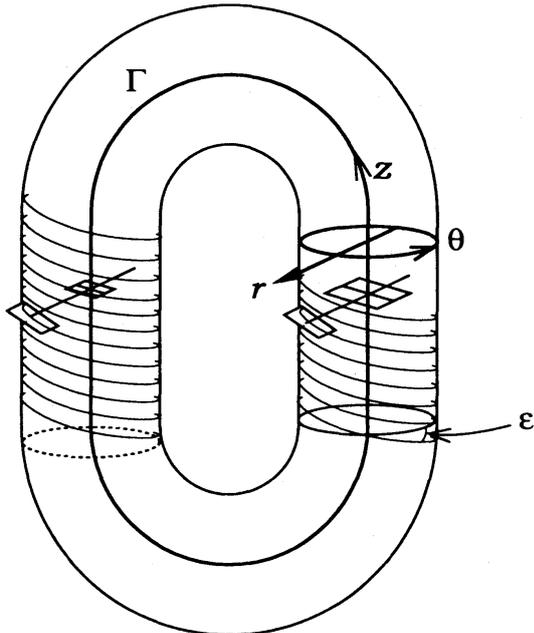
先ず Γ を $\{0\} \times S^1$ として含むように Annulus $A = (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$ を Γ の近傍に埋め込む. これが (y, z) -平面 $= \{x = 0\}$ になるべきものである. 次に A と ξ の交わりとして得られる A 上の 1次元葉層の各葉が $z|_A = \text{一定}$ となるように座標関数 $z \pmod{2\pi}$ を A 上で勝手に定める. 一方, 座標関数 y を $y|_\Gamma \equiv 0$ かつ dy と dz が一次独立になるようにとる. すると, $dy = 0$ で定まる葉層と ξ との交わりで定義される 1次元葉層は A に横断的になるので, この葉層の各葉上で一定になるように座標関数 z を Γ の近傍に拡張する.

こうしておくとき ξ は $\alpha = dz + fdy, f|_A \equiv 0$ という形の接触形式で定義されていることが分かる. そこで, $x = f$ と置おくと, $\alpha \wedge d\alpha > 0$ より $x, y, z,$ が独立な方向を向いた関数であることが分かる.

$\xi = \ker [dz + xdy]$ という表示を得てしまったが, 脚注 5 にある演習問題により $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + g(x, y))$ なる形の微分同相³³で座標変換すると $dz + xdy$ は $dz + \frac{1}{2}(xdy - ydx) = dz + \frac{1}{2}r^2 d\theta$ に書き換えられる. 円柱座標に移り, これを更に $\ker [\cos r^2 dz + \sin r^2 d\theta]$ となるように座標変換することは容易であろう. **Q.E.D.**

図 1.2.5 S^1 -Darboux Tube $U_\epsilon(\Gamma)$

S^1 -Darboux Tube $U_\epsilon(\Gamma)$ の境界の torus には, (θ, z) を座標としてみると傾き $-\epsilon = -r^2$ の線形葉層が現れる. 従って tube の半径 r を変えればこの特性葉層の傾きが変わる. 例えば傾きが有理数の場合, 葉層構造としては総ての葉が compact な自明な葉層となり, 座標を取り替えば水平な葉の集合に見える. 一般に, 特性葉層が線形であるように埋め込まれた T^2 を pre-Lagrangian トーラスという.



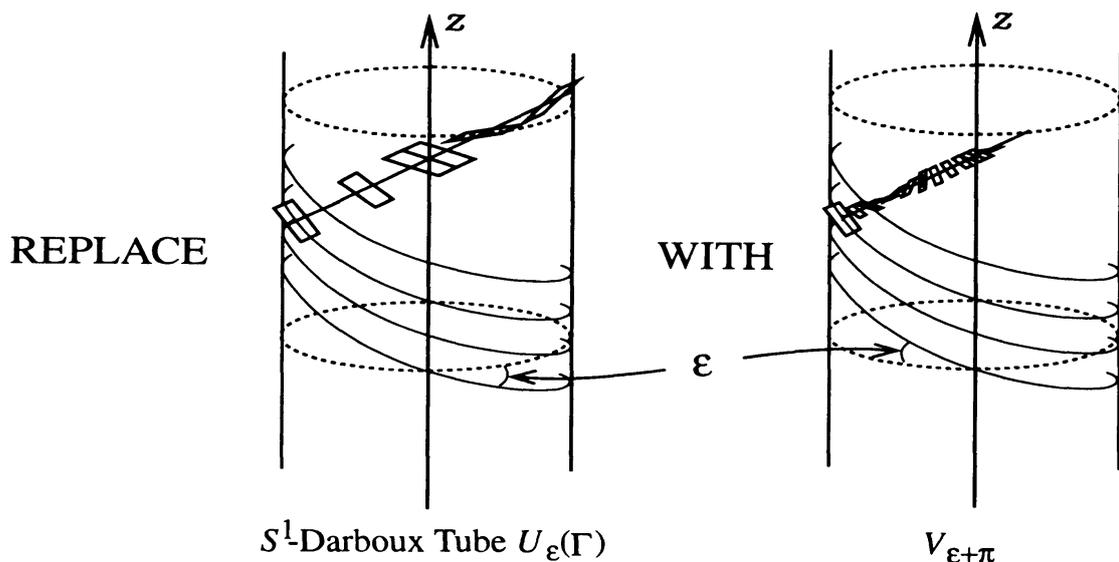
³³実は $g = -\frac{1}{2}xy$ と置けばよい.

さて, V_R を定理 1.2.4 のものと同じ表示の接触構造 $\eta = \ker [\cos r^2 dz + \sin r^2 d\theta]$ を持つ半径 r の solid torus (但しここで, $R = r^2$ とする) としよう. このとき境界 $\partial V_R \cong T^2$ に現われる特性葉層 $\eta \cap \partial V_R$ は (θ, z) -座標において傾き $-\tan R$ の線形葉層であるから, $R_1 \equiv R_2 \pmod{\pi}$ ならば ∂V_{R_1} と ∂V_{R_2} の特性葉層は同じ線形葉層となる. 定理 1.2.4 の U_R においても同じである.

注意 1.2.6 定義 0.2.1 に与えた接触構造 $\xi_1 = \ker [dz + r^2 d\theta]$ では, r を大きくしていくと平面場が半径 (r -軸) を軸として回転し限りなく垂直に近づくが, 上で与えた表示の接触構造 $\xi = \ker [\cos r^2 dz + \sin r^2 d\theta]$ は半径を軸として何回でも回転することに注意.

定義 1.2.7 (Lutz twist) 3次元多様体 M 上の接触構造 ξ に横断的な knot Γ に対し 1.2.4 にある管状近傍 $U_\varepsilon(\Gamma)$ を $V_{\varepsilon+2\pi}$ で置き換えると, 多様体 $M = (M \setminus U_\varepsilon(\Gamma)) \cup V_{\varepsilon+2\pi}$ を変えることなく新しい接触構造 $\xi_{FL}(\Gamma) = \xi|_{M \setminus U_\varepsilon} \cup \eta|_{V_{\varepsilon+2\pi}}$ を得る. この操作を **full Lutz twist** または **Lutz modification** という. $V_{\varepsilon+2\pi}$ の代わりに $V_{\varepsilon+\pi}$ で置き換えることも可能であるが, その場合は **half Lutz twist** と呼ぶ. 又, 本稿に於いては V_π (又は $V_{2\pi}$) を **Lutz's tube** と呼ぶ³⁴.

図 1.2.8 Half Lutz Twist along Γ



³⁴余次元 1 葉層の Reeb 成分とは異なり, 与えられた接触構造の 'この部分が Lutz's tube であり, こちらの部分はそうでない' というような明確さを持った概念ではない.

接触構造 ξ に横断的な knot Γ に沿う $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{Z})$ による Dehn 手術を施した多様体にも, 管状近傍 $U_\varepsilon(\Gamma)$ を V_R (但し $R = (a\varepsilon + b)/(c\varepsilon + d)$) により埋め直すことにより接触構造が与えられる.

Matinet の定理の証明 S^3 の標準的接触構造 (S^3, ξ_0) から出発して横断的な knot に沿う Dehn 手術を接触構造ごとに行えば, Lickorish の定理により任意の有向閉3次元多様体上に接触構造を構成することができそうである. つまり, 任意の絡み目が標準的接触構造 ξ_0 に対して横断的に配置できれば良いことになる. 実際, これには二つの方法が知られている. 古典的に有名な Alexander の定理 “ S^3 の任意の有向絡み目は Hopf fibration の一つの fibre の近くに向きも込めて isotope できる, すなわち, 任意の有向 link は閉 braid³⁵ として実現できる” ([R] 参照) を使えば直ぐであるが, より一般的な, 接触幾何で良く知られている以下の補題を適用してもよい. 以下の補題が成立するのは, まさに非可積分性による. **Q.E.D**

補題 1.2.9 1) 接触多様体の任意の有向 knot は Legendrian knot により isotopic に C^0 -近似される.

2) 任意の有向 Legendre 曲線は正および負の向きの横断的曲線により isotopic に C^1 -近似される.

証明 1) は次のようにすれば分かる. 先ず接触形式 α を勝手に指定して Reeb ベクトル場 X_α を得る. 任意の単純曲線は, 必要なら十分短い Legendre 曲線と X_α の軌道の和で C^0 -近似できる. 一方, 円柱座標 (r, θ, z) で表示する Darboux 座標近傍により $\alpha = dz + \frac{1}{2}r^2d\theta$, $X_\alpha = \frac{\partial}{\partial z}$, X_α の軌道 = z 軸 としておけば z 軸は Legendre 曲線 $(\varepsilon, -\frac{2}{\varepsilon}t, t)$ ($\varepsilon > 0$) により近似される. 図 0.2.5 の Legendre 曲線を参照せよ. 2) は補題 1.1.4 の証明より明らかであろう. 補題 2.2.5 の図も参照せよ. **Q.E.D**

Lutz twist を施しても多様体は変わらないが接触構造は本質的にはどの様になるのでしょうか? また, 与えられた接触多様体を Lutz twist してどのくらい沢山本当に異なる接触構造を作り出せるのでしょうか?

一般に half Lutz twist を施すと平面場としてのホモトピー類に変化が生じる. この変化は Lutz twist の軸の knot が表す 1次元ホモロジー類と Seifert 曲面の情報で記述できる ([Mi3]). では full Lutz twist の場合はどうか?

³⁵定義 2.3.1 または [R] を参照せよ.

命題 1.2.10 ³⁶ Full Lutz twist を施しても平面場としてのホモトピー類は変化しない.

では、接触構造として大域的に見て本当に構造は変わるのでしょうか？ 特に次の問題が自然に浮かび上がる.

問題 1.2.11 標準的接触構造 (S^3, ξ_0) のある横断的 knot に沿って full Lutz twist を施して得られる接触構造 (S^3, ξ_{0FL}) は (S^3, ξ_0) と同型か？

この問いに対して Bennequin が彼の有名な学位論文 [B1] で示した答えは **No!** である.

³⁶この命題は色々な方法で容易に証明できるので各自試みられよ.

2 3次元接触トポロジーの幕開け：Tight な接触構造と Bennequin の不等式

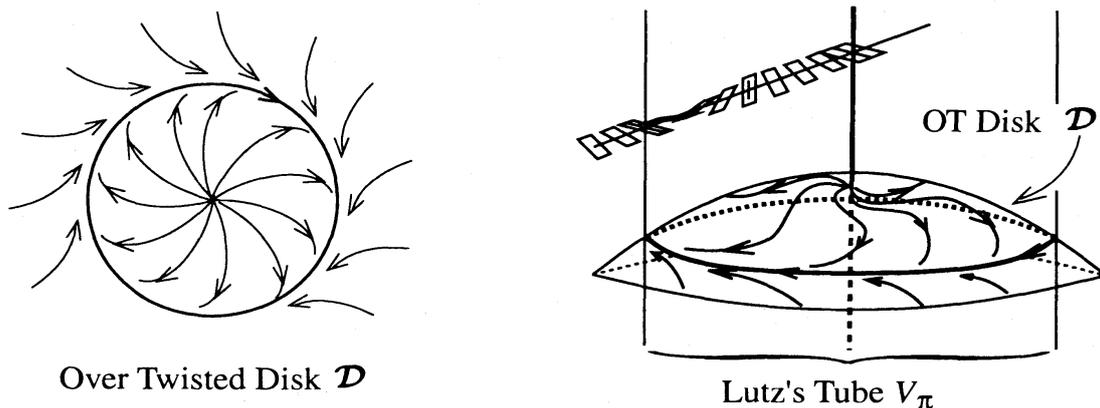
本節では Bennequin によって導入された **tight** という 3次元接触構造の中心的基礎概念と前節の最後に挙げた問題に対する Bennequin の解答の周辺を解説する. Bennequin の主定理の証明についてはかなり大まかな枠組みだけを 2.2 及び 2.3 に述べる.

2.1 Tight vs. Over Twisted

定義 2.1.1 ([B1]) 3次元多様体 M 上の接触構造 ξ が **over twisted** (略して **OT**) であるとは, $\xi_{\mathcal{D}}$ が周期軌道を持つような埋め込まれた 2-disk \mathcal{D} (以後, **OT-disk** と言う) が存在することであり, そうでないとき **tight** であるという. ここで $\xi_{\mathcal{D}}$ は $\xi \cap \mathcal{D}$ が \mathcal{D} 上に定める特異ベクトル場を表す³⁷.

注意 2.1.2 OT-disk は, 周期軌道の内側に指数 1 の特異点³⁸を一つだけ持つような標準的な形に取り替えることが出来る. これは, 定理 2.1.5 の直後のコメント, または, Elimination Lemma 2.2.8 から分かる.

図 2.1.3



³⁷本稿では今後も, 平面場 ξ と曲面 Σ の交わりが Σ 上に定義する特異ベクトル場を ξ_{Σ} と表す. 又, この特異ベクトル場により定義される特性葉層も ξ_{Σ} と表す.

³⁸ここで云う指数とはベクトル場の孤立特異点の index のことであり, generic な特異点では ± 1 のどちらかである. (Morse 指数ではない.) 指数 1 の場合は位相的に見ると, (ほぼ) 同心円状の特異点 (center) の場合と放射状 (focal) の特異点の場合があるが, 今は ξ が接触構造なので, 放射状のみである. 図 4.1.1 を参照せよ.

接触構造に Lutz twist を施すと Lutz's tube のほぼ水平な円板の境界に周期軌道が現われ³⁹, 必ず OT になる. Lutz twist という操作は, 余次元 1 葉層構造に於いて横断的ループに沿って Reeb 成分を挿入する 'turbulization' にそっくりの操作である³⁴. つまり tight のほうが無駄の無いよい構造だと思われる.

さて, Bennequin の主定理を一言で表現するならば次の様に述べられる⁴⁰.

定理 2.1.4 (Bennequin の主定理, [B1]) S^3 上の標準的接触構造 ξ_0 は tight である.

一方, OT 接触構造については, Eliashberg による次の驚くべき結果がある.

定理 2.1.5 (Eliashberg, [E1]⁴¹) 任意の有向閉 3次元多様体 M に対して包含写像

$$\{M \text{ 上の OT 接触平面場}\} \hookrightarrow \{M \text{ 上の平面場}\}$$

は弱ホモトピー同値である. 但し, 平面場の C^∞ -位相で考える⁴².

特に, 平面場のホモトピー分類問題は OT 接触構造のホモトピー分類問題に一致することになる. 一方, Gray の定理 1.1.3 は閉多様体上の接触構造のホモトピー分類問題は isotopy 分類問題と同じであると主張している. 従って, OT 接触構造の isotopy 分類問題は平面場のホモトピー分類, つまり $[M; S^2]$ の計算に帰着してしまう. 又, 1.2.10 と合わせれば, OT 接触構造 ξ の full Lutz twist ξ_{FL} は ξ と isotopic になってしまう⁴³. 従って, "OT 接触構造に対し Lutz twist の逆操作によりその Lutz 成分を除いていけば最終的には tight な構造に行き着くであろう" という考え方は成立せず, 次の重要な (未解決?) 問題が生じる. この問題に関する 90 年代の発展を 4 節において紹介する.

問題 2.1.6 任意の有向閉 3次元多様体上に tight かつ正の接触構造が存在するか?⁴⁴

若しくは, どのような多様体上に tight かつ正の接触構造が存在するか?

³⁹例えば曲面 $\{z = -x^2 - y^2 + \pi^2\}$ をとれば, 周期軌道 $\{z = 0, x^2 + y^2 = \pi^2\}$ を得る.

⁴⁰詳細な証明は紹介できないが, この定理がどれ程驚異的なものであるかを本稿において感じて頂きたい.

⁴¹[E1] からすぐに π_0 での全射以上のことを理解するのは容易ではないが, よく考えると π_0 での単射が成立することは確かめることができ, よって isotopy 分類に関する記述には十分である. Eliashberg と直接議論してみたところ, やはり全面的に正しいように思われる. そう思って読むと, [E1] は読み方が違って来る. これらの主張は 'OT 接触構造の集合は h -原理 に従う' と表現されることがある.

⁴²実際 $r \geq 1$ ならどの C^r -位相で考えても定理は成立する.

⁴³つまり ξ が OT なら既に何百万回も full Lutz twists したものと思える!

⁴⁴最近, 本田 公-John Etnyre が '裏向き' の Poincaré ホモロジー 3 球面には正の tight な接触構造は存在しない, という結果を announce している. どうやら否定的ということになってきた. [Ho], 及び 7.2 節も参照.

勿論, より進んで, 各有向閉 3 次元多様体上の tight かつ正の接触構造を分類する事, 更により強くは, tight かつ正の接触構造の空間の homotopy 型を決定する事が問題として提起されるが, 特殊な多様体以外ではまだまだ手の届く所にある問題ではなさそうだ (6 節参照).

2.2 Tight 性と Bennequin の不等式

定義 2.2.1 (Thurston-Bennequin 不変量) (S^3, ξ_0) の有向 Legendrian link (又はより一般に 3 次元接触多様体 (M, ξ) 上のホモロジー的に自明な有向 Legendrian link Γ) に対して ξ の法方向への Γ の shift を Γ^\perp と表す. このときこれらの linking

$$TB(\Gamma) = lk(\Gamma, \Gamma^\perp)$$

を Γ の **Thurston-Bennequin 不変量** と呼ぶ.

Bennequin は, (S^3, ξ_0) の Legendrian link の Thurston-Bennequin 不変量を Seifert 曲面の euler 標数で評価する所謂 **Legendrian knot** に対する **Bennequin の不等式 2.2.2** を示すことにより主定理を得た. その不等式は更に **横断的 knot** に対する **Bennequin の不等式 2.2.3** から得られる.

2.2.2 (Legendrian knot に対する Bennequin の不等式, [B1], [B2], [E5])

Seifert 曲面 Σ を持つ有向 Legendrian link Γ を一周するときの $\xi|_\Sigma$ の \mathbb{R}^2 -束としての自明化に対する $\dot{\Gamma}$ の回転数を $\mu(\Gamma)$ とするとき,

$$TB(\Gamma) \leq -\chi(\Sigma) \pm \mu(\Gamma).$$

2.2.3 (横断的 knot に対する Bennequin の不等式, [B1], [B2]) Seifert 曲面 Σ を持つ有向 link Γ が接触構造 ξ に正の向きに横断的であるときに⁴⁵, $\xi|_\Sigma$ の勝手な自明化の Γ への制限として Γ に framing X を与え, それによる Γ の shift を Γ^X とすると,

$$lk(\Gamma, \Gamma^X) \leq -\chi(\Sigma).$$

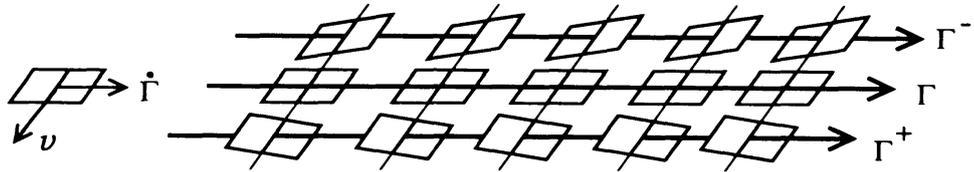
注意 2.2.4 Bennequin はこれらの不等式を (S^3, ξ_0) に対して証明した. 実は一般の接触多様体に対しては, これらの不等式が成立することは tight 性と同値であ

⁴⁵ Γ 全体が負の向きに横断的であっても全く同様である.

る (定理 2.2.6, 2.2.7). 本稿では一般の場合も ‘Bennequin の不等式’ と呼ぶが, 通常 (S^3, ξ_0) の Legendrian knot に対する不等式 2.2.2 を指すこともある.

一般の場合, 不等式 2.2.2 の右辺と不等式 2.2.3 の両辺は Seifert 曲面 Σ (のホモロジー類) に依っている. 本節及び次節の議論でも分かる通り, 実はこれらの不等式は Seifert 曲面に対する不等式と考えた方が自然かも知れない.

補題 2.2.5 1) 有向 Legendrian knot Γ に沿う接触平面場 ξ の自明化 $\langle v, \dot{\Gamma} \rangle$ の定める向きが ξ の向きに一致しているときに, Γ の $\pm v$ による shift を各々 Γ^\pm とすれば, それらは各々正・負の向きに ξ に横断的である (補題 1.2.9 参照).



2) 更に Γ が Seifert 曲面 Σ を持ち, X を Σ 上の ξ の自明化とすれば, 次が成り立つ.

$$TB(\Gamma) = lk(\Gamma, \Gamma^\perp) = lk(\Gamma, \Gamma^v) = lk(\Gamma^\pm, \Gamma^{\pm X}) \pm \mu(\Gamma) \quad (\text{複号同順}).$$

この補題と 2.2.3 から 2.2.2 が容易に得られる. 更に,

定理 2.2.6 (Bennequin の不等式 \Rightarrow Tight) 3次元接触多様体 (M, ξ) が不等式 2.2.2 を満たせば tight である.

証明 一般に OT-disk \mathcal{D} 上の $\xi_{\mathcal{D}}$ の極限軌道 Γ とは, 定義より Legendrian knot Γ で $TB(\Gamma) = 0$ となるものに他ならない. 従って ξ が OT ならば

$$0 = TB(\Gamma) \leq -\chi(\mathcal{D}) \pm \mu(\Gamma) = -1 \pm \mu(\Gamma)$$

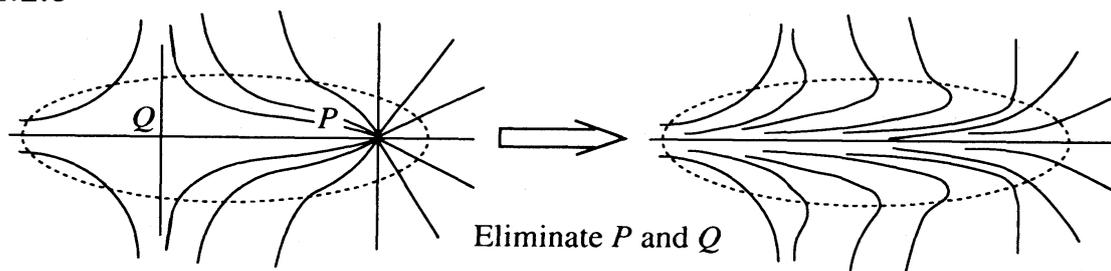
となり 2.2.2 を満たさない. 対偶により (M, ξ) が 2.2.2 を満たせば ξ の tight 性が従う. Q.E.D.

2.3 に略説する様に, Bennequin はこれらの不等式を (S^3, ξ_0) に対して示したのであった. 一方, 以下に述べる Elimination Lemma を使えば, 上の定理の逆が得られ, これらの不等式と tight 性とは同値である.

定理 2.2.7 (Tight \Rightarrow Bennequin の不等式, Eliashberg, [E5]) 3次元多様体 M 上の接触構造 ξ が tight ならば, (M, ξ) の任意の正 (又は負) の向き of 横断的な有向 link に対して 2.2.3 が (従って 2.2.2 も) 成り立つ.

定理 2.2.8 (Elimination Lemma, Eliashberg, Giroux, [E4], [Gi1])⁴⁶ 3次元接触多様体に埋め込まれた有向曲面 Σ と接触平面場 ξ との交わりによってできる Σ 上の特異ベクトル場 ξ_Σ に指数が 1 の非退化な特異点 P と指数が -1 の非退化な特異点 Q , 及びこの二点を結ぶ軌道 γ が存在したとする. P 及び Q に於ける Σ と ξ の接触の向きが一致していれば⁴⁷, γ の十分小さい近傍に於いて Σ の埋め込みを C^0 で小さい isotopy で近似することにより, 新しい特異点を生むことなく特異ベクトル場 ξ_Σ から二つの特異点 P と Q を解消することができる.

図 2.2.9



定理 2.2.7 の証明 Tight な接触多様体 (M, ξ) の中の正の向きに ξ に横断的な knot Γ が homological に自明であったとする. このとき, 第 3 節, 特に命題 3.4.5 で説明するように, Γ の Seifert 曲面 Σ に対して $d_- \leq 0$ が成立することと, Γ に対して Bennequin の不等式が成立することは同値である⁴⁸. 境界 $\Gamma = \partial\Sigma$ に於いて ξ_Σ が外向きとなるようにベクトル場としての向きを与えておけば, 正の楕円点は湧出点, 負の楕円点は吸引点となることに注意する.

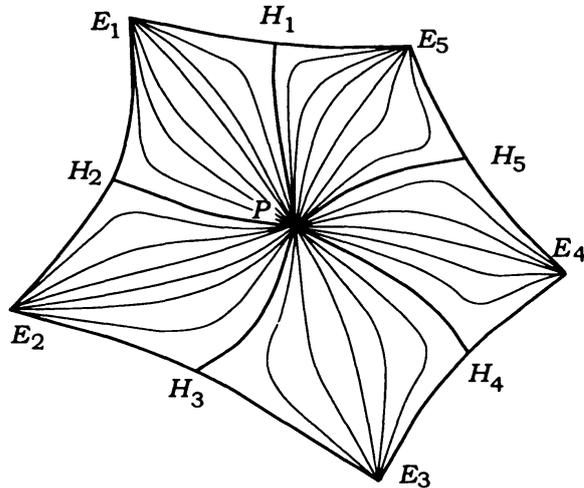
Σ を摂動して負の楕円点を除去することにより $d_-(\Sigma) \leq 0$ を示すのが, この証明の方針である. 先ず, Elimination Lemma により ξ_Σ の正の楕円点と正の双曲点の連結を総て解消しておく. 又, 簡単な議論により, 双曲的特異点の連結が存在しないように摂動できることが分かる.

⁴⁶この定理は 3次元接触トポロジーのあらゆる局面に於いて極めて有用かつ重要である.

⁴⁷ Σ と ξ を γ の近傍で適当に向き付けておく. このとき, 2点 P, Q に於いて $\xi_P = T_P\Sigma, \xi_Q = T_Q\Sigma$ が共に正の接触であるか, 又は, 共に負の接触である, という意味.

⁴⁸ d_\pm は ξ_Σ の特異点の数から決まる Σ の不変量. $d_- = [\text{負の楕円点の数}] - [\text{負の双曲点の数}]$ であり, 正・負は ξ と Σ の接触の向き. $\partial\Sigma = \Gamma$ が ξ に横断的なので, $(\xi \cap T\Sigma)|_\Gamma$ を境界条件として相対 euler 類 $e(\xi|_\Sigma) \in H^2(\Sigma, \partial\Sigma)$ が定まり, $lk(\Gamma, \Gamma^X) = -(e(\xi|_\Sigma), [\Sigma, \partial\Sigma])$ が定義よりすぐ分かる. これより $2d_- = lk(\Gamma, \Gamma^X) + \chi(\Sigma)$ が容易に得られる.

次に負の楕円点 P の吸引領域⁴⁹ B とその境界を調べる.



負の楕円点 P の吸引領域 B

E_1, \dots, E_5 は正の楕円点, H_1, \dots, H_5 は負の双曲点である.

M の中で単に B の閉包をとると, 境界の Legendrian loop は単純閉曲線ではないかもしれない. 例えば M の中では $\overline{E_2 H_3 E_3} = \overline{E_5 H_5 E_4}$ であってもよい. しかし, B の内側から完備化したと考えれば左図のように閉円板と同相な図を得る.

境界 ∂B が非特異な Legendrian loop であれば B の閉包は OT-disk となり矛盾する. 従って境界 ∂B は幾つかの特異点を持つ Legendrian loop となる. 吸引領域の境界であることから負の楕円点は ∂B には存在しない. 円板の euler 数 = 1 より ∂B の特異点が正の双曲点一つだけということはある得ない. 更に, 正の接触について既に Elimination Lemma を適用してあることから, 結局 ∂B には正の楕円点と負の双曲点が交互に現れることになる. 従って吸引領域の中心にある負の楕円点 P と ∂B 上の負の双曲点が eliminate される.

以上の P に対する操作を総ての負の楕円点に施せば, $d_-(\Sigma)$ を変えない小さい摂動で負の楕円点を除去でき, $d_-(\Sigma) \leq 0$ が従う. **Q.E.D.**

3.7 節及び 4 節でより詳しく述べるように, 横断的 knot に対する Bennequin の不等式 (又はその absolute version) は, 3次元多様体上の余次元 1 葉層構造に関する Thurston の不等式と瓜二つであり, 又, (一般化された) Thom 予想とも同じ表示を持つ. この辺りの事情を説明するのも本稿の中心的課題の一つである.

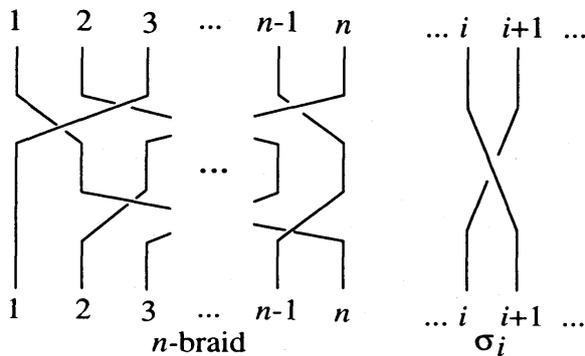
2.3 (S^3, ξ_0) に対する Bennequin の不等式の証明について

ここでは (S^3, ξ_0) に対する Bennequin の不等式の Bennequin 自身による証明の概略と議論の特徴を述べるが, 先ず初めに現れる基礎概念の説明をする. Bennequin

⁴⁹ P に吸引される ξ_Σ の軌道の和集合のことである. 向きに関する注意から, Σ の境界からは離れている. 位相的に 2次元開円板となることはほぼ自明であるが, 境界は多少複雑になりうる.

の不等式の証明の詳細については原論文 [B1]⁵⁰ 又は [Mi2] を見よ.

定義 2.3.1 (Braid) n -braid ($n \geq 1$) とは n 本の strings $\{1, 2, \dots, n\} \times [0, 1]$ の $D = (0, n+1) \times (-1, 1) \times [0, 1] \subset R^3$ への埋め込み b であって, $b(k, 0) = (k, 0, 0)$, $b(\{1, 2, \dots, n\} \times \{1\}) = \{(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)\}$, $b(*, t) = (*, *, t)$ を満たすものの isotopy 類のことである. 二つの n -braid があれば縦に積み重ねることにより新しい n -braid を得る. この操作により n -braid 全体の集合 B_n は自然に群をなす. これを n -braid 群 という.



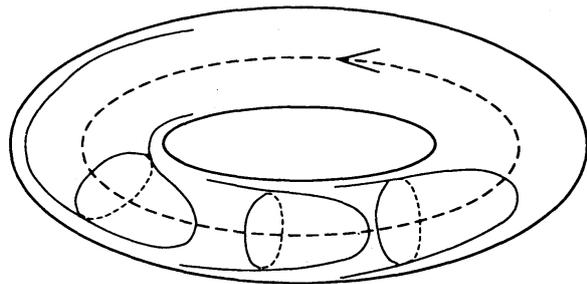
Braid 群

n -braid 群 B_n は空間 $X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in (D^2)^n; x_i \neq x_j (i \neq j)\}$ の基本群 $\pi_1(X_n)$ に他ならない.

B_n は図の σ_i ($i = 1, \dots, n-1$) で生成され, これらに $1 \in \mathbb{Z}$ を対応させることにより abel 化写像 $B_n \rightarrow \mathbb{Z} \cong B_n/[B_n, B_n]$ が得られる.

n -braid b の端点 $(k, 0, 0)$ と $(k, 0, 1)$ を平面 $\{x = k\}$ 内の $\text{Int } D$ に交わらない単純閉曲線をつなぐ ($k = 1, 2, \dots, n$) と link が得られるが, これが閉 braid \hat{b} である. より詳しいことは [R] 等を参照せよ.

定義 2.3.2 (Reeb 葉層) 右の図のように, solid torus $D^2 \times S^1$ 上の葉層構造で, 境界の T^2 が compact 葉となっているものを **Reeb 成分** という. また, Reeb 成分を二つ準備して, longitude と meridian が入れ替わるように境界の T^2 で張り合わせれば, S^3 上の葉層構造を得る. これを **Reeb 葉層** という.



本稿では, 二つの Reeb 成分の軸のなす Hopf link の linking が $+1$ となるものを \mathcal{F}_R , -1 となるものを \mathcal{F}_L と表すことにする.

⁵⁰この論文は本稿でも既に何度も引用されているが, 滋養の源と言えよう. 特異点理論や knot 理論などについても接触構造との関係に於いて色々なことが書かれていて興味深い, 最初は標準的接触構造の tight 性の証明の部分だけをうまく拾い出して読んでみるのがよいかもしれない. 是非参照されよ.

32 2. 3次元接触トポロジーの幕開け：Tight な接触構造と Bennequin の不等式

本節では、 S^3 の標準的接触構造 ξ_0 は Hopf fibration に直交するものとし、同時に Reeb 葉層 \mathcal{F}_R もその二つの Reeb 成分 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ の軸が各 Hopf fibre となるように配置されているとする。

また、閉 braid は必ず Reeb 葉層 \mathcal{F}_R の一方の Reeb 成分 \mathcal{R}_1 の軸のすぐ近くをほぼ同じ向きに回っているものとする。

定義 2.3.3 (Markov 曲面) 上に述べた様な閉 braid の Seifert 曲面 Σ であって、以下の条件を満たすものを **Markov 曲面** という。ここで、 Σ と Reeb 葉層 \mathcal{F}_R の交わりによって定義される Σ 上の 1次元特異葉層を Σ_R と表すことにする。

- (1) Σ は T^2 -葉とは横断的に交わる。
- (2) \mathcal{R}_1 上にある Σ_R の特異点は総て指数-1 の孤立特異点 (鞍点) である。
- (3) この様な二つの特異点をつなぐ Σ_R の葉は存在しない。
- (4) \mathcal{R}_2 上にある Σ_R の特異点は総て指数 1 の孤立特異点 (同心円状) である。

以上の言葉の準備の下に、Bennequin の不等式の証明の枠組みを見てみよう。横断的 knot に対する Bennequin の不等式に至る道は、大きく三つの段階に分けられる。

第1段階 任意の閉 braid に対し最小種数の Markov 曲面存在することを示す。

第2段階 最小種数の Markov 曲面を更に変形することにより、任意の閉 braid に対して 2.3.4 に示す形で Bennequin の不等式を示す。

第3段階 任意の正の向きに横断的な有向 link はその横断性を保ったままで閉 braid の位置 (1本の Hopf fibre の近く) に isotopy 変形される。

第2段階まではある意味では接触構造と一切関係が無い。特にそこまでは標準的接触構造を使わずに、その近似⁵¹として Reeb 葉層 \mathcal{F}_R を用い、閉 braid は \mathcal{F}_R の一方の Reeb 成分の中心 (近く) に在って \mathcal{F}_R に横断的な位置をとるものと考ええる。横断的 knot に対する Bennequin の不等式の設定に於いて **接触構造** を **葉層構造** に置き替えると、3次元多様体上の余次元 1 葉層構造に対する **Thurston の不等式** ([Th2]) として知られている不等式となる。第2段階で示される次の不等式はまさに Reeb 葉層に対する Thurston の不等式に他ならない⁵²。

定理 2.3.4 (閉 braid に対する Bennequin の不等式) $c: B_n \rightarrow \mathbb{Z} \cong B_n/[B_n, B_n]$ を n -braid 群 B_n の abel 化写像、 Σ を n -braid b の閉 braid \hat{b} の Seifert 曲面とす

⁵¹実際、 $\xi_0 \cap \mathcal{F}_R$ が定義するベクトル場の生成する流れにより ξ_0 を \mathcal{F}_R に収束させることができる。つまり、より正確に言うならば、標準的接触構造が Reeb 葉層を近似するのであって、葉層構造が接触構造を近似することは、理論的には勿論不可能である。4.4.2 参照。

⁵²Thurston の不等式は一般には Reeb 成分を持たない葉層に対して成立する。Reeb 葉層は勿論 Reeb 成分からできているが‘無駄のない’良い葉層なので不等式が成立したのだと考えられる。

れば,

$$|c(b)| \leq -\chi(\Sigma) + n.$$

Markov 曲面とは Reeb 葉層と特に良い関係の位置にある Seifert 曲面のことであるが, 第 1 段階では任意の閉 braid に対して最小種数 (つまり最大 euler 数) の Markov 曲面の存在が示される. この事実は knot 理論の基礎に色々な応用を持ち⁵³, 例えば, 二つの閉 braid が同型の link を与える事と Markov 変形で移りあう事と同値性等が容易に示せる. また strings が 3 本以下の braid に対しては特に強力であり, 上の不等式から直ちに trefoil knot が自明で無い事が分かる ([B1]).

2.3.4 は Markov 曲面をより良いものに取り替える事によって証明されるが, Elimination Lemma を使って 2.2.7 を示す方法はこれに酷似しており, $d_- = \chi(\Sigma) - c - n$ を示し特性数 d_- を扱うやり方は 3.7 節を先駆けている.

注意 2.3.5 ([CG], [FT], [Ta]) 最近では標準的接触構造 (S^3, ξ_0) , (R^3, ξ_0) 内の Legendrian knot については, 種数という knot の原始的 (古典的というべきか) な不変量に代わり所謂量子不変量 (Kauffman 多項式, Homfly 多項式等) と Thurston-Bennequin 不変量との関係も Chmutov-Goryunov, Fuchs-Tabachnikov 等により得られ始めている. それらも Bennequin の不等式と類似の形をしており, 位相的に自明な Legendrian knot に対しては Bennequin の不等式と同様に $TB \leq -1$ を導くが, 一般の knot type に対しては Bennequin の不等式より鋭い評価を与え得ることが分かっている⁵⁴. これらは Legendrian knot の平面への所謂 wave front 射影を用いた議論により得られ, Bennequin の証明に比べると組み合わせ的で短いとも言える. 量子不変量を幾何的により鮮明に捉える方向性としても今後の研究の発展が期待されている.

⁵³最小種数の Markov 曲面は後に **Bennequin 曲面**と呼ばれるようになり, Birman-Menasco 達の一連の braid による knot の研究の強い動機となった. [BM] 及びそこにある文献を参照せよ.

⁵⁴Bennequin の不等式が, 例えば knot type を指定したりすると, 一般には最良の評価ではないことを最初に指摘したのは, 神田 雄高 [K3] であろう.

