

CR構造の理論

倉西 正武

林本 厚志 記

まえがき

本書は，平成 14 (2002) 年 5 月に東京大学大学院数理科学研究科において大学院生や学部 4 年生を対象に集中講義をおこなったノートをもとに，後日修正・加筆して纏めたものである．

講義の主題である CR 構造の研究に現れる重要な解析的不変量としてベルグマン核とセゲー核があり，Fefferman, Sato-Kashiwara-Komatsu-Hirachi, Hörmander, Sjöstrand, Boutet de Monvel 等による深い研究がある．

講義の目的は，Hörmander, Sjöstrand, Boutet de Monvel 等のアプローチに従い，セゲー核（特にその特異性）をシンプレクティック多様体上の偏微分方程論の立場から論じようとするもので，キーとなるのはフーリエ積分作用素である．これは，本書の中で詳しく説明される．予備知識は，位相線形空間の基本事項だけである．

講義を書き留め、清書して原稿を作成された林本厚志氏に深く感謝する．

倉西正武

平成 24(2012) 年 1 月 駒場にて

内 容

本講義録の目的はセゲー核の特異性が出てくる過程を初心者向けに紹介することにある。全体的な構成は次の通りである。

第 1 章では、本講義で扱う基本的な概念、例えば超曲面上の CR 作用素、セゲー核、セゲー射影、強擬凸超曲面の定義函数が Moser の正規形であることなどを定義し、それらの基本的な性質を述べる。また、次章以降の準備として、シンプレクティック写像、無限小シンプレクティック変換を定義し、それに付随したハミルトン函数や生成函数についての性質を示す。最後にハイゼンバーグ空間の CR 構造と、その空間の小さい変形の CR 構造の、それぞれのシンボルの変換則に表れる行列を求めることが今後の問題であることを述べる。

第 2 章では、第 1 章の最後に述べた問題を議論する。その問題が、与えられたシンボルに対して、行列値函数とハミルトン函数に関する微分方程式に帰着され、それはハミルトン函数を斉次次数毎に展開することで低次の方から帰納的に解かれる。

第 3 章では、Hörmander に従ってフーリエ積分作用素を定義し、そこに表れる相函数が擬微分作用素の場合の計算などを紹介する。また、フーリエ積分作用素が局所的にユニタリーであることを定義し、そうなるための条件を、そこに表れるシンボルの条件として求める。このようなフーリエ積分作用素を構成するのは、一般の超曲面とハイゼンバーグ空間上の CR 微分作用素を互いに写し合うフーリエ積分作用素を構成するためである。

第 4 章では、ハイゼンバーグ空間と一般の超曲面の CR 作用素の変換則を議論する。つまり、適当な擬微分作用素に対して、CR 作用素の変換則を成り立たせるような局所ユニタリーフーリエ積分作用素を見つける問題を議論する。その問題をシンボルがみたすべき問題として書き直し、そのシンボルを帰

納的に構成する.

第 5 章では, セゲー射影をフーリエ積分作用素とみなし, 前章までにみてきた変換則を使って, ハイゼンバーグ空間のセゲー核の特異性から, 一般の超曲面のセゲー核の特異性を導く. 最後にセゲー射影をフーリエ積分作用素とみなしたときの相関関数の性質が議論され, それと Fefferman の定理の関係を紹介する.

この講義録を書くに当たり, 東京大学大学院数理学研究科の野口潤次郎教授には多くのご指導をいただきました. この場をお借りして感謝申し上げます.