3 Fillable な接触構造と Tight 性

この節では、多変数複素解析に於ける強擬凸性の symplectic 版に於ける拡張である fillability が接触構造の凸性、即ち tight 性を導く事を説明する。前節までとは異なり、議論は 4 次元多様体上で行なわれる。

3.1 Tight な接触構造

一般に接触構造が tight であることを示すのは大変に難しいが、現在大別して三通りの方法が知られている。第二の方法が filling であり本節の主題であるが、ここでは先ず前節で解説した Bennequin の仕事とそれに基づく第一の方法について復習する。第三の方法については、8 節を参照せよ。次の命題は tight 性の定義より自明である。

命題 3.1.1 1) (M, ξ) が tight なら部分集合 $N \subset M$ への制限 $(N, \xi|_N)$ も tight である。

2) (M, ξ) 上の被覆 $(\tilde{M}, \tilde{\xi})$ が tight なら (M, ξ) も tight である。

3) \mathbb{R}^3 上の標準的接触構造 $\xi_0 = \ker[\alpha_0 = dz + xdy]$ は⁵⁵ (S^3, ξ_0) から一点を除いたものに同型であり、Bennequin の主定理と 1) により tight である。

標準的接触構造 (\mathbb{R}^3, ξ_0) を与える接触 1-形式 $\alpha_0 = dz + xdy$ は、曲率形式 $= dx \wedge dy$ を与えるような主 \mathbb{R} -束 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ の接続形式であると考えられる。この時、接触平面場は接続が定める水平分布に他ならない。従って、例 0.3.5 又は例 0.3.8 に於ける量子力学的例、つまり曲面の前量子化の単位円周束は、 (\mathbb{R}^3, ξ_0) 又は (S^3, ξ_0) を普遍被覆として持つことになるので、上の命題より tight であることが分かる。

古典力学的例 0.3.2 の場合も、円周束の接続形式 β により Liouville 形式 α_0 を若干摂動して $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon\beta$ とすれば、円周束のファイバーに横断的な接触平面場とすることができる。しかも Gray の定理 1.1.3 により、 $0 \leq \varepsilon \ll 1$ ならば接触構造としては isotopic なものである。その様な接触構造は、 S^1 -又は \mathbb{R} -接続の水平分布の場合よりもう少し面倒ではあるが、やはり普遍被覆を (\mathbb{R}^3, ξ_0) 又は (S^3, ξ_0) に埋め込むことができるので tight である。

これらの S^1 -束上の例は、tight より強い、次に紹介する ‘fillable’ と呼ばれる性質を持つ。

⁵⁵この分野では ‘標準的’ なら何でも下付き添え字 ‘ $_0$ ’ で標記すれば良いという悪い癖がある。

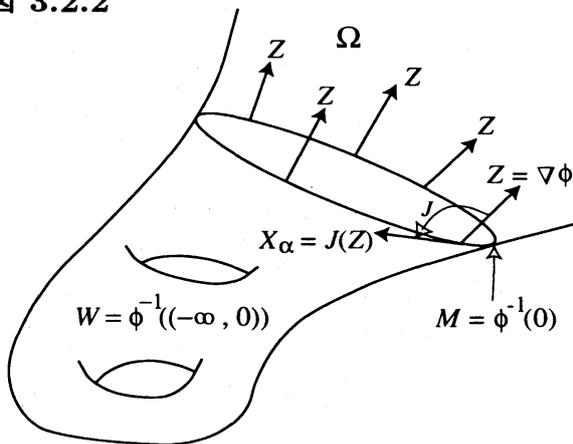
3.2 Fillable な接触構造

この第 3 節の目標は例 0.3.6 にある実 3 次元強擬凸境界の接触構造の tight 性を示すことにあるのだが、まずは、複素多様体の強擬凸境界の復習から始める。

定義 3.2.1 複素 n 次元複素多様体 Ω の滑らかな境界を持つ pre-compact な領域 W の境界 $M = \partial W$ の近傍に、正則値 0 の逆像が丁度 $M = \phi^{-1}(0)$ であって、 $\phi^{-1}(-\infty, 0) \subset W$ となるような狭義多重劣調和関数⁵⁶ ϕ が存在するとき、 W を **強擬凸領域** 又は [B2] に従い **Grauert 領域** といい、その境界 $M = \partial W$ を **強擬凸境界** という。特に、proper な狭義多重劣調和関数 ϕ が Ω 全体で定義されているときは Ω を **Stein 多様体** というが、Grauert 領域の定義に現れる狭義多重劣調和関数 ϕ が W 全体で定義されているときは、 $\text{Int}W$ も Stein 多様体となる。

ϕ の定義域には W の元来の概複素構造 J と両立する symplectic 構造 $\omega = -dJ^*d\phi$ が与えられる。つまり、 $g(u, v) = \omega(u, Jv)$ が J -不変な Riemann 計量を与える (このことと ϕ が狭義多重劣調和であることが全く同値であり、結局 Kähler 構造が与えられたことになる)。更に $\lambda = -J^*d\phi$ が M 上の接触形式 $\alpha = \lambda|_M$ を与える。この接触構造 ξ は概複素構造 J により $\xi = TM \cap J(TM)$ と表すこともできる。

図 3.2.2



Stein 多様体 Stein 多様体上の狭義多重劣調和関数 ϕ を C^2 -位相で小さく摂動すれば、下に有界かつ proper な Morse 関数とすることができる。

Stein 多様体は \mathbb{C}^N に proper かつ正則に埋め込まれる複素多様体といってもよい。その場合には原点からの距離の 2 乗という標準的な狭義多重劣調和関数がある。

この Morse 関数の臨界点の指数は、狭義多重劣調和であることより多様体の次元の半分以下であることがすぐ分かる。つまり、複素 n 次元の Stein 多様体は (実) n 次元以下の CW-複体のホモトピー型を持つ。

臨界点の指数に関するこの事実は、symplectic 多様体上の下にある条件 (C) を満たすベクトル場 Z の非退化な特異点に於ける安定多様体の次元としても、以下の様に一般化される。安定多様体上の勝手な点に於ける二つの接ベクトル X, Y に対して、 $t \rightarrow \infty$ のとき $e^{-t} \rightarrow 0, \exp(tZ)_*X \rightarrow 0, \exp(tZ)_*Y \rightarrow 0$ であることにより

$$\omega(X, Y) = e^{-t} \exp(tZ)_* \omega(X, Y) = e^{-t} \omega(\exp(tZ)_*X, \exp(tZ)_*Y) = 0$$

が得られ、安定多様体が ω について isotropic であることが分かる。

⁵⁶任意の局所正則曲線上 $\Delta\phi > 0$ となる関数 ϕ を狭義多重劣調和関数と呼ぶ。勿論 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ である。

定義 3.2.3 Grauert 領域 W をその境界の接触構造 (M, ξ) の **holomorphic filling** と呼び, このような Grauert 領域をもつ接触構造を **holomorphically fillable** であるという.

さてこのとき上に与えられた Riemann 計量による勾配ベクトル場 $Z = \nabla\phi$ は

3.2.4 条件 (C): $\mathcal{L}_Z\omega = \omega$, Z は ∂W で外向き

を満たすので $\iota_Z(\omega) = \lambda$, $d\lambda = \omega$ が従う. 例えば $(S^3, \xi_0) \subset \Omega = \mathbb{C}^2$ の場合,

$$\phi(z_1, z_2) = \frac{1}{4}(\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 - 1), \quad Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_i}),$$

$$\omega = \sum_{i=1,2} dx_i \wedge dy_i, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (x_i dy_i - y_i dx_i)$$

となっている. この状況は複素構造を忘れて symplectic 構造の言葉だけで述べられており, 条件 (C) を満たすベクトル場 Z が存在する境界付き compact symplectic 多様体 (W, ω) の境界 $M = \partial W$ には自然に境界としての M の向きに対して正の接触 1-形式 $\alpha = \lambda|_M$ が定まる.

定義 3.2.5 ([EG], [W1], [B2]) 条件 (C) を満たすベクトル場 Z が存在する境界付き compact symplectic 多様体 (W, ω) を接触構造 $(M = \partial W, \xi = \ker\alpha)$ の **strong symplectic filling**, 接触構造 ξ を **strongly symplectically fillable** であるといい, W が **接触型境界** (M, ξ) を持つともいう⁵⁷. Z は **Liouville ベクトル場**, $\lambda = \iota_Z(\omega)$ は **Liouville 1-形式** と呼ばれる. 開 symplectic 多様体 (W, ω) 上に条件 (C) を満たす完備なベクトル場 Z が存在し, かつ, 任意の軌道が交わるような compact 部分集合が存在するとき, ω は **完備凸 symplectic 構造**とも呼ばれる⁵⁸.

Strong symplectic filling の境界を取り去り, 境界の近傍に於ける symplectic 形式に対するベクトル場 Z の対称性を使って形式的に end を無限に伸ばせば完備凸 symplectic 構造になる (Stein 多様体の中の Grauert 領域は再び Stein となることを想起させる).

これらの filling に於いては, 境界に凸性があり境界には内側から (擬) 正則曲線が接触できないということ (J -convexity) が重要である. ところで, この J -convexity, 及びこれから必要となる擬正則曲線の理論の為には, 実は次の非常に弱い fillability で十分である.

⁵⁷この概念は当初 Weinstein により Weinstein 予想を定式化する為の条件として提案された.

⁵⁸これは Stein 多様体の概念の symplectic 版 (の弱いもの) と云える. Morse 関数も付いている強い方は **Weinstein 多様体** と呼ばれ, 殆ど Stein である ([E2], [EG]).

定義 3.2.6 ([E2], [E3], [EG]) 有向 $(2n - 1)$ 次元多様体 M 上の超平面場としての向きの付いた正の接触構造 ξ は各点の接触超平面に symplectic 構造の共形類 $\{f d\alpha; f > 0\}$ を定める (注意 0.2.4 3)). 境界付き compact symplectic 多様体 (W, ω) が存在して, 向きも込めて $M = \partial W$ であり, $\omega|_{\xi}$ 上に述べた symplectic 構造の共形類に属するとき, (M, ξ) は **weakly symplectically fillable** 又は簡単に **fillable** であると言ひ, (W, ω) を (M, ξ) の **symplectic filling** という.

3次元の場合は ξ が定める向きが ∂W の向きと一致し, $\omega|_{\xi} > 0$ が満たされることに他ならない.

Symplectic filling の J -convexity は次の小節で説明することにして, ここでは, その例と, 重要な帰結を述べる.

例 3.2.7 閉曲面 Σ 上の S^1 -束の全空間 M 上の接触構造 ξ で各ファイバーに横断的なものは全て fillable である. これは以下のようにして分かる.

先ず S^1 -束に付随する D^2 -束 $\pi' : W' \rightarrow \Sigma$ をとる. この D^2 -束の各ファイバーは半径 1 の円板であると考え, この中に半径 1/2 の D^2 -束 $\pi : W \rightarrow \Sigma$ をとって, これの境界が M であるとしよう. 次に底空間 Σ の symplectic 形式, 即ち面積形式 Ω をとっておく.

さて D^2 -束 π' の Thom 形式 ϕ をうまく選べば⁵⁹, π の任意のファイバー上に制限して面積形式となるようにできることに注意する. この時, 十分大きい正の定数 k をとれば $\omega = \phi + k\pi^*\Omega$ により, 与えられた接触構造に対する weak filling の構造が (W, ω) に入る.

命題 3.2.8 Strongly symplectically fillable ならば fillable である⁶⁰.

証明 接触形式は $\alpha = (\iota_Z \omega)|_M$ により与えられ, $d(\iota_Z \omega) = \mathcal{L}_Z \omega = \omega$ より $(d\alpha)|_{\xi} = \omega|_{\xi}$ である. あとは向きを確かめればよい. Q.E.D

⁵⁹ D^2 -束 $\pi' : W' \rightarrow \Sigma$ の Thom 同型 $H^*(\Sigma) \cong H^*(W') \rightarrow H^{*+2}(W', \partial W')$ は Thom 類 $[\phi] \in H^2(W', \partial W')$ との cup 積 (ここでは de Rham cohomology で考えているので微分形式の外積) により与えられる. D^2 -束 π' の Thom 形式 ϕ とは Thom 類 $[\phi]$ を代表する W' 上の閉 2-形式で, $\partial W'$ の近傍上で消滅しているものである. 各ファイバー上での積分が 1 になる閉形式として特徴付けられるが, うまく選べば W の各ファイバー上正の面積要素を与えるものをとることができる.

一般に部分多様体の環状近傍を D^q -束の全空間と考えて Thom 形式をとり, 環状近傍の外へは 0 として拡張すれば, その部分多様体の Poincaré 双対コホモロジー類を代表する微分形式を得る.

⁶⁰Strong symplectic filling W が Kähler のとき **Kähler filling** という. Eliashberg によると holomorphically fillable なら Kähler fillable なのだそうだが, 筆者には確認できていない.

逆は成り立たず, strong symplectic filling と弱い filling には差がある. Holomorphic filling とともに幾つかの違いが知られている. これらのうちの幾つかについては 4 節, 5 節で改めて説明することにし, ここでは次のことだけを注意しておく. 3.1 節及び上の例の議論により, T^3 上の接触構造 ξ_k (例 0.3.8) は $k \in \mathbb{N}$ に依らず総て fillable であることが容易に分かるが, この中で strongly symplectically fillable なものは Eliashberg [E6] により $k = 1$ の場合だけであることが知られている. 従って holomorphically fillable なのも $k = 1$ の場合だけである. さて, この節での最も重要な目標は次の定理である.

定理 3.2.9 (Gromov-Eliashberg, [G], [E3])⁶¹ Fillable なら tight である.

3.3 J -Convexity

ここでは, symplectic filling が持つ J -convexity という性質を述べる為の, 及び, 3.6, 3.7 節で必要になる最低限の擬正則曲線に関する基礎知識をまとめる. 擬正則曲線の一般論については [F], [FO], [O2] [MS2], [G] 等を参照せよ. 尚, 本稿では概複素構造が指定されていない, 漠然とした状況では, 擬正則曲線といい, 概複素構造 J が指定されている場合の擬正則曲線を J -正則曲線と呼ぶことにする.

擬正則曲線概念は Gromov により [G] に於いて導入され, 既にそこには奇跡と呼びたくなるような多くの応用が述べられている.

定義 3.3.1 (J -正則曲線) 概複素構造 J を持つ概複素多様体 (W, J) の J -正則曲線 u とは Riemann 面 (Σ, j) からの可微分写像であって, その微分 $du : T\Sigma \rightarrow TW$ が $J \circ du = du \circ j$ を満たすもののことである. ここで j は Riemann 面 Σ の複素構造からきまる概複素構造, 即ち, $T\Sigma$ 上の $\sqrt{-1}$ 倍写像である.

一般の概複素多様体に対して, 同様に擬正則関数なるものを考えようとする, もしこの様な関数が沢山あれば正則座標をなし, 概複素構造が可積分となり, 本当の複素構造になってしまう. 従って, 非可積分な概複素構造には擬正則関数はあまり存在しない. この様な事情により, 擬正則曲線概念が有効であるとは気付かれなかった.

擬正則曲線の理論が威力を発揮するためには, 一般に一つの曲線だけではなく, それらの moduli を見る必要がある⁶². 従って, エネルギーが有界である擬正則曲線

⁶¹この定理の逆については, 今のところ反例は知られていない.

⁶²Moduli の形を議論するのが一つの方向. または, 何か特別な (往々にして自明な) 理由によりある

の列がどのように発散・収束するかを詳しく知る必要がある。Symplectic 構造と擬正則曲線の理論の相性が良い理由がまさにここにある。

定義 3.3.2 (W, ω) を symplectic 多様体, J を W 上の概複素構造とする。

1) $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ が正值対称形式, 即ち Riemann 計量を与えるとき, J を ω と両立する (compatible な) 概複素構造であるという。

このとき ω と g は共に J -不変であることが従う。

2) 任意の 0 でない接ベクトル X に対して $\omega(X, JX) > 0$ が成立するとき, J を ω -tame な概複素構造であるという⁶³。

このとき $g(X, Y) = \frac{1}{2}(\omega(X, JY) + \omega(Y, JX))$ と置けば g は J -不変な Riemann 計量を与える。(但し ω が J -不変かどうかは分からない。)

Symplectic ベクトル空間上の概複素構造についても同様の用語を用いる。次の命題の 1) は良く知られた線形代数の問題である。

命題 3.3.3 1) Symplectic ベクトル空間 (V, ω) に対し $\{\omega$ と両立する概複素構造} 及び $\{\omega$ -tame な概複素構造} は共に空でない可縮な空間である。

2) 従って, symplectic 多様体 (W, ω) に対し, $\mathcal{J}_c(\omega) = \{\omega$ と両立する概複素構造}, $\mathcal{J}_t(\omega) = \{\omega$ -tame な概複素構造} と置けば, $\mathcal{J}_c(\omega) \subset \mathcal{J}_t(\omega)$ は共に空でない可縮な空間である⁶⁴。

命題 3.3.4 Symplectic 多様体 (W, ω) に対し ω -tame な概複素構造 J と上の命題にある Riemann 計量 g をとる。このとき, J -正則曲線 $u: \Sigma \rightarrow W$ のエネルギー $E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \|du\|^2 dvol_{\Sigma}$ は次で与えられる。

$$E(u) = \int_{\Sigma} u^* \omega.$$

これより, 例えばホモロジー的に自明な閉じた J -正則曲線は定値写像に限ることが分かる。本稿で実際に必要になるのは単位円板からの J -正則曲線であるが, $\mathbb{C}P^1$ からの J -正則曲線を少し観察してみよう。 W のホモロジー類 $A \in H_2(W; \mathbb{Z})$ を固定し, これに属する J -正則曲線の列 u_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) の極限に何が起こりうるか?

例えば $W = \mathbb{C}P^2 = \{[z_0 : z_1 : z_2]\}$, $A = 2 \cdot [\mathbb{C}P^1] \in H_2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$, $u_k([x : y]) = [kxy : x^2 : y^2] = [1 : k^{-1} \frac{x}{y} : k^{-1} \frac{y}{x}]$ とおくと, 極限は $\mathbb{C}P^1$ からの正則写像ではあり得

(擬) 正則曲線の存在を仮定し, moduli の次元や compact 性を調べてより有用な擬正則曲線の手掛かりを得るのである。そうしないと何も見つけようが無い。本節後半の議論の仕方を見よ。

⁶³勿論, 両立すれば ω -tame である。

⁶⁴従って特に, symplectic 構造を決めると接束の Chern 類が定まる。

ないが, $\mathbb{C}P^1$ の正則自己同型 $\alpha_k([x:y]) = [kx:y]$ と $\beta_k([x:y]) = [x:ky]$ を合成してみると, $u_k \circ \alpha_k([x:y]) = [y:x:k^{-2}x^{-1}y^2]$, $u_k \circ \beta_k([x:y]) = [x:k^{-2}y^{-1}x^2:y]$ となり, 各 1 点を除いて正則曲線 $[x:y] \mapsto [y:x:0]$ と $[x:y] \mapsto [x:0:y]$ に広義一様収束する⁶⁵. 正規化 α_k をとれば‘残り’の $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k \circ \beta_k$ は見えなくなるが, こちらを **bubble** という.

一般に単位円板や $\mathbb{C}P^1$ からのエネルギーを押さえられた擬正則曲線の列が内点で発散 (爆発) するとき, 失われたエネルギーはうまく rescaling (上のような正規化) により bubble として捉えることが出来る⁶⁶. この様な状況を **bubbling off** という.

Symplectic 多様体の場合, このエネルギーをホモロジーの言葉で制御できるので, bubbling off の総ての可能性を記述することが難しくない. 結論として, ホモロジー類を指定された moduli 空間はよりエネルギーの低いホモロジー類に属する擬正則曲線の和の moduli 空間でコンパクト化されることになる. この事実を **Gromov の compact 性** と呼ぶ.

注意 3.3.5 Symplectic 2-形式 ω が exact な 2-形式であるとき, symplectic 構造が exact であると云う. 例えば, 接触形式 α の symplectization では symplectic 形式は $\omega = d(t\alpha)$ という形で与えられている. Exact な symplectic 構造に於いては定値写像以外に閉じた Riemann 面からの擬正則曲線は存在し得ない. 上の命題よりエネルギーが 0 になるからである. 従って, 単位円板からの擬正則曲線の族に於いては内点で bubbling off が起こることはない.

命題 3.3.6 1) Symplectic filling (W, ω) には ξ を不変 (つまり $\xi = TM \cap J(TM)$) にし Reeb ベクトル場を W の内向きへ写す ω -tame な概複素構造 J が存在する⁶⁷.

2)(J -Convexity) この様な概複素構造 J に対し, 単位円板 $D \subset \mathbb{C}$ からの定値でない J -正則曲線 $u: D \rightarrow W$ は D の内点で M に接することはない.

証明 1) 先ず, 境界に於いて概複素構造 J を然るべく定義しておく. 次に, 命題 3.3.3 2) “ $\mathcal{J}_t(\omega)$ は可縮” の相対 version により J を全体に拡張できる.

2) ϕ を M の近傍上で定義された関数で $M = \partial W$ を定義するもの, つまり $\phi^{-1}(0) = M$, $\phi^{-1}((-\infty, 0)) \subset W$, $d\phi|_M \neq 0$ を満たすものとする. D の正則座標を $z = x + iy$, D 上の標準的概複素構造を j としておけば, J -正則曲線 $u: D \rightarrow W$

⁶⁵像としては, 2次曲線 $\{\frac{z_1}{z_0} \cdot \frac{z_2}{z_0} = k\}$ が二つの1次曲線 $\{z_2 = 0\}$, $\{z_1 = 0\}$ の和に収束した.

⁶⁶一般には一挙に2重3重の bubble が起こることもありもっと複雑である.

⁶⁷逆に概複素多様体 (W, J) のこの様な境界を J -convex 境界という.

が D の内点で M に接したとすると, その近傍で

$$\begin{aligned}\Delta(\phi \circ u)dx \wedge dy &= -dj^*d(\phi \circ u) = -dj^*u^*d\phi = -u^*dJ^*d\phi \\ &= f \cdot u^*\omega, \quad (f > 0)\end{aligned}$$

となる. ここで, u が J -正則曲線であることによりこの 2-形式は D 上非負である. つまり, $\phi \circ u$ が D 上の広義劣調和関数であることに他ならない. 一方, J -正則曲線 u が内点で M に接するということは関数 $\phi \circ u$ が最大値をとるということであり, 広義劣調和関数の最大値原理より定数関数となってしまふ. よって $\phi \circ u \equiv 0$ 即ち $u(D) \subset M = \partial W$ となる. $du(TD) \subset TM$ であるが, u は J -正則曲線であるから, $J(du(TD)) = du(TD) \subset TM$, つまり $du(TD) \subset TM \cap J(TM) = \xi$. 従って, $du \equiv 0$ が従い, u は定値写像となってしまふ. Q.E.D.

3.4 概複素曲面内の実曲面

定理 3.2.9 の証明に於いて決定的な役割を果たす Bishop の定理 3.5.1 を述べる為に, 実 4 次元概複素多様体 (以後概複素曲面という) に埋め込まれた実 2 次元有向曲面の複素点に関わる特性数について若干の準備をする.

$\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ に標準的な向き・計量・概複素構造 J_0 を固定しておく. 良く知られている様に \mathbb{R}^4 の実 2 次元有向線形部分空間のなす Grassmann 多様体 $\tilde{G}(4, 2)$ は自然に $S^2 \times S^2$ と微分同相であり, それは以下の様に概複素構造の組の空間として捉えることにより分かる⁶⁸.

$$SOJ_{\pm} = \{J \in SO(4; \mathbb{R}) \ ; \ J^2 = -1 \ , \ [J \text{ による } \mathbb{R}^4 \text{ の向き}] = \pm[\mathbb{R}^4 \text{ の標準的な向き}]\}$$

とおく. 例えば, $j_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき, $J_0 = \begin{pmatrix} j_0 & 0 \\ 0 & j_0 \end{pmatrix} \in SOJ_+$, $\begin{pmatrix} j_0 & 0 \\ 0 & -j_0 \end{pmatrix} \in SOJ_-$ である. 一つのベクトル (例えば $e_1 = {}^t(1, 0, 0, 0)$) の行き先でこの様な概複素構造は決定されるから SOJ_{\pm} は共に 2 次元球面 S^2 に微分同相である. 任意の有向平面 $V \in \tilde{G}(4, 2)$ と (向きを込めた) その直交補空間 V^{\perp} 上で共に正の向きに 90° の回転として概複素構造を定義すれば $J_V^+ \in SOJ_+$ を得, V^{\perp} 上だけでは負の向きの 90° 回転とすれば $J_V^- \in SOJ_-$ を得る. これにより射影 $\mathcal{J}^{\pm} : \tilde{G}(4, 2) \rightarrow SOJ_{\pm}$ が得られる. 直積写像 $\mathcal{J} = \mathcal{J}^+ \times \mathcal{J}^-$ が $\tilde{G}(4, 2)$ と $SOJ_+ \times SOJ_-$ の間に向き

⁶⁸これは $\wedge^2 \mathbb{R}^4$ への所謂 Plücker 埋め込みを経由して得られる自己双対部分空間 $\mathbb{R}^3 \cong \wedge_+ \subset \wedge^2 \mathbb{R}^4$ と反自己双対部分空間 \wedge_- 各々の球面への射影の積として捉えることもできる.

付きも込めて微分同相を与えることは例えば次のようにして容易に分かる. 先ず, $V_0 = \langle e_1, e_2 \rangle$ の近傍に於いて \mathcal{J} が局所微分同相であることを具体的計算で確かめる. 一方, $SO(4; \mathbb{R})$ が自然に $\tilde{G}(4, 2)$ と $SOJ_+ \times SOJ_-$ とに \mathcal{J} を通して同変に作用しているが, 特に $\tilde{G}(4, 2)$ への作用は推移的である. よって \mathcal{J} は閉多様体間の局所微分同相であり, 特に被覆写像である. $SOJ_+ \times SOJ_-$ が単連結なので結論が従う.

標準的複素構造 J_0 に関する複素直線の集合 $(\mathcal{J}^+)^{-1}(J_0)$ (= 普通の意味での複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$) を $\mathbb{C}P_+^1$, $-J_0$ に関する射影直線 $(\mathcal{J}^+)^{-1}(-J_0)$ を $\mathbb{C}P_-^1$ と表すことにすると, これらは各々 $\{\text{北極}\} \times S^2, \{\text{南極}\} \times S^2 \subset S^2 \times S^2$ と見做せる.

さて, 概複素曲面 (Hermitic 計量は勝手にとる) (W, J_0) 上には接束 TW に付随する $\tilde{G}(4, 2)$ -束 E , 及び $\mathbb{C}P_\pm^1 \subset \tilde{G}(4, 2)$ に対応する部分束 E_\pm が与えられる. W に埋め込まれた実有向曲面 Σ の各点 p に対してその接平面 $T_p\Sigma \in E_p$ を対応させる Gauss 写像を $g_\Sigma : \Sigma \rightarrow E|_\Sigma$ とする.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{C}P_+^1 & \hookrightarrow & E_+ & \xrightarrow{\quad} & E(TW) \\
 \mathbb{C}P_-^1 & \hookrightarrow & E_- & \xrightarrow{\quad} & E(TW) \\
 & & & \searrow^{g_\Sigma} & \downarrow \\
 & & \Sigma & \xrightarrow{\quad} & W
 \end{array}$$

定義 3.4.1 $g_\Sigma(p) \in E_+$ となる点 $p \in \Sigma$ を **正の複素点**, $g_\Sigma(p) \in E_-$ となる点 p を **負の複素点** という. 又, 正の [resp. 負の] 複素点 p に於いて, Gauss 写像 g_Σ が E_+ [resp. E_-] と正の向きに横断的に交わっているとき p を正の [resp. 負の] **楕円点**, E_+ [resp. E_-] と負の向きに横断的に交わっているとき正の [resp. 負の] **双曲点** という. Compact な曲面 Σ の埋め込みが generic ならば複素点は有限個であり, それらの数を以下の様に表す.

$$e_+ = \text{正の楕円点の数}, \quad h_+ = \text{正の双曲点の数}, \quad d_+ = e_+ - h_+,$$

$$e_- = \text{負の楕円点の数}, \quad h_- = \text{負の双曲点の数}, \quad d_- = e_- - h_-.$$

注意 3.4.2 E_\pm は E の proper な部分多様体であるから, Poincaré 双対により 2 次元 cohomology の元を定める⁶⁹. 従って 有向閉曲面 Σ に対しては上で定義した特性数 d_\pm は homological な交叉 $d_\pm = [g_\Sigma(\Sigma)] \cdot [E_\pm]$ に一致し, 埋め込みの genericity

⁶⁹ $\mathbb{C}P_\pm^1$ は $\tilde{G}(4, 2)$ に於いては同じ homology 類を定めるが, E_\pm は E に於いて c_1 の分だけ異なる類を定める.

に依らない, つまり generic な埋め込みへの摂動には依らずに定義できる⁷⁰.

Generic な埋め込みに対する複素点の離散性や楕円・双曲点の名前の由来は次の Bishop の標準形から分かる. 簡単の為, \mathbb{C}^2 内の実曲面 Σ についてのみ述べる. 証明は全く初等的で易しい ([B2] 等を見よ).

命題 3.4.3 (Bishop の標準形) 1) Σ の埋め込みが点 p の周りで generic ならば, \mathbb{C}^2 の正則な座標変換により, Σ は p の近傍に於いて次の様な関数 $w = f(z)$ のグラフとして与えられる. 但し, $(z = x + iy, w = u + iv)$ は \mathbb{C}^2 の標準座標, β は 0 でない実数, f は \mathbb{C} の原点の近傍で定義されているとする.

$$u = x^2 + \beta y^2 + o(x^2 + y^2), \quad v = o(x^2 + y^2), \quad p = (0, 0)$$

2) β が正の場合は楕円点であり, 負の場合は双曲点である.

d_{\pm} という特性数は, 上の注意により Gauss 写像の像が E に定める homology 類により記述されることが分かったが, 埋め込まれた曲面自体の homology 類 $[\Sigma]$ に依る記述もほぼ可能である. 次の Lai の公式がそれを与える. 証明は自明ではない.

定理 3.4.4 (Lai の公式, [La]) 概複素曲面 W に埋め込まれた有向閉曲面 Σ に対し⁷¹,

$$d_+ = \frac{1}{2}(\chi(\Sigma) + \nu(\Sigma) + c_1(\Sigma)), \quad d_- = \frac{1}{2}(\chi(\Sigma) + \nu(\Sigma) - c_1(\Sigma))$$

が成り立つ. 但し, $\chi(\Sigma)$ は曲面 Σ の Euler-Poincaré 標数 $= \langle e(T\Sigma), [\Sigma] \rangle$, $\nu(\Sigma) = \langle e(\Sigma \text{ の法束}), [\Sigma] \rangle = \Sigma$ の自己交叉数, $c_1(\Sigma) = \langle c_1(TW), [\Sigma] \rangle$, $e(\cdot)$ は euler 類を表す. $\nu(\Sigma)$ と $c_1(\Sigma)$ は homology 類 $[\Sigma] \in H_2(W)$ にのみ依る量である.

さて, 接触多様体の横断的 knot に対する Bennequin の不等式 2.2.3 を, symplectic filling (W, ω) を持つ接触構造 (M, ξ) の場合に考えてみる. M の中の ξ に正の向きに横断的な境界 $\Gamma = \partial\Sigma$ を持つ Seifert 曲面 Σ を W の中の曲面と考えて, d_{\pm} で記述して見よう. W には命題 3.3.6 2) を満たす概複素構造 J をとっておく. 従って, M 内の曲面の複素点とは, 接触平面場 ξ に接している点に他ならない. このとき容易に想像される様に, 複素点が以上の意味で楕円点又は双曲点であるということは特異ベクトル場 ξ_{Σ} の指数が 1 又は -1 の非退化特異点であることと同値である.
(読者自ら確かめられよ.)

⁷⁰ d_- は埋め込まれた曲面が擬正則曲線であることからどの程度遠いかを cohomological に測る量だといえる.

⁷¹ はめ込みでは Lai の公式は成立しない. Σ の向きを逆にすると d_+ と d_- が入れ替わる.

Seifert 曲面 Σ に対する Lai の公式により d_{\pm} を解釈したいが、曲面が閉じていないので、Lai の公式の右辺には境界条件が必要である⁷²。 M 上では ξ は複素ベクトル束 TW の部分複素直線束となっており、その法束は $[M \subset W \text{ の法束}] \oplus TM/\xi$ に同型であるから自明である。又これより $\nu(\Sigma) = 0$ が分かる。一方、 $\xi|_{\Gamma}$ と $T\Sigma|_{\Gamma}$ には $\xi \cap T\Sigma$ により自明化を与えることができる。境界 Γ 上でのこの自明化により $c_1(TW) = c_1(\xi)$ は Γ 上で消える相対 cohomology の元として定式化され、特性数が確定する。このとき以下が成り立つことは容易に分かる。

命題 3.4.5 1) 上の境界条件の下に、定理 3.4.4 と全く同じ形の Lai の公式が成り立つ。

2) Σ の境界 Γ が正の向きに ξ に横断的ならば $lk(\Gamma, \Gamma^X) = -c_1(\Sigma)$, 負の向きに横断的ならば $lk(\Gamma, \Gamma^X) = c_1(\Sigma)$ が成り立つ。ここで framing X は 2.2.3 と同一のものである。

3) 従って正の [resp. 負の] 向きに横断的な境界 Γ に対して Bennequin 不等式は $d_- \leq 0$ [resp. $d_+ \leq 0$] と同値である (注意 3.7.1 も参照せよ)。

3.5 Bishop の定理

Bishop は次の美しい事実を発見した。以後、この定理に述べられている正則円板の族を **Bishop 族** と呼ぶことにする。以下の図は 3次元の中での現象を想像させてしまうのでかえって分かり難いが、この定理の主張は極めて非自明である⁷³。

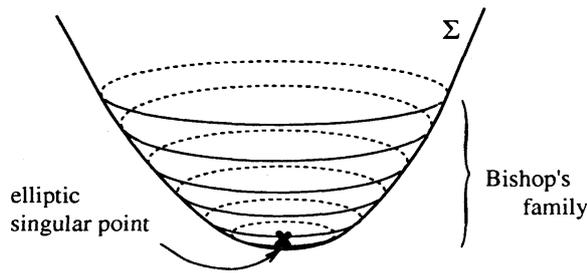
定理 3.5.1 (Bishop, [Bi]) \mathbb{C}^2 内の実曲面 Σ の楕円点 P の近傍に以下の条件を満たす正則円板 $u_t : D^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $0 \leq t < \varepsilon$ の 1 径数族が存在する。

- (1) u_0 は P への定値写像。
- (2) $0 < t < \varepsilon$ のとき $u_t : \overline{D^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ は単位円板 $\overline{D^2}$ の正則埋め込みである。
- (3) $\{u_t(\partial \overline{D^2})\}_t$ は Σ に於ける P の近傍上に P のみを特異点とする S^1 -葉層を定める。
- (4) u_t は t について連続, $0 < t < \varepsilon$ では t について C^1 -級である⁷⁴。

⁷²境界の ξ に対する横断性により境界上に複素点は無く, d_{\pm} の定義には問題が無い。

⁷³以下に紹介する Bishop の定理とその拡張について, 実曲面 Σ が実解析的な場合を Moser-Webster [MW] が巾級数の方法で扱っている。[B2] にもその解説がある。併せて参照されたし。

⁷⁴ 現在では Fredholm 理論と所謂 automatic regularity により C^∞ -級であることが分かっている。

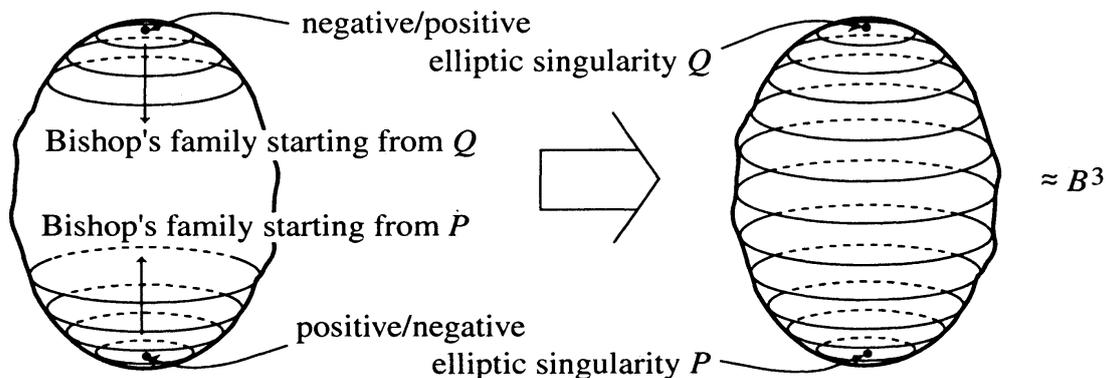


Bishop 族 Bishop の標準形 3.4.3 の虚数部分 $v = o(x^2 + y^2)$ が本当に 0 ならばこの定理は明らかだが, 一般には極めて非自明である. 正則円板の境界値の実部と虚部を入れ替える所謂 Hilbert 変換を使って存在を証明することが出来る.

この定理はその後 Bedford-Gaveau 及び Bedford-Klingenberg により以下の様に改良されていった.

定理 3.5.2 (Bedford-Gaveau, [BG]) \mathbb{C}^2 内の強擬凸領域の境界に埋め込まれた 2次元球面 $\Sigma \cong S^2$ が二つの楕円点 P, Q を持ち, 双曲点は持たないとする⁷⁵. このとき, P と Q 各々から始まる二つの Bishop 族は以下の条件が示す様に一つの Bishop 族 $u_t : D^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0 \leq t \leq 1$ を成す.

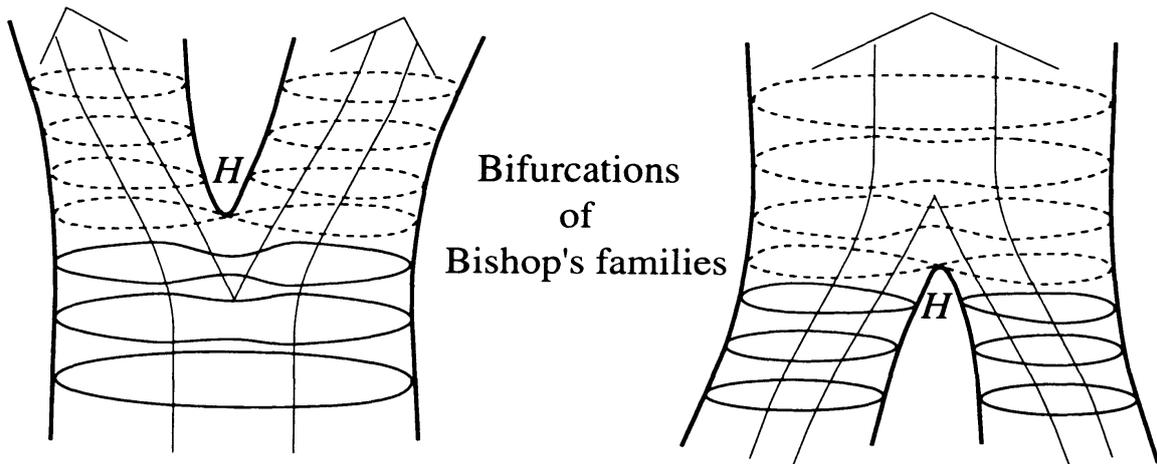
- (1) u_0 は P への, u_1 は Q への定値写像.
- (2) $0 < t < 1$ のとき $u_t : \overline{D^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ は単位円板 $\overline{D^2}$ の正則埋め込みである.
- (3) $\partial \overline{D^2}$ は Σ 上に P と Q を特異点とする S^1 -葉層を定める.
- (4) u_t は t について連続, $0 < t < 1$ では t について C^1 -級である⁷⁴.



定理 3.5.3 (Bedford-Klingenberg, [BK]) \mathbb{C}^2 内の強擬凸領域の境界に generic に埋め込まれた 2次元球面 $\Sigma \cong S^2$ の双曲点が総て 良い⁷⁶ 双曲点であったとする. このとき, Σ の各複素点を頂点とするある有向樹木 (可縮なグラフ) K を径数空間とする Bishop 族 $u_t : D^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, t \in K$ が存在して以下を満たす.

⁷⁵ このとき必然的に $e_{\pm} = 1$ となる.
⁷⁶ Bishop 標準形に於いて β が可算個のある特殊な値をとる場合に双曲点を 良い という. 応用上は我々の立場では問題無い.

- (1) 正の [*resp.* 負] の楕円点は K の端点であり, ある辺の始点 [*resp.* 終点] となっている. 又, 正の [*resp.* 負] の双曲点は 2 本の辺が 1 本の辺に合流する [*resp.* 1 本の辺が 2 本の辺に分岐する] 3 叉点となっている.
- (2) $t \in K$ が頂点でないとき $u_t : \overline{D^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ は単位円板 $\overline{D^2}$ の正則埋め込みである.
- (3) 楕円点 $t = P$ では u_P は P への定値写像であり, 双曲点に於いては Bishop 族の分岐が起こる.
- (4) $\partial \overline{D^2}$ は Σ 上に {複素点} を特異点集合とする横断的に向きの付いた S^1 -葉層 \mathcal{F} を定め, 楕円点・双曲点は各々楕円的・双曲的な特異点である. つまり, $M/\mathcal{F} \rightarrow K$ は自然に向きを保つ同相写像であり, 頂点以外の点の逆像は S^1 -葉である.
- (5) u_t は $t \in K$ について連続, $t \in K \setminus \{\text{頂点}\}$ では C^1 -級である.



これらの進展を簡単に説明する. Bedford-Gaveau は双曲点がいなければ Bishop 族が伸び続けることを示した. 二つの楕円点からの Bishop 族が出合ってきたら一致することは, 最大値原理及び鏡像原理から分かる. 後に略説する様に, 現在では '複素点がいなければ族が伸びる' ことは, 擬正則曲線のカテゴリーでも示せる. [E0] も参照せよ. Bedford-Klingenberg は S^2 の埋め込みが双曲点について, ある条件を満たす場合に, 双曲点において二つの Bishop 族が合流して一つの Bishop 族として進む, 又はその逆に分岐が起こることを示した.

結論として, これらの場合に Bishop 族の正則円板と複素点の合併は Σ が bound する Levi-平坦な 3次元球体 B^3 となる. 又, この 3次元球体が Σ の所謂 正則包を与えている訳で, これらの結果の関数論的意義は大きい.

3.6 Fillable \Rightarrow Tight : Gromov の証明

Bishop 族に関する以上の結果及び議論を概複素構造の擬正則曲線の場合に拡張して fillable な接触構造 (M, ξ) の symplectic filling (W, ω) に適用すると, 定理 3.2.9 を証明することができる. ここでは擬正則曲線とその moduli の理論を使うが, その一般論の基礎や議論の細部には触れることができない. それらについては [F], [FO], [O2] [MS2], [G] 等を参照のこと.

注意 3.6.1 肝心の楕円点からの Bishop 族の生成 (Bishop の定理) については, 概複素構造ではなく複素構造が必要である. 楕円点の近傍で概複素構造を可積分に変形しておく必要がある⁷⁷.

Σ を symplectic filling (W, ω) を持つ接触構造 (M, ξ) の中の, ξ に正の向きに横断的な境界 $\Gamma = \partial\Sigma$ を持つ Seifert 曲面とする. W は命題 3.3.6 2) を満たす概複素構造 J を持つと仮定しておく. また Σ は W への埋め込みとして generic であるとしてよい.

Σ の勝手な楕円点 P から始まる Bishop 族がどの程度伸びていくかを調べたい. その為に Σ の各複素点の W に於ける十分に小さい disk 近傍を W から除いたものを W' とする. 境界が Σ 上にあり, 境界の正則ホモトピー類及び全体のホモトピー類が上で指定した Bishop 族のものと一致するような W' に含まれる J -正則円板の moduli 空間を \mathcal{M}' とする. この擬正則曲線の moduli に関する必要事項を以下にまとめる.

命題 3.6.2 1)(Gromov の Compact 性) \mathcal{M}' について所謂 Gromov の compact 性が成立する. 即ち, その様な J -正則曲線の無限列は, W' の境界に近づくか, 又は bubbling off を込めて再びある J -正則曲線に収束する部分列を含む.

2)(次元) Moduli 空間 \mathcal{M}' (の形式的次元) は実 1 次元である.

3)(最大値原理) \mathcal{M}' に属する J -正則曲線の境界は $\xi \cap \Sigma$ に接することはない. \mathcal{M}' に属する J -正則曲線同士が接することはない. 又, Σ で \mathcal{M}' に属する J -正則曲線の境界同士が接することもない.

4)(Bubbling off) 実際には内点でも境界上でも bubbling off は起こらない.

5)(結論) 以上より, \mathcal{M}' は複素点に近づくときにのみ生ずる端点を持つ, 境界のある compact な実 1 次元多様体である.

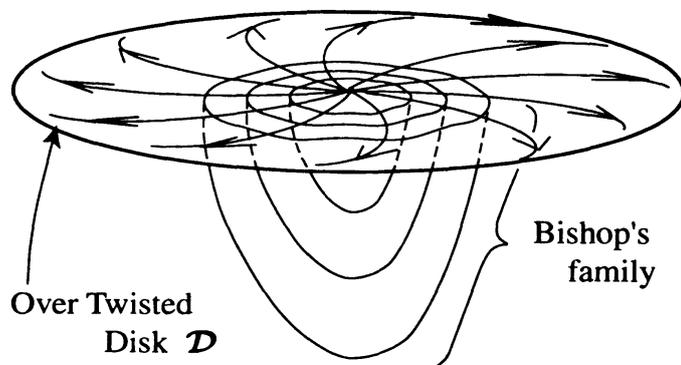
⁷⁷複素点の状況を本質的に変えずにこの様な変形をすることは初等的にできる. 双曲点においては, 可積分性のみならず '良い' 双曲点である様に変形する必要がある. これらの操作は実際に難しくないが, 小野 薫氏によると, この辺の事情も含め Bishop の定理も総て擬正則曲線の枠組みで議論することが可能になったらしい. [Ye] を参照せよ.

命題 3.6.2 の概説⁷⁸ 概複素構造 J が ω -tame であること, W' が compact であること, 及び, これらの J -正則曲線のエネルギーは $\int_{\Sigma} |\omega| dvol_{\Sigma}$ により一様に上から押さえられていることにより Gromov compact 性が成立し, 1) が分かる. 2) は Bishop 族の境界の定める Maslov 指数が 2 であることにより, Atiyah-Singer の指数定理などから分かる. 3) は, 境界に於ける強い最大値原理又は Σ に関する鏡像原理と, $M = \partial W$ の J -convexity から得られる. このとき向きに注意すると, Bishop 族が $\partial\Sigma$ には触れないことが全く同様に分かる. 4) については内点と境界では理由が異なる. 内点で bubbling off が起こるのは複素余次元 1 の現象であり, 2) により M' の end ではそれが起こらないことが分かる. 更に, 3) により境界上での bubbling off の可能性も排除される. 結局, bubbling off は全く起こらず, ∂W が J -convex な境界なので M' に属する J -正則曲線の族が内点から ∂W に近づくこともない. つまり M' の J -正則曲線の族が $\partial W' \setminus \partial W$ に近づくときにのみ M' の端点に到達する. 従って 5) が結論される.

3.6.3 (定理 3.2.9 の証明) 以上の準備の元に, ξ が OT であると仮定して矛盾を導く. OT-disk \mathcal{D} (これを上の Σ とする) は注意 2.1.2 に従ってとり, 更に ξ の極限周期軌道を越えて少し大きめにとる. このとき, \mathcal{D} の中心の楕円点が正である様に \mathcal{D} に向きを与えておけば $\partial\mathcal{D}$ が正の向きに ξ に横断的になる. 上の命題により, \mathcal{D} の楕円点から始まる Bishop 族は, 他に複素点を持たないので 1 次元の族として伸び続けなければならない. しかし何時かはこの族の正則円板の境界が, 極限軌道に接してしまう. 何れにしても矛盾である. **Q.E.D.**

後に Hofer はこの議論を逆にとり, OT 接触構造の symplectization にこの議論を適用しようとするところから破綻するか, を見ることで OT の場合の Weinstein 予想を解決した. これについては 8 節で概説する.

図 3.6.4



⁷⁸[E0] は解析的な部分を位相的にうまく説明している.

⁷⁹この節の図はどれも 4 次元のものをあたかも 3 次元の現象のように描いてあるので要注意!

3.7 Fillable \Rightarrow Bennequin の不等式

命題 3.6.2 と Bedford-Klingenberg の定理を使って fillability から直接 Bennequin の不等式 “ $d_- \leq 0$ ” を示すこともできる⁸⁰.

Σ を命題 3.6.2 にある曲面とする. 手術により Σ を改変して負の楕円点を無くすことを考える. 総ての負の楕円点から始まる Bishop 族を見て, 以下の様な操作をする. 但し, ここでは Bishop 族が負の楕円点から始まる様に考えたいので, 3.5 節の記述と比べて, 曲面の向き・複素点の正負を逆にして考えることに注意する.

(1) 負の楕円点 E から始まった Bishop 族が正の双曲点 H で終わる場合, Bedford-Klingenberg の定理 3.5.3 1) の原理に従い, Bishop 族が分岐を起こし, 二つの Bishop 族として続く. このとき, 最初の Bishop 族の部分は全部捨てて複素点 E と H は無くなり, 分岐後の二つの Bishop 族の像の中で新しく二つの負の楕円点を持つ様に Σ を W の中で手術して改変できる. この操作で d_- は 1 増加する.

(2) 負の楕円点 E から始まった Bishop 族が負の双曲点 H で終わる場合, この二点を結ぶ ξ_Σ の軌道が容易に見つかり, Elimination Lemma 2.2.8 により Σ を M の中で若干 isotopy で動かして二つの複素点 E と H を同時に解消できる. この操作で d_- は変化しない.

(3) 負の楕円点 E から始まった Bishop 族が正の楕円点 F で終わる場合は S^2 と同相な独立した連結成分であるので, この成分を単純に捨てる. この操作で d_- は 1 減少する.

3.6 と同様に, これらの Bishop 族が Σ の境界に達することはないので, 以上の操作を続けてゆくと負の楕円点がなくなってしまう. 従って最終的に得られた曲面を Σ' とすれば $d_-(\Sigma') \leq 0$ が成り立つ. 一方, Σ は Γ の Seifert 曲面であるから元々閉じた連結成分を持たない. つまり, 操作 (1) により新しく連結成分が生成されると操作 (3) が行なわれ得る. つまり, 操作 (3) の回数は操作 (1) の回数を上回らない. 従って $d_-(\Sigma) \leq d_-(\Sigma')$ を得, 結論として $d_-(\Sigma) \leq 0$ が示された. **Q.E.D.**

注意 3.7.1 1) 有向閉曲面でも全く同様に議論すれば $d_\pm \leq 0$ を得る (定理 6.2.3 を参照).

2) 有向閉 3 次元多様体上の Reeb 成分を持たない余次元 1 有向葉層構造 (M, \mathcal{F})

⁸⁰Eliashberg は [E3] において, やはり直接に Bennequin の不等式を証明する議論を紹介している. ここでの議論と似ているように見えるが, 実は禁欲的に Bedford-Klingenberg の定理を使うことを避け, Bedford-Gaveau の定理と命題 3.6.2 だけに頼っている. その為議論が煩雑な印象を受けるが, Bedford-Klingenberg の定理は証明が不十分であるという (4 次元の中の Bishop 族の分岐が位相的に簡単に捉えられるはずがないという) 批判があり, その意味では安全である. [E0] も併せて参照されよ.

に対する Thurston の不等式 4.1.2 及びその横断的境界を持つ場合の不等式も同様の操作で証明できる. この場合擬正則曲線の族を発見する必要はない (葉層構造の葉を使えば良い). 葉層構造と M に埋め込まれた曲面との交わりによる特異ベクトル場の指数 1 の特異点から始まる円板 (各円板は葉の一部) の族は, Reeb 成分がないのでホロノミーと出会うことがなく, 以上と同様の操作ができる.

3) $W = S^1 \times M$ 又は $[0, 1] \times M$ に各葉が J -正則になるように概複素構造 J を選んでおけば, Thurston の不等式も “ $d_- \leq 0$ ” と表示される.

4) (一般化された)Thom 予想 7.0.1 も “ $d_- \leq 0$ ” と表現できる.

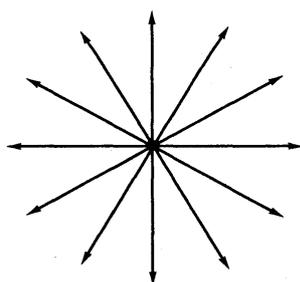
4 接触構造と葉層構造：Confoliation の理論を中心として

以前から意識されてきた葉層構造と接触構造の関係については90年代に入ってから特に注目されるようになった。先ず最初に3次元多様体上の接触構造論と余次元1葉層構造論に於ける幾つかの類似点を概観し、次により積極的に両者の関係に踏み込んだ Eliashberg-Thurston による **Confoliation** の理論 [ET] とその周辺の事柄について概説する。これにより fillable な接触構造が豊富に存在することが分かる。葉層構造論一般については [Tm], [Gd] 等を参照せよ。

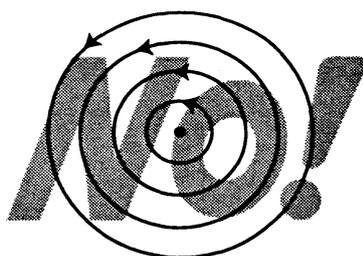
4.1 接触構造論と葉層構造論の類似

図 4.1.1

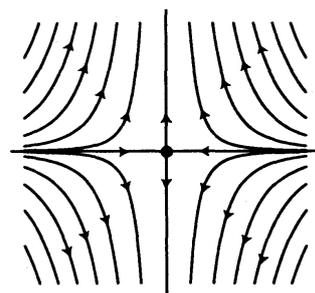
接触構造の場合



focal ($\text{div} \neq 0$)
index = 1

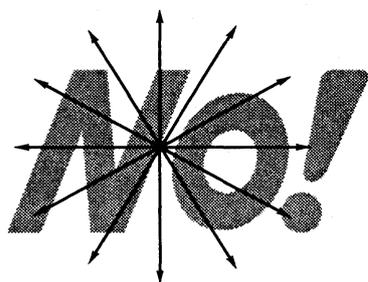


center ($\text{div} = 0$)
index = 1

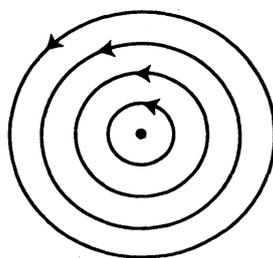


saddle, $\text{div} \neq 0$
index = -1

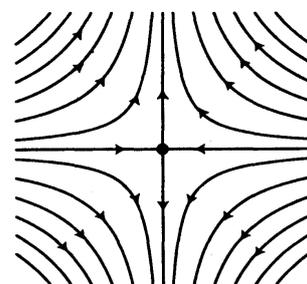
葉層構造の場合



focal ($\text{div} \neq 0$)
index = 1



center ($\text{div} = 0$)
index = 1



saddle, $\text{div} = 0$
index = -1

埋め込まれた曲面との交わりが定義する (特異) ベクトル場を追跡するという研究方法は、3次元多様体上の葉層構造論と接触構造論に共通した重要な位相的手法で

ある. 特に葉層構造論に於いてはその様にして得られるホロノミーの概念は理論の中心にある. 但し, この様にして得られるベクトル場の, 特異点に於ける状況⁸¹は, 葉層構造の場合と接触構造の場合とでは大きく異なる.

3次元多様体 M 上の平面場 $\xi = \ker \alpha$ と埋め込まれた曲面 Σ との交わりが定義する Σ 上の特性葉層 ξ_Σ は, $\iota_X d\text{vol}_\Sigma = \alpha|_\Sigma$ により定義される特異ベクトル場 X によって与えられる. ここで $d\text{vol}_\Sigma$ は Σ の勝手な面積要素である. このとき $\text{div } X \cdot d\text{vol}_\Sigma = d\alpha|_\Sigma$ となるから, 葉層構造, 即ち $\alpha \wedge d\alpha = 0$ なら $\text{div } X = 0$ となり, 接触構造の場合は $\text{div } X \neq 0$ となる. 指数 ± 1 の特異点の状況を上の図に示してある.

葉層構造論と接触構造論の間には, この様な手法のみならず色々な類似の概念や結果があり, Eliashberg-Thurston による Confoliation の理論の誕生の重要な背景であった. それらのうちの幾つかを挙げてみよう⁸².

辞書 4.1.1

	接触構造論		葉層構造論
	OT-disk の極限周期軌道	1	vanishing cycle
	Lutz's tube	2	Reeb 成分
	tight 接触構造	3	Reeb 成分を持たない葉層
	semi-fillable 接触構造	4	taut 葉層
	Bennequin の不等式	5	Thurston の不等式
	Ghys-Giroux-佐藤-坪井の不等式	6	Milnor-Wood の不等式
	Giroux の定理 4.1.6	7	Thurston の学位論文
	定理 3.2.9 fillable \Rightarrow tight	8	Barrett-稲葉の定理

この対応表の第3・第4の関係が本節の重要な主題の一つであるが, 先ず5番目の Thurston の不等式から復習しよう. Bennequin の不等式との類似性は一目瞭然であろう. Novikov の定理 “ S^3 上の任意の余次元1葉層には Reeb 成分が存在する” により, 上の辞書の第3の対応は崩れている様にも見えるが, 一方で, 第2節でも注意した通り, Reeb 葉層 \mathcal{F}_R は Thurston の不等式を満たすことに注意しよう.

⁸¹非特異な部分では埋め込まれた曲面を摂動するとその違いが鮮明に現れる. 葉層構造の場合, 摂動しても本質的に不変だが, 接触構造の場合はそうではない. 補題 1.1.4 参照.

⁸²勿論現時点でもこの辞書は項目を何倍にも増やせる. [CC], [ET], [Gi4] 等を参照し, 読者自ら試みられよ.

定理 4.1.2 (Thurston の不等式⁸³, [Th2]) 3次元有向閉多様体上の Reeb 成分を持たない余次元 1 有向葉層構造 (M, \mathcal{F}) に埋め込まれた種数 $g > 0$ の有向閉曲面 Σ_g に対し不等式

$$|e(\tau\mathcal{F}), [\Sigma_g]| \leq |\chi(\Sigma_g)| = 2g - 2$$

が成立する. ここで $e(\tau\mathcal{F})$ は \mathcal{F} の接束の euler 類, $\chi(\Sigma_g)$ は Σ_g の euler 標数を表す. つまり埋め込まれた閉曲面の中では compact 葉が $e(\tau\mathcal{F})$ を (種数の意味で) 最も効果的に測る. $H^2(M; \mathbb{Z})$ 上の Thurston's norm $\|\cdot\|$ ([Th2]) により $\|e(\tau\mathcal{F})\| \leq 1$ と表現してもよい.

S^1 -束の各ファイバーに横断的な葉層構造の存在についての有名な Milnor-Wood の不等式の接触構造版は Ghys-Giroux, 佐藤-坪井により独立に見出され, Giroux は更に精密に Thurston の学位論文 [Th1] の接触構造版も証明している.

定理 4.1.3 (Milnor-Wood の不等式⁸⁴, [M], [Wo]) $\rho : M \rightarrow \Sigma_g$ を種数 $g > 0$ の有向閉曲面 Σ_g 上の euler 数 $\chi(\rho) = \langle e(\rho), [\Sigma_g] \rangle$ の S^1 -束とする. このとき, M 上に各ファイバーに横断的な余次元 1 葉層構造が存在する為の必要十分条件は次の不等式で与えられる.

$$|\chi(\rho)| \leq |\chi(\Sigma_g)| = 2g - 2 \quad .$$

定理 4.1.4 (Ghys-Giroux-佐藤-坪井の不等式^{84,85}, [ST], [Gi4]) 上と同じ $\rho : M \rightarrow \Sigma_g$ が各ファイバーに横断的な正の接触構造を許容する為の必要十分条件は次の不等式で与えられる.

$$\chi(\rho) \leq -\chi(\Sigma_g) = 2g - 2 \quad .$$

定理 4.1.5 (Thurston の学位論文, [Th1], [Le]) 有向閉曲面上の S^1 -束 M 上に与えられた余次元 1 葉層構造 \mathcal{F} が compact 葉を持たないとする. このとき isotopy により \mathcal{F} を変形して各ファイバーに横断的にすることができる.

定理 4.1.6 (Giroux⁸⁶, [Gi4]) S^1 -束 M 上に与えられた接触構造 ξ がファイバーに isotopic な回転数 0 の Legendre knot を持たないとする. このとき isotopy により ξ を各ファイバーに横断的に変形することができる.

⁸³ここに述べた Thurston の不等式は閉曲面に対するものである. 葉層構造に横断的な境界を持つ曲面の場合も特性数を然るべく解釈すれば成立する.

⁸⁴一般の Seifert fibration でも同様の結果が得られる. G-G-S-T の不等式についても然り.

⁸⁵不等号の向きについては例 0.3.5 の最後の注意を参照せよ. 不等式が $\dots < 0$ からずれているのは, 接触構造が与える水平分布が S^1 -接続から来るとは限らないからである. Eliashberg-Thurston はこのような接触構造を非線形前量子化と呼んでいる.

⁸⁶Giroux はこれらをまとめ "Comment contacter avec Milnor-Wood et Thurston?" と題する素晴らしい講演を行なった. 彼自身が開発した凸曲面の理論 (6 節参照) を駆使してこれらの結果を導いている. 最近 Giroux がこの辺の事情を preprint [Gi4] にまとめている.

強擬凸性から接触構造の tight 性が導かれることを前節で見たが、これに相当する葉層構造論に於ける結果もある。上の辞書の最後の部分である。

定理 4.1.7 (Barrett-稲葉⁸⁷, [BI]) M を複素曲面 W 内の Levi-平坦な C^∞ -級の compact な実超曲面, \mathcal{F} を誘導された葉層構造とする。このとき \mathcal{F} は Reeb 成分を持たない。

4.2 葉層構造からの摂動による接触構造の生成 : Confoliation の理論

葉層構造から接触構造を作り出してしまおうのが confoliation の理論の中核である。これにより fillable な接触構造が量産される。ここでは葉層構造の接触構造への変形を、4.3 節では何故 fillable 接触構造が得られるのか、の仕組みを Confoliations [ET] に従って述べる。

定理 4.2.1 (Confoliations の主定理, Eliashberg-Thurston, [ET]) 3次元有向閉多様体上の任意の C^2 -級余次元 1 有向葉層構造 (M, \mathcal{F}) は、平面場としての C^0 -位相による任意に小さい摂動で正 (勿論負も同様) の接触構造により近似される。但し、 (M, \mathcal{F}) としては $(S^2 \times S^1, \zeta = \{S^2 \times \text{pt.}\})$ ⁸⁸ のみを除く。

この定理は次の 3 段階の接平面場としての摂動を経て証明される。各段階での摂動が平面場としての C^0 -位相に於いて任意に小さくとれることを注意する。

第 1 段階 (葉層構造の整形) 与えられた葉層構造を十分多くのホロノミーを持つ⁸⁹良い葉層構造に摂動する。

第 2 段階 (非可積分性の生成) ホロノミーの台の近傍で葉層構造を正の接触構造に摂動する。

第 3 段階 (非可積分性の拡散) 葉に沿って非可積分性を多様体中に伝播させる。

第 1 段階で何をすべきかは第 2・3 段階を見ると分かるので、2, 3, 1 の順に説明する。

第 2 段階では“ホロノミー”という葉層構造論における基礎概念が重要な役割を果たす。第 1 段階ではこれに加えて極小集合の概念が重要となってくる。これらは、

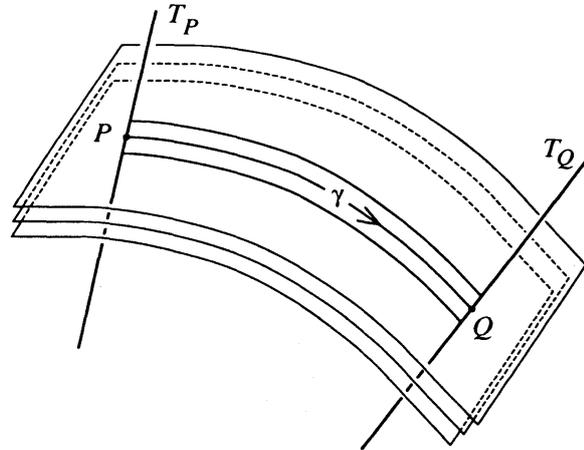
⁸⁷[BI] の結果はここで述べる以上に複素解析的に重要である。

⁸⁸所謂 Reeb stability により、 S^2 と同相な葉を一枚でも持つ葉層構造は ζ に同形となり、 ζ だけは葉層構造にも、又、接触構造にすら摂動できない。趣味の問題だが ' ζ ' という名は余り相応しくないと筆者は感じる。

⁸⁹非自明なホロノミーが存在することを 'ホロノミーを持つ' と言う。

余次元 1 葉層の場合について随時説明することにする.

葉上の曲線 γ の両端点 P, Q を通る横断的多様体 T_P と T_Q をとっておくと, γ の周囲の葉上の曲線に沿う変換として, (T_P, P) から (T_Q, Q) への微分同相の芽が定まる. この微分同相の芽は γ の端点を固定したホモトピーに依らない. 従って, 葉 L 上に P を基点とする loop γ をとれば $Diff(T_P, P) \cong Diff(\mathbb{R}, 0)$ の元を得る. これを loop γ が定めるホロノミーといい, 自然にホロノミー準同型 $h: \pi_1(L, P) \rightarrow Diff(T_P, P)$ を導く.



あらゆる葉のホロノミー準同型が自明なときその葉層構造は“ホロノミーが無い”という.

例えば S^2 と同相な葉 L が存在したとする. 単連結なのでホロノミー準同型は自明である. これより L の近傍では総ての葉は L と同相で, 葉層構造は L を積み重ねただけの自明な形をしている. ところが, そのような形をした葉の和集合は, 以上の議論より開集合であるが, その境界の葉のホロノミーを考えてみると, やはり S^2 と同相でなければならない. つまり, 開かつ閉集合となり, 葉層構造自体が自明な構造を持つ. これが **Reeb stability** と呼ばれる現象であり, 葉層構造 ζ が如何なる変形をも受けないのは本質的にこのことによる.

第 2 段階 (非可積分性の生成)

次の命題が葉層構造から接触構造を作り出せる秘密である.

命題 4.2.2 (ホロノミーによる Confoliation への摂動, [ET]) 1) 葉層構造 \mathcal{F} の葉 L に沿うループ γ で非自明な線形ホロノミーを持つものがあれば, そのループ γ の十分小さい管状近傍 U 上だけで $\tau\mathcal{F}$ を小さく変形した平面場 ξ_1 で, ξ_1 は U 上では正の接触構造であり, U の外では ξ_1 は $\tau\mathcal{F}$ と一致しているようなものが存在する.

2)⁹⁰ 葉の両側に縮小的な部分のあるホロノミーを持つ葉上のループ γ があれば, その縮小的な部分を含む γ の十分小さい管状近傍 U 上だけで $\tau\mathcal{F}$ を小さく摂動し

⁹⁰この部分が Confoliation の理論の中で最も不透明で分かり難い部分だと思われる.

た平面場 ξ_1 で, ξ_1 は U 上では正の接触構造であり, U の外では ξ_1 は $\tau\mathcal{F}$ と一致しているようなものが存在する.

概説 ここでは 1) のみを説明する⁹¹. γ が線形部分が非自明な拡大するホロノミーを持つとしよう. すると, γ の十分小さい管状近傍 U 上に以下のような局所座標 (x, y, z) , $(x \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ をとることができる. 葉 L は (x, y) -平面, γ は x -軸となっており, U 上では葉は概ね $z = c \exp ax$ のグラフに見える. 実際, より正確には, 1-形式 $\alpha = dz - f(x, z)dx$ (但し $f = az + o(z)$, 特に U 上 $\frac{\partial f}{\partial z} > 0$) により葉層構造 $\mathcal{F}|_U$ が定義されているとしてよい. このとき $d\alpha = df \wedge dx$ となる. U を台とする bump function $g(y, z)$ を

$$g|_{M \setminus U} = 0, \quad g|_U < 0, \quad f \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \geq 0$$

となるようにとり, $\beta = gdy$ とおく.

この β を使って α の変形を $\alpha_t = \alpha + t\beta$ と定義すると, α_t は $t > 0$ のときに正の接触構造を, $t < 0$ のときに負の接触構造を U 上に定義することが直接計算により極めて容易に分かる.

Q.E.D.

結果として得られる平面場は葉層構造の部分と接触構造の部分が混在している.

第3段階 (非可積分性の拡散)

定義 4.2.3 (Confoliation, [ET]) 有向3次元多様体 M 上の非特異1-形式 α で定義される平面場 ξ が **confoliation**⁹² であるとは, $\alpha \wedge d\alpha \geq 0$ を満たすときをいう. Confoliation ξ に対し, その contact part を $C(\xi) = \{x \in M; (\alpha \wedge d\alpha)_x > 0\}$, foliation part を $F(\xi) = \{x \in M; (\alpha \wedge d\alpha)_x = 0\}$ と表す. 更に, $C(\xi)$ の $F(\xi)$ の葉による充填化 $\{x \in M; \xi$ に沿う曲線 $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) \in C(\xi), \gamma(1) = x\}$ を $\widehat{C(\xi)}$ と表すことにする.

一般に confoliation ξ が与えられたとき, 以下の命題にあるように $C(\xi)$ の非可積分性を $F(\xi)$ の葉に沿って伝播させることができる⁹³.

⁹¹これは次節で解説する射影的 Anosov 流の概念によっても明快に説明できる.

⁹²contact と foliation を安易にくっつけたこの造語は Eliashberg によるものである. 評判はあまり芳しくないが, Thurston による造語 *foliact* よりは良いだろうというのが御本人の弁.

⁹³Altschuler [Al] は熱方程式によって非可積分性を拡散させてみせた. 新しい放物型方程式として解析的にも注目を集めたが, この仕事は Confoliations [ET] にとっても重要な動機付けの一つであったといわれる.

補題 4.2.4 (非可積分性の拡散, [ET]) 補題 1.1.4 の証明にある座標近傍を B とし, 更に次の条件を仮定する.

$$(3) \quad 0 \leq x \leq 2\varepsilon \text{ に於ては } \frac{\partial f}{\partial x} > 0$$

このとき, ∂B の十分小さな近傍を除いた部分 $B' = [\varepsilon, 1 - \varepsilon]^3$ 上で関数 f^{94} (従って平面場 ξ) を任意に小さく摂動して, 以下の i), ii), iii) を満たすようにできる.

$$i) \quad B'' = [2\varepsilon, 1 - 2\varepsilon]^3 \text{ 上では } \frac{\partial f}{\partial x} > 0,$$

$$ii) \quad B \text{ 上で } \frac{\partial f}{\partial x} \geq 0,$$

$$iii) \quad B \setminus B' \text{ 上では元と一致している.}$$

即ち, 葉上の曲線に沿って $\{0 \leq x \leq 2\varepsilon\}$ の非可積分性が B'' 上にまで拡散されたことになる.

証明は勿論容易である. 従って, 次の命題が証明されたことになる.

命題 4.2.5 ([ET]) Compact な多様体 M 上の confoliation ξ が $\widetilde{C}(\xi) = M$ を満たしていれば, この命題の操作を有限回繰り返すことにより M 全体で正の接触構造になるまで摂動することができる.

第1段階 (葉層構造の整形)

葉層構造 (M, \mathcal{F}) が以下の条件 (F) を満たせば, 第2・3段階の操作を順に施すと, 結果として接触構造が得られる.

4.2.6 条件 (F): 命題 4.2.2 にあるホロノミーを持つ (有限枚の) 葉が存在し, 他の総ての葉はこれらの葉に集積している

そこで, ζ 以外の任意の葉層構造は, 小さい摂動により条件 (F) を満たす葉層構造に変形できることを示す. 以後, 余次元1葉層構造の定性理論が必要となるため, 葉層構造が C^2 -級であること, 多様体は compact であることを仮定し, 与えられた葉層構造 (M, \mathcal{F}) の極小集合を調べる.

極小集合の概念のもとに条件 (F) は次の条件 (F') に言い換えられ, この第3段階では以下の命題 4.2.8 を示すことになる.

4.2.7 条件 (F'): \mathcal{F} の総ての極小集合には命題 4.2.2 にあるホロノミーを持つ葉が存在する.

命題 4.2.8 $\mathcal{F} \neq \zeta$ ならば \mathcal{F} は条件 (F') を満たす葉層構造の列で近似される.

⁹⁴元々 confoliation であることを仮定しているので $\frac{\partial f}{\partial x} \geq 0$ となっている.

ここで、葉層構造の極小集合について簡単に説明しておく。葉層多様体の部分集合であって、葉の和集合となっているものを充満集合という。多様体 M 上の葉層構造 \mathcal{F} の極小集合とは閉充満部分集合の中で、包含関係に関して極小なもののことである。多様体 M が compact なら、任意の葉の閉包 (若しくは勝手な閉充満集合) に必ず極小集合が含まれることが、Zorn の補題により容易に分かる。以下 M は compact とする。

極小集合は (1) compact 葉, (2) 稠密型, (3) 例外的極小集合 (EMS と略称される) に類別される。(1) Compact 葉 1 枚は、確かに極小集合である。(2) M のある連結成分に於て総ての葉が稠密になっているときは、その連結成分が極小集合である。 M が連結なら勿論 M 全体がその極小集合である⁹⁵。例えば T^n 上の非有理線形葉層⁹⁶や、双曲的曲面の測地流に付随する Anosov 葉層 (例 5.1.3 参照) 等が代表的な例である。

定義としては (3) の EMS は (1), (2) 以外の極小集合を指すが、余次元 1 葉層の場合は次のもつとはっきりした特徴付けが容易に出来る。即ち、EMS は横断的には Cantor 集合になっている極小集合に他ならない。例えば、 $\alpha = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \cosh b & \sinh b \\ \sinh b & \cosh b \end{pmatrix}$ と於けばこの 2 元が生成する $PSL(2; \mathbb{R})$ の部分群 $\Gamma_{a,b} = \langle \alpha, \beta \rangle$ は、 $a, b \gg 0$ のとき所謂 Schottky 群となる。 $PSL(2; \mathbb{R})$ の $S^1 = \mathbb{RP}^1$ への自然な作用を $\Gamma_{a,b}$ へ制限し、その作用の極小集合を見ると、3 進 Cantor 集合が見えてくる。種数 2 以上の閉曲面上にこの作用を suspend した平坦 S^1 -束を作れば、EMS を持つ葉層構造を得る。

さて、命題 4.2.8 の証明を概観してみよう。EMS は複雑で分かりにくそうだが、次の Sacksteder の基本定理により、実は極めて都合がよい。

定理 4.2.9 (Sacksteder, [Sa]) EMS には linear holonomy⁹⁷ を持つ葉が存在する。

(2) の稠密型の場合は、ホロノミーの有無で事情が全く異なる。ホロノミーを持つ葉が存在すれば、実は Sacksteder の定理 (の証明) が適用できて、容易に⁹⁸ linear

⁹⁵このとき葉層構造を力学系理論の意味で極小葉層という。次小節では、微分幾何の意味での極小葉層が登場する。どちらの用語も捨て難く、今後も混乱を引き起こし続けるだろう。要注意。

⁹⁶ $T^n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ 上の定数係数の 1-形式 $\alpha = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ で定義される葉層を線形葉層といい、 a_1, \dots, a_n が \mathbb{Q} 上 $\text{rk} > 1$ のとき非有理という。

⁹⁷'linear holonomy を持つ' とは、ホロノミーの linear part が非自明なことを指す。その場合、そのホロノミーの元だけは線形化できるが、その葉のホロノミー群が線形化されるということではない。

⁹⁸Well-known to experts. 付随する 1 次元力学系の亜群の中に EMS を持つ Schottky 型部分亜群を探せばよい。即ち、 $0 \leq a < b < c < d \leq 1$ として、 $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow [c, d]$ となる二

holonomy の存在が分かる. しかも他の葉も総て稠密であるから, linear holonomy の support を通過する. 一方, 総ての葉がホロノミーを全く持たない葉層は, 束葉層⁹⁹ であるか, 又は束葉層の列 (Tischler fibration と呼ばれる) で近似することができるので, 以下の compact 葉が無限枚積み重なった場合に帰着する.

Compact 葉が重なった部分から離散的に何枚かの葉を選び, 非自明な linear holonomy を持つように摂動することは, compact 葉の種数が正なので容易である. 非自明な holonomy を持ちながら linear holonomy が自明な compact 葉が厄介だが, これには命題 4.2.2 2) を適用する.

以上の操作により $(S^2 \times S^1, \zeta)$ 以外の葉層構造は, 条件 (F') を満たす葉層構造に摂動される.

4.3 Taut な葉層構造と Fillable な接触構造

以上による葉層構造の接触構造への摂動を利用して, semi-fillable な接触構造の存在定理 4.3.4 を示そう. 葉層構造論の側からは, Gabai による taut な葉層構造 (下の定義を見よ) の存在定理が鍵となる.

定理 4.3.1 (Gabai, [Ga]) $H_2(M; \mathbb{Z}) \neq 0$ となる既約な 3次元有向閉多様体 M の $H_2(M; \mathbb{Z})$ の非自明で素な元 c を指定すると, M 上の C^∞ -級 taut 葉層構造 \mathcal{F} であって, c を代表する compact 葉を持つものが存在する.

命題 4.3.2 ([ET]) 正・負の接触構造 ξ_\pm が taut な葉層構造 (M, \mathcal{F}) を十分に近似していれば, fillable な接触構造 $(M \sqcup (-M), \xi_+ \sqcup \xi_-)$ を得る.

定義 4.3.3 ([ET]) 接触構造 (M, ξ) がある fillable な接触構造 (N, η) の連結成分 (の幾つか) になっているとき semi-fillable であるという. 命題 3.1.1 と定理 3.2.9 により semi-fillable ならば勿論 tight である.

これらの直接の系として次の定理を得る.

定理 4.3.4 (Semi-fillable な接触構造の存在, [ET]) 有理ホモロジー S^3 以外の既約な有向閉 3次元多様体 M 上には semi-fillable な接触構造が存在する.

つ元で生成される部分亜群を探す. これは条件から比較的容易に見つかる. このとき, この部分亜群の作用を iterate すると, 自然に 3進 Cantor 集合が見えてくるが, それが EMS に他ならない.

⁹⁹ S^1 上の fibre bundle の各 fibre を葉とする葉層構造. 従って, 総ての葉は compact で互いに微分同相である.

注意 4.3.5 同様の多様体に於ける fillable な接触構造の存在はについては不明である¹⁰⁰.

命題 4.3.2 を以下に述べる Sullivan による極小葉層構造の特徴付けの (3) を使って証明しよう.

定理 4.3.6 (Sullivan の極小葉層構造の特徴付け¹⁰¹, [S]) 閉多様体上の横断的に向き付けられた余次元 1 葉層構造 (M, \mathcal{F}) に対し, 以下の四つの条件は同値である.

- (1) 任意の葉は横断的な knot と交わる.
- (2) dead end component¹⁰² を持たない.
- (3) 各葉上至る所で正になる M 上の閉 2-形式 Ω が存在する.
- (4) 各葉が極小曲面¹⁰³ となる M の Riemann 計量が存在する.

定義 4.3.7 この様な葉層構造を **taut** と云う. 条件 (1) により compact 葉が存在すればその葉は非自明な homology 類を表す.

命題 4.3.2 の証明 $(S^2 \times S^1, \zeta)$ 以外の taut な葉層構造 (M, \mathcal{F}) を正・負の接触構造 ξ_{\pm} で近似しておく. ここで葉層構造を定義する 1-形式を α とし, $\omega = \Omega + d(t\alpha)$ とおけば, 容易に分かるように $\omega^2 = 2dt \wedge \Omega \wedge \alpha$ なので, ω が $\mathbb{R} \times M$ に symplectic 構造を定義する. 構成より $\omega|_{\tau\mathcal{F} \subset T(\{0\} \times M)} = \Omega|_{\tau\mathcal{F}} > 0$ となることに注意する.

ξ_{\pm} を正・負の接触構造による \mathcal{F} の十分良い近似とし, ε を十分小さくとっておけば, symplectic 多様体 $(W = [-\varepsilon, \varepsilon] \times M, \omega)$ がその境界 $\partial W = \{\pm\varepsilon\} \times M$ 上の接触構造 ξ_{\pm} の symplectic filling を与えていることになる. **Q.E.D.**

4.4 葉層構造の Reeb 成分と接触構造の Tight 性

Eliashberg はこの節のこれまでの結果に, 6.3 節の構成法, 及び開多様体上の tight な接触構造を精密に分類する技法を加えて次の定理を証明した.

定理 4.4.1 (Eliashberg, [ET]) 3次元有向閉多様体 M 上の Reeb 成分を持たない葉層構造 \mathcal{F} に対して, \mathcal{F} を平面場として十分良く近似する tight な接触構造の

¹⁰⁰Thurston は比較的 positive に考えているようである.

¹⁰¹[S] は一般余次元の場合も解決している. 上に述べた余次元 1 の場合は証明も容易である. 読者各自試みられよ.

¹⁰²Generalized Reeb component と呼ばれる. 有限枚の compact 葉からなる境界を持つ領域で, 横断的向き付けに関して, 境界が総て内向き, 又は, 総て外向きとなっているものを指す.

¹⁰³微分幾何の意味での極小曲面. 葉層の極小集合のことではない.

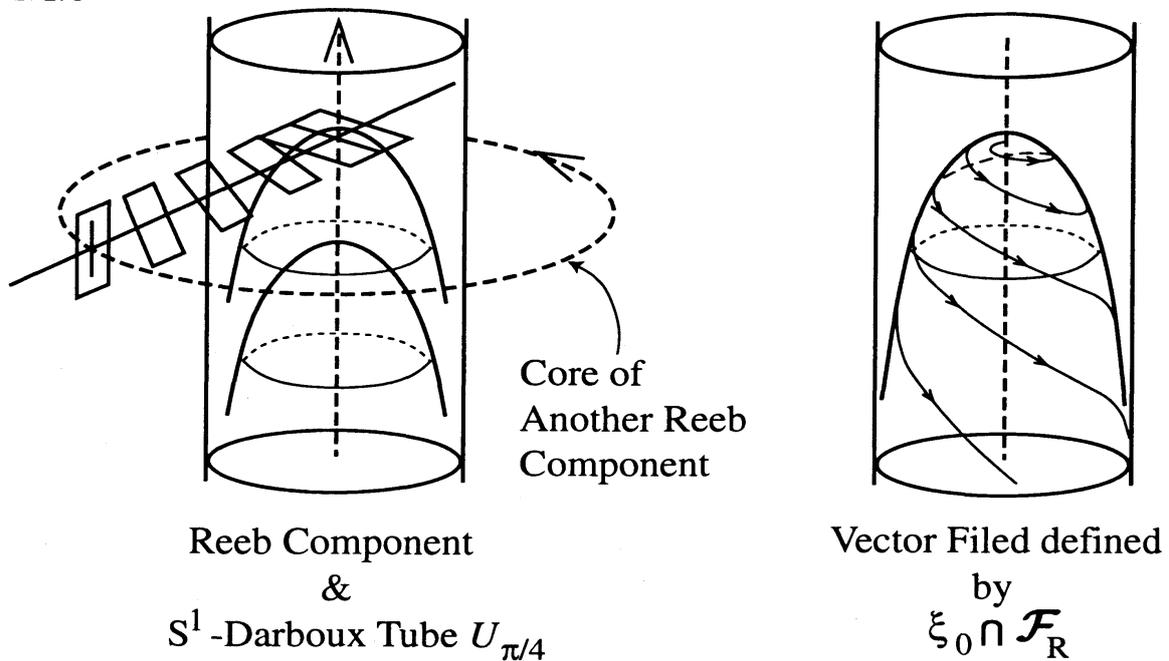
列が存在する¹⁰⁴.

これにより, この節の冒頭にある辞書 4.1.1 の第三項目が右から左へ通じた. 一方, 逆はどうなるであろうか?

葉層構造 \mathcal{F} が tight な接触構造の列 ξ^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) で近似されたとしてみよう. \mathcal{F} に正の向きに横断的で homological に自明な向きづけられた knot Γ に対して Thurston の不等式の relative version が成立する. 十分大きな番号 n に対して Γ は ξ^n に対しても横断的になるので, Bennequin の不等式を満たしてしまうからである. 実際, 同様の議論により absolute version の Thurston の不等式も満たされることが分かる. 従って, そのような葉層構造は十分凸性を持っていると考えられるが, 残念ながら, S^3 の Reeb 葉層 \mathcal{F}_R ¹⁰⁵ に代表される幾つかの例外に於いて Reeb 成分が存在してしまう.

4.4.2 (Reeb 葉層への接触構造の収束) そこでこの節の最後として, 実際に S^3 の Reeb 葉層 \mathcal{F}_R に標準的接触構造 ξ_0 の 1 径数変形族が収束できることを, Gray の定理 1.1.3 又は補題 1.1.4 の考え方の応用として眺めてみよう.

図 4.4.3



¹⁰⁴[ET] には, “この様な \mathcal{F} を十分良く近似する接触構造は tight である” と主張されているが, 上の様に述べた方が安全のようである.

¹⁰⁵Reeb 葉層 \mathcal{F}_R は以下に見るように標準的接触構造により近似されるので, Thurston の不等式を満たす. Absolute version を直接 (Bennequin の方法に従って) 証明するのが容易かどうか考えてみられよ.

定理 1.2.4 にある円柱座標 (r, θ, z) を持つ solid torus 二つを, longitude (= z -軸) と meridian (= θ -軸) を入れ替えるように貼り合わせて S^3 を作る. このとき各の solid torus に以下の図にあるように自然に Reeb 成分と接触構造 $U_{\pi/4}$ を導入しておく, それぞれうまく貼り合せて Reeb 葉層 \mathcal{F}_R と標準的接触構造 ξ_0 ができあがる. このようにすると, 二つの平面場は solid tori の軸 (図では破線) に於いて接し, 他の部分では横断的となる.

このとき, それぞれの平面場としての向きを然るべくとり, それらの交わりが定めるベクトル場 Y の特異点が湧出点となるようにする. Solid tori の境界の T^2 -葉上では傾き -1 の一定なベクトル場となっているが, その他の軌道は総て solid tori の軸上の湧出点から出て $-\frac{\partial}{\partial z}$ -成分を徐々に増加させながら T^2 -葉上の周期軌道に収束する.

このベクトル場で ξ_0 を流すと, あたかも湧出点における $T\mathcal{F}_R$ と ξ_0 の接触が流れに沿って伝播・拡散していくが如くに

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(tY)_*(\xi_0) = T\mathcal{F}_R$$

が実現する.

以上の構成で, 各 solid torus に入れる接触構造を $U_{\pi/4}$ の代わりに $U_{5\pi/4}$ とすることもできる. 但し, 半径方向をうまく調節し, $U_{\pi/4}$ の場合との違い (つまり Lutz twist の操作) を T^2 -葉のごく近くだけに押し込んでおく. すると全く同様の事態が起こり, 交わりで得られるベクトル場を Z と表せば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(tZ)_*(\xi_{0FL}) = T\mathcal{F}_R$$

を得る. 即ち, ξ_0 の full-Lutz twist ξ_{0FL} も Reeb 葉層 \mathcal{F}_R に収束させることができる.

一方, $U_{\pi/4}$ の代わりに $U_{3\pi/4}$ を使って標準的接触構造 ξ_0 の half-Lutz twist ξ_{0HL} を全く同じ Reeb 葉層 \mathcal{F}_R に収束させることは, 平面場のホモトピー類が異なるためにできないのだが, 二番目の Reeb 成分の '向き' を逆にした '裏返しの' Reeb 葉層 ' \mathcal{F}_L ' に収束させることはできる. 別の言い方をすると, \mathcal{F}_R に負の OT 接触構造を (自然に) 収束させることができる.

これら事情を詳しく説明することは, もはや難しくないとと思われるので, 読者への演習問題とする.

5 Anosov 流と双接触構造

前節では confoliation の名の下に、葉層構造を接触構造へ摂動するためのかなり一般的な議論を紹介した。本節では葉層構造の接触構造への変形及び接触構造の葉層構造への収束のより特殊な場合を見てみる。

接触構造には色々な fillability や tight 性という概念があることを見た。これらは、強擬凸性が姿を変えた概念でもあるが、逆に OT と比べてみれば、無駄の無さ、という意味でも凸性といえる。同様の意味で葉層構造の凸性を表す概念を前節で幾つか紹介した。力学系的な極小性、微分幾何的な極小性 (即ち taut 性)、Reeb 成分を持たないこと、等である。葉層構造と接触構造の双方に於けるこの様な凸性の階級が多少の相関を持っていることを前節で見たのだが、ここでは、幾つかの特殊な例でその関係を見てみよう。

最も強い凸性を示す重要なクラスは 3 次元多様体上の Anosov 流に付随する葉層構造と接触構造である。Anosov 流に付随する Anosov 葉層は力学系的に極小で、特に taut であり、付随する接触構造も強い意味で symplectically fillable である。

一方、Anosov 流に自然に付随して接触構造と葉層構造が共存する理由を一般化した射影的 Anosov 流ははるかに多くの多様体上に存在するので、接触構造論へのより多くの寄与が期待されているが、実は付随する可積分な平面場が微分可能性を持たず、正確な意味での葉層構造を定めるとは限らず、この病理現象は避け難く起り、理論の進展を妨げている。又、現れる接触構造も tight になるとは限らない。一方、可積分平面場の微分可能性を仮定すると、凸性や野田の分類定理 5.3.4 等の美しい結果が得られ始めている。このような二つの側面を持つ (射影的) Anosov 流と双接触構造について構造の凸性 (特に付随する接触構造の tight 性) を中心に紹介する。

Anosov 流とそれに付随する Anosov 葉層に関する参考文献として、Anosov 自身による最初の文献 [An], 及び, [Y], [HPS], [KH] を挙げておく。

5.1 Anosov 流と Strong Filling

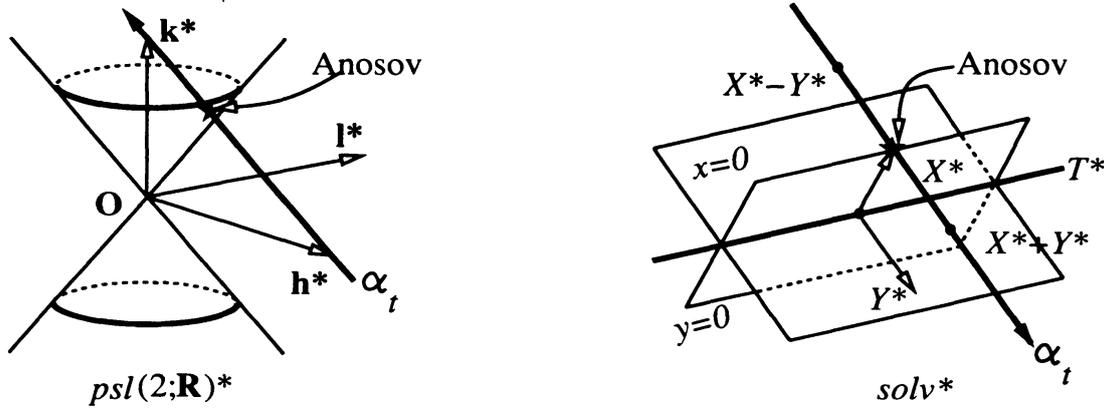
完備凸な symplectic 4 次元多様体 (または strong filling) で、複素構造からは来ないようなものがあるか? という Calabi の問¹⁰⁶に対して、最初に作られた例が McDuff による $[-1, 1] \times S^1 T^* \Sigma_g$ 上の凸 symplectic 構造であり、その境界 $\{\pm 1\} \times S^1 T^* \Sigma_g$

¹⁰⁶より具体的に '境界 (end) が不連結なものがあるか' という問いであった。

に誘導される2つの接触構造は良く知られた Liouville 接触構造 (例 0.3.2) と双曲的曲面 Σ_g の Riemann 接続 (例 0.3.5) であった ([Mc]).

Ghys 及び筆者により, この構成法の Lie 環の双対 $sl(2; \mathbb{R})^*$ による簡潔な記述が見出され ([L], [Mi1])¹⁰⁷, さらに T^2 の双曲的自己同形に付随する3次元可解 Lie 群によっても全く同様の構成が可能ながすぐに分かる (例 0.3.8 参照). 実はこれらは左不変 Anosov 流が自然に付随する Lie 群であった.

図 5.1.1



定義 5.1.2 M^3 上の非特異流 ϕ_t が Anosov 流 であるとは, ある Riemann 計量に対し以下の様な性質を満たす接束 TM の ϕ_t -不変な直線束への C^0 -分解 (Anosov 分解と云う) $TM = T\phi \oplus E^{uu} \oplus E^{ss}$ が存在することを云う. ある正の実数 c に対し,

$$\begin{aligned} \forall v \in E^{uu}, \quad \forall t > 0, \quad & \|(\phi_t)_* v\| \geq \exp(ct) \|v\|, \\ \forall v \in E^{ss}, \quad \forall t < 0, \quad & \|(\phi_t)_* v\| \geq \exp(ct) \|v\|. \end{aligned}$$

$E^s = T\phi \oplus E^{ss}$ ($E^u = T\phi \oplus E^{uu}$) をその弱 (不) 安定平面場といい, $TM = E^u + E^s$ を弱 Anosov 分解という.

C^r -section theorem ([HPS]) により E^u と E^s は C^1 -級の平面場になることが分かり¹⁰⁸, 補題 1.1.4 により2つの余次元1葉層構造, 弱安定葉層 \mathcal{F}^s と弱不安定葉層 \mathcal{F}^u を定義する. これらを **Anosov 葉層** と呼ぶ. 5.1.7 の左側の図を参照せよ.

¹⁰⁷McDuff による symplectic 構造の構成 [Mc] が必要以上に複雑に思われたのでこの二人は単純に $sl(2; \mathbb{R})^*$ の中で2つの接触構造を線分で結んでみたのであった. この構成法はある意味でより本質的に異なっていた. McDuff の場合中間に現れる葉層構造の葉が symplectic になるのに対し, 後者では Lagrangian になる. とは言え, 安定/不安定葉層を入れ替える (流れを逆にする) とそれが逆転することが分かるので実はやはり同じともいえる. 例 0.3.8 及び図 5.1.1 を参照.

¹⁰⁸より高次元の多様体上にも Anosov 流の概念が定義される. これらの場合も同様に, 流れに接する不変な接分布 E^u, E^s を得る. これらは一般に C^0 -級でしかないが, 3次元の場合も含め, 全く別の方法で, やはり葉層構造を定めることがわかる. E^{uu}, E^{ss} も同様に葉層構造を定めるが, 3次元の場合でも一般には C^0 -級でしかない. [An], [KH] 等を参照せよ.

例 5.1.3 (代数的 Anosov 流) 既に何度か登場しているが, Anosov 流及び Anosov 葉層の重要な例として, 双曲的曲面の測地流の場合を再確認する.

閉じた双曲的曲面 Σ とは負定曲率 ($\equiv -1$) の計量を持つ閉曲面である. 普遍被覆は双曲平面 $\mathbb{H}^2 = PSO(2; \mathbb{R}) \backslash PSL(2; \mathbb{R})$ であり, その向きを保つ等長変換群は $PSL(2; \mathbb{R})$ である. 従って, $PSL(2; \mathbb{R})$ の co-compact かつ torsion の無い (作用の自由性を保証している) 離散部分群 $\Gamma \cong \pi_1(\Sigma)$ で \mathbb{H}^2 を割った商空間 $\mathbb{H}^2/\Gamma = PSO(2; \mathbb{R}) \backslash PSL(2; \mathbb{R})/\Gamma$ が双曲的曲面 Σ であるといってもよい. このとき単位接円周 $S^1(T\Sigma)$ は自然に $PSL(2; \mathbb{R})/\Gamma$ と見なせ, この空間上に測地流 ϕ_t が定まる. これは Lie 環 $psl(2; \mathbb{R})$ の言葉で述べれば, 所謂双曲的な元を無限小生成元として引き起こされる流れである.

測地線を 1 本とると, $t \rightarrow -\infty$ に於いてこれに漸近する測地線の 1 次元の族が存在¹⁰⁹. \mathbb{H}^2 の言葉で述べれば, $\partial\mathbb{H}^2$ の 1 点からでてくる \mathbb{H}^2 の測地線達のことである. この族がなす部分集合を単位接円周上で見ればそれが不安定葉層 \mathcal{F}^u の葉に他ならない¹¹⁰. Lie 環 $psl(2; \mathbb{R})$ の基底 $h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ についての交換関係 $[h, p] = p$, $[h, q] = -q$ を見てみると, $\phi_t = \exp(th)$ ととれば $E^{ss} = \langle p \rangle$, $E^{uu} = \langle q \rangle$ となることが分かるであろう.

Lie 環の双対の言葉では上の図, 又は例 0.3.8 に述べた通りであるが, 測地流の無限小生成元上消える放物的な左不変 1-形式が (定数倍を除いて) 2 つあって, 一方が不安定葉層を, 他方が安定葉層を定めている.

Lie 環とその双対による記述は, torsion の有無に関わらず, $PSL(2; \mathbb{R})$ 若しくはその不変被覆群の co-compact 離散部分群による商空間上に Anosov 流が自然に存在することを意味する.

この様に Lie 群の言葉で述べられる Anosov 流を代数的な Anosov 流という. 3 次元ではもう一種類, 双曲的な $SL(2; \mathbb{Z})$ の元 A により T^2 を suspend して得られる solv-manifold (例 0.3.8 の脚注 19 を見よ) の上の代数的な Anosov 流がある. こちらは Anosov 流であることがより初等的に理解される. A は固有方向を 2 つ持つ. これらの方向は A の作用により拡大・縮小されるので, それらに平行な (T^2 内の) 直線族が \mathcal{F}^{uu} と \mathcal{F}^{ss} を定める. Suspension の方向が Anosov 流の方向に他ならない.

¹⁰⁹ 負曲率であることによる. より高い次元 (多様体が n 次元なら $(n-1)$ 次元の族), 又は負の一定でない曲率でもこの事情は同じである.

¹¹⁰ 高次元や負の一定でない曲率の場合も葉層構造を得るが, 定曲率でないと \mathcal{F}^u の微分可能性が無くなる. Lie 環 (の双対) の言葉で記述できるのは勿論定曲率の場合である.

定理 5.1.4 ([Mi1]) 3次元有向閉多様体 M が Anosov 流 ϕ_t を持つとする. このとき $W = [-1, 1] \times M$ は凸 symplectic 構造を持つ. つまり W は $\{\pm 1\} \times M$ の strong filling である. 一方, W 不連結な境界を持つので Grauert 領域ではない¹¹¹.

この定理の証明を視覚的にするため, 双接触構造と線形摂動の概念を導入する. Anosov 葉層は流れに沿って線形ホロノミーのかたまりのような葉層である. 従って, 特に Lie 群から定まる代数的 Anosov 葉層の場合には, 4 節で述べた葉層から接触構造へ一般的な摂動方法ではなく, 以下に定義する線形摂動により接触構造へ変形できる. 一般の Anosov 葉層の場合は, 葉層構造が C^1 -級でしかないので, 微分可能性の問題が生じるが, C^∞ -級の微分形式により C^1 -近似することにより以下の議論が成立する. 上の定理の証明にある脚注及び注意 5.2.5 を参照せよ.

定義 5.1.5 1 径数族による葉層構造の正・負の接触構造への‘線形’な変形を **線形摂動** と云う. 正確には, 1-形式の 1 径数族 $\{\alpha_t\}$ ($-\varepsilon < t < \varepsilon$) であって, 至る所 $\alpha_0 \wedge d\alpha_0 = 0$, $\frac{d}{dt}(\alpha_t \wedge d\alpha_t)|_{t=0} > 0$ を満たすものにより定義される平面場の 1 径数族 $\{\xi_t\}$ のことである. ここで $\beta = \frac{d}{dt}(\alpha_t)|_{t=0}$, $\alpha = \alpha_0$ とおけば, この条件は $\alpha \wedge d\beta + d\alpha \wedge \beta > 0$ と同値である.

代数的 Anosov 流の場合の様に, 変形の前後が葉層構造と横断的になる場合がある. その様な葉層構造からの連続変形若しくは**接触構造の葉層構造への収束**が本節の主題である. 正・負の接触構造が代数的 Anosov 葉層に付随している状況を, 接触構造の側からは次の様に定式化することが出来る.

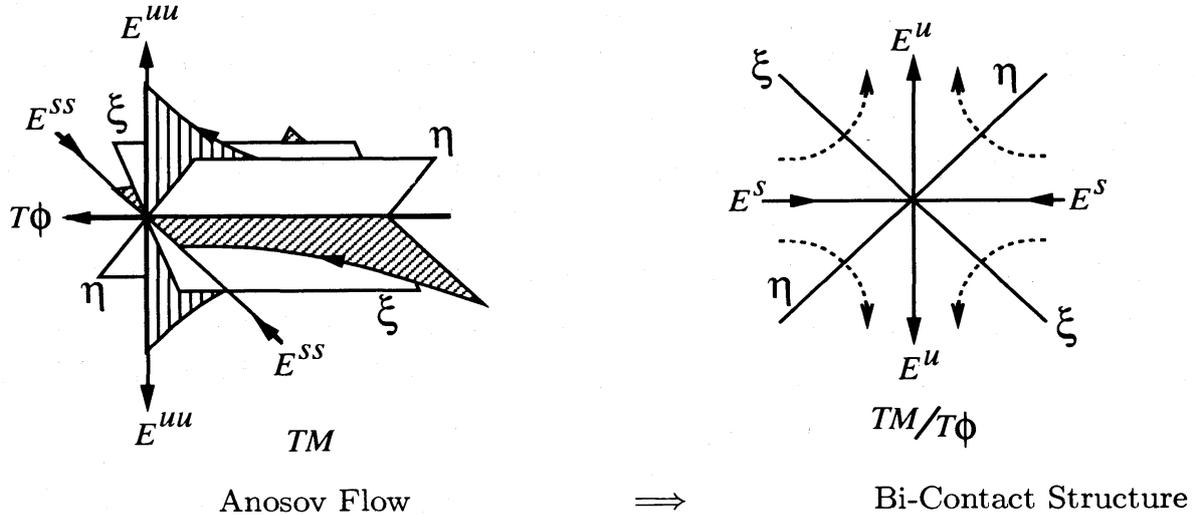
定義 5.1.6 3次元多様体 M 上の**双接触構造 (bi-contact structure)** とは, M に相反する向きを定める互いに横断的な 2 つの接触平面場の対 (ξ, η) ことである.

図 5.1.7 に示すように, Anosov 流に対し ξ と η を $T\phi$ を含み E^u と E^s に対して 45° になる 2 つの平面場とする¹¹². この様にして Anosov 流に付随する平面場の対 (ξ, η) を得るが, ξ, η は共に ϕ_t では保たれず, 補題 1.1.4 により次の定理が分かる. 証明については, 定理 5.2.3 (1) 及び注意 5.2.5 をみよ.

¹¹¹複素 n 次元 (実 $2n$ 次元) の Stein 多様体は, 狭義多重劣調和関数の Morse 理論よりその homotopy type は高々 n 次元である. 特に複素 2 次元以上では境界は連結であるが, この事実は Grauert 領域でも成立する. 3.2.2, 又は [P] を参照せよ. この定理は元来 Stein 性 若しくは Weinstein 性と完備凸性との差異を示すものとして位置付けられていた.

¹¹²このままでは平面場 E^u と E^s は一般には C^1 -級であることしか保証されないが, $T\phi$ を含む C^∞ -級平面場で C^1 -近似すれば, C^∞ -級平面場の対として以下が成立する.

図 5.1.7

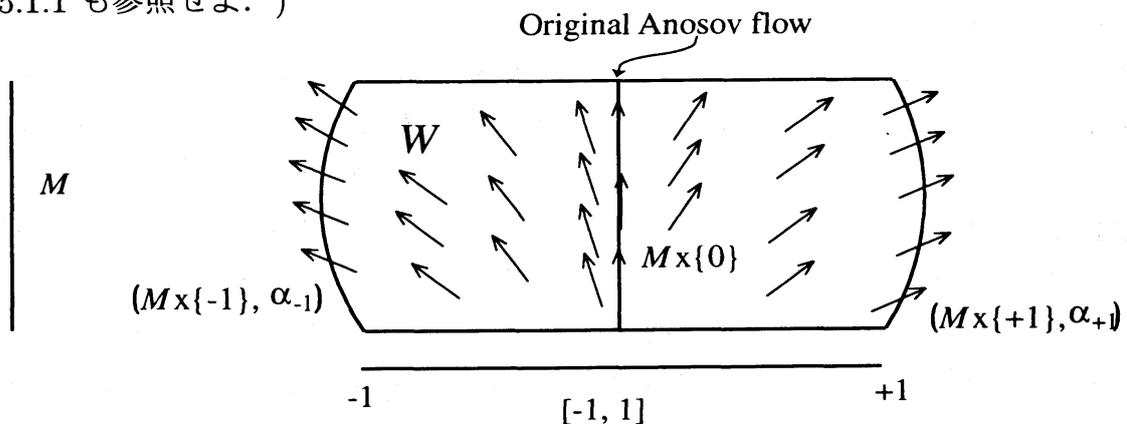


定理 5.1.8 ([Mi1]) Anosov 流に付随する平面場の対 (ξ, η) は双接触構造である.

定理 5.1.4 の証明 は概ね¹¹³ 次のようにすればよい. 不安定葉層 \mathcal{F}^u の安定葉層 \mathcal{F}^s による線形摂動

$$\alpha_t = \alpha^u + t\alpha^s, \quad \ker \alpha^u = E^u, \ker \alpha^s = E^s,$$

が $W = [-1, 1] \times M$ 上の凸 symplectic 構造 $\omega = d\lambda$ を与える. ここで λ は M 上の 1-形式の族 $\{\alpha_t\}$ を $W = [-1, 1] \times M$ 上の 1-形式と考えたものである. 境界 $\partial W = \{-1, 1\} \times M$ 上には, λ の制限である $\alpha_{\pm 1} = \alpha^u \pm \alpha^s$ が ξ と η を与える. (図 5.1.1 も参照せよ.)



Q.E.D.

¹¹³実際には Anosov 葉層の微分可能性に問題があり, このままでは若干問題が生じる. 弱 (不) 安定 Anosov 葉層は一般に接分布として C^0 -級であることしか保証できないが, 3次元の場合は C^1 -級であることが分かる [HPS]. 接触形式が C^1 -級で定義されるので, C^1 -位相に於いて C^∞ -級の接触形式で近似する.

Handel-Thurston ([HT]) に始まる一連の仕事により, Anosov 流の閉軌道を Dehn 手術して新たな Anosov 流を作ることができる. 従って, Lie 群から構成されるものの以外にも Anosov 流は非常に豊富に存在し, 特に殆ど総てのグラフ多様体上¹¹⁴には存在する. 但し Plante-Thurston の定理 [PT] により, Anosov 流を許容する 3次元多様体の基本群は成長が指数的でなければならない.

逆に上に示したような, 1-形式の 1 係数族による構成法で凸 symplectic 構造 が得られるのは Anosov 葉層に限られるのではないかと思われる. Plante-Thurston の定理を拡張した稲葉-土屋の定理 [IT] を使うと, そのような多様体の基本群の指数的成長が分かる (定理 5.1.10).

定理 5.1.9 1) (稲葉-土屋, [IT]) 余次元 1 の expansive な葉層構造を許容する閉多様体の基本群は指数的に成長する.

2) (Plante-Thurston, [PT]) 従って, 特に Anosov 流を許容する 3次元多様体の基本群は指数的に成長する.

定理 5.1.10 を述べる前に, 群の成長度と expansive な葉層構造について説明する. 有限生成群 Γ の生成元 $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ に対し, $G(n) = \#\{\gamma_1, \dots, \gamma_k \text{ の } n \text{ 個以下の積として表せる } \Gamma \text{ の元}\}$ とおき, **成長関数 (growth function)** と呼ぶ. $G: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ は広義単調増加である. 別の生成元に対して定義された成長関数を $H(n)$ とすると, ある正の定数 a, b, c, d に対して $G(n) \leq cH(an + b) + d$ を満たすことは容易に分かる. そこで, 単調増加関数の集合に, 上の様に定義域と値域の (1 次の係数が正の) 1 次変換でお互いを押さえあうもの同士を同値とする同値関係を導入しておく. 成長関数 $G(n)$ の属する同値類を Γ の **成長度 (growth)** という. 成長関数がある多項式 n^d で上から押さえられるとき **多項式成長度** を持つといい, 又, ある指数関数 $\exp(an)$ で下から押さえられるときは**指数的成長度** を持つと云われる. **多項式成長度** を持つ場合は, 成長関数を押さえる多項式の次数の下限として成長次数が定義される (整数とは限らない).

例えば, \mathbb{Z}^3 は 3 次の多項式成長を持つ. 一方, 双曲的曲面の基本群は指数的成長度を持つ¹¹⁵. これは以下の幾何学的な考察からも分かる. 連結 Riemann 多様体 N に勝手に基点 x_0 を選び, $V(r) = \text{vol}(\{x \in N; d(x, x_0) \leq r\})$ と置き, これを

¹¹⁴局所自由な S^1 -作用を許容する多様体を Seifert 多様体, その軌道空間への商写像を Seifert fibration という. 3次元の場合, 有限本の多重ファイバーを許す特異 S^1 -束と考えても同じである. 正則ファイバーの和となっている T^2 で Seifert 多様体を切り開き, T^2 の automorphism で貼り直して得られる多様体を **グラフ多様体** という.

¹¹⁵勿論, 自由群を含むことから容易に分かる.

Riemann 多様体 N の成長関数と呼び、上と同様の同値関係を導入すると、同値類は基点の取り方に依らず、成長度が定義される¹¹⁶. Compact 多様体に勝手に Riemann 計量を与え、普遍被覆に被覆としての Riemann 計量をとっておく. 基本群の作用の基本領域と基本群の生成元を良く見比べると、普遍被覆の Riemann 多様体としての成長度と、基本群の成長度は一致することが分かる¹¹⁷.

葉層構造の横断的な振舞いはしばしば多様体の基本群の成長度と影響しあう. ここで重要なのが expansive という性質である. Compact な多様体 M 上の余次元 1 葉層構造 \mathcal{F} に対し、 M 上の Riemann 計量をとり、これにより \mathcal{F} に直交する 1 次元葉層 T をとっておく. 各点 P を通る横断的多様体として葉層 T の P を通る葉 T_P (に於ける P の近傍) を考えることにし、これらの間の微分同相写像として \mathcal{F} の葉上の曲線に沿うホロノミー変換を考えることにする. 例えば、 T^3 上の線形葉層の場合、標準的に計量をとっておけばホロノミーは常に等長写像となる. 一方、代数的 Anosov 葉層の場合、 \mathcal{F}^u に対して $T = \mathcal{F}^{ss}$ ととれるので、ホロノミーが拡大・縮小を引き起こすことが分かる. 後者の場合を次の様に一般化する: (4.2 節の記号に従う.)

条件 (E): ある正の定数 ε が存在して、任意の T_P 上の任意の異なる 2 点 A と B は、 P を通る \mathcal{F} の葉 L_P 上のある曲線 γ (端点を P, Q とする) に沿うホロノミー $h_\gamma: T_P \rightarrow T_Q$ により、 T_Q 上での距離が ε 以上の 2 点 $h_\gamma(A)$ と $h_\gamma(B)$ にうつされる.

この条件 (E) が満たされるとき、葉層構造 \mathcal{F} は **expansive** であると云われる. 条件 (E) は M の Riemann 計量の取り方には依らず、 (M, \mathcal{F}) だけに依存する性質である. ホロノミーが無い葉層は expansive でないが、ホロノミーがあっても expansive とは限らない¹¹⁸.

定理 5.1.10 ([Mi4]) $W = [-1, 1] \times M$ 上の凸 symplectic 構造 $\omega = d\lambda$ が M 上の葉層構造 \mathcal{F} の変形 α_t により $\lambda = \alpha_t$ として与えられたとする. このとき、変形は線形摂動であり、 $\beta = \dot{\alpha}|_{t=0}$ は α と横断的になり、変形の前後に現れる正・負の接触構造が双接触構造を与える. 更に基本群 $\pi_1(M)$ は指數的成長度を持つ.

証明 $\lambda = \alpha + t\beta$ としておくと

¹¹⁶ 実際より強く、Riemann 計量の quasi-isometry 類に対して成長度が一意にきまる.

¹¹⁷ 本稿に登場する他の群では、 $Solv$ の基本群は指數的成長度を、 Nil の基本群は多項式成長度を持つ. 葉層構造論の立場からは、各葉の Riemann 多様体としての成長度も大変重要で興味深い研究対象である.

¹¹⁸ Reeb 葉層 \mathcal{F}_R は expansive ではない. 読者への演習問題とする.

$$\omega^2 = d\lambda^2 = 2(d\alpha \wedge dt \wedge \beta + tdt \wedge \beta \wedge d\beta)$$

となる. これが $t = 0$ の近傍で体積要素を与えるためには $d\alpha \wedge dt \wedge \beta > 0$ が必要十分である. 一方, α の可積分条件により, ある 1-形式 η ¹¹⁹ により $d\alpha = \alpha \wedge \eta$ となるから, 結局 M 上で $\alpha \wedge \eta \wedge \beta > 0$ が分かる. 特に $\alpha \wedge \beta \neq 0$ であるから線形摂動であることが従う.

さて, 葉層構造論でよく知られている通り, 1-形式 η は葉層構造の横断方向の長さの拡大率を測るものである. そこで, 各葉 ($\alpha = 0$) 上に $\beta = 0$ で定まる方向のベクトル場 Y を $\iota_Y \text{dvol}_M = \alpha \wedge \beta$ により定義すると, M 上至る所 $\eta(Y) > 0$ となる. 即ち, ベクトル場 Y に沿ってホロノミー変換を追うと, 体積の無限小拡大率が $\exp \eta(Y) > \exists c > 1$ となることを示している. よって葉層構造 \mathcal{F} は expansive であり, 稲葉-土屋の定理から結論が従う. Q.E.D.

5.2 射影的 Anosov 流と双接触構造

定理 5.1.8 とは逆に, 双接触構造 (ξ, η) が与えられたとき, それらの交わりとして得られるベクトル場 (直線場) $T\phi = \xi \cap \eta$ が流れ ϕ_t を生成するが, これは Anosov 流を定めるであろうか? 答は No! であって, 正解は射影的 Anosov 流という概念である.

定義 5.2.1 (射影的 Anosov 流) 3次元有向閉多様体 M 上の非特異流 (M, ϕ_t) が射影的 Anosov 流 (Projectively Anosov flow, PA 流) である¹²⁰とは, 流れの射影的法束 $S^1(TM/T\phi) = (TM/T\phi \setminus 0)/\mathbb{R}_+$ に誘導される射影化された微分の流れ $P\phi_t$ が Anosov 流の場合と同様に以下の状況を満たすときを云う.

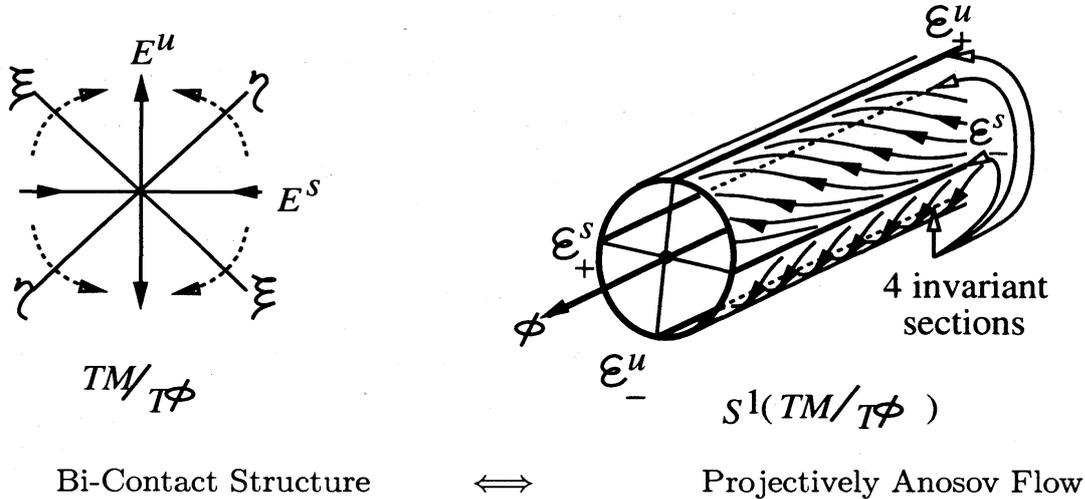
- (1) 流れの射影的法束 $S^1(TM/T\phi)$ に 4 つの $P\phi_t$ -不変な互いに交わらない連続切断 \mathcal{E}_\pm^u と \mathcal{E}_\pm^s (2 つずつ互いに他の対蹠) が存在する.
- (2) この 4 つの切断に含まれない点の軌道は総て, $t \rightarrow \infty$ [resp. $t \rightarrow -\infty$] において \mathcal{E}_\pm^u [resp. \mathcal{E}_\pm^s] に吸引される.

このとき \mathcal{E}_\pm^u と \mathcal{E}_\pm^s は自然に ϕ_t -不変な平面場 E^u と E^s を定義することに注意する. $TM = E^u + E^s$ を PA 流 ϕ_t の弱 Anosov 分解と呼ぶ.

¹¹⁹本稿では ' η ' は平面場を表すために使う文字であったが, 葉層構造論の伝統に従い, この証明に於いてだけ α の可積分条件に現れる 1-形式を表すことにする.

¹²⁰'Projectively Anosov flow' という概念は [Mi1] で定義された. その後, Eliashberg-Thurston は [ET] に於いて同値な概念を 'Conformally Anosov flow' と呼んだ. Conformal Anosov flow という全く別の大分昔から存在する概念もある.

図 5.2.2



定理 5.2.3 ([Mi1], [Mi4]) PA 流と双接触構造は同値な概念である。即ち、
 1) Anosov 流の場合と同様に PA 流から双接触構造 (ξ, η) が得られる。
 2) 双接触構造 (ξ, η) から定義される流れ ϕ_t (即ち $T\phi = \xi \cap \eta$ となる流れ) は PA 流である。

証明 1) 先ず、 $S^1(TM/T\phi)$ 上に二つの切断 \mathcal{X} と \mathcal{Y} を、 \mathcal{X} が \mathcal{E}_+^u と \mathcal{E}_+^s に、 \mathcal{Y} が \mathcal{E}_+^u と \mathcal{E}_-^s に挟まれる位置に¹²¹、 \mathcal{E}_+^u と \mathcal{E}_-^s とは交わらないようにとる。法束の射影化 $S^1(TM/T\phi)$ へ誘導される流れを $P\phi_t$ と表すと、PA 流の定義により $T > 0$ を十分大きくとれば $P\phi_T(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X} = \emptyset, P\phi_T(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y} = \emptyset$ となるようにできる。

さて、この T により、 X と Y を平均化したい。射影化が各 X と Y に一致するような法束 $TM/T\phi$ の切断 X' と Y' をとる。これらの流れ $T\phi_t$ による平均化 X と Y を

$$X(x) = \frac{1}{T} \int_0^T T\phi_{-t}(X'(\phi_t(x)))dt, \quad Y(x) = \frac{1}{T} \int_0^T T\phi_{-t}(Y'(\phi_t(x)))dt$$

により定め、これらの射影化を ξ 及び η とする。こうすると、 $S^1(TM/T\phi)$ 上で流れ $P\phi_t$ に対して ξ と η は共に横断的となることが直接計算することにより確かめることができ、補題 1.1.4 により、接触構造を定めることが分かる

2) $TM/T\phi$ の大域基底 $\langle X, Y \rangle$ を各点で $X \in \xi, Y \in \eta$ となるように定める。この

¹²¹a priori には \mathcal{E}_\pm^s の \pm は対蹠を表す以上の意味はなかったので、後で ξ が正、 η が負となるように選んだことにする。

とき、必要ならどちらか一方を ± 1 倍で取り替えることにより $T\phi_t(X)$ と $T\phi_t(Y)$ は共に $t > 0$ のとき X と Y が作る第一象限にあるとしてよい。

$TM/T\phi$ 上に誘導される流れ $T\phi_t$ の $t = 1$ の写像をこの基底により行列表示するが、ここでは、実際に問題なのは射影化された S^1 -束上での挙動であるから、これらの行列は拡大縮小で調整して常に $SL(2; \mathbb{R})$ に含まれるとしてもかまわない。

大域切断 X 及び Y に対し

$$T\phi_1(X) = aX + bY, \quad T\phi_1(Y) = cX + dY$$

とおけば、 a, b, c, d は多様体 M 上の連続関数であり、上の注意により 2×2 行列値連続関数 $A(p) = \begin{pmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{pmatrix}$ はその値を $SL(2; \mathbb{R})$ にとると仮定してよい。

さて、 $T\phi_t(X)$ と $T\phi_t(Y)$ が $t \rightarrow \infty$ のときに M 上で $S^1(TM/T\phi)$ の切断として一様にある連続切断に収束することを示したい。そのためには、 $TM/T\phi$ の切断として $T\phi_t(X)$ と $T\phi_t(Y)$ とがなす角度が一様に 0 に収束することを示せばよい。各点 p に対して行列 $A(p)$ は線形変換 $T\phi_1: (TM/T\phi)_{\phi^{-1}(p)} \rightarrow (TM/T\phi)_p$ を表すことに注意して、 $T\phi_n(X)$ と $T\phi_n(Y)$ ($n \in \mathbb{N}$) を並べて成分表示すると、

$$\left((T\phi_n(X))_p, (T\phi_n(Y))_p \right) = A(p) \cdot A(\phi^{-1}(p)) \cdot \cdots \cdot A(\phi^{-n+1}(p))$$

となる¹²²。一般に1次独立なベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とのなす角を θ とおけば、 $\sin^2 \theta = (ad - bc)^2 (a^2 + c^2)^{-2} (b^2 + d^2)^{-2}$ となるから、これに次の補題をこれに適用すると2) の証明が終わる。以下の補題が適用できるのは M が compact だからである。

Q.E.D.

補題 5.2.4 ($SL(2; \mathbb{R})$ の補題, [Mi1])¹²³ 任意の正の実数 ε , 任意の自然数 k , 及び $a_i, b_i, c_i, d_i \geq \varepsilon$ を満たす任意の

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{R}), \quad i = 1, \dots, k,$$

の積 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A_1 \cdot \cdots \cdot A_k$ に対して以下が成立する。

$$\text{Tr} A > ad > (1 + 2\varepsilon^2)^{k/2}, \quad ab, ac, bd, bc > \varepsilon^2 (1 + 2\varepsilon^2)^{k-1}.$$

注意 5.2.5 上の定理の (1) の証明は勿論、定理 5.1.8 の証明を含む。この証明の平均化のアイデアは Anosov 流の定義の流儀にも関わっており、定理 5.1.8 の場合の証明を若干異なる角度から見ることと関係するので、ここで注意しておく。

¹²²これから分かる通り、各点の fibre では流れが生成されているわけではないことが、証明を面倒にしている。

¹²³このとても易しい補題は力学系理論などで応用される機会が今後も必ずあるだろう。

ϕ_t が Anosov 流であることの定義を、定義 5.1.2 に与えたものよりは若干弱く、Anosov 分解がある正の実数 c と d に対し、

$$\begin{aligned} \forall v \in E^{uu}, \quad \forall t > 0, \quad \|(\phi_t)_*v\| &\geq \exp(ct - d)\|v\|, \\ \forall v \in E^{ss}, \quad \forall t < 0, \quad \|(\phi_t)_*v\| &\geq \exp(ct - d)\|v\|, \end{aligned}$$

を満たす、とするのが普通である。すぐ分かるように、こう定義しておく（定数 c と d を取り替えれば）Riemann 計量の取り方に依らずにこの条件が満たされる。

然しこの弱い定義から定義 5.1.2 が従うことは自明ではない。ここに平均化のアイデアを使う。多様体 M の compact 性と弱い定義より、任意の正の定数 c' （大きい必要はない）と十分大きい正の定数 T に対して、任意の $v \in E^{uu}$ と $w \in E^{ss}$ が $\|(\phi_T)_*v\| \geq \exp c'\|v\|$ と $\|(\phi_{-T})_*w\| \geq \exp c'\|w\|$ が満たされる。この T を使って Riemann 計量 g を平均化する、即ち、

$$\tilde{g}(u, v) = \frac{1}{T} \int_0^T g((\phi_t)_*(u), (\phi_t)_*(v)) dt \quad \forall u, v \in TM$$

と置く。すると適当に定数 $c'' > 0$ を取り直せば、平均化された Riemann 計量 \tilde{g} と c'' に対して強い方の定義が成立する。

更にこの \tilde{g} について E^u と E^s の間に 45° の位置にある平面場を ξ', η' とすれば C^1 -級の接触平面場となる。即ち、これらを定義する C^1 -級の 1-形式 α, β が存在して、 $\alpha \wedge d\alpha > 0, \beta \wedge d\beta < 0$ となる。従って、 ξ' と η' を C^∞ -級の平面場 ξ と η により C^1 -近似しておけば C^∞ -級の双接触構造 (ξ, η) を得る。

PA 流は Anosov 流 よりもはるかに豊富に存在する。Anosov 流にならない PA 流で最初に見つかったものは、Anosov 流を閉軌道の近傍で修正してその閉軌道を吸引的なものに作り変えたものであったが¹²⁴、より決定的な例が T^3 上に発見された。

例 5.2.6 (Propellor 構成法, [ET], [Mi1]) T^3 上に例 0.3.8 にある

$$\xi' = \xi_k = \ker[\alpha' = \cos(kz)dx - \sin(kz)dy], \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$\eta = \xi_{-l} = \ker[\beta = \cos(lz)dx + \sin(lz)dy], \quad (l \in \mathbb{N})$$

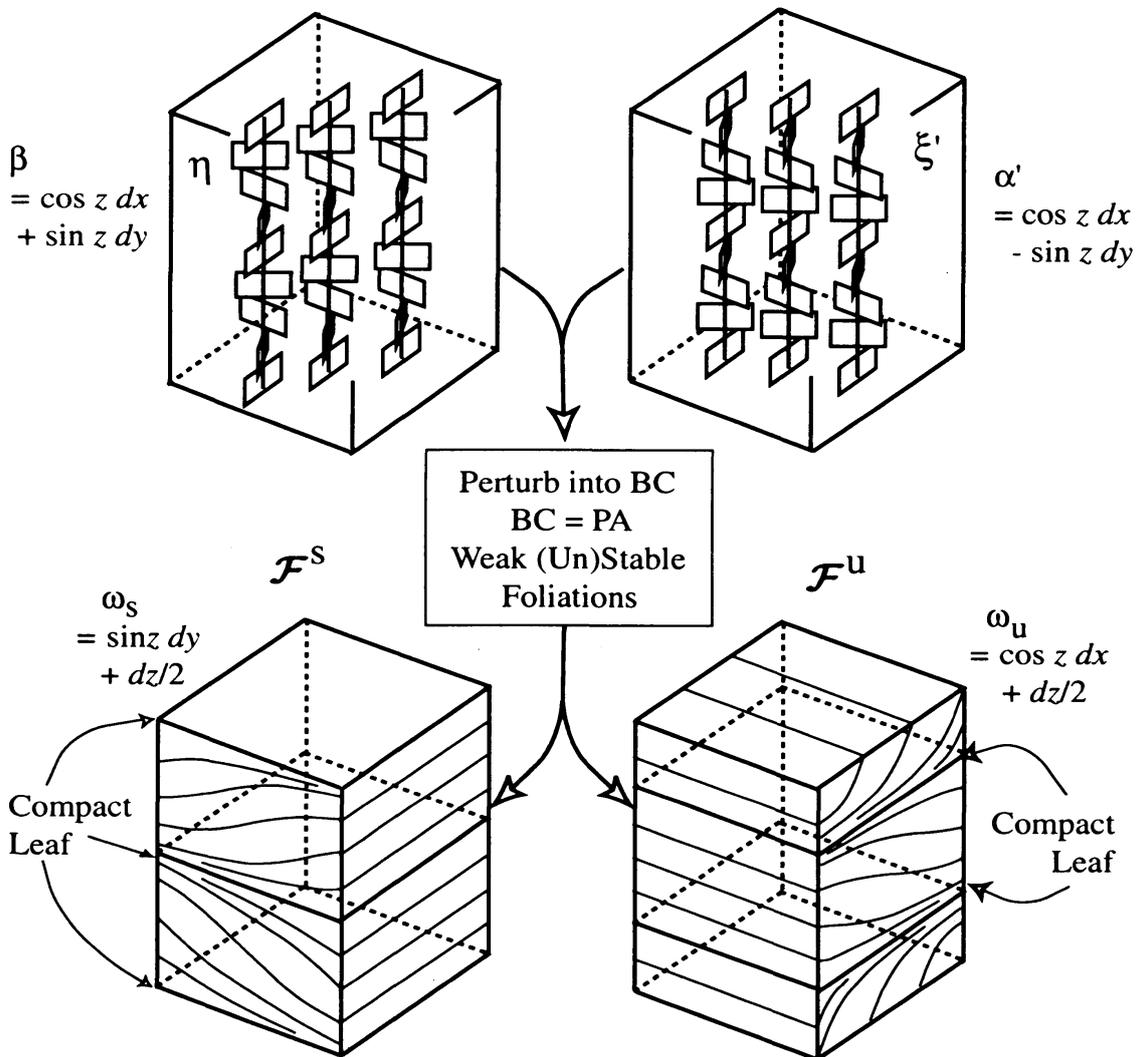
をとる。このままでは互いに横断的にならないので $\alpha = \alpha' + \varepsilon dz$ ($\varepsilon > 0$) という具合に摂動して $\xi = \ker[\alpha]$ を定義する。すると、常に $\frac{\partial}{\partial z} \notin \xi, \frac{\partial}{\partial z} \in \eta$ となるので ξ と

¹²⁴Franks-Willims [FW] 及び A. Zeghib (1993 年 11 月) による。

η は横断的となり (ξ, η) が双接触構造を定める. $k = l$ であれば, 以下の図にあるように簡単な三角関数で表示される葉層構造を得る¹²⁵.

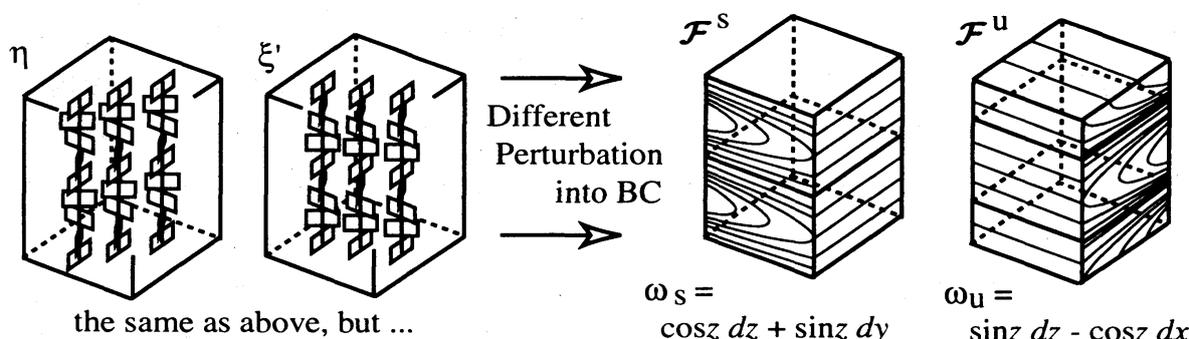
T^3 の基本群 \mathbb{Z}^3 の成長は勿論 3 次多項式であるから, Anosov 流を許容しない. それ以上に特徴的なことは, 上の構成で摂動する前に ξ' と η が接していた点の集合が, 最終的に得られた葉層の compact 葉として現れることである. Anosov 流の弱 (不) 安定葉層は compact 葉を持たない (読者への演習問題).

図 5.2.7 (Propellor 構成法-1)



¹²⁵最近では, 野田の定理 5.3.4 に代表される通り, このような構造を葉層構造から出発して調べるのが主流であるが, この横断的な葉層構造の組は本当に上のようにして双接触構造から PA 流を計算し, 不変な平面場を探す, という具合に見つかった. 摂動してから得られたベクトル場の極限操作でこの様にきれいな葉層構造が現れたこと, 発見できること自体に, 当時は本当に驚いた.

図 5.2.8 (Propellor 構成法-2)



ξ' を摂動して η と横断的になるようにするためには、 ξ' と η が接している部分 (この例の場合は 4 枚の水平な T^2) だけで dz 成分を付け加えればよいので、その連結成分ごとに dz の係数の符号を変えることができる。すると上の図 5.2.8 の様な結果となる。 $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ 共に 2 枚の compact 葉で二つの dead end component に分解されることが観察される。即ち、PA 流が微分可能性の高い弱 (不) 安定葉層を持つ場合でも taut になるとは限らないことが分かる。

T^3 以外の総ての S^1 上の T^2 -束上にもこの propellor 構成法により双接触構造を作ることができる。 $T^2 \times \mathbb{R}$ から始めて $\{z = 0\}$ と $\{z = 2\pi\}$ を $SL(2; \mathbb{R})$ の元でねじって同一視するとき、固有方向にうまくあうように $\alpha' = \cos(kz)dx - \sin(kz)dy$ と $\beta = \cos(lz)dx + \sin(lz)dy$ の係数 k と l をしかるべく有理数にとればよい。

S^3 上にも弱不安定葉層構造が標準的な Reeb 葉層、 (ξ, η) の一方が標準的接触構造 ξ_0 となるものの具体的構成¹²⁶が知られているが、実は、次の Hardorp の定理に Eliashberg-Thurston の接触構造への摂動を適用すれば、定理 5.2.10 を得る。

定理 5.2.9 (Hardorp, [Ha]) 任意の有向閉 3 次元多様体上に total foliation¹²⁷ が存在する。

定理 5.2.10 任意の有向閉 3 次元多様体上に双接触構造が存在する。

注意 5.2.11 S^3 上の PA 流を中心にして一般の双接触構造を考えてみると、大分混迷している状況が見えてくる。

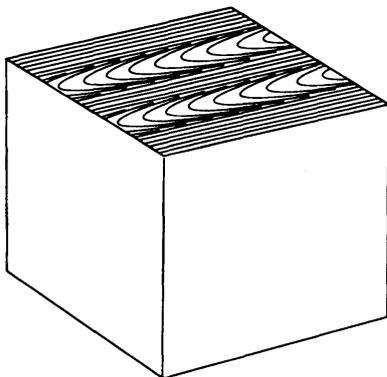
¹²⁶ 皆川 宏之 氏による。二つの Reeb 葉層を至る所横断的に配置することは容易であるが、PA 流を得るには一方の微分構造を崩さねばならない。

¹²⁷ Total foliation とは至る所三つの接平面が一次独立な余次元 1 葉層の三つ組み $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ を指す。

- 1) S^3 上の葉層構造は Novikov の定理により必ず Reeb 成分を持つ。したがって、Anosov 流の場合とは異なり、PA 流から葉層構造を得ても凸性が期待できない。
- 2) Eliashberg の一意性定理 6.2.1 によれば S^3 上の正・負の tight な接触構造は共に一意的であるが、これらは各 Lie 群 S^3 の左・右不変な接触構造であり、平面場としてのホモトピー類が Hopf 不変量で 1 だけ異なる。従って tight なもの同士で双接触構造を形成することはない¹²⁸。少なくともどちらかが OT である。
- 3) 実は一般に PA 流に付随する弱 Anosov 分解 $E^u + E^s$ には微分可能性が保証できない。これらは補題 1.1.4 により可積分ではあるが、積分多様体が分岐を起こし得る。実際その様な例が幾らでも存在する。又、分岐を起こさない葉層構造を与える PA 流の中にもその葉層構造が微分可能性を絶対持ち得ないものも存在する。実はこれらの事柄が、上の二つの注意と深く関係している。

一般の双接触構造及び PA 流の弱 Anosov 分解に良い凸性は期待できないのである。

図 5.2.12



Irregular Projectively Anosov Flow

左図の様に、 T^2 上に二つの 2 次元 Reeb 成分を持つ特性葉層を準備し、これに propellor 構成法を適用すると、弱 Anosov 分解を与える‘葉層構造’の葉は必然的に分岐を起こす。

構成より、最初に与える T^2 上の特性葉層は PA 流の流線となり、 T^2 は一枚の葉となっている筈である。葉層構造が与えられていると仮定して、この T^2 -葉の holonomy を一つの 2 次元 Reeb 成分の両側にある閉軌道上で計算してみると、拡大・縮小が逆転していることが分かる。即ち、この T^2 -葉から分岐して出る積分多様体が存在する。

5.3 双接触構造の Tight 性

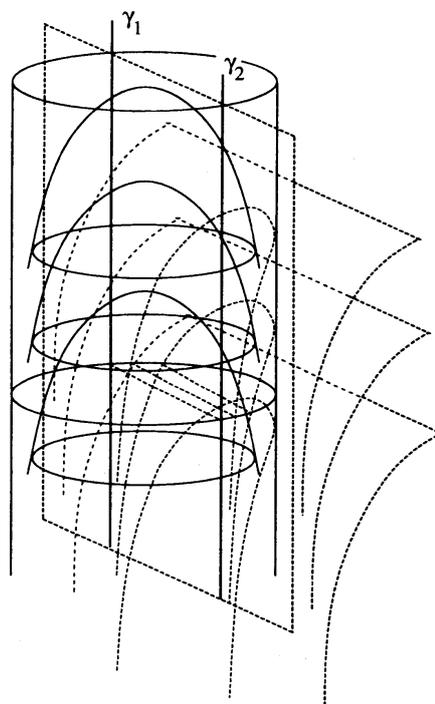
PA 流の弱 Anosov 分解に微分可能性を仮定すると葉層構造・接触構造の双方に凸性が現れる。

¹²⁸(ξ, η) を双接触構造 とすれば ξ と η は平面場のホモトピー類としては等しい。

定理 5.3.1 ([Mi4]) PA 流の弱 Anosov 分解 $E^u + E^s$ が C^1 -級であるとする. このとき E^u , E^s が定める葉層 \mathcal{F}^u , \mathcal{F}^s はどちらも Reeb 成分を持たない.

証明は, 田村-佐藤 ([TS]) による Reeb 成分に横断的な葉層の分類に基づく.

右図の実線で描かれた葉を持つ葉層を \mathcal{F}^u とし, 破線の葉層 \mathcal{F}^s が \mathcal{F}^u に横断的に交わるとすれば, \mathcal{F}^u の Reeb 成分の右半分のような部分, 所謂 **half Reeb component** が必ず現れる ([TS]). Half Reeb component 上の閉軌道 γ_1 と γ_2 に沿って \mathcal{F}^u と \mathcal{F}^s の線形ホロノミーを調べると PA 流であることに矛盾する.



Q.E.D.

定義 5.3.2 (正則 PA 流, [NT]) 上の定理の仮定を満たす PA 流を **正則な PA 流** と呼ぶ. 本稿では以後断らない限り C^∞ -級の弱 Anosov 分解を持つものを指すことにする¹²⁹.

正則な PA 流であっても, 図 5.2.8 (Propellor 構成法-2) に見るように, dead-end component を許容しうるので, 双接触構造の fillability は望めないかもしれないが, 上の定理と Eliashberg の定理 4.4.1 と以下に述べる野田の定理の証明は次の予想を強く支持している.

予想 5.3.3 正則な PA 流に付随する双接触構造 (ξ, η) は共に tight のものからなる.

正則な PA 流においては, 凸性のみならず, 分類まで可能なことがある. T^3 上の propellor 構成法 5.2.6 に於いて, $k=l$ とすると (例外的に) 実解析的な (不) 安定葉層 \mathcal{F}^u , \mathcal{F}^s が現れる. これについて野田 健夫は次の分類定理を示した.

¹²⁹葉層構造論, 特に Anosov 葉層が関わる理論では, 微分可能性が非常に重要かつ微妙である. C^0 , C^1 , $C^{1+\epsilon}$, C^2 , C^3 , C^∞ , ... 総て全く事情が異なってくる. 又, 葉層構造の微分可能性のみならず, 葉層微分同相の微分可能性も全く同様に微妙で重要である. 然し本稿では以後 C^0 -級であるか C^1 -級であるかに起因する事態に着目することにし, 後者の場合は C^∞ -級であることまでを仮定して煩雑さを避けることにする.

定理 5.3.4 (野田, [N]¹³⁰) T^3 上の正則 PA 流は T^2 上の線形葉層に propeller 構成法を適用して得られ, 付随する双接触構造 (ξ, η) は tight なもの同士からなり, Giroux 及び神田の分類定理 6.2.5 にある ξ_k と ξ_{-k} である.

Propeller 構成法は T^3 以外の S^1 上の T^2 -束に於いても適用できた. 野田はその場合にも上の議論を拡張し, 特に双曲的な $SL(2; \mathbb{Z})$ の元による suspension として得られる solv-manifolds(例 0.3.8 の脚注 19 及び例 5.1.3 を見よ) に於いては compact 葉の存在を仮定すると同様の分類が可能であることを示している.

野田と坪井は更に議論を進め, 元々代数的な Anosov 流が存在していた solv-manifold と双曲曲面の単位接円周束の場合に compact 葉を持たない正則 PA 流をほぼ分類して見せた.

\mathcal{T}_g を種数 $g \geq 2$ の有向閉曲面 Σ_g 上の双曲構造の空間, 即ち, 所謂 **Teichmüller 空間** とする. $\mathcal{T}_g \ni h$ を決めると単位接円周束 $S^1_h T\Sigma_g$ が定まるが, これは接束 $T\Sigma_g$ の射影化と見なせるから, 異なる双曲構造 $h_1, h_2 \in \mathcal{T}_g$ に対しても一つの空間 $S^1 T\Sigma_g = S^1_{h_i} T\Sigma_g$ ($i = 1, 2$) として扱うことが出来る. さて, 各双曲構造 $h \in \mathcal{T}_g \cong \mathbb{R}^{6g-6}$ に対して, $S^1 T\Sigma_g$ 上の測地流 ϕ_h が代数的な Anosov 流となり, 弱 (不) 安定葉層 $\mathcal{F}_h^s, \mathcal{F}_h^u$ が得られ, 互いに横断的である. いま, 二つの双曲構造 $h_1, h_2 \in \mathcal{T}_g$ が十分近ければ, $\mathcal{F}_{h_1}^s$ と $\mathcal{F}_{h_2}^u$ は互いに横断的であり, $\mathcal{F}_{h_1}^s \cap \mathcal{F}_{h_2}^u$ は 1 次元葉層, 従って (parameter を無視すれば) 流れ ϕ_{h_1, h_2} を定める. $h_1, h_2 \in \mathcal{T}_g$ が更に近ければ ϕ_{h_1, h_2} は PA 流となり, もっと近ければ Anosov 流となる. この様な Anosov 流の変形を **quasi-Fuchs 変形** 又は **quasi Fuchsian flow** という (E. Ghys, [Gh]).

定理 5.3.5 (野田-坪井, [NT]) 1) Solv-manifold 上の compact 葉を持たない正則 PA 流は代数的 Anosov 流に限る.

2) $S^1 T\Sigma_g$ 上の compact 葉を持たない正則 PA 流は quasi Fuchsian flow に限り, 実際 Anosov である.

更にこの定理の仮定から PA 流であることを外し, compact 葉を持たない二つの葉層構造が横断的に存在することだけを仮定するとどうなるかが松元-坪井により調べられている.

¹³⁰野田の結果はここに述べるよりはるかに精密で, 付随する葉層の構造を完全に決定する. 即ち, 図 5.2.7, 5.2.8 に現れる葉層の unit を組み上げたものとして分類される.

定理 5.3.6 (松元-坪井, [MT]) 1) Solv-manifold 上に compact 葉を持たない二つの葉層構造が横断的に存在すれば, 代数的な Anosov 流の弱不安定葉層と弱安定葉層を一斉に isotopy 変形したものに他ならない.

2) $S^1T\Sigma_g$ 上の compact 葉を持たない互いに横断的な二つの葉層構造で正則 PA 流を定めないものが存在する.

正則 PA 流はこの様に葉層構造論の枠組みで進展を始めているが, 接触構造の立場からは非正則なものを調べる必要があるだろう. 例えば, S^3 上の双接触構造として (ξ, η) が共に OT なもの, OT と tight の組み合わせのものどちらもすぐ構成できる (演習問題). ところが, 今のところ平面場のホモトピー類としては正・負の標準的接触構造が属する二つの類しか例が知られていない.

問題 5.3.7 双接触構造 (ξ, η) として実現可能な平面場のホモトピー類を求めよ. 特に S^3 の場合どうか?

極めて似ている (解け方によっては同じ問題なのかも知れない) が次の問題も自然である.

問題 5.3.8 横断的な葉層構造の組 $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ として実現可能な平面場のホモトピー類を求めよ. 特に S^3 の場合どうか?

6 Eliashberg・Giroux・神田らによる3次元接触トポロジー

Eliashberg と Gromov は凸な symplectic 構造の類似として凸な接触構造の概念を定式化し [EG], Giroux は任意の有向閉3次元多様体上にそれが存在することを証明した [Gi1]. この概念の価値は未だに不明だが, その際に Giroux により生み出された凸曲面の理論は強力で, 3次元接触構造の位相的理論¹³¹には不可欠となった. 葉層構造 (M, \mathcal{F}) に埋め込まれた曲面 S を摂動しても特異点を除けば \mathcal{F}_S の様子は変わらないが, 接触構造 ξ の場合は ξ_S が捻れていく. この事実が接触構造の位相的な扱いの基本であるが, 逆に直観的に分かり難く大きな難点ともなっている. 凸曲面の理論はそこを見事に整備した理論ともいえる¹³². 本節ではこの凸曲面の理論の一部と3次元接触トポロジーに於ける位相的な結果の幾つかを紹介する.

6.1 Giroux による凸曲面の理論

定義 6.1.1 3次元接触多様体 (M, ξ) に埋め込まれた閉曲面 S が凸曲面であるとは, S に横断的な接触ベクトル場 X が存在することである.

このとき, 接触ベクトル場 X は S の近傍の外で0となるようにできる (0.2.7) ので, $S \times \mathbb{R}$ から M への埋め込みが得られ, その上に $\xi = \ker \alpha$ を制限すれば \mathbb{R} -不変な接触構造となっている. 一方接触ベクトル場 X に対して $C_X = \{x \in M; X_x \in \xi_x\} = \{x \in M; \alpha(X_x) = 0\}$ を接触ベクトル場 X の特性曲面, 凸曲面 S との交わり $\Gamma = S \cap C_X$ を S の分割 (dividing curves) と呼ぶ.

特性曲面 C_X は X -不変で, $X \neq 0$ に於いてはなめらかな曲面だから¹³³ 凸曲面 S とは横断的に交わり, 特に S が閉曲面の場合は Γ は特性葉層 ξ_S と横断的に交わる特異点のない何本かの単純閉曲線となる. 分割 Γ は S を二つの領域 $S_{\pm} = \{x \in S; \pm \alpha(X_x) > 0\}$ に分けるが, S に X が定める向きの面積要素 $dvol_S$ をうまく指定するとこの分割は ξ_S を与える特異ベクトル場 Y ($\iota_Y(dvol_S) = \alpha$ により定まる) の発散により $S_{\pm} = \{x \in S; \pm \operatorname{div}(Y)_x > 0\}$ と記述できる. 図 4.1.1 参照.

¹³¹Tight な接触構造の分類・手術による構成に威力を発揮する.

¹³²接触トポロジーの一つの特徴として, 重大な誤りを犯し易いことが挙げられる. Giroux はその反例の一人だと思われる.

¹³³局所的に α を X -不変にとれるので $0 = \mathcal{L}_X \alpha = d_X \alpha + \iota_X d\alpha$ となる. $\alpha(X_x) = 0, X_x \neq 0$ は第2項 $\neq 0$ を意味するから, 点 x は特性曲面 C_X の定義関数 $\iota_X \alpha = \alpha(X)$ の臨界点ではない.

補題 6.1.2 ([Gi1]) 逆に, ある閉曲面 S 上にこの様な特異ベクトル場 Y と互いに交わらない単純閉曲線の和集合 $\Gamma = \{div(Y) = 0\}$ が与えられれば, $S \times \mathbb{R}$ 上に X -不変な接触構造 ξ で, ξ_S が Y により与えられ, Γ を分割とするものが本質的には一意に存在する. ここで, X は \mathbb{R} -方向への平行移動を生成するベクトル場を表す.

接触多様体に埋め込まれた曲面 S に対し, “ S が凸曲面である” という性が十分一般的であることが次の様に分る.

命題 6.1.3 ([Gi1]) 1) ξ_S を与える特異ベクトル場 Y が以下の二条件¹³⁴を満たせば S は凸曲面である.

- (1) 極限集合は特異点か閉軌道だけであり, いずれの場合も力学系の意味で双曲的である.
- (2) 鞍点同士, 即ち, 指数 -1 の特異点同士をつなぐ軌道はない.

2) 任意の埋め込まれた閉曲面は C^∞ -位相で小さく摂動して凸曲面にできる.

逆に, 特性葉層が線形葉層となる 2 次元トーラス (pre-Lagrangian と呼ばれる) や閉軌道が積み重なった部分を持つ特性葉層を誘導する曲面は凸曲面でないことが計算により簡単に分かる.

凸曲面 S に対し定義 6.1.1 にある様な $S \times \mathbb{R}$ からの埋め込みを得るが, 滑らかな関数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ のグラフとして得られる別の埋め込み $S \cong S_f$ も同じ分解 Γ を持つ凸曲面である. このとき逆に,

命題 6.1.4 ([Gi1]) 凸曲面 S 上に別に与えられた特異ベクトル場 Y' が, S の分割 Γ と (補題 6.1.2 の意味で) 良い位置にあったとする. このとき, ある関数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ のグラフとして得られる凸曲面 $S_f \cong S$ がこのベクトル場 Y' を与える.

Tight な接触構造 (M, ξ) に凸曲面として埋め込まれた 2 次元球面 $S \cong S^2$ の構造を考えてみよう. $S \setminus \Gamma$ の連結成分のうちの一つを S' とする. S' 内の ξ_S の特異点の正負は一致しているので Elimination Lemma 2.2.8 を注意して使えば, 特異点は焦点 (focal, 指数 1) 一つ, 又は, 鞍点 (saddle, 指数 -1) のみという様にできる. 又, 鞍点をつなぐ軌道が存在しないようにすることも C^∞ -位相で小さい摂動により容易

¹³⁴このとき Morse-Smale 型と呼ばれる. (1) の ‘双曲的’ とは, ベクトル場の特異点に於いてはベクトル場が生成する流れの time 1 map について, また, 周期軌道についてはその Poincaré map について, その線形化が絶対値 1 の固有値を持たないことである.

ここでいう指数はベクトル場の孤立特異点の指数である (注意 2.1.2 とその脚注を見よ). ここでの ‘鞍点’ は前節までの ‘双曲点’ と同義だが, この命題では ‘双曲的’ を別の意味で使うので, この様に力学系的な用語を用いている.

にできる. 一方 ξ が tight であることにより閉軌道は存在しない. S' が $div > 0$ の成分であれば ξ_S の α -極限集合 ($div < 0$ なら ω -極限集合) を考察することにより, 容易に鞍点のみを持つ場合が不整合であることが分かる. これより次を得る.

命題 6.1.5 1) Tight な接触構造に於ける2次元球面と同相な凸曲面の分割は単純閉曲線1本である.

2) 従ってそのような曲面は $(S^3, \xi_0) \setminus \{2 \text{ 点} \}$ と接触同相な近傍を持つ.

6.2 Tight な接触構造の分類・非存在

OT 接触構造の分類は1節に述べた通り平面場のホモトピー類の分類, 即ち代数的トポロジーの問題に帰着したが, tight な接触構造の分類は全く異なる様相を呈する. 勿論, Poincaré 予想も tight な接触構造の存在問題も未解決でもあり, 分類が完成するのはまだ大分先のことであろう. 然しながら Eliashberg による分類定理に始まる幾つかの美しい結果が得られている.

定理 6.2.1 (Eliashberg, [E4]) 1) S^3 上の正の tight な接触構造は互いに isotopic である.

2) B^3 上の正の tight な接触構造で境界の特性葉層が一致するもの同士は, 総て互いに境界を固定する isotopy により isotopic である.

3) \mathbb{R}^3 上の正の tight な接触構造は互いに isotopic である.

Eliashberg による元の証明は [E4] にある. 凸曲面の理論を用いると, 次のように考えられる. ξ を S^3 上に与えられた tight な接触構造とする. このとき任意の二点の十分小さい標準的な球近傍 B_1, B_2 を除くと $S^2 \times [0, 1]$ 上の tight な接触構造が得られ, 二つの境界成分は共に最も単純な (総ての軌道が発散的な特異点から吸収的な特異点へ流れる) 同じ特性葉層を持つ凸曲面となっている. Generic な $t \in [0, 1]$ に対しては, 即ち有限個の t の値 $t_1 < \dots < t_n$ を除いては $\xi_{S^2 \times \{t\}}$ は Morse-Smale 型となり, 特に凸曲面である. 6.1 節の結論から $\xi|_{S^2 \times [t_i, t_{i+1}]}$ は $\xi_0|_{S^3 \setminus (B_1 \cup B_2)}$ に同形である. 従って $S^2 \times \{t_i\}$ の近傍でうまく $S^2 \times \{t_i\}$ を摂動して座標が取り直せれば良い. 結論として次を得る.

命題 6.2.2 境界 $S^2 \times \{0, 1\}$ が凸である $S^2 \times [0, 1]$ 上の tight な接触構造は, 境界上で恒等的な isotopy により各 $S^2 \times \{t\}$, $t \in [0, 1]$ が凸境界であるようにできる. 又, そのような二つの接触構造は互いに他へ埋め込める.

B^3 上での分類は境界を摂動してから内部の小球を除いて同様に議論する. つまり上の主張は定理の 2) とほぼ同値な内容である. \mathbb{R}^3 は B^3 の増大列として考え, 各段階で境界の近傍に 6.1 節の結果を適用していけばよい.

開 solid torus $B^2 \times S^1$ 上の接触構造の分類も大分進んでいる. Eliashberg は境界がついていなくても $B^2 \times S^1$ 上の接触構造には境界の葉層のスロープに相当する不変量が定義されることを示した. 定理 1.2.4 の直後にある $\text{Int}(V_R, \eta)$ 達には境界の線形葉層の傾き $-R$ がその不変量に一致する. 以上も含めて tight な場合の分類については Makar-Limanov [M-L] を参照せよ.

一方, OT の場合は更に 無限遠に於て tight と 無限遠に於て OT の場合に類別される. 更に幾つかの位相的な数値不変量が定義され, 然るべき条件の下でそれらが完全不変量であることが足立 [Ad] により示されている. 不変量が一致するものの同値性は, 常に定理 6.2.1 3) に基づく.

一般に閉多様体上での tight な接触構造の (非) 存在に関しては次の結果がある. これは 2 節で紹介した Bennequin の不等式の境界のない場合 (注意 3.7.1 1)) であり, Elimination Lemma 2.2.8 により証明できる.

定理 6.2.3 (閉曲面に対する Bennequin の不等式, [E4]) 1) Tight な接触構造 ξ を持つ 3 次元有向閉多様体 M に埋め込まれた種数 $g > 0$ の有向閉曲面 Σ_g に対し, 不等式

$$|\langle e(\xi), [\Sigma_g] \rangle| \leq |\chi(\Sigma_g)| = 2g - 2$$

が成立する. ここで $e(\xi)$ は ξ の \mathbb{R}^2 -束としての euler 類を表す. この事実は $H^2(M; \mathbb{Z})$ に定義される Thurston's norm $\|\cdot\|$ ([Th2]) を用いて $\|e(\xi)\| \leq 1$ と表現することもできる.

2) 従って tight な接触構造の euler 類となり得る $H^2(M; \mathbb{Z})$ の元は有限個である.

予想 6.2.4 ([E4]) 与えられた 3 次元有向閉多様体に対し tight な接触構造が属する平面場のホモトピー類の数は有限であろう (定理 7.1.1 参照).

T^3 上では tight 接触構造の属する平面場のホモトピー類は S^3 の場合と同様に一つしかないが, tight 接触構造の isotopy 類は Giroux 及び神田により可算無限個に分類されている.

定理 6.2.5 (Giroux, 神田, [Gi3], [K1], [K2]) T^3 上の tight な接触構造は例 0.3.8 の $\xi_k = \ker[\cos(kz)dx - \sin(kz)dy]$ ($k \in \mathbb{N}$) のどれかに同形である. ξ_n と ξ_m は $n \neq m$ であれば互いに接触微分同相でない. これらは総て平面場としては $\ker dz$

に homotopic である. 従って T^3 上の tight な接触構造の isotopy 類は $\ker dz$ の向きを定める T^3 の双対 \mathbb{Z}^3 の原始元 (の符号を無視した同値類) と自然数 k で決定される.

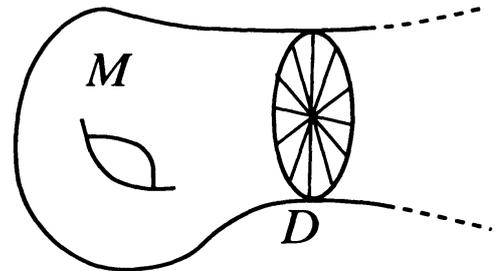
Giroux は更に S^1 上の T^2 -束上の tight な接触構造の分類に関してもほぼ同様の結論を得ている. 本田 公も $T^2 \times [0, 1]$ を凸曲面の理論をうまく使って, Lens 空間, S^1 上の T^2 -束等を含むクラスの多様体で分類に成功している. [Gi3], [Ho] を参照されたし. 構造の類別には TB に似た不変量を使い, 構造の同値性は凸曲面の理論が応用される.

6.3 Tight な接触構造の手術に依る構成

凸曲面の理論を巧みに使うと, tight な接触構造に手術を施すことにより再び tight な接触多様体を得られることが分かる. 詳細は [Co] にもまとめられている.

定理 6.3.1 (Giroux, Colin, [Co]) 1) 3次元接触多様体 (M^1, ξ) から埋め込まれた $S \cong S^2$ を除いた接触構造 $\xi|_{M^1 \setminus S}$ が tight ならば ξ も tight である. 従って特に二つの tight な接触多様体の連結和は再び tight である.

2) 境界を持つ 3次元接触多様体 (M^2, ξ) の境界に横断的に proper に埋め込まれた 2次元円板 $D \cong D^2$ で, 特性葉層が中心を楕円的特異点とし葉は全て半径となっているものが存在したとする. M^2 から D を除いた接触構造 $\xi|_{M^2 \setminus D}$ が tight ならば ξ も tight である. 従って特に二つの tight な接触多様体の境界の同様な形の 2次元円板に沿った連結和は連結和は再び tight である.



3) 3次元接触多様体 (M^3, ξ) の非圧縮¹³⁵な pre-Lagrange トーラス $T \cong T^2$ を除いた接触構造 $\xi|_{M^3 \setminus T}$ が普遍被覆に於いて tight ならば ξ も tight である¹³⁶.

この定理を簡単に解説する. 先ず第一に, 二つの tight な接触多様体の連結和の定義を考えてみる. 命題 6.1.5 及び命題 6.2.2 により容易に次が分かる.

¹³⁵3次元多様体 M^3 に埋め込まれた曲面 (種数 > 0) $\iota: S \hookrightarrow M^3$ は $\iota_*: \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ が単射なとき非圧縮 であるという.

¹³⁶普遍被覆が tight であること, T が非圧縮・pre-Lagrangian であることは総て本質的に重要な条件である.

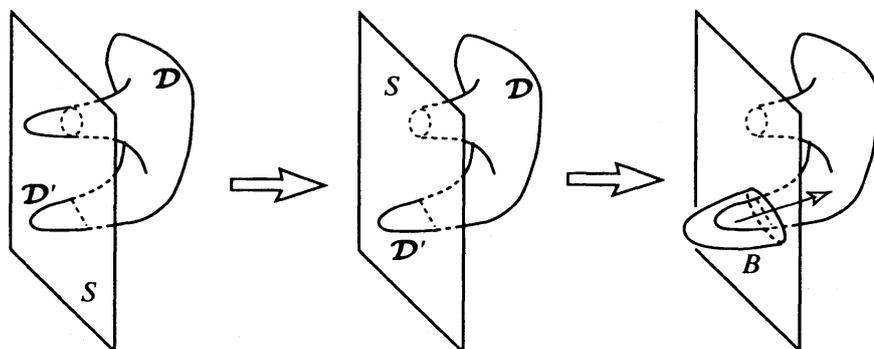
命題 6.3.2 1) Tight な接触構造を持つ 3次元球体 B^3 の境界が凸曲面ならば、境界に横断的な接触ベクトル場が生成する isotopy により B^3 の任意の点の任意に小さい近傍に B^3 を押し込むことができる。

2) Tight な接触構造を持つ $S^2 \times [-1, 1]$ の境界が凸曲面ならば、境界に横断的な接触ベクトル場が生成する isotopy により $S^2 \times [-1, 1]$ を $S^2 \times [-1, 0]$ に押し込むことができる。

二つの tight な接触多様体 (M_i, ξ_i) ($i = 1, 2$) の双方から (十分小さい) 球 $B_i \cong B^3$ をとる。このとき境界 $S_i = \partial B_i$ の特性葉層 ξ_{i, S_i} が S_1 と S_2 の向きを逆にするように同一視するとき一致していれば $M_1 \# M_2 = (M_1 \setminus \text{Int} B_1) \cup_{S_1=S_2} (M_2 \setminus \text{Int} B_2)$ 上に自然に接触構造が定義される。このとき境界 $S_i = \partial B_i$ を共に凸にとることを要請しておけば、 B_i の取り方に依らずに得られる接触構造の isotopy 類が定まることが、上の命題の 1) により分かる。

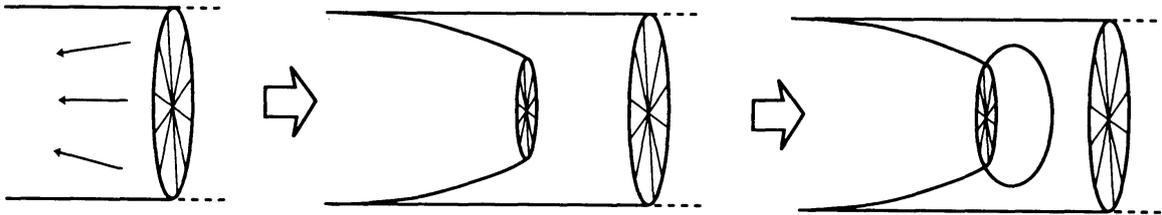
定理 6.3.1 の証明 は 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) の順に行われる。

1) $\xi|_{M^1 \setminus S}$ が tight であり ξ が OT であると仮定する。 D を OT-disk とすると境界 ∂D が S と交わらなければ D の内部だけを変更して $D \subset M^1 \setminus S$ とできるので仮定に反する。 S を勝手に向き付け、 $D \setminus S$ の連結成分の S の正の側にあるもの D' を接触ベクトル場により負の側に押しこむことを考える。仮定より D' は 3次元球体 B で覆えるので、 $S = S \times \{0\}$ に適当に厚みをつけたもの $S \times [-1, 1]$ に B を合わせて得られる再び $S \times [-1, 1]$ と微分同相な近傍 A を持つ。境界は C^∞ -位相で十分小さい摂動により凸曲面にしておくことができるので、 A に上の命題の 2) を適用すれば良い。 S の正の側にある $D \setminus S$ の各成分にこの操作を施すとやはり $\xi|_{M^1 \setminus S}$ が tight であることに反し矛盾を得る。以上により定理の 1) が証明された。



2) M^2 に於ける D の近傍を適当に ‘増やして’ やることにより容易に 1) に帰着す

る. $(M^2, \partial M^2)$ に於ける $(D, \partial D)$ の近傍 $(D \times [-3, 3], \partial D \times [-3, 3])$ をとる. 仮定より接触構造 ξ は t -方向 ($t \in [-3, 3]$) に不変として良い. (これを仮定と考えても応用上差し支えない.) $D^2 \times [-1, 0]$ を別に準備し, その境界の $\partial D^2 \times [-1, 0]$ 部分を $D \times [-3, 0]$ の境界の相当する $\partial D \times [-1, 0]$ の部分に貼り合わせると, $D \times [-3, 0]$ を $N^2_- = D \times [-3, -1] \cup S^2 \times [-1, 0]$ に膨らませたことになる. このとき $D \times [-3, -2]$ 上では恒等写像であり, $D \times [-3, 0]$ 上では接触構造 ξ を保つ埋め込み $I_- : N^2_- \hookrightarrow D \times [-3, -1]$ が容易に構成される. M^2 を D で切って得られる多様体の D の両側にこのような操作をすれば, 再び tight な接触構造が得られ, それを $S^2 \times \{0\}$ に沿って貼り合わせれば 定理の 1) によりやはり tight な接触構造となる. (M^2, ξ) はこの接触多様体の部分集合であるからやはり tight である.



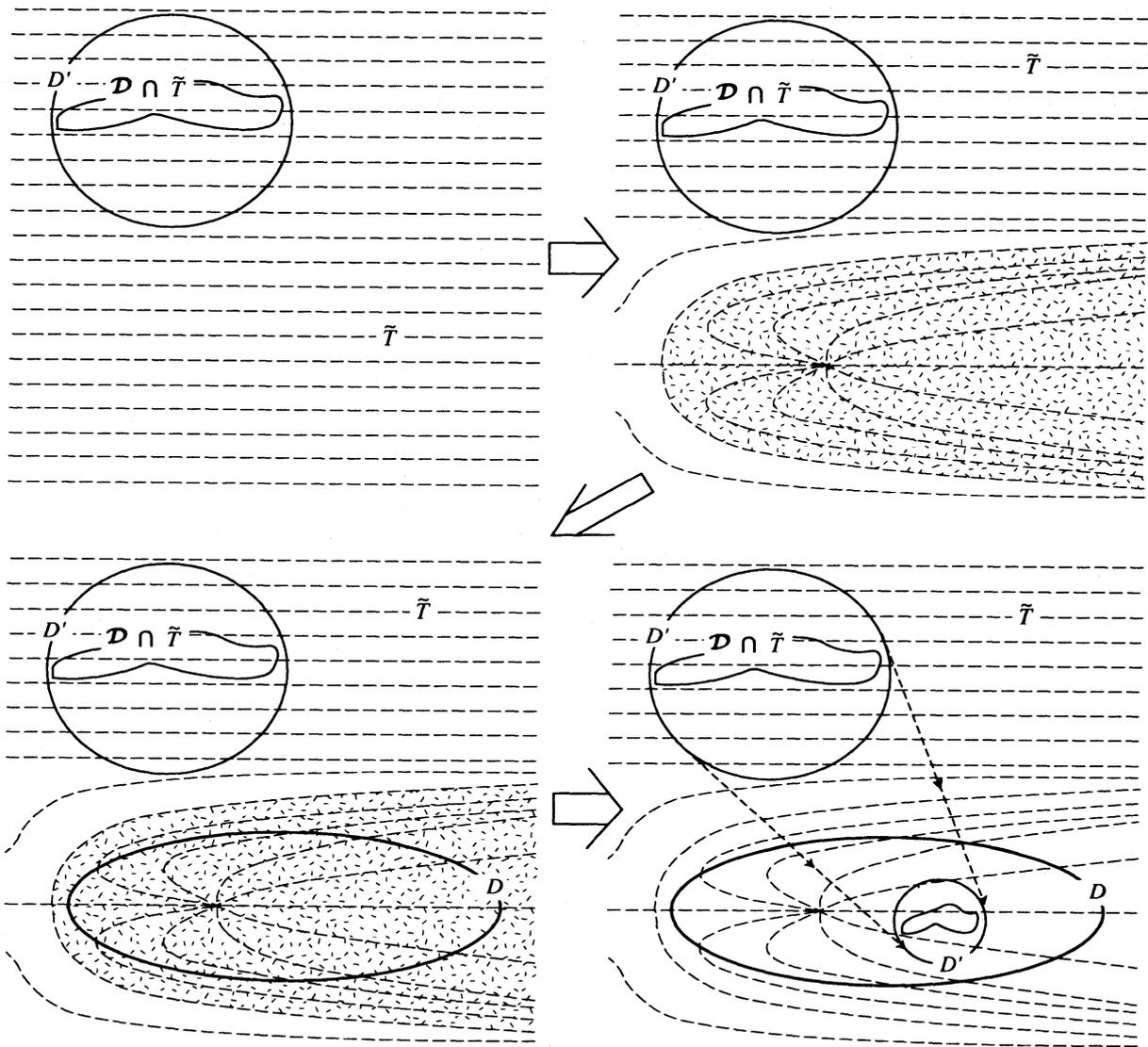
定理の 3) は, 普遍被覆に移り, 次の命題と定理の 2) を適用する. 命題の 1) は Gray の定理 1.1.3 を証明を見ながら適用すれば容易に得られる. 2) は自明.

命題 6.3.3 1) $\mathbb{R}^2 \times [-1, 1]$ (標準的な座標を $((x, y), z)$ とする) 上の接触構造 $\xi_c = \ker[\cos(cz)dx - \sin(cz)dy]$ は定数 $c > 0$ に依らず総て互いに isotopic である.
2) ξ_c は (x, y) -方向の向きを保つ相似変換に関して不変である.

3) の証明 (M^3, ξ) の普遍被覆 $(\tilde{M}, \tilde{\xi})$ が OT であると仮定し, OT-disk D をとる. T は仮定により $(U \cong T^2 \times [-1, 1], \xi|_U = \ker[\cos(cz + a)dx - \sin(cz + a)dy])$ ($c > 0, a$ はある定数) という形の近傍を持つ. 普遍被覆に於ける T の逆像 \tilde{T} は T が非圧縮であるから幾つかの \mathbb{R}^2 の和になる. 議論の本質に全く影響しないので, 簡単のため \mathbb{R}^2 一枚とする. U の普遍被覆に於ける逆像 $(\tilde{U}, \tilde{\xi}|_{\tilde{U}})$ は $(\mathbb{R}^2 \times [-1, 1], \xi_c)$ と同形であり, 従って上の命題より ξ_1 と同形である. OT-disk D と \tilde{T} との交わりを含む \tilde{T} 上の円板 D' をとっておく.

ここで \tilde{T} の小さい部分に Elimination Lemma の逆を施すことにより, \tilde{T} を \tilde{U} の中で \tilde{T}' に小さく isotopy 変形して, $\tilde{\xi}_{\tilde{T}'}$ が指数 ± 1 の特異点を一つずつ持つようにする. このとき $\tilde{\xi}_{\tilde{M} \setminus (\tilde{T}' \times z)}$ は上の命題の 1) により $z \in (-1, 1)$ に依らず総て互いに同形であるから $\tilde{\xi}_{\tilde{M} \setminus \tilde{T}'}$ も tight である.

命題の 2) を使えば isotopy 変形により容易に, $\tilde{\xi}_{\tilde{T}'}$ の指数 1 の特異点 P から出る軌道の和集合から \tilde{T} を変形した場所を除いた部分に D' が含まれ¹³⁷, $\tilde{T}' \setminus \tilde{T}$ と D とは交わらないようにできる (下図参照). 以上により P と D' を含む \tilde{T}' 上の円板 D を $\tilde{\xi}_D$ が放射状で ∂D に横断的になるようにとることができる. $\tilde{M} \setminus (\tilde{T}' \setminus D) \supset D$ に定理の 2) を適用すれば矛盾を得る. **Q.E.D.**



¹³⁷ 命題 2) を使わずに逆に \tilde{T} の大きな部分で isotopy 変形して P の吸引領域を大きく取ってもよい. 何れにしてもこの議論で T が pre-Lagrangian であることが必要となる. この条件を外すと反例がある. [Co] 参照.

この手術の手法により, これまで tight な接触構造の存在が知られていなかった幾つかのホモロジー3球面上に tight なものを構成することができる¹³⁸.

注意 6.3.4 1) Weinstein は一般次元の strong symplectic filling の境界に沿う手術により新たな symplectic filling と接触型境界を得る理論を作っている ([W2]). 3次元接触構造に於いてはある特定の係数の Dehn 手術がこれに相当する. 5節の(射影的) Anosov 流の閉軌道に沿う Dehn 手術も同じ事実の特殊例と解釈できる.

2) 逆に連結和上の tight な接触構造は tight な接触構造の連結和であることが容易に分かる.

¹³⁸ Warwick 大学に於ける V. Colin の講演に '問題 2.1.6 はまだ肯定的に解けないか?' という質問がなされた. 出席していた Eliashberg の答は 'There are too many 3-manifolds!' であった. ホモロジー3-球面を指すのであろう.

7 Seiberg-Witten 理論による最近の接触トポロジーの発展

本節では Seiberg-Witten 理論を fillable な接触構造に応用して得られた結果の一部を紹介する. Monopole 方程式自体などについては (紙面の余裕と筆者の能力の双方が欠如しているので) 殆ど述べない. 詳しいことは [KM2], [LM], [OO] 等を参照されたし. 今後この方向の研究は 8 節で紹介する接触ホモロジー理論や Stein 曲面の位相的な研究 ([Go], [GS]) 及び SW 理論自身の進歩等と相俟って急速に発展することが期待される.

1994 年秋の SW 理論の登場の直後には Thom 予想 “ $\mathbb{C}P^2$ に埋め込まれた種数 g の有向閉曲面 Σ_g が $d \in \mathbb{Z} \cong H_2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$ ($d > 0$) を代表すれば $g \geq (d-1)(d-2)/2$ (= 非特異代数曲線の場合の種数) を満たす” が SW 理論により従来の Gauge 理論によるよりもよりはるかに易しく証明できることが Kronheimer-Mrowka [KM1] をはじめとする人々により示された. その後も進展を続け次の一般的な形までに拡張された.

定理 7.0.1 (Symplectic Thom 予想, Kronheimer-Mrowka, Morgan-Szabó-Taubes, Ozsvath-Szabó, [KM1], [MST], [OS]) 4次元閉 symplectic 多様体 (W, ω) に埋め込まれた閉曲面 Σ が symplectic (*i.e.*, $\omega|_{\Sigma} > 0$) ならば Σ は $[\Sigma] \in H_2(W; \mathbb{Z})$ を代表する埋め込まれた閉曲面の中で種数が最小である.

注意 3.7.1 に述べた様にこの主張は “ $d_-(\Sigma) \leq 0$ ” と表現される. 接触構造の tight 性との関連が想起され, SW 理論の定理 3.2.9 の別証明等への応用が期待されていたが, 予想より早く実現し始めた. 以下では, SW 理論¹³⁹ としての結果よりもその位相的な帰結を中心に紹介する.

7.1 Kronheimer-Mrowka の有限性定理

Kronheimer-Mrowka¹⁴⁰ は monopole 方程式を 3次元接触多様体 (M, ξ) の symplectization $(W = M \times (0, \infty), \omega)$ (定義 0.2.7 の記号に従う) の $M \times \{0\}$ の側に 4次元多様体 W' の境界 (又は end) を張り合わせた多様体 $V = W \cup W'$ 上で考え, SW

¹³⁹—口に SW 理論といっても monopole 方程式をたてる多様体が開・閉, 3・4次元多様体と色々あり, 又, end の開き方にもより, それによる制御が本質的に重要となる.

¹⁴⁰最初に SW 理論の接触トポロジーへの応用に成功したのは Lisca-Matić [LM] であろう. Kronheimer-Mrowka はこの仕事に触発されて接触トポロジーへの応用の基礎を築いていった.

理論を展開することに成功した. Symplectic filling W' の場合はそのまま end を広げればよい. ここで重要なのは, W が持つ対称性 $Z = t \frac{\partial}{\partial t}$ を平行移動ではなく拡大として捉える (即ち $\mathcal{L}_Z \omega = \omega$ が自然に見えるように計量をとる) ことである. さて, V は non compact であるが, Dirac 作用素が作用する spinor の空間を, V の end に於いて指数的に減少する spinor のなす空間に限ると, Fredholm 理論がうまく成立し, あたかも閉多様体のように SW 理論が展開される. この辺の事情は, 擬正則曲線の理論が symplectic filling の上では閉多様体と同様に扱えたことに似ており, 閉多様体の場合の SW 理論と Gromov-Witten 理論の等価性を主張した Taubes の仕事 [T] が連想される. 実際その等価性は, 以上のように symplectization を end に持つ Kronheimer-Mrowka による設定の場合に概ね拡張される様である¹⁴¹.

定理 7.1.1 (Kronheimer-Mrowka, [KM2]) 任意の有向閉 3 次元多様体 M に対し fillable な接触構造を含む平面場のホモトピー類は有限個である.

この定理はこの方面での基礎的な論文 [KM2] にある最も重要な結果であろう. これに Confoliation の理論を合わせるとほぼ直接の系として次の定理を得る.

定理 7.1.2 任意の有向閉 3 次元多様体 M に対し taut な葉層構造の接束を含む平面場のホモトピー類は有限個である.

これは葉層構造論に於いても全く新しい結果であり, 葉層構造の研究者達にとって衝撃的であった. 定理 7.1.1 は以下の SW-不変量についての結果の 1) と 3) から導かれる. また, 1) と 4) を合わせれば定理 3.2.9 の別証明を得る.

定理 7.1.3 ([KM2])¹⁴² 1) Symplectic filling の自然な $Spin^c$ -構造に対する SW-不変量は 1 である.

2) Strong symplectic filling 上で他の (自然でない) $Spin^c$ -構造に対しては SW-不変量は 0 である.

3) 任意の与えられた symplectic filling に対し SW-不変量が非自明となる $Spin^c$ -構造は有限個である.

4) End の接触構造が OT ならば, W' とその $Spin^c$ -構造には依らずに SW-不変量は 0 となる.

¹⁴¹ 神田 雄高氏による.

¹⁴² 閉じた Kähler/symplectic 曲面の場合の SW-不変量の振る舞いに類似している.

7.2 ホモロジー 3 球面等への応用

太田-小野と Lisca は共に SW-不変量が PSC(positive scalar curvature) の下で消滅する性質を応用したが, 前者が filling を与える 4 次元 symplectic 多様体若しくは特異点論への応用を主眼にしているのに対し, 後者は 3 次元接触構造に於ける帰結を得ている.

定理 7.2.1 (Lisca, 太田-小野, [Li], [OO]) 連結な symplectic filling (W, ω) の境界の連結成分のうちの一つが PSC 計量を許容すれば $b_2^+(W) = 0$ でありかつ境界全体 ∂W は連結である.

Γ を $S^3 = SU(2)$ の有限部分群とする. S^3 の標準的接触構造 ξ_0 は Lie 群 S^3 のそれ自身への左作用で不変であると考え. 従って $\Gamma \backslash S^3$ には自然に接触構造が誘導されるのでそれも ξ_0 と記すことにする. 特に Γ が E_8 型の場合には $\Gamma \backslash S^3$ が Poincaré ホモロジー 3 球面 (本節では \mathcal{P} と記す) となる. これらが商特異点として定める所謂単純特異点 \mathbb{C}^2/Γ は良く知られているように \mathbb{C}^3 内の多項式により定められる超曲面特異点として実現され, その Milnor fiber, 及び, (複素多様体としての) 極小 resolution (特異点解消) が $(\Gamma \backslash S^3, \xi_0)$ の symplectic filling を与える. これらは微分同相であり, その交叉形式は負定値である. 勿論 $\Gamma \backslash S^3$ は PSC 計量を許容するので, 上の定理が適用される. 特異点の立場からは更に次のように応用される.

定理 7.2.2 (太田-小野, [OO]) 特に Γ が E_8 型 (即ち \mathcal{P}) の場合, 任意の極小な¹⁴³ symplectic filling の交叉形式は E_8 型 Cartan 行列 (の -1 倍) となる¹⁴⁴.

更に特異点の範疇を単純楕円型にまで拡げて考察することにより次の結果が得られている.

定理 7.2.3 (太田-小野, [OO]) 種数 g の Riemann 面 Σ_g の前量子化から得られる S^1 -束上の接触構造 (例 0.3.5) の strong symplectic filling は, euler 数 $< 2 - 2g$ ならば $b_2^+ = 0$ を満たす.

これらの結果は単純特異点の極小な resolution と Milnor fiber との微分同相を示した 60 年代の Brieskorn の仕事の新しい発展といえよう.

¹⁴³代数幾何と同じ意味. 自己交差が -1 の symplectic に埋め込まれた 2 次元球面が存在しないこと.

¹⁴⁴太田-小野はその後これらの filling は実際 Milnor fibre 及び極小 resolution と微分同相であることを示した.

一方, Poincaré ホモロジー 3 球面 \mathcal{P} の向きを逆にしたもの $-\mathcal{P}$ が semi-fillable な接触構造を許容したとすると, その filling W は定理 7.2.1 より $b_2^+(W) = 0$ かつ境界 ∂W は連結である. これに E_g の Milnor fibre F を境界に沿って張り合わせれば, 負定値かつ対角化不可能な交叉形式を持つ閉 4 次元多様体 $W \cup F$ が得られてしまい, Donaldson の定理に反する.

定理 7.2.4 (Lisca, [Li]) Poincaré ホモロジー 3 球面に悪い方の向きを入れたもの $-\mathcal{P}$ は semi-fillable な接触構造を許容しない.

Lisca-Matić は SW-不変量の別の応用として次の結果を得ている. 接触トポロジーのみならず { ホモロジー 3 球面 } なる世界の多様性を示していると考えられる.

定理 7.2.5 (Lisca-Matić, [LM]) 任意の自然数 n に対し, ホモロジー 3 球面 M_n が存在して, M_n 上には平面場としては互いにホモトピックでありながら互いに isotopic ではない n 個の接触構造が存在する.

8 Weinstein 予想に関する Hofer の仕事と接触ホモロジー

3.6 節の Bishop 族の議論を接触構造の symplectization に対して適用しようとする
と擬正則曲線の moduli 空間についての Gromov の compact 性が成立しないのだが、
そのとき何が起こるのかを精密に調べることにより Hofer は Weinstein 予想 0.2.10
に大きな進展をもたらした。このときに重要なのは **有限エネルギー曲面** と呼ばれ
る noncompact な擬正則曲線の概念である。これは更に Eliashberg-Hofer-Givental'
により **接触ホモロジー** と呼ばれる新しい接触構造の不変量の概念を生み出し、そ
の研究は強烈な進展をし始めている¹⁴⁵。

8.1, 8.2 節については [H1], [H2], [HK], [O1], 及びそこにある文献を見られたい。
その他の関連する話題も含めて Hofer 達の仕事の急速な発展ぶりがうかがえるはず
である。8.3 節の接触ホモロジーについては [E7] 又は [U] のみが現在手に入る文献
であろうか。

8.1 有限エネルギー曲面

先ず有限エネルギー曲面の概念を説明する。 α を 3 次元多様体 M 上接触構造 ξ
を与える接触 1-形式, $(W = \mathbb{R}_+ \times M, \omega = d(t\alpha))$ ($t \in \mathbb{R}_+$) をその symplectization
とする。ベクトル場 $Z = t \frac{\partial}{\partial t}$ は $\mathcal{L}_Z \omega = \omega$ を満たしている¹⁴⁶。 W の概複素構造
 J を $J(Z) = X_\alpha, J(X_\alpha) = -Z, J(\xi) = \xi, \mathcal{L}_Z J = 0$ となるようにとる (直積座標
 $(t, m) \in \mathbb{R}_+ \times M$ で考えている)。さて (W, J) の J -正則曲線 $\tilde{u} = (t, u) : \Sigma \rightarrow W =$
 $\mathbb{R}_+ \times M$ に対してそのエネルギー $E(\tilde{u})$ を

$$E(\tilde{u}) = \sup_{\phi \in \Phi} \int_{\Sigma} \tilde{u}^* d(\phi\alpha)$$

により定義する。但し、 $\Phi = \{\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]; \phi' \geq 0\}$ である。

¹⁴⁵Hofer は 1992 年の暮れに定理 8.2.1 を得たらしい。自身これを 'Christmas Theorem' と呼んで発
見時の喜びを表していた。このころ既に FES の概念を利用して接触ホモロジーの定義が可能であるこ
とを知っていたらしいことが [H1] の文献表から見てとれる。その後文献は発表されず, Eliashberg と
国際電話等で共同研究を進めていたらしい。1997 年頃からこれに Givental' が加わり急速に進展したそ
うだ。8.3 節冒頭の脚注も参照。

¹⁴⁶従って 3.2 節の意味で $\{\infty\} \times M$ は凸な end, $\{0\} \times M$ は凹な end であることに注意。

定義 8.1.1 (有限エネルギー曲面, [H1]) Riemann 面 Σ^{147} からの J -正則曲線 $\tilde{u} = (t = a, m = u) : \Sigma \rightarrow (W = \mathbb{R}_+ \times M, J)$ で $0 < E(\tilde{u}) < \infty$ を満たすものを **有限エネルギー曲面 (FES)** と呼ぶ¹⁴⁸. 特に $\Sigma = \mathbb{C}$ の場合 **有限エネルギー平面 (FEP)** と呼ぶ.

例 8.1.2 1) 例 0.3.1 の標準的接触構造 (S^3, α_0) の symplectization は複素構造も込めて $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ だと考えられる. このとき

$$\tilde{u}_0 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \quad \tilde{u}_0(z) = (z, 0)$$

は容易に分かるように FES である. また,

$$\tilde{u}_b : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \quad \tilde{u}_b(z) = (z, b), \quad (b \neq 0)$$

とおけば FEP を得る. より一般に勝手な二つの有理関数 $f(z)$ と $g(z)$ を並べれば

$$\tilde{u}_{f,g}(z) = (f(z), g(z)) : \mathbb{C} \setminus \{fg = 0\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$$

は FES である.

2) 一般に接触多様体 (M, α) の Reeb ベクトル場 X_α が周期 Θ の閉軌道 $\mathbf{x}(y) : \mathbb{R}/\Theta\mathbb{Z} \rightarrow M$ を持つとき

$$\tilde{u}(x + iy) = (t = \exp x, \mathbf{x}(y)) : \mathbb{C}/i\Theta\mathbb{Z} \rightarrow W = \mathbb{R}_+ \times M$$

は FES である. 1) の \tilde{u}_0 はまさにこの形であるが, \tilde{u}_b や $\tilde{u}_{f,g}$ の無限遠又は 0 へ飛んだ end もこの形に漸近する.

3) 量子力学的な例 0.3.5 の前量子束が閉 Riemann 面上の正則ベクトル束である場合を考えてみる. 単位円周束 M 上の接触構造の symplectization は丁度このベクトル束の全空間から零切断をのぞいた部分になっている. 正則切断又は有理切断から零切断の逆像を除けばやはり FES を得る. この場合も 2) と同様の事情が成り立つ. 即ち, 位数 k の零点又は極の周りではその特異点の逆像が定義する X_α の閉軌道の k 重の閉軌道に 2) の意味で漸近する.

¹⁴⁷Symplectization は exact であるから, 閉 Riemann 面からの J -正則曲線は定値写像のみである. 注意 3.3.5 を参照せよ.

¹⁴⁸次の例で分かるように W 上の自然な symplectic 構造 $d(t\alpha)$ で我々に必要な FES を測ると ∞ になってしまう. $W = \mathbb{R} \times M$ を M へ射影し, 更にその中の ξ 方向の $d\alpha$ に関する面積を測りたいので, 直観的には退化を気にしないでエネルギーを $\mathcal{E}(\tilde{u}) = \int_\Sigma \tilde{u}^* d\alpha$ と定義したほうが分かり易いかもしれない.

FES の end に対して上の例のような閉軌道への収束が一般的に保証されることが重要な点である。

定理 8.1.3 (Hofer, [H1], [HK]) 1) (小さい) 円板¹⁴⁹ から中心を除いて得られる Riemann 面 $\dot{D} = D_\varepsilon \setminus \{0\} \cong (R, \infty) \times S^1$ からの FES $\tilde{u} = (a, u) : (R, \infty) \times S^1 \rightarrow (W = \mathbb{R}_+ \times M, J)$ に対して以下が成り立つ。

- (1)(周期) 極限 $\Theta = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{S^1} u(\rho, \cdot)^* \alpha$ が存在する。
- (2)(除去可能特異点) $\Theta = 0$ なら \dot{D} 上の J -正則曲線 \tilde{u} は D_ε 上まで滑らかに拡張される。
- (3)(閉軌道) $\Theta \neq 0$ ならば Reeb ベクトル場 X_α には周期¹⁵⁰ $|\Theta|$ の閉軌道 $\mathbf{x}(y)$ が存在し、ある発散数列 $\rho = R_k \rightarrow \infty$ に対して次の収束を得る。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(R_k, \theta) = \mathbf{x}(\theta\Theta), \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{a(\rho, \theta)}{\rho} = \Theta.$$

2) 特に FEP が存在すれば上の (2) が結論され、Reeb ベクトル場の閉軌道の存在が分かる。

既に読者は FES が持つ有限性、即ち代数性にお気づきであろう。以下にそれが象徴される。

定理 8.1.4 (Hofer, [HK]) 射影空間 $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ を標準的接触構造 (S^3, α_0) の symplectization $W = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ の自然な compact 化と考えることにより、 W の FES と $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の代数曲線とが一致する。

8.2 Weinstein 予想に関する Hofer の仕事

3.6 節の Bishop 族の議論と有限エネルギー平面の概念を使って次の定理の証明の概説する。

定理 8.2.1 (Hofer, [H1]) 1) 有向閉 3 次元多様体 M 上の接触 1 形式 α に付随する Reeb ベクトル場 X_α は、 $\xi = \ker \alpha$ が OT であるか、又は、 $\pi_2(M) \neq 0$ であるならば、null-homotopic な閉軌道をもつ。即ち以上の条件の下に Weinstein 予想が従う。

2)¹⁵¹ 逆に Reeb ベクトル場 X_α が null-homotopic な閉軌道を持たないような接触形式 α により定義される接触構造 $\xi = \ker \alpha$ は tight である。

¹⁴⁹複素平面の原点中心の円板というよりは Riemann 球面の ∞ -遠中心の小円板と考えた方が分かり易い。

¹⁵⁰ Θ の符号は $\{0\} \times M$ 又は $\{\infty\} \times M$ のどちらの end に逃げているかによる。

¹⁵¹力学系的な言葉による新しいタイプの tight 性の十分条件である。今後の応用が期待される。

証明の概略 最初に OT の場合を説明する. (M, α) の symplectization $W = \mathbb{R}_+ \times M$ 中の $W_- = (0, 1] \times M$ とその凸境界 $\{1\} \times M$ にある OT-disk \mathcal{D} に 3.6.3 の証明をそのまま適用しようとする. この場合 OT を仮定しているので議論がどこかで破綻していなければならない.

それは W' が compact ではないので symplectic filling を与えていないことにある. それでも命題 3.6.2 の 2), 3), 4)¹⁵² は成り立つので, 問題は 1) の Gromov の compact 性である. Bishop 族の各 J -正則円板 \tilde{u}_τ のエネルギーは Stokes の定理により $\mathcal{E} = \int_{\mathcal{D}} d\alpha$ で抑えられており, $\mathbb{C}P^1$ が bubble off することもないので, Bishop 族が $\{0\} \times M$ の end に発散していくことが分かる.

このとき bubbling off を捉えるのと同様の rescaling の議論を使って FEP を捉える¹⁵³. 発散していく族の中で最も強く発散していく点 $w_k = (t_k, x_k) \in \tilde{u}_{\tau_k}(D^2)$ を追い, J -正則円板の定義域 D^2 の持つ $SL(2; \mathbb{R})$ の対称性によりこの点列を常に原点の像とするように $\tilde{u}_{\tau_k} : D^2 \rightarrow W'$ を書き直しておく. ここで $\tilde{v}_k(z) = \tilde{u}_{\tau_k}(z/\tilde{u}'_{\tau_k}(0))$ という rescaling を行うと \tilde{v}_k の定義域は半径 $|\tilde{u}'_{\tau_k}(0)|$ の円板となる. 更に W 中の \mathbb{R}_+ 方向の 1 次元の対称性により \tilde{v}_k を t_k だけずらして得られる J -正則円板を \tilde{w}_k と置けば $\tilde{w}_k(0) = (0, x_k)$ となる. このようにして ($\{0\} \times M$ ではなく) $\infty \times M$ の end に発散していき, しかもエネルギーが一様に \mathcal{E} で抑えられている J -正則円板の族が得られる. その結果, 極限として FEP が見つかる¹⁵⁴. FEP の end にある周期軌道が可縮であることは, 以上の議論よりほぼ明らかであろう.

$\pi_2(M) \neq 0$ の場合も概ね同様である. 非自明な $\pi_2(M)$ の元を代表する S^2 の滑らかな埋め込みをとる¹⁵⁵. ξ が OT なら既に証明されているので tight であることを仮定する. 従って Elimination Lemma 2.2.8 によりこの球面 Σ を M 内で小さく動かして, 正負の楕円点を一つずつ持ち, 他に ξ_Σ に特異点が無いようにできる. 再び tight 性より ξ_Σ の各軌道は皆正の楕円点から出て負の楕円点に吸収される. この二つの楕円点から始まる Bishop 族に対しても Gromov の compact 性が成立したとすれば, 定理 3.5.2 が成立し, $[\Sigma] \neq 0 \in \pi_2(M)$ の仮定に反する. あとは OT

¹⁵²Symplectization は exact な symplectic 構造であるから内点での bubbling off はいずれにしても起こらない.

¹⁵³Hofer はこの現象も bubbling off と呼んでいるが, bubble としては $\mathbb{C}P^1$ からの擬正則曲線ではなく \mathbb{C} からの FES 即ち FEP が得られるので本稿ではそう言わないことにする.

¹⁵⁴得られた FEP を再び逆に \mathbb{R}_+ 方向の対称性により $\{0\} \times M$ の end に押し込むと例 8.1.2 2) の cylindrical な FES が得られるが, 元々 $\{\tilde{v}_k\}_k$ 又は $\{\tilde{u}_{\tau_k}\}_k$ がこの FES の $-\infty$ -側の end に漸近していたのだと考えられる.

¹⁵⁵3 次元多様体論の球面定理により $\pi_2(M) \neq 0$ ならば埋め込み $f : S^2 \rightarrow M$ により実現される $[f] \neq 0 \in \pi_2(M)$ が存在する.

の場合と同じ議論である.

Q.E.D.

定理 6.2.1 1) より S^3 上の tight な接触形式は容易に原点中心の星状埋め込み $S^3 \rightarrow (\mathbb{C}^2, \lambda_0)$ (例 0.3.1) から得られることが分かり, この場合の Weinstein 予想は Rabinowitz の結果に帰着する. 一方, OT の場合は上で解けたので, 系として次を得る.

定理 8.2.2 (Hofer, [H1]) S^3 上では Weinstein 予想は正しい.

Hofer 達は更に精密に閉軌道を解析して Birkoff 切断を張ることにより, 然るべき条件の下での open book 分解を得ている. それは tight なものの中で S^3 上のものを特徴付けることになり, Poincaré 予想への一つのアプローチを示している¹⁵⁶.

8.3 接触ホモロジー

本稿の最後のトピックとして, 有限エネルギー曲面を用いて定義される接触ホモロジーについての至極簡単な紹介をし, 接触トポロジーの将来 (超近未来か?) への展望としよう¹⁵⁷. 参考文献は [E7] 及び [U].

ひどく簡単にいうと, 接触ホモロジーとは次の様なものである. 接触構造 ξ を与える接触 1-形式 α を固定し, symplectization W 上に 8.1 でも使った概複素構造 J をとる. Reeb ベクトル場の各閉軌道をその Conley-Zehnder 指数から定まる次数の自由生成元とする \mathbb{C} 上の超可換自由代数 Θ を係数環とする $H_2(M; \mathbb{Z})$ の群環 Θ^{H_2} 上に FES により境界作用素を定義することができる. こうして得られる微分代数のホモロジーが接触ホモロジーである.

Hamilton 力学系が与えられた symplectic 多様体に対し, その loop 空間上の action functional に関する Morse 理論として symplectic Floer ホモロジー理論が展開された. 同様のことを接触多様体 (M, α) の場合に試みるならば, M 上の loop

¹⁵⁶ Hofer は大学院生向けの連続講義の中で “任意のホモトピー S^3 上に tight な接触構造を構成せよ” という ‘exercise’ を笑いながら提案していたが, 彼等のテクノロジーの下ではかなり Poincaré 予想に近い問題である.

¹⁵⁷ Eliashberg によると, 1997 年頃から Givental が変形量子化等に関わる形式を導入し, 接触ホモロジーの急速な発展を促した. 残念ながら筆者にはそれを解説する能力は無いが, 量子化されている対象を明確にし, それに色々な幾何学的アプローチを試みるにより接触ホモロジー論は更に豊かになっていくことを想像している.

然し, 一方で擬正則曲線 (の moduli) に関する技術的な困難は多く残っていることも注意する必要があるだろう.

γ に対し, action functional $A(\gamma)$ を素直に

$$A(\gamma) = \int_{\gamma} \alpha$$

と定義することになろう. この action functional $A(\gamma)$ の臨界点が接触形式 α に付随する Reeb ベクトル場 X_{α} の閉軌道 (又は定値 loop) に他ならないことは簡単な計算によりすぐに分かる. このままでも既に loop の定義域の S^1 の対称性, 即ち $Diff^+(S^1)$ の対称性があるが面倒が起こりそうである. 更にここから symplectic Floer ホモロジー理論の様に gradient flow を J -正則曲線として捉えようとするならば, (M, α) の symplectization に於いて $\{\infty\} \times M$ の end から $\{0\} \times M$ の end へ流れる cylindrical な J -正則曲線を扱えばよいと思われるが, moduli の次元等色々な理由により end をもっと多く持つ FES を扱う方がよいことが分かる. ところが, これでホモロジー理論を構成しようとするとき境界作用素の自乗が消えない¹⁵⁸. そのために 臨界点集合上の (自由加群上ではなく, より複雑に) 超可換自由代数上にホモロジー理論を組み上げることになってしまう.

Symplectic Floer ホモロジー若しくは symplectic 多様体の Gromov-Witten 不変量との関連は強い筈で, Eliashberg はそれを symplectic field theory¹⁵⁹ という形で研究し始めている.

接触ホモロジーが Weinstein 予想に貢献しうることは明白だが, 接触トポロジーにも大きく寄与しそうである. 接触ホモロジーが基礎体 \mathbb{C} 以上に非自明ならば, Reeb ベクトル場に閉軌道が存在することになる. その意味では大分無駄をしているように見えるかもしれないが, 次の定理の 1) がその強力性を物語っている.

- 定理 8.3.1** 1) α, J の選び方を変えても接触ホモロジーは変わらない. 即ち, 接触ホモロジーは接触構造 (M, ξ) 自体の位相的な不変量である.
- 2) Stein fillable ならば接触ホモロジーは非自明. OT なら 自明.
- 3) 特に (S^3, ξ_0) の接触ホモロジーは $\mathbb{C}[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots]$ ($\deg \gamma_k = 2k$) に同形.
- 4) 例 0.3.8 にある T^3 上の tight な接触構造達 ξ_k ($k \in \mathbb{N}$) を区別する.

Lagrangian 境界条件を持つ FES による相対的理論も可能である. $\mathbb{R}_+ \times$ Legendrian knot は symplectization の中で Lagrange 部分多様体となる. 従ってこの場合の FES は M に射影してみると Reeb ベクトル場の軌道と与えられた Legendrian knot を境界に持つ曲面となる. (M, ξ) を (\mathbb{R}^3, ξ_0) に固定してしまえば, この接触

¹⁵⁸ $Diff^+(S^1)$ の対称性が本質的に影響していると思われる.

¹⁵⁹ Atiyah が提唱した位相的場の理論の形式を, 'symplectic 多様体とその境界の接触多様体' という状況に当てはめて考える.

ホモロジーは Legendrian knot の不変量を与えることになる. 特に, 以上の議論を \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^2 へ Reeb ベクトル場の軌道を一点につぶす方向に射影したときの形状だけで組み合わせ的に議論を構成する理論が注目されており, Chekanov による文献 [Ch] がある. 既に, 古典的な不変量 (位相, 回転, TB) だけでは区別できない Legendrian knots の判別に成功している. (Tight な接触多様体の位相的に自明な Legendrian knot は回転数と TB だけで Legendrian isotopy を法として分類されることが, Eliashberg 等 [E5], [EF] により示されている.)

参考文献

- [Ad] **J. Adachi**, *Contact structures on open solid torus*, Preprint, (1998).
- [Al] **S. Altschuler**, *A geomtric heat flow for one-forms on 3-dimensional manifolds*, Illinois J. Math., **39** (1995), 98-118.
- [An] **D. V. Anosov**, *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature*, (English Transl.), Proc. Steklov Inst. Math., A. M. S. (1969).
- [A] **V. I. アーノルド**, 古典力学の数学的方法, 安藤 韶一, 蟹江 幸博, 丹羽 敏雄 訳, 岩波書店, (1980).
- [AG] **V. I. Arnol'd & A. B. Givental'**, *Symplectic Geometry*, Dynamical Systems IV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **4**, Springer-Verlag, (1990).
- [BI] **D. E. Barrett & T. Inaba**, *On the topology of compact smooth three-dimensional Levi-flat hypersurfaces*, J. Geometric Analysis, **2-6** (1992), 489-497.
- [BG] **E. Bedford & B. Gaveau**, *Envelopes of holomorphy of certain 2-spheres in \mathbf{C}^2* , Amer. J. Math., **105** (1983), 975-1009.
- [BK] **E. Bedford & W. Klingenberg**, *On the envelope of holomorphy of a 2-spheres in \mathbf{C}^2* , J. Amer. Math. Soc., **4** (1991), 623-646.
- [B1] **D. Bennequin**, *Entrelacements et équations de Pfaff*, Astérisque, **107-108** (1983), 83-161.
- [B2] **D. Bennequin**, *Topologie symplectique, convexité holomorphe, et structures de contact, d'après Y.Eliashberg, D.McDuff, et al*, Séminaire BOURBAKI, n° **725** (1989-90).
- [BM] **J. S. Birman & W. W. Menasco**, *Studying links via closed braids I ~ VI, e.g., VI*, Pacific J. Math., **156-2** (1992), 265-285.
- [Bi] **E. Bishop**, *Differentiable manifolds in complexes euclidean space*, Duke Math. J., **32** (1965), 1-22.
- [CC] **A. Candel & L. Conlon**, *Foliations I*, A.M.S. Graduate Studies in Mathematics, **23** (1999).
- [Ch] **Y. Chekanov**, *Differential algebras of Legendrian links*, Preprint, (1997).
- [CG] **S. Chmutov & V. Goryunov**, *Polynomial invariants of Legendrian links and their fronts*, Proceedings of Knots 96 (ed. by S.Suzuki), World Scientific Publ. Co., (1997), 239-256.
- [Co] **V. Colin**, *Sur la stabilité, l'existence et l'unicité des structures de contact en dimension 3*, Thèse, l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, (1998).
- [E0] **Y. Eliashberg**, *Three lectures on symplectic topology in Cala Gonone, basic notions, problems, and some methods*, Rendiconti Seminari Facoltà Scienze, Università—'a Cagliari Supplemento al Vol **58** (1988), 27-49.
- [E1] **Y. Eliashberg**, *Classification of over twisted contact structure on three manifolds*, Invent. Math., **98-3** (1989), 623-637.

- [E2] **Y. Eliashberg**, *Topological characterization of Stein Manifolds of dimension > 2* , International J. Math., **1** (1990), 19-46.
- [E3] **Y. Eliashberg**, *Filling by holomorphic discs and its applications*, Geometry of Low-Dimensional Manifolds: 2, London Math. Soc. Lect. Note ser., **151**, Cambridge Univ. Press, (1990), 45-67.
- [E4] **Y. Eliashberg**, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **42-1-2** (1991), 165-192.
- [E5] **Y. Eliashberg**, *Legendrian and transversal knots in tight contact 3-manifolds*, Topological Method in Modern Mathematics, A Symposium in Honor of John Milnor's 60th Birthday, Publish or Perish Inc., (1993), 171-195.
- [E6] **Y. Eliashberg**, *Unique holomorphically fillable contact structure on the 3-torus*, International Math. Res. Notices, (1996), **2**, 77-82.
- [E7] **Y. Eliashberg**, *Invariants in Contact Topology*, Proc. International Congress of Mathematicians, Berlin 1998, Vol. **II**, (1998), 327-338.
- [EF] **Y. Eliashberg & M. Fraser**, *Classification of topologically trivial Legendrian knots*, CRM Proc. & Lect. Notes, A.M.S., **15**, *Geometry, Topology, and Dynamics*, ed. by F. Lalonde, (1998), 17-51.
- [EG] **Y. Eliashberg & M. Gromov**, *Convex symplectic manifolds*, Proc. Sympos. Pure Math. A.M.S., **52-2** (1991), 135-162.
- [ET] **Y. Eliashberg & W. Thurston**, *Confoliations*, A.M.S. University Lecture Series, **13** (1998).
- [FW] **J. Franks & R. F. Williams**, *Anormalous Anosov flows*, Global theory of dynamical systems, ed. by Z. Nitecki & C. Robinson, Springer Lecture Notes in Mathematics, **819** (1980), 158-174.
- [FT] **D. Fuchs & S. Tabachnikov**, *Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space*, Topology, **36** (1997), 1025-1053.
- [F] **深谷 賢治**, シンプレクティック幾何学, 岩波講座・現代数学の展開, **21**, 岩波書店, (1999).
- [FO] **K. Fukaya & K. Ono**, *Arnold Conjecture and Gromov-Witten invarinat*, Topology, **38** (1999), 933-1048.
- [Ga] **D. Gabai**, *Foliations and the topology of 3-manifolds*, J. D. G., **18** (1983), 445-503.
- [Gh] **É. Ghys**, *Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsien*s, Ann. l'Inst. Fourier, **42-1 & 2** (1992), 209-247. *Rigidité différentiable des groupes fuchsien*s, I. H. E. S. Publ. Math., **78** (1993), 163-185 も参照せよ.
- [Gi1] **E. Giroux**, *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helvetici., **66** (1991), 637-677.
- [Gi2] **E. Giroux**, *Topologie de contact en dimension 3, autour des travaux de Yakov Eliashberg*, Séminaire BOURBAKI, n° **760** (1989-90).

- [Gi3] **E. Giroux**, *Une infinité de structure de contact tendues sur une infinité de variétés*, Preprint, (1998).
- [Gi4] **E. Giroux**, *Structure de contact sur les variétés fibrés en cercles au-dessus d'une surface*, Preprint, (1999), math.GT/9911235.
- [Gd] **C. Godbillon**, *Feuilletages*, Progress in Mathematics, **98**, Birkhäuser, (1991).
- [Go] **R. Gompf**, *Handlebody construction of Stein surfaces*, Ann. Math., (2) **148-2** (1998), 619-693.
- [GS] **R. E. Gompf & A. I. Stipsicz**, *4-manifolds and Kirby calculus*, A.M.S. Graduate Studies in Mathematics, **20** (1999).
- [Gr] **J. W. Gray**, *Some global aspects of contact structures*, Ann. Math., **69** (1959), 421-450.
- [G] **M. Gromov**, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math., **82** (1985), 307-347.
- [GR] **R. C. Gunning & H. Rossi**, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., (1965).
- [HT] **M. Handel & W. P. Thurston**, *Anosov flows on new 3-manifolds*, Invent. Math., **59** (1980), 95-103.
- [Ha] **D. Hardorp**, *All compact orientable three manifolds admit total foliations*, Memoirs A.M.S., **233** (1980).
- [HPS] **M. Hirsch, C. Pugh, & M. Shub**, *Invariant manifolds*, Springer Lecture Notes in Mathematics, **583** (1977).
- [H1] **H. Hofer**, *Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three*, Invent. Math., **114** (1993), 515-563.
- [H2] **H. Hofer**, *Dynamics, Topology, and Holomorphic Curves*, Proc. International Congress of Mathematicians, Berlin 1998, Vol. I, (1998), 225-280.
- [HK] **H. Hofer & M. Kriener**, *Holomorphic curves in contact dynamics*, PCMI '97 summer session 'Symplectic Geometry', minicourse text, preprint, (1997).
- [Ho] **K. Honda**, *On the classification of the tight contact structures I: Lens spaces, solid tori and $T^2 \times I$, II, Torus bundles which fiber over the circle*, Preprints, (1999).
- [IT] **T. Inaba & N. Tsuchiya**, *Expansive foliations*, Hokkaido Math. J., **21** (1992), 39-49.
- [II] **泉屋 周一 & 石川 剛郎**, *応用特異点論*, 共立出版, (1998).
- [K1] **神田 雄高**, *3次元接触多様体のトポロジーについて*, 第43回トポロジーシンポジウム講演集, (1996), 88-102.
- [K2] **Y. Kanda**, *The classification of tight contact structures on the 3-torus*, Comm. Anal. Geom., **5-3** (1997), 413-438.
- [K3] **Y. Kanda**, *On the Thurston-Bennequin invariant of Legendrian knots and nonexactness of Bennequin's inequality*, Invent. Math., **133-2** (1997), 227-242.

- [KH] **A. Katok & B. Hasselblatt**, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, (1995).
- [KM1] **P. B. Kronheimer & T. S. Mrowka**, *Genus of embedded surfaces in projective plane*, Math. Res. Lett. **1** (1995), 797-808.
- [KM2] **P. B. Kronheimer & T. S. Mrowka**, *Monopoles and contact structures*, Invent. Math., **130** (1997), 209-255.
- [La] **H. F. Lai**, *Characteristic classes of real manifolds immersed in complex manifolds*, Trans. A. M. S., **172** (1972), 1-33.
- [L] **F. Laudenbach**, *Orbites périodiques et courbes pseudo-holomorphes, application à la conjecture de Weinstein en dimension 3, d'après H. Hofer, et al*, Séminaire BOURBAKI, n° **786** (1993-94).
- [Le] **G. Levitt**, *Feuilletages des variétés de dimension 3 qui sont des fibrés en cercles*, Comment. Math. Helvetici., **53** (1978), 572-594.
- [Li] **P. Lisca**, *Symplectic fillings and positive scalar curvature*, Geometry and Topology, **2** (1998), 103-116.
- [LM] **P. Lisca & G. Matić**, *Tight contact structures and Seiberg-Witten invariants*, Invent. Math., **129** (1997), 509-525.
- [Lu1] **R. Lutz**, *Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension 3*, Thèse, Starsbourg, (1971).
- [Lu2] **R. Lutz**, *Structures de contact sur les fibrés principaux en cercle de dimension 3*, Ann. l'Inst. Fourier, **27-3** (1977), 1-15.
- [LF] **L. A. Lyusternik & A. I. Fet**, *Variational problems on closed manifolds*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (NS) **81** (1951), 17-18, (in Russian). W. Klingenberg, *Lectures on closed geodesics*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **230**, Springer-Verlag, (1978) にも解説されている.
- [M-L] **S. Makar-Limanov**, *Tight contact structures on solid tori*, Trans. A.M.S., **350** (1998), 1013-1044.
- [Ma] **J. Martinet**, *Formes de contact sur les variétés de dimension 3*, Springer Lecture Notes in Mathematics, **209** (1971), 142-163.
- [MT] **S. Matsumoto & T. Tsuboi**, *Transverse intersections of foliations in three-manifolds*, Preprint, (1999).
- [Mc] **D. McDuff**, *Symplectic manifolds with contact type boundaries*, Invent. Math., **103** (1991), 651-671.
- [MS1] **D. McDuff & D. Salamon**, *Introduction to symplectic topology*, Oxford Math. Monographs, Oxford U. P., (1995).
- [MS2] **D. McDuff & D. Salamon**, *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, A.M.S. University Lecture Series, **6** (1994).
- [M] **J. Milnor**, *On the existence of a connection with curvature zero*, Comment. Math. Helvetici., **32** (1958), 215-223.

- [Mi1] **Y. Mitsumatsu**, *Anosov flows and non-Stein symplectic manifolds*, Ann. l'Inst. Fourier, **45-5** (1995), 1407-1421.
- [Mi2] **三松 佳彦**, *Survey of recent 20 years of contact 3-manifolds, Part 1*, 研究集会報告 '結び目理論と様々な数学の絡み', 1996年12月 (於大阪市立大学), 作間 誠編集, (1997), 466-478.
- [Mi3] **Y. Mitsumatsu**, *Lutz twist and homotopy class of plane field on 3-manifolds*, Preprint in preparation.
- [Mi4] **Y. Mitsumatsu**, *Projectively Anosov flows and bi-contact structures on 3-manifolds*, Preprint in preparation.
- [MST] **J. Morgan, Z. Szabó, & C. Taubes**, *A product formula for the Seiberg-Witten invariants and the generalized Thom conjecture*, J. D. G., **44** (1996), 706-788.
- [MW] **J. Moser & S. Webster**, *Normal forms for real surfaces in \mathbb{C}^2 near complex tangents and hyperbolic surface transformations*, Acta Math., **150** (1983), 255-296.
- [N] **T. Noda**, *Projectively Anosov flows on T^3 whose stable and unstable foliations are differentiable*, Preprint, (1998).
- [NT] **T. Noda & T. Tsuboi**, *Regular projectively Anosov flows on solv-manifolds*, Preprint, (1999).
- [OO] **H. Ohta & K. Ono**, *Simple Singularities and Topology of Symplectically Filling 4-Manifold*, Comment. Math. Helvetici., **74-4** (1999), 575-590.
- [O1] **小野 薫**, *Hamilton 系の周期解の存在問題と J -正則写像*, 研究集会 '接触幾何とその周辺', 1996年1月 (於北海道大学), 予稿集, (1996), 1-22./ 本巻 Part II.
- [O2] **小野 薫**, *Symplectic Topology と J -正則写像*, 数学・論説, **51-4** (1999).
- [OS] **P. Ozsváth & Z. Szabó**, *The symplectic Thom conjecture*, Ann. Math., **151-1** (2000), 93-124.
- [P] **Th. Paternell**, *Pseudoconvexity, the Levi problem and vanishing theorems*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **74**, Several complex Variables VII, Chapter VIII, Springer-Verlag, Berlin, (1994).
- [PT] **J. Plante & W. Thurston**, *Anosov flows and the fundamental group*, Topology, **11** (1972), 147-150.
- [R] **D. Rolfsen**, *Knots and links*, Mathematical Lecture Series **7**, Publish or Perish, Inc. Berkeley, California, (1976).
- [Sa] **R. Sacksteder**, *Foliations and pseudogroups*, Amer. J. Math., **87** (1965), 79-102.
- [ST] **A. Sato & T. Tsuboi**, *Contact structures of closed 3-manifolds fibred by the circle*, Mem. Inst. Sci. Tech. Meiji Univ., **33** (1994), 41-46.
- [S] **D. Sullivan**, *A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces*, Comment. Math. Helvetici., **54** (1979), 218-223.
- [Ta] **S. Tabachnikov**, *Estimates for the Bennequin number of Legendrian links from state models for knot polynomials*, Math. Res. Lett. **4** (1997), 143-156.

- [Tm] 田村 一郎, 葉層のトポロジー, 数学選書, 岩波書店, (1976).
- [TS] I. Tamura & A. Sato, *On transverse foliations*, Publ. Math. I.H.E.S., **54** (1981), 205-235.
- [T] C. H. Taubes, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Lett., **1-6** (1994), 809-822. *The Seiberg-Witten and Gromov invariants*, Math. Res. Lett. **2-2** (1995), 221-238. *SW \Rightarrow Gr: from the Seiberg-Witten equations to pseudo-holomorphic curves*, J. A.M.S., **9-3** (1996), 845-918.
- [Th1] W. P. Thurston, *Foliations of manifolds which are circle bundles*, Thesis, University of California, Berkeley, (1972).
- [Th2] W. P. Thurston, *Norm for Homology of 3-manifolds*, Memoirs A.M.S., **339** (1986), 99 -130.
- [ThW] W. Thurston & E. Winkelnkemper, *On the existence of contact forms*, Proc. A.M.S., **52** (1975), 345-347.
- [U] I. Ustilovsky, *Contact homology and contact structures on S^{4m+1}* , Thesis, Stanford University, (2000).
- [W1] A. Weinstein, *On the hypotheses of Rabinowitz's periodic orbit theorems*, J. Diff. Eq., **33** (1979), 353-358.
- [W2] A. Weinstein, *Contact surgery and symplectic handlebodies*, Hokkaido Math. J., **20-2** (1991), 241-251.
- [Wo] J. W. Wood, *Foliations on 3-manifolds*, Ann. Math., (2) **89** (1991), 336-358.
- [Y] 矢野 公一, 力学系 2, 岩波講座・現代数学の基礎, **32**, 岩波書店, (1998).
- [Ye] R. Ye, *Filling by holomorphic discs in symplectic 4-manifolds*, Trans. A.M.S., **350-1** (1998), 213-250.

Yoshihiko MITSUMATSU

Department of Mathematics, Chuo University

1-13-27 Kasuga Bunkyo-ku, Tokyo, 112-8551, Japan

e-mail : yoshi@math.chuo-u.ac.jp

第II部

Hamilton 系の周期解の存在問題と J - 正則曲線

— Weinstein 予想についての Hofer の仕事の紹介 —

北大・理 小野 薫

0 序

力学系が与えられた時、周期軌道が存在するかどうかは、基本問題の1つである。この問題は、Kuperberg による Seifert 予想の反例に見られる様に、一般には、 S^3 上と限っても正しくないが、その中の特別なクラス-ここでは Hamilton 系-に限るとどうかという問いはできる。詳しくは後で述べるが、symplectic 多様体上に関数が与えられると、Hamilton vector field なるものが定まる。これが Hamilton 自励系である。Hamilton 関数は、第一積分なので、解は、level set (= energy 曲面と呼ぶ) に含まれる。そこで、与えられた energy 曲面上に、周期解が存在するかという問いに達する。或いは、与えられた周期をもつ周期解が存在するかという問いもできる。(後者については、自励系と限らない場合にも、Hamiltonian diffeomorphism の不動点の存在問題として Arnold 予想に関わる結果等ある。)

別の見方をする。symplectic 多様体に超曲面が与えられたとする。超曲面を level set とする関数を取り、Hamilton 系を考えると、上に述べた設定となる。すぐ判る事だが、与えられた超曲面を level set とする関数は一意ではないが、対応する Hamiltonian vector field の決める 1 次元接分布は、関数のとり方に依らずに、symplectic form の超曲面への制限の退化する方向として定まる。そこで、与えられた超曲面上に周期軌道があるかという問題に至る。実は一般には正しくない事が、Herman, Ginzburg の例により判っている。一方では $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{std})$ の中では、殆ど全ての超曲面上に周期軌道が存在する事が判っている (Struwe, Hofer-Zehnder)。

如何に周期解を見つけるかという事については、以下で述べていくが、ここでは、その key words を挙げよう。まず、発展の契機 (の1つ) は Rabinowitz による、「作用汎関数の有限次元近似に対する min-max 法」である。彼の結果は、 \mathbb{R}^{2n} の

中の星状領域の境界として与えられる超曲面に対する主張であった。しかし、このような超曲面のクラスは、 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{std})$ の symplectic diffeomorphism で不変ではない。そこで、この意味で不変な超曲面のクラスは何かということになる。Weinstein は、contact type の超曲面という概念を導入した。これについては、Viterbo による、 \mathbb{R}^{2n} 中の contact type 超曲面上には周期軌道が存在するという結果が得られた。ここでは、「dual functional に対する min-max 法」が使われた。dual functional の方法は、Ekeland 達を中心に進められ複数個の周期軌道の存在についての部分的結果も得られている。Viterbo の結果は「作用積分の min-max 法」の立場から、Hofer-Zehnder によっても別証が与えられている。ここでの key word は “linking” であり、Ekeland-Hofer の “capacity” の構成でも使われている方法である。今回紹介する Hofer の結果は、ある条件を満たす 3 次元 contact 多様体上の Reeb vector field についてのものだが、ここでは、contact 多様体の symplectic 化、その中での “finite energy holomorphic plane” といったものが keywords である。必要となる 3 次元 contact topology については三松氏の稿 (Part I) を参照されたい。

1 Weinstein 予想

(M, ω) を symplectic manifold とする。 $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられた時、Hamiltonian vector field X_H は、条件

$$i(X_H)\omega = dH$$

を満たすものとして定義される。すぐに判る様に、 X_H の積分曲線上 H の値は一定である X_H が周期軌道を持つかどうかは、基本問題の 1 つであるが、今述べた事から、 $\{H \equiv c\}$ 上に周期軌道があるかどうかという問が意味を持つ。今、 dH が $\{H \equiv c\}$ 上の点では消えてないとしよう (すなわち “ H の gradient vector field” が $\{H \equiv c\}$ と横断的)。すると、 X_H (のスカラー倍) で定まる $\{H \equiv c\}$ 上の line field (1 次元接分布) は、 $\text{Ker}\omega|_{\{H \equiv c\}}$ と一致する事が判る。つまり、 $\{H \equiv c\}$ 上に X_H の周期軌道があることは、 $\text{Ker}\omega|_{\{H \equiv c\}}$ が周期軌道を持つことと言い換えられる。

$M = \mathbb{R}^{2n}$ で、 $\Omega = \mathbb{R}^{2n}$ の有界星状領域とし、 $S = \partial\Omega$ (これも滑らかとする) の時 Rabinowitz は次を示した。

Theorem 1.1 (Rabinowitz) S 上には周期軌道が存在する。

ここで仮定されている S の条件は、 \mathbb{R}^{2n} の symplectic diffeomorphism で不変な条件ではない。そこで Weinstein は次の概念を導入した。

Definition 1.2 (Weinstein) $S \subset M$ が hypersurface of contact type であるとは, S の近傍で定義された vector field V で, $\mathcal{L}_V \omega = \omega$ を満たし, S と横断的なものが存在することである. (Liouville vector field)

言い換え : 1-form の言葉を用いると, 1-form λ で $d\lambda = \omega$ かつ S 上至る所 $\lambda \neq 0$ であるもの (Liouville form) が存在する事と同値になる. また, 上の vector field V の生成する local flow $\varphi_t (|t| < \varepsilon)$ により, $\varphi_t(S)$ を考えると, S の近傍が $\varphi_t(S)$ により葉層化されていることに注意する.

Weinstein は, hypersurface of contact type (かつ $H_1(S) = 0$) の時, 周期解があるという予想を出した. これに対し Viterbo は次を示した.

Theorem 1.3 (Viterbo) S を $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{std})$ の中の hypersurface of contact type とすると, S 上には周期軌道が存在する.

注意 : 先の定義より強い hypersurface of restricted contact type というものがある. これは上記の定義で, V 又は λ が M 全体で定まっている時をいう. Ekeland - Hofer の symplectic capacity の理論での "Representation Theorem" の仮定に現れる.

詳しい事は三松氏の稿 (Part I) に譲るが, ここで contact manifold の概念を導入しよう. ξ を manifold S 上の余次元 1 の接分布とする. 局所的に $\xi = \text{Ker}\lambda$ と書くとき, $d\lambda$ が ξ 上非退化である時, (S, ξ) を contact manifold と呼ぶ. S は必然的に奇数次元となる. また, λ の事を contact form と呼ぶ. contact form が global に与えられている時, S 上の vector field X を, $i(X)\lambda = 1, i(X)d\lambda = 0$ なるものとする. これを (S, ξ, λ) の Reeb vector field という. このとき $\mathcal{L}_X \lambda = 0$ となることに注意.

この定義を hypersurface of contact type の定義と比べてみると, そこでの λ は S 上の global contact form となり, $\text{Ker}\omega|_S$ は, λ に対応する Reeb vector field の決める一次元接分布である事が判る. そこで, 一般に Reeb vector field は周期軌道を持つかという問ができる. 3次元の場合に Hofer は次を示した.

Theorem 1.4 (Hofer) (S, ξ) 3次元閉 contact manifold, λ を ξ の contact form, X を対応する Reeb vector field とする. もし, (S, ξ) が

1) overtwisted contact structure

又は

2) $\pi_2(S) \neq 0$

のいずれかを満たすならば, X は周期軌道を持つ.

この定理と、Rabinowitz の定理、及び S^3 上の tight contact structure の分類についての Eliashberg の定理 6.2.1 (Part I) を合わせて、次を得る。

Theorem 1.5 (Hofer) S^3 上の任意の Reeb vector field は、周期軌道を持つ。

2 Rabinowitz の証明

compact 星状領域の境界として現れる超曲面上には、周期軌道が存在するという Rabinowitz の定理の彼自身による証明を紹介する。後の Viterbo, Hofer-Zehnder の仕事は、これを含むが、筆者の知る限りでは、Hamilton 系の周期解を捜すのに“強不定値”の変分法を用いて成功したのは、Rabinowitz が最初である。

以後 \mathbb{R}^{2n} と \mathbb{C}^n を同一視し、 J を \mathbb{C}^n 上の複素構造とする。 $H : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の定める Hamiltonian vector field X_H は、 $J\nabla H$ で与えられる。よって、考える方程式は、 $\dot{z}(t) = J\nabla H(z(t))$ である。ここで、 ∇H は標準的な勾配ベクトル場を表す。

Ω を原点 O に関して星状である有界領域とする。すると $V = \text{Re}(z \frac{\partial}{\partial z})$ は、($\S 1$ の) Liouville vector field となる。このとき $\partial\Omega$ を level set とする $H : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定める。 $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ に対し、線分 oz が $\partial\Omega$ と交わる点を w とし、 $z = \alpha(z)w$ とおき、 $H(z) = \alpha(z)^2$ と定義する。たとえば Ω が unit ball のとき H は $|z|^2$ に他ならない。 $\partial\Omega$ が滑らかであれば H は $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ 上滑らかとなり次を満たす。

$$(1) \partial\Omega = H^{-1}(1)$$

$$(2) \langle z, \nabla H(z) \rangle = 2H(z)$$

$$(3) |z|^{-2}H(z) \text{ 及び } |z|^{-1}|\nabla H(z)| \text{ 一様有界}$$

$$(4) (H \text{ の原点のまわりでの振る舞い}) \text{ 1 階微分まで Lipschitz}$$

(注) (2) から ∇H は $\partial\Omega$ 上至る所消えないことが判る。

$\partial\Omega$ 上 H は一定値 1 をとるので、任意の $v \in T_z(\partial\Omega)$ に対し

$$0 = v(H) = \langle \nabla H, v \rangle = \omega \langle X_H, v \rangle$$

となるので、 X_H は 1 次元接分布 $\text{Ker}\omega|_{\partial\Omega}$ に属することが判る。即ち、 $\partial\Omega$ を regular level hypersurface とする別の H' に対しても、積分曲線は parametrization の違いを除いて一致する。

まず、Hamilton 系の周期解を、変分問題として定式化しよう。用いる関数空間は $W^{1,2}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ である。

$$A_H(z) = \frac{1}{2} \int \langle -J\dot{z}, z \rangle - \int H(z(t)) dt \quad (5)$$

とおくと, Euler-Lagrange 方程式は,

$$\dot{z}(t) = J\nabla H(z(t))$$

となる. ここでは, 周期 2π の周期解を考えているが, 我々の設定では, $\partial\Omega$ に含まれる周期解を捜していた. このとき周期については何の制約もつけなかった. (Hamilton 関数 H に定数を掛ける事で, 解の周期が変わる事に注意する.) $\partial\Omega = \{H = 1\}$ であったので, $\partial\Omega$ に含まれる loop z に対し, (5) の右辺第 2 項は, -2π と一定値をとる. そこで, (5) の右辺第 1 項

$$A(z) = \frac{1}{2} \int \langle -J\dot{z}, z \rangle$$

を,

$$\int_0^{2\pi} H(z(t))dt = 2\pi$$

なる付帯条件下で考える.

(注) 後の話と関わるので, ここで注意しておくが, $A(z)$ の gradient flow line を形式的に考えると, J -holomorphic cylinder となる.

$$S := \left\{ z \in W^{1,2}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n) \mid \int_0^{2\pi} H(z(t))dt = 2\pi \right\}$$

z が A の S 上での臨界点とすると, z は, $\dot{z}(t) = \lambda J\nabla H$ (λ は Lagrange multiplier) を満たし, 従って周期軌道となる. 以下 $A|_S$ の臨界点を探す. 難点は, 臨界点での Hessian は正, 負の固有値をそれぞれ無限個もち, A は上にも下にも有界でないので A に Morse 理論或いは min-max 法を直接適用できない所にある. Rabinowitz は, 有限次元近似と, S^1 -index を用いた min-max 法とを用いた. $W^{1,2}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ 上で $-J\frac{d}{dt}$ なる self-adjoint operator を考える. {固有値} = \mathbb{Z} となる.

$V_k :=$ (固有値 k の固有空間),

$$E^+ = \bigoplus_{k>0} V_k, E^0 = V_0, E^- = \bigoplus_{k<0} V_k$$

$$E_m = \bigoplus_{|k|\leq m} V_k, S_m = S \cap E_m$$

とおく.

$$\Psi(z) := \int_0^{2\pi} H(z(t))dt$$

とおくと, (2) より,

$$\langle D\Psi(z), z \rangle = 2\Psi(z)$$

となり, S_m は Ψ の regular level hypersurface, しかも有界星状領域を囲む事が判る.

A を S_m に制限し, うまく臨界点 z_m をみつけ, z_m の $m \rightarrow \infty$ での極限として $A|_S$ の臨界点をつかまえようというのが方針である. $m \rightarrow \infty$ は, “stabilization” の limit の意味である. ((注) ここで使った “index” というのは, Hessian の index の仲間で, 以下で用いる “cohomological index” とは異なる.)

cohomological index の説明から始める.

X を S^1 -space とし, $K \subset X$ を S^1 -不変部分空間とする. このとき, Borel 構成 $K_{S^1} := ES^1 \times_{S^1} K$ を考える. 自然な射影 $\pi: K_{S^1} \rightarrow BS^1$ がある. これを使い,

$$i(K) := \max \{k \in \mathbb{N} | \pi^* x^k \neq 0\} + 1$$

(但, $x \in H^2(BS^1)$ は generator) と定める. K が S^1 -不動点を持つ時は, $i(K) = \infty$ とする.

$\dim E_m = 4mn + 2n$ であった. また loop の parameter を “回転” させることで, $E, E_m, E^+, E^0, E^-, S, S_m$ は S^1 -space となり, S^1 -不動点集合は, $E^0 = \{\text{constant loops}\}$ となる. さて, $F \subset E$ を S^1 -不変線型部分空間で, $E^+ \oplus E^-$ に含まれるものとし, $S(F)$ をその unit sphere とすると, $i(S(F)) = \frac{1}{2} \dim F$ が成り立つ.

$$\gamma_j^{(m)} := \inf_{K \subset S_m, i(K) \geq j} \max_{z \in K} A(z) \quad (1 \leq j \leq 2mn)$$

とおく. “gradient flow” を用いた Deformation Lemma により, $\gamma_j^{(m)}$ は $A|_{S_m}$ の臨界値である事が判る. また, K として $S \cap E_m \cap E^-$ を取ることにより, $\gamma_j^{(m)} < 0$ ($1 \leq j \leq mn$) である事が判る. $c_m := \gamma_{mn}^{(m)} = \Psi(z_m)$ なる $A|_{S_m}$ の臨界点 z_m を取る. $m \rightarrow \infty$ の時に z_m が $W^{1,2}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ の元に収束し, 周期軌道を与えることを示そう. $\gamma_j^{(m)}$ の中で $j = mn$ を選んだ理由に次がある.

Lemma 2.1 $K \subset E_m$ を $i(K) \geq mn$ である部分集合とし, $F \subset E_m$ を E_0 を含む線型部分空間で, $\dim F \geq 2mn + 2n + 2$ を満たすものとする, $F \cap K \neq \emptyset$ となる.

証明 のアイデアは、 F の補空間を $F_{(m)}^\perp$ とし、射影 $P : E_m \rightarrow F_{(m)}^\perp$ を考える事。 $F \cap K = \emptyset$ のとき $P(K) \subset F_{(m)}^\perp \setminus \{0\} \simeq_{equiv.h.e.} S(F_{(m)}^\perp)$ なので、 $i(K) \leq i(P(K)) \leq \frac{1}{2} \dim F_{(m)}^\perp$ とならないといけませんが、一方、 $i(K), \dim F$ の仮定をみると矛盾が出る。($\simeq_{equiv.h.e.}$ は equivariantly homotopically equivalent (同変ホモトピー同値) の意味である。)

これを用いて、臨界値 c_m の評価をする。

Lemma 2.2 $-\frac{\pi}{\nu} \leq c_m \leq -\frac{\pi}{\mu}$.

但、 $\mu = \max_{|x|=1} H(x)$, $\nu = \min_{|x|=1} H(x)$.

Step 1 H の定義から、 $\nu|x|^2 \leq H(x) \leq \mu|x|^2$ 従って loop z に沿って積分して、 $\nu\|z\|_{L^2}^2 \leq \Psi(z) \leq \mu\|z\|_{L^2}^2$. $z \in \mathcal{S}$ とすると $\Psi(z) = 2\pi$ ゆえ

$$\frac{2\pi}{\mu} \leq \|z\|_{L^2}^2 \leq \frac{2\pi}{\nu} \quad (6)$$

を得る。

Step 2 $\mathcal{S} \cap E_m \cap E^-$ を K として取ることで、 $c_m \leq \max_{z \in \mathcal{S} \cap E_m \cap E^-} A(z)$ となった。(6) から

$$\mathcal{S} \cap E_m \cap E^- \subset \left(B_{L^2} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \right) \setminus B_{L^2} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\mu}} \right) \right) \cap E_m \cap E^-$$

であったが、 $A(z)$ の定義をみることで、 A の (右辺) 上の最大値は、 $S_{L^2} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\mu}} \right) \cap V_{-1}$ 上での値 $\left(= -\frac{\pi}{\mu} \right)$ で抑えられる事が判る。これにより、 $c_m \leq -\frac{\pi}{\mu}$.

Step 3 $K \subset \mathcal{S} \cap E_m$ で $i(K) \geq mn$ であるものをとる。

$F := \bigoplus_{0 \leq k \leq m} V_k \oplus \text{span}_{\mathbb{C}} \langle (e^{-\sqrt{-1}t}, 0, \dots, 0) \rangle$ とおくと、Lemma 2.1 から、 $K \cap F \neq \emptyset$ となる。よって $\min_{z \in K \cap F} A(z) \leq \max_{z \in K} A(z)$ で、この (左辺) は $-\frac{\pi}{\nu}$ で下から抑えられる。即ち、 $c_m \geq -\frac{\pi}{\nu}$ (Lem 2.2 証明終)

次に $z_m \in E_m$ は、 A の $\mathcal{S} \cap E_m$ での臨界点での、Lagrangian multiplier λ_m をみる。

$$\dot{z}_m = \lambda_m \{ J \nabla H(z_m) \text{ の } E_m \text{ 成分} \} \quad (7)$$

Jz_m との内積をとると、 $c_m = \lambda_m \times 2\pi$ が判る。(2) ($|\lambda_m|$ は“周期”に対応することに注意) Lemma 2.2 から、 $-\frac{1}{2\nu} \leq \lambda_m \leq -\frac{1}{2\mu}$ が判る。

Lemma 2.3 $\|z_m\|_{W^{1,2}}$ は m に依らず一様有界である.

証明 Lemma 2.2 の証明中の (6) により $\|z_m\|_{L^2}$ は一様有界. 上の (7) から,

$$\|\dot{z}_m\|_{L^2} \leq |\lambda_m| \|\nabla H(z_m)\|_{L^2}.$$

また (3) より, $|\nabla H(x)| \leq a|x|$ なる $a > 0$ が存在する. よって,

$$\|\dot{z}_m\|_{L^2} \leq a|\lambda_m| \|z_m\|_{L^2}$$

となり, $\|\dot{z}_m\|_{L^2}$ も一様有界. 従って $\|z_m\|_{W^{1,2}} = \|z_m\|_{L^2} + \|\dot{z}_m\|_{L^2}$ も一様有界.

(Rabinowitz の定理の証明)

λ_m は一様有界ゆえ, 部分列をとり, $\lambda_m \rightarrow \lambda \in (-\infty, 0)$ としてよい. また, $\{z_m\}$ は $W^{1,2}$ の有界列なので, C^0 -位相で収束, $W^{1,2}$ -位相で弱収束する部分列がとれる. この極限を z と書くと, z は Hamilton 方程式の弱解となる. regularity を示すことができ, 周期解となる事が判る.

(Viterbo の仕事について)

Rabinowitz の Hamilton 関数の作り方を修正して, うまい Hamilton 関数を, 与えられた hypersurface of contact type を level set とする様に作る. ここでは直接 A_H (或いは A) を扱うのではなく, Fenchel dual というものを考える. こちらの functional に移る理由は, こちらは臨界点での Hessian の負の固有空間が有限次元となること¹⁶⁰. ここでも有限次元近似が用いられていて, 臨界点を探すには, cohomological index (或いは S^1 -同変 cohomology) を用いる.

3 Contact manifold の symplectization

contact geometry と symplectic geometry は, 次元の偶奇の違いはあるが, お互いに関連している. ここでは, その一例として, contact manifold の symplectization 及び, その中の J -holomorphic curve について述べる. symplectization については定義 0.2.9 (Part I) も見よ.

¹⁶⁰より正確にいうと, 有限次元部分空間の補空間では凸性が成立し, 変分問題を, この有限次元空間上で考えればよいことになる.

(M, ξ) を contact manifold とし, co-orientation が与えられているとしよう.
 (M, ξ) の symplectization は, 多様体としては,

$$P := \{\eta \in T^*M \mid \xi_{\pi(\eta)} = \text{Kern}\eta, \eta \text{ と co-orientation は同調}\}.$$

(但, $\pi: T^*M \rightarrow M$ は自然な射影)

ここで P 上に, T^*M の標準的な symplectic form $d\lambda$ (λ は Liouville form) の制限を考える. $(P, d\lambda|_P)$ を (M, ξ) の symplectization という.

T^*M への自然な $\mathbb{R}_{>0}$ の作用は, P を保ち, P は M 上の $\mathbb{R}_{>0}$ -bundle となる. M 上の contact form α で, ξ は α から決まる co-oriented contact structure とすると, α は $P \rightarrow M$ の cross section を与える. 逆に, $P \rightarrow M$ の cross section は ξ を与える contact form である. 一つ contact form α を選ぶことで P は $\mathbb{R}_{>0} \times M$ と同一視される. このとき, $P \cong \mathbb{R}_{>0} \times M$ 上の symplectic form $d\lambda|_P$ は, $d(t\alpha) = dt \wedge \alpha + t d\alpha$ で与えられる (但, t は $\mathbb{R}_{>0}$ の座標). (M, ξ) の幾何は, $(P, d\lambda|_P)$ の $\mathbb{R}_{>0}$ -不変な幾何としてとらえられる. たとえば, (M, ξ) の中の legendrian submanifold は, $(P, d\lambda|_P)$ の中の $\mathbb{R}_{>0}$ -不変 lagrangian submanifold と 1 対 1 に対応している.

以後 contact form α を 1 つ選んで固定して考える. X を対応する Reeb vector field 即ち $\alpha(X) = 1, i(X)d\alpha = 0$ なるものとする (特に X は ξ に横断的で, α を保つ). 次節で示したいのは, (ある条件下で) X が周期軌道をもつことである. X の軌道は, M 内の対象である. 対応する $P = \mathbb{R}_{>0} \times M$ での対象は何に当たるのであろうか (もちろん $\mathbb{R}_{>0} \times (X \text{ の軌道})$ であるが, どういう意味がつけられるのだろうか).

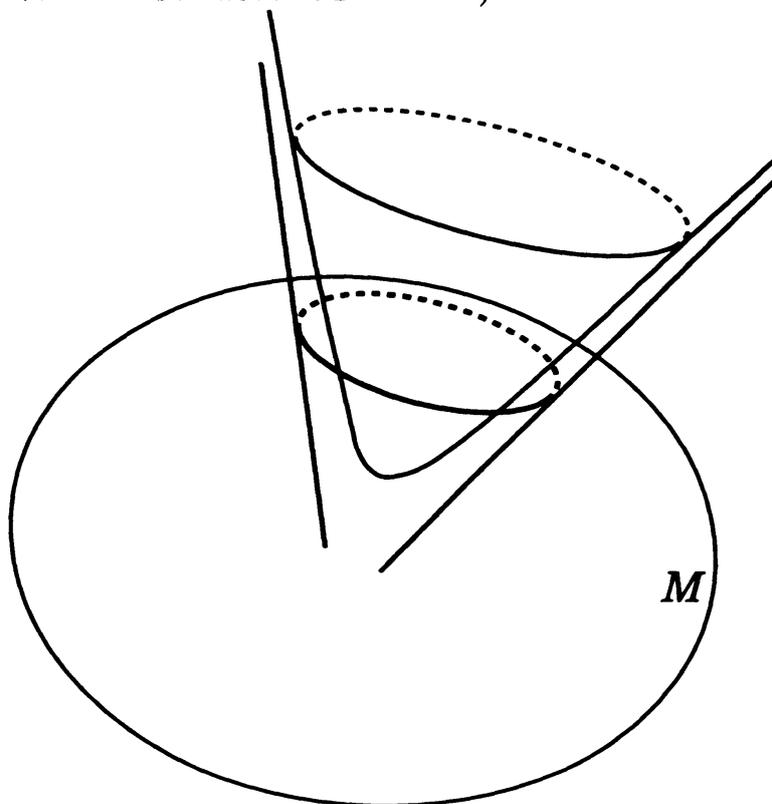
$TM = \xi \oplus \mathbb{R}X$ と分解すると, ξ は symplectic vector bundle であり, ここに complex structure $J: \xi \rightarrow \xi$ を入れ symplectic structure と同調しているとしてよい. 残った X と $\mathbb{R}_{>0} \times M$ 上の $\partial/\partial t$ とは, $d\lambda(\partial/\partial t, X) > 0$ を満たしているので, $\tilde{J}(\partial/\partial t) = (1/t)X, \tilde{J}(X) = -t(\partial/\partial t)$ として, $\text{span} \langle \partial/\partial t, X \rangle$ 上に complex structure を決める. ξ 上の complex structure J と合わせて, $P = \mathbb{R}_{>0} \times M$ 上に almost complex structure \tilde{J} で $d\lambda$ と同調しているものが得られる. $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を用いて $P = \mathbb{R} \times M$ と見ると, 第 1 座標を τ として, $d\lambda$ は $e^\tau(d\tau \wedge \alpha + d\alpha)$ で与えられ, $\tilde{J}(\partial/\partial \tau) = X, \tilde{J}(X) = -(\partial/\partial \tau)$ となる. 従って, $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ を vector field X の積分曲線とするとき,

$$U_\gamma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M; U_\gamma(x + iy) = (x, \gamma(y))$$

と定めると, U_γ は $\tilde{J} \circ dU_\gamma = dU_\gamma \circ i$ を満たす. すなわち \tilde{J} -holomorphic となる. もし, γ が周期軌道, すなわち $\gamma(0) = \gamma(T)$ であるとするれば,

$$U_\gamma(x + i(y + T)) = U_\gamma(x + iy)$$

を満たし, 従って $u_\gamma : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R} \times M$ なる \tilde{J} -holomorphic map を得る. Hofer のアイデアは, “finite energy plane” と呼ばれる \tilde{J} -holomorphic な $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ を見つけると, \mathbb{C} の無限遠の近傍では $u_\gamma : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R} \times M$ に漸近的に近づくだらう. 従って周期軌道 γ の存在が判るというものである (ここでの表現の仕方は雑になってしまったが, 詳しくは後の説明を見られたい).



symplectization 中の \tilde{J} -holomorphic curve の説明のために, J -convexity について述べる. 一般に (N, J) を almost complex manifold, $S \subset N$ を hypersurface とする. $S = \{\rho = 0\}$ が $\{\rho < 0\}$ の側からみて J -convex ($\iff \{\rho > 0\}$ の側からみて J -concave) であるとは, $\forall p \in S$ において $\xi_p = \{v \in T_p S \mid Jv \in T_p S\}$ 上で $-dJ^*d\rho$ が正定値となることを定義する (これは複素幾何における強擬凸の概念のそのままの拡張である). §1 で述べた hypersurface of contact type に対しては, これを J -convex とする様な almost complex structure で symplectic structure と同調するものがある事が判る.

さて, $\{\tau_0\} \times M \subset \mathbb{R} \times M$ は, $\{\tau < \tau_0\} \times M$ の側からみて \tilde{J} -convex (\iff

$\{\tau > \tau_0\} \times M$ の側からみて \tilde{J} -concave) である事が判る. 次の Lemma を認めると, compact Riemann surface からの \tilde{J} -holomorphic map を考えるにあたり, “ $\{+\infty\} \times M$ ” の end はさして問題はない事が判る. 一方, “ $\{-\infty\} \times M$ ” の end には \tilde{J} -holomorphic map が逃げていく可能性がある. 実際 Hofer は “ $\{-\infty\} \times M$ ” に逃げていく “bubble” から前述の “finite energy plane” を把えた.

Lemma 3.1 $S = \{\rho = 0\}$ が $\{\rho < 0\}$ の側からみて J -convex とする. $f : D^2 \rightarrow N$ は J -holomorphic, $f \neq \text{const.}$ で, $\{\rho \leq 0\}$ に含まれていると仮定すると, f は D^2 の内点で S に接する事はない.

証明 D^2 上の座標を $z = x + iy$ とし, complex structure を J_{D^2} と書く. D^2 上の positive Laplacian Δ は, $(\Delta\varphi)dx \wedge dy = dJ_{D^2}^*d\varphi$ を満たす. ここで φ として $\rho \circ f$ を考える.

$$\begin{aligned} (\Delta(\rho \circ f))dx \wedge dy &= dJ_{D^2}^*d(\rho \circ f) \\ &= dJ_{D^2}^*f^*d\rho \\ &= df^*J^*d\rho \\ &= f^*(dJ^*d\rho) \end{aligned}$$

この事から, $\Delta(\rho \circ f) \leq 0$ となり, $\Delta = -((\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2))$ であることに気をつけて最大値の原理を用いると, $\rho \circ f$ は内点で最大値をとるとすれば, 定数となる事が判る. 従って $f(D^2)$ は S に含まれる事となるが, S は J -convex ($\Rightarrow -J^*d\rho$ は contact form) ゆえ, non-constant J -holomorphic map で $f(D^2) \subset S$ なるものはない.

ここで contact manifold (M, ξ) の symplectization $(P = \mathbb{R} \times M, d\lambda|_P)$ 上で, 前述の \tilde{J} に関する holomorphic curve に戻る. たとえば, $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ を \tilde{J} -holomorphic とし, $f(\partial D^2) \subset \{0\} \times M$ とする. この時, $\mathbb{R} \times M$ の第 1 座標 τ は, D^2 の内点では最大値はとれないので, $f(D^2) \subset (-\infty, 0] \times M$ となる事が判る. また, 構成から, \tilde{J} は \mathbb{R} -作用で不変である. 従って, $f = (a, u) : D^2 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ が \tilde{J} -holomorphic であるとする, 任意の $\tau_0 \in \mathbb{R}$ に対し, $f^{\tau_0} = (a + \tau_0, u)$ も \tilde{J} -holomorphic となる. 一方, \tilde{J} に対称性があるという事は, “genericity” に反するので, \tilde{J} -holomorphic curve の方程式の線型化が全射である (“transversality”) 保証があるかという疑問を持たれるかもしれない. ここで $\dim_{\mathbb{R}} M = 3$ (従って $\dim_{\mathbb{R}} P = 4$) とすると, 実 4 次元複素多様体の中の埋め込まれた J -holomorphic curve に対する “transversality” は, その Maslov 指数に条件をつけると自動的に保証される場合

がある事 (Hofer-Lizan-Sikorav) に留意していただきたい. 最後に, $f = (a, u)$ が \tilde{J} -holomorphic であるという条件を, $u : D^2 \rightarrow M, a : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ の言葉で書き直しておく. 但, ここで π は射影 $TM \rightarrow \xi$ を表す.

$$\begin{cases} \pi(\partial u/\partial x) + J(u)\pi(\partial u/\partial y) & = 0 \\ (u^*\alpha) \circ J_{D^2} & = da \end{cases}$$

4 Hofer の仕事

まず前節で触れた “finite energy plane” とは何か, から始める.

$f = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ を \tilde{J} -holomorphic map とする. f が “finite energy plane” であるとは, $0 < E(f) < \infty$ を満たすことである. 但し, $E(f) = \int_{\mathbb{C}} u^* d\alpha$. これを, f の energy と呼ぶ. 注意して欲しいのは, ここでの energy は, 調和写像を考えるとときの energy とは異なり, M -方向の symplectic area と言うべきものである. (従って, 前節の $u_\gamma : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R} \times M$ のここでの energy を考えると 0 となる.) ここで, 所謂 removal of singularity との関係について疑問を持たれるかもしれない. removal of singularity の場合, energy が有限かつ像の一様有界性が仮定されるが, 上での finite energy というときの energy とは意味が異なる (上述). また, そもそも contact manifold の symplectization は, exact symplectic manifold であり, compact Riemann surface からの holomorphic map は定値写像しかあり得ない.

もう少し, “energy らしい” energy を導入しよう. まず,

$$\Sigma := \left\{ \phi : \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{1}{2}, 1 \right] ; \phi : \text{smooth}, \phi' \geq 0 \right\}$$

とおく. ($\phi' > 0$ であるとする, $d(\phi(\tau)\alpha)$ は $\mathbb{R} \times M$ 上の symplectic form となる.)

$$E_\Sigma(f) := \sup_{\phi \in \Sigma} \int f^* d(\phi\alpha).$$

実際, finite energy plane に対しては, $E(f) = E_\Sigma(f)$ が成立する.

Theorem 4.1 $f = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ を定数でない \tilde{J} -holomorphic map とし, $E_\Sigma(f) < \infty$ とすると,

- (1) $\int u^* d\alpha =: T < \infty$. 更に, このとき $T = E_\Sigma(f)$.
- (2) $\exists R_k \rightarrow \infty$ で, $u(R_k e^{2\pi i \frac{\cdot}{k}}) \rightarrow x(t)$ に収束し, しかも, $\dot{x}(t) = X(x(t))$ を満たす.

即ち, finite energy plane が存在すれば, Reeb vector field の周期軌道が存在する.

以下、証明の粗筋を紹介する。先ず、 $E_{\Sigma}(f) > 0$ としているので、 f は定値写像ではないことに注意する。

($T < \infty$ の証明) \tilde{J} -holomorphic map $f = (a, u)$ に対して

$$\begin{aligned} \int u^*(d\alpha) &= \int \left| \pi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|^2 dx \wedge dy \\ &\leq 2 \int \phi(a) \left| \pi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|^2 dx \wedge dy \\ &\leq 2 \int f^*(\phi d\alpha). \end{aligned}$$

また、

$$\int f^*d(\phi\alpha) = \int f^*(\phi d\alpha) + \int f^*d\phi \wedge \alpha.$$

この第2項は、 f が \tilde{J} -holomorphic なので

$$\int f^*d\phi \wedge \alpha = \int \phi'(a) \left(\left| \frac{\partial a}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \right) \geq 0.$$

従って

$$T = \int u^*(d\alpha) \leq 2 \int f^*d(\phi\alpha) \leq E_{\Sigma}(f)$$

を得る。またこのとき $T > 0$ である。 $T = 0$ とすると、 u の微分は至る所 Reeb vector field の方向 (= $\mathbb{R}X$) しか持たない事が判るので、ある Reeb vector field の積分曲線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ (i.e., $\dot{\gamma} = X(\gamma)$) と $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して、

$$u(x + iy) = \gamma(\psi(x + iy))$$

と書かれる。 $f = (a, u)$ が \tilde{J} -holomorphic である事から、

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial y}$$

を満たす。即ち、 $h = a + i\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は holomorphic .

$$\begin{aligned} E_{\Sigma}(f) &\geq \int f^*d(\phi\alpha) = \int \phi'(a) \left(\left| \frac{\partial a}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial a}{\partial y} \right|^2 \right) \\ &= \int \phi'(Reh) \left\langle J_{\mathbb{C}} \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right\rangle = \int h^*d(\phi(x)dy) \\ &\geq \int d(\phi(x)dy) = \infty \end{aligned}$$

ここで, $J_{\mathbb{C}}$ は \mathbb{C} 上の通常 complex structure, \langle, \rangle は \mathbb{C} 上の通常の内積である. 最後の不等号は h が non-constant holomorphic function であることによる.

これは, $E_{\Sigma}(f) < \infty$ の仮定に反する. よって $T > 0$ である.

(微分の評価) まず, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ を \mathbb{C} の極座標で書く. 即ち $(s, t) \in \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \exp(2\pi(s + it))$ を通して

$$g(s, t) := f(\exp(2\pi(s + it)))$$

と $g: \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ を定める. 目標は $g(s, \cdot)$ が $s \rightarrow \infty$ の時に, $\dot{\gamma} = TX(\gamma)$ (即ち, T-periodic orbit) に収束する事の証明である. その為に, ここでは, g の微分の評価を行う.

$$|\nabla g(s_k, t_k)| =: R_k \rightarrow \infty \quad (s_k \rightarrow \infty \quad \exists t_k \in [0, 1])$$

と仮定しよう. bubbling の時にやる論法で, “ (s_k, t_k) のまわりでの” rescaling をする. 気をつけておきたいのは, target が non-compact である事で, 従って, $\mathbb{R} \times M$ のもつ \mathbb{R} -symmetry に着目して, 第 1 座標を正規化しておく. 即ち,

$$g_k(z) := \left(a \left(z_k + \frac{z}{R_k} \right) - a(z_k), u \left(z_k + \frac{z}{R_k} \right) \right)$$

とおく. 但し, $z_k \in \mathbb{C}$ と $(s_k, t_k) \in \mathbb{R} \times S^1$ を同一視する.

$\varepsilon_k > 0$ で $\varepsilon_k R_k \rightarrow \infty$ となり, かつ $B_{\varepsilon_k R_k}$ 上で $|\nabla g_k| < 2$ となるようなものを取りることができる (詳しくは Hofer の論文を参照). すると, 与えられた任意の $A > 0$ に対し $\varepsilon_k R_k > A$ となる k に対し g_k は B_A 上一様連続. $g_k(0)$ の第 1 成分は 0 と正規化されていることから. g_k の部分列をとれば $g_{\infty}: B_A \rightarrow \mathbb{R} \times M$ に収束する. $A > 0$ は任意であったので, 結局 $g_{\infty}: B_A \rightarrow \mathbb{R} \times M$ となり, regularity の議論から, g_k は g_{∞} に C_{loc}^{∞} -収束し, g_{∞} は \bar{J} -holomorphic となる.

前のステップで述べた事, 及び $E_{\Sigma}(g_{\infty}) < \infty$, g_{∞} が定値写像でない事を合わせると,

$$\int g_{\infty}^* d\alpha > 0$$

を得る.

一方, $R > 0$ に対して,

$$\int_{B_R(0)} g_k^* d\alpha = \int_{B_{R/R_k}(z_k)} g^* d\alpha$$

であり, $k \rightarrow \infty$ の時,

$$z_k \rightarrow \infty, R/R_k \rightarrow 0$$

(R は1つとって止めている)なので,

$$\int g_{\infty}^* d\alpha = 0 \quad \left(\because \int g^* d\alpha < \infty \right).$$

これは矛盾である。従って, $|\nabla g|$ は $\mathbb{R} \times S^1$ 上有界である。ここまで判ると, standard な議論で, 高階微分についての評価も得られる。

(周期軌道への収束) $k \rightarrow \infty$ の時, $s_k \rightarrow \infty$ となる数列をとり,

$$g^{(k)}(s, t) := (a(s_k + s, t) - a(s_k, 0), u(s_k + s, t))$$

なる列を考える。前のステップで述べた事から, $g^{(k)}$ の (高階) 微分は有界であり, $\mathbb{R} \times M$ の第1成分が正規化されている事から, (部分列をとって) $g^{(\infty)} : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ (\bar{J} -holomorphic) に C_{loc}^{∞} -収束している。 $g^{(\infty)}$ の性質を調べてみよう。

もともと g は, f の “極座標表示” であった。Stokes の定理により

$$\int_{\{0\} \times S^1} g^{(k)*} \alpha = \int_{\{s_k\} \times S^1} g^* \alpha = \int_{(-\infty, s_k] \times S^1} g^* d\alpha \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}} f^* d\alpha = T$$

$$\int_{[-R, R] \times S^1} g^{(k)*} d\alpha = \int_{[-R+s_k, R+s_k] \times S^1} g^* d\alpha \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

ここで, R は任意の正数をとって止めている。従って, $g^{(\infty)}$ に対し

$$\int_{\mathbb{R} \times S^1} g^{(\infty)*} d\alpha = 0$$

を得る。

$s + it \in \mathbb{C} \rightarrow (s, t \bmod \mathbb{Z}) \in \mathbb{R} \times S^1$ と合成し, $g^{(\infty)}$ を \mathbb{C} からの \bar{J} -holomorphic map とみる。まず, $\int_{\mathbb{R} \times S^1} g^{(\infty)*} d\alpha = 0$ となる事から, ある $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ と, $\dot{\gamma} = TX(\gamma)$ なる loop γ が存在して,

$$g^{(\infty)}(s + it) = (a(s + it), \gamma(\psi(s + it)))$$

の形に書かれる。前にも見た様に $a + i\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は正則である。ここで, $g^{(\infty)}$ の微分は一様に押さえられているので, $a + i\psi$ は linear growth¹⁶¹。また,

$$\int_{\{*\} \times S^1} g^{(\infty)*} \alpha = T$$

となる事から, $\psi(s + 1 + it) - \psi(s + it) = T$ となる。 $g^{(\infty)}$ が

$$g^{(\infty)}(s + i(t + 1)) = g^{(\infty)}(s + it)$$

¹⁶¹今は定数でないので線形同型

を満たしていたので,

$$a(s + i(t + 1)) = a(s + it)$$

となる. $a + i\psi$ は \mathbb{C} の線型同型であったので

$$g^{(\infty)}(s + it) = (Ts, \gamma(Tt + c)) \quad (\exists c \in \mathbb{R})$$

と書かれることが判る. また同様の議論で $E_{\Sigma}(f) = T$ となることも判る. (証明終)

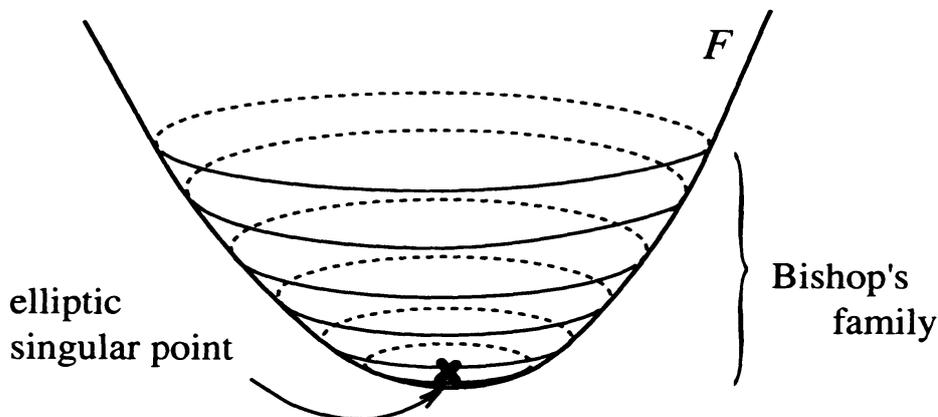
そこで, finite energy plane を如何にみつけるかに移ろう. (M, ξ) を 3 次元閉 contact manifold とする.

(1) $\pi_2(M) \neq \{1\}$ の時

3 次元の contact structure は tight, overtwisted の 2 のクラスの分けられる (Eliashberg). overtwisted の場合は後に回してここでは tight な時を扱う.

3 次元トポロジーの sphere theorem により, $\pi_2(M) \neq \{1\}$ の時, 埋め込まれた 2 次元球面 $F(\approx S^2) \subset M$ で $\pi_2(M)$ の元として非自明なものがとれる. 従って, F は $\mathbb{R} \times M$ の中でも 3 次元 ball を bound することはない.

Elimination Lemma により, F を “少し” 動かして, F 上に $\xi \cap TF$ の定める singular foliation (characteristic foliation) が 2 つの elliptic points のみを singular points とする様にできる. この elliptic point のまわりでは所謂 Bishop family が作れる. 即ち, F に境界をもつ \bar{J} -holomorphic disks の族で互いに交わらないものがとれて, disks の boundary の像により, elliptic point の F における近傍が foliate される.



こうして, (2 つの)elliptic points のまわりでは, holomorphic disks の族が構成

される。これらの disks の Maslov index は 2 であり、この homotopy 類に属する holomorphic disks の族 (unparametrized disks) は実 1 次元である。これを基に holomorphic filling の議論の真似をしよう。

$F \setminus \{e^\pm\}$ は $\mathbb{R} \times M$ の中の totally real surface なので holomorphic disks の Fredholm theory ができる。

先に述べた §3 の Lemma の boundary version により、holomorphic disks $\tilde{u} : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, F \setminus \{e^\pm\})$ の boundary に対し、次が判る。

Lemma 4.2 $\tilde{u}|_{\partial D^2}$ は $F \setminus \{e^\pm\}$ の characteristic foliation と横断的である。特に immersed loop である。

また、先の Maslov index が 2 という事を言い換えると、 $\tilde{u}|_{\partial D^2}$ の $F \setminus \{e^\pm\} \cong \mathbb{R} \times S^1$ の winding number は $(\pm)1$ である。このことと先の Lemma を合わせると、 $\tilde{u}|_{\partial D^2}$ は embedded loop である事がわかる。

pseudo holomorphic curve の局所理論により embedded holomorphic curve の小さな変形は embedded である。先述の Bishop family から出発して、できる限り、これらの family を拡張してみる。これらに現れる holomorphic disks のうちに交わるものがあるとすると、内点或いは境界上の点に於ける交点数を考察することで矛盾を得る。(Bishop families に属する 2 つの holomorphic disks は互いに交わらなかった事に注意)

さて、これらの微分が一様有界であれば、compact 性定理及び、automatic regularity により、2 つの families がつながることとなる。一方、 F は $\pi_2(\mathbb{R} \times M) = \pi_2(M)$ の元として非自明であったので、 F は 3-ball を bound しない。しかし、上の holomorphic disks の族は全体として 3-ball $\subset \mathbb{R} \times M$ を成してしまうので、これは矛盾である。従って微分は一様有界とはなり得ない。

(注意) holomorphic disk の parametrization には、 $Aut(D^2) = PSL_2\mathbb{R}$ の不定性があるので、holomorphic disk \mathcal{D} に対し

$$grad(\mathcal{D}) = \inf \left\{ \sup_{z \in D^2} |\nabla u| \mid u : D^2 \rightarrow \mathbb{R} \times M; \tilde{J}\text{-holomorphic}, u(D^2) = \mathcal{D} \right\}$$

と定め、これを“微分の大きさ”として議論する。

Maslov index = 2 の \tilde{J} -holomorphic disks の列 \mathcal{D}_j で、 $grad(\mathcal{D}_j) \rightarrow \infty$ ($j \rightarrow \infty$) なるものを取る。

この時, rescaling の議論をするのであるが, $\text{grad}(D_j)$ が発散するのが, 内点に於いてか境界に於いてか (より正確には, 境界への近づき方と, 微分の大きさの発散の仕方に依る) により, bubble として得られるものが, \mathbb{C} からの holomorphic map か, 上半平面 ($\cong D^2$) からの holomorphic map かと異なる. bubble として得られるものは, 定値写像ではない事と, \tilde{J} -holomorphic disk の方程式の線型化の index (これが holomorphic disk の空間の次元を与える) 及び, この index と Maslov index の関係を合わせると, 今の場合, 後者は起こり得ない事が判る ($winding\ number = (\pm)1$ であった事を想起). よって, \mathbb{C} からの holomorphic map を得た. これが finite energy plane である事を示そう. 上で得た \mathbb{C} からの holomorphic map は bubble であったので $D_j = \text{Im } u_j$ なる \tilde{u}_j に対し, $E_\Sigma(\tilde{u}_j)$ が一様有界である事を見れば十分である.

$\phi \in \Sigma$ をとる.

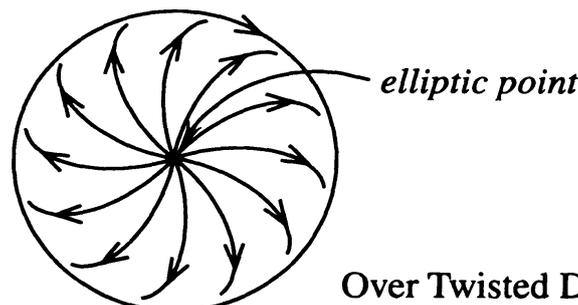
$$\begin{aligned} \int_{D^2} \tilde{u}_j d(\phi\alpha) &= \int_{\partial D^2} \tilde{u}_j^* d(\phi\alpha) = \int_{\partial D^2} \phi(0) u_j^* \alpha \\ &\leq \frac{1}{2} \int_F |d\alpha| \end{aligned}$$

ここで, 2番目の等号は $\tilde{u}_j(\partial D^2) \subset F \subset \{0\} \times M$ であることにより, 最後の不等号は $|\phi| \leq 1$ 及び $\tilde{u}_j(\partial D^2)$ は $F(\cong S^2)$ の中の embedded loop ゆえ F を2つの領域に分けることにより得られる. F 上で Stokes の定理を用いる事で, $\int_{\partial D^2} u_j^* \alpha \leq \frac{1}{2} \int_F |d\alpha|$ を得る.

以上により, finite energy plane を得た.

(2) overtwisted の時

overtwisted disk $D \subset M$ をとる. 中心の elliptic point のまわりで Bishop family



を作る.

これを拡張できる限り拡張してみる. もしも $\text{grad}(D)$ が有界であるとする, 更に, D を越えて拡張される事となる. 一方, 前頁の Lemma から $D \setminus \{e\}$ に境界をもつ holomorphic disk は, overtwisted disk D の境界 $= \xi \cap TD$ の limit cycle に接することはできない. Bishop family に含まれる disk は, ∂D とは交わっていないので, もし, これを拡張した族に含まれる holomorphic disk が ∂D と交わるならば, (その前に) ∂D と boundary curve が接する holomorphic disk が存在することとなる. これは起こり得ない. 即ち, この族の holomorphic disk は ∂D に達することはできない.

この事から, 何かの理由で compact 性が崩れているはずであり, 従って $\text{grad}(D)$ は有界ではない. 前の場合 (1) と同様に, この事から finite energy plane の存在が分かる. 前の Theorem を適用して次を得る.

Theorem 4.3 (M, ξ) を 3次元閉 contact manifold で, overtwisted であるか, 又は, $\pi_2(M) \neq \{1\}$ であるならば, Reeb vector field X for ξ は周期軌道をもつ.

さて, S^3 上では, contact structure の分類が Eliashberg により成されている. それによると, tight structure は一意である. \mathbb{C}^2 中の単位球面 $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ に complex tangency の定める接分布は tight structure である. このとき \mathbb{C}^2 上の $\alpha_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (x_i dy_i - y_i dx_i)$ の制限は tight contact form である. 他の ξ と同調する contact form は正値関数 φ を用いて, $\alpha = \varphi \alpha_0$ と書かれる.

$$j_\varphi : S^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \quad ; \quad j_\varphi(z) = \varphi(z) \cdot z$$

とすると, $j_\varphi(S^3) \subset \mathbb{C}^2$ は star-shaped であり, $j_\varphi^* \alpha_0 = \varphi \alpha_0 = \alpha$ となる.

§2 で示した Rabinowitz の定理に依れば, この様な α に対応する Reeb vector field は周期軌道を持つ. 従って今までの事から;

Theorem 4.4 S^3 上の “Reeb vector field” は周期軌道をもつ.

5 更に続く話題¹⁶²

Hofer は, 更に次の事を主張している:

Theorem 5.1 S^3 上の “Reeb vector field” は, 丁度 2 つの (素な) 周期軌道を持つか又は無限個もつ.

¹⁶²1995 年 12 月現在

これは, finite energy plane が Reeb vector field と横断的なので, これについての Poincaré return map を考えると, area preserving となり, Franks の定理を適用する事によりえられる.

また, finite energy plane の moduli 空間を考察する事で, 非退化で Conley-Zehnder index 等が然るべき条件を満たすとき, M が open book decomposition を持つことや, S^3 の特徴付け等も得ている. (Hofer-Wysocki-Zehnder) こうした話題については筆者の勉強不足で説明することができない.

symplectization $\mathcal{P} = \mathbb{R} \times M$ では “ $\{-\infty\} \times M$ ” に bubble が逃げてしまう可能性に目をつけて, Hofer は finite energy plane を見つけた. 逆に, こうした可能性が排除されてしまうと, 所謂 “(weak)compactness” が成立し, pseudo-holomorphic disk に対して, compact manifold の時のような議論ができると予想される. 実際 “ $\{-\infty\} \times M$ ” に然るべき条件をつけると, Floer homology の話を展開する事ができる ([10]). M が symplectic filling を持つ時は, $(-\infty, c] \times M$ を symplectic filling とおきかえて, $\{\infty\} \times M$ のみを end とする symplectic manifold を得る. ここでは, end の convexity がある. 筆者は, これに着目して Floer homology の議論を行った (legendrian-pre lagrangian intersection についての Arnold 予想, [11]).

参考文献

全般については,

- [1] H. Hofer - E. Zehnder, *Symplectic invariant and hamiltonian system*, Birkhäuser, (1994).
- [2] M. Struwe, *Variational Methods*, Springer, (1990).

等がある. 筆者は全く読んでいないのだが, “dual functional”の方法については次のものがある.

- [3] I. Ekeland, *Convexity methods in Hamiltonian mechanics*, Ergebnisse Math., 19, Springer, (1991).

以下, 本稿で触れた話題に関するもの.

- [4] P. Rabinowitz, *Periodic solution of Hamiltonian systems*, Comm. Pure and Appl. Math., 31, (1978) pp.157-184.
- [5] A. Weinstein, *Periodic orbit for convex Hamiltonian systems*, Ann. Math. 108, (1978) pp.507-518.
- [6] C. Viterbo, *A proof of the Weinstein conjecture in \mathbb{R}^{2n}* , Ann. Inst. H. Poincaré :Analyse non lineaire, 4, (1987). pp.337-356.
- [7] H. Hofer - E. Zehnder, *Periodic solution on hypersurfaces and a result by C.Viterbo*, Invent. math., 90. (1987) pp.1-9.
- [8] H. Hofer, *Pseudo-holomorphic curves in symplectization with application to the Weinstein conjecture in dimension three*, Invent. math. 114, (1993). pp.515-563.
- [9] F. Laudenbach, *Orbites Périodiques et courbes pseudo-holomorphes, application à la conjecture de Weinstein en dimension 3 [d'après H. Hofer et al.]*, Exposés 786, Séminaire N. Bourbaki, juin (1994).

また, symplectization 中の Floer homology を扱ったものとして,

- [10] Y. Eliashberg - H. Hofer - D. Salamon, *Lagrangian intersection in contact geometry*. GAFA 5, (1995) pp.244-269.
- [11] K.Ono, *Lagrangian intersection under legendrian deformation*, Duke Math. J. 85-1, (1996). pp.209-225.

索引

- 1-jet, 9
- Anosov 流, 64, 72
代数的, 65, 78
- Anosov 葉層, 64
- Barrett-稲葉 の定理, 54
- Bennequin 曲面, 33_n
- Bennequin の不等式
閉 braid に対する, 32
閉曲面に対する, 83
Legendrian knot に対する, 27
横断的 knot に対する, 27, 44, 49
- Bennequin の主定理, 26
- Bishop の標準形, 43
- Bishop の定理, 44
- Bishop 族, 45, 96, 122
- braid, 31
- 分割, 80
- confoliation, 56
- Confoliations の主定理, 54
- 楕円点, *see* 複素点
- Darboux 座標, 16
 S^1 -, 20
- Dehn 手術, 23, 68, 88
- Elimination Lemma, 29
- EMS, *see* 例外的極小集合
- FEP, *see* 有限エネルギー平面
- FES, *see* 有限エネルギー曲面
- filling
holomorphic, 36
strong symplectic, 36, 66
symplectic, 37, 47
- 複素点
楕円点, 双曲点, 42, 43
正の, 負の, 42
- Ghys-Giroux-佐藤-坪井 の不等式, 53
- 擬正則曲線, *see* J -正則曲線
- Grassmann 多様体, 41
- Grauert 領域, 11, 35
- Gray の定理, 17
- Gromov の Compact 性, 40, 47
- Hamiltonian ベクトル場, 108
- Hopf fibration, 7
- ホロノミー, 55
- hypersurface of contact type, *see* 接
触型境界
- J -convexity, 36, 40, 40_n , 48, 116
- J -正則曲線, 36, 38, 47, 93
- 極小集合, 58
例外的, 58
- 狭義多重劣調和関数, 11, 35, 35_n
- 強擬凸領域, ——境界, 11, 35
- 吸引領域 (負の楕円点の), 30
- Lagrange 部分多様体, 6

N_n は N ページの脚注を指す.

- Lai の公式, 43
 Legendre 部分多様体, 5
 Levi-平坦, 46, 54
 Liouville 1-形式, 8, 36, 109, 115
 Liouville ベクトル場, 36, 109
 Lutz modification, *see* Lutz twist
 Lutz twist, 22
 full, 22, 24, 26, 62
 half, 22, 62

 Markov 曲面, **32**, 33
 Martinet の定理, 20
 Maslov 指数, 48, 118, 123, 124
 Milnor-Wood の不等式, 53

 OT-disk, 25

 PA 流, *see* 射影的 Anosov 流
 Poincaré ホモロジー 3-球面, 11, 26_n,
 91, 92
 pre-Lagrangian トーラス, 22, 81, 84
 propellor 構成法, 73

 Rabinowitz の定理, 97, **108**
 Reeb ベクトル場, 6, 95, 109
 Reeb 流, 6
 Reeb 成分, **31**, 61, 62, 77
 Reeb stability, 55
 Reeb 葉層, **31**, 32, 32_n, 62

 成長度, 68, 69
 群の, 68
 Riemann 多様体の, 69
 線形摂動, 66
 接触ベクトル場, 6, 80

 接触流, *see* Reeb 流
 接触型境界, 36
 接触ホモロジー, 97
 接触 1-形式, 2, 109
 接触構造, 2
 co-oriented, 4
 fillable, 37
 holomorphically, 36
 strongly symplectically, 36
 weakly symplectically, 37
 標準的, 8, 62
 Liouville, 8
 OT, *see* over twisted
 over twisted, 25
 正の, 負の, 4
 semi-fillable, 59
 tight, **25**, 34, 84
 接触多様体, 3, 109
 射影的 Anosov 流, 70
 正則, 77
 $SL(2; \mathbb{R})$ の補題, 72
 測地流, 8
 双曲点, *see* 複素点
 双接触構造, 66
 Stein 多様体, 11, **35**
 symplectic 構造, 4
 完備凸, 36
 symplectization, **6**, 93, 115

 Teichmüller 空間, 78
 Thom 予想 (一般化された), 50, **89**
 Thurston の不等式, 32, 32_n, 50, 53
 Thurston の学位論文, 53

Thurston-Bennequin 不変量, 27

特性曲面, 80

特性葉層, 22, 25_n, 52, 80

凸曲面, 80

quasi-Fuchs 変形, 78

Weinstein 多様体, 36_n

Weinstein 予想, 7, 97, 108

葉層構造

expansive, 68, 69

極小, 60

Reeb 成分を持たない, 32_n, 53_n,

61

taut, 60

有限エネルギー曲面, ——平面, 94,

118

前量子化, 前量子束, 10, 91, 94

非線形, 53_n

三松 佳彦 (みつまつ よしひこ)
中央大学理工学部
数学教室
〒 112-8551
東京都文京区春日 1-13-27
yoshi@math.chuo-u.ac.jp

小野 薫 (おの かおる)
北海道大学大学院理学研究科
数学教室
〒 060-0810
北海道札幌市北区北 10 条西 8 丁目
ono@math.sci.hokudai.ac.jp

日本数学会 数学メモアール 第 1 卷

3 次元接触構造のトポロジー

2001 年 2 月 1 日 発 行

定 価 2000 円 (本体価格)

著 者 三松 佳彦

発行者 〒 113-0033 東京都文京区本郷 4-25-9-203 撰 日本数学会

電 話 03-3816-5961

©Mathematical Society of Japan, 2001 ISBN4-931469-09-4 Printed in Japan

第1巻 3次元接触構造のトポロジー 三松 佳彦 著 2001年 2000円

数学メモアールは、数学の新しい流れを専門外の研究者にも読みやすい形で紹介し、これから研究を始めようとする大学院生には研究テーマを見つけるためのヒントを、意欲ある学部学生にはセミナーの題材を提供することをめざしています。