林本 厚志 記

ことわり

- (i) 自然数（正整数）の集合 $\mathbb{N}$ ，整数の集合 $\mathbb{Z}$ ，有理数の集合 $\mathbb{Q}$ ，実数の集合 $\mathbb{R}$ ，複素数の集合 $\mathbb{C}$ ，虚数単位 i 等は慣習に従って用いている． $\mathbb{Z}_+$ で非負整数の集合を表す．
- (ii) 定理や式の番号は区別せず統一的に現れる順に従って付けられている．ただし，式は (1.1.1) のように括弧で括られている．1 番目の数字は章を表し，2 番目の数字は節を表す．
- (iii) 近傍は常に開集合とする．
- (iv) 特に断らない限り領域とは， $\mathbb{C}^n$ ($n = 1, 2, \dots$) の連結開集合のことである．
- (v) 函数や写像 f が空間 X で定義されているとき，その部分集合 $Y \subset X$ への制限を $f|_Y$ で表す．
- (vi) 多様体は，特にことわらなければ連結とする．
- (vii) $O(1), o(1)$ 等はランダウの記法に従う．
- (viii) 有限集合 S に対し，その元の個数を $|S|$ で表す．
- (ix) 可微分多様体の開集合 U 上の， k 階連続偏微分可能函数の全体を $C^k(U)$ と書く． C^k 級とは， k 階連続偏微分可能であることを意味する． $C_0^k(U)$ は，台がコンパクトな $C^k(U)$ の元の全体を表す．
- (x) 一般に微分型式 α に対し， $\alpha^k = \alpha \wedge \cdots \wedge \alpha$ (k 回) ．

目次

第 1 章	正則函数	1
1.1	準備	1
1.2	強擬凸な実超曲面	11
1.3	シンプレクティック変換	20
第 2 章	シンプレクティック写像	25
2.1	シンプレクティック写像	25
第 3 章	フーリエ積分作用素	37
3.1	位相ベクトル空間	37
3.2	フーリエ積分作用素	38
3.3	局所ユニタリーフーリエ積分作用素	54
第 4 章	CR 構造の同値性	59
4.1	CR 作用素の変換則	59
4.2	シンボルの構成	65
第 5 章	セゲー核の特異性	71
5.1	セゲー核の構成	71
5.2	特異性の計算	77
5.3	セゲー核の相函数	85
	参考文献	91
	索引	95
	記号	96

第1章 正則函数

1.1 準備

1.1.1

M をなめらかな多様体とし, $E \xrightarrow{p} M$ を M 上のなめらかなバンドルとする. M の開部分集合 M_1 となめらかな $\chi: M_1 \rightarrow E$ で $p \circ \chi$ が M_1 の恒等写像のとき, χ を E の切断とよび, M_1 を χ の領域とよぶことにする. なめらかとは無限回微分可能のこととする.

$\widetilde{M}$ を n 次元複素多様体とし $(z) = (z^1, \dots, z^n)$ を $\widetilde{M}$ の開集合 D の上で定義された $\widetilde{M}$ の局所座標とする. $h: D \rightarrow \mathbb{C}$ が D 上の正則函数であるとは, $\alpha = 1, \dots, n$ に対して h が

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}^\alpha} = 0$$

を満たすことであると云へる. ここで実変数 $x^1, \dots, x^{2n}$ を導入して $z^\alpha = x^{2\alpha-1} + ix^{2\alpha}$ とおいたとき

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^{2\alpha-1}} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^{2\alpha}} \right)$$

と定義する. 上の係数 $\frac{1}{2}$ は $\dots, \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}, \dots$ が $\dots, dz^\beta, \dots, d\bar{z}^\beta, \dots$ の双対基底になるために入れてある. $\mathbb{C}TD$ を D の複素接ベクトル束とする. $\widetilde{M}$ は複素多様体であるので,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}$$

で生成される部分接束 $T''D \subset \mathbb{C}TD$ は座標の取り方によらず, 次の条件を満たす $\widetilde{M}$ 上の大域的な束 T'' になる:

- (i) X, Y を T'' の切断で領域の等しいものとするとき, リーブラケット $[X, Y] = XY - YX$ も T'' の切断である,
- (ii) $T'' \cap \overline{T''} = \{0\}$, $T'' + \overline{T''} = \mathbb{C}TD$, 従って
- (iii) T'' のファイバーは n 次元.

T'' を $\widetilde{M}$ の $(0, 1)$ 型の束と呼ぶ. 条件 (i) が満たされて居るとき, T'' はリーブラケットで閉じて居ると云う.

逆に N を多様体とすると, $\mathbb{C}TN$ の部分束 $T'' = T''(N)$ で上の条件を満たすものが与へられたとき, $n > 2$ ならば N に複素構造を入れて, その $(0, 1)$ 型の束が $T''(N)$ になるように出来る事が知られて居る. (Newlander-Nirenberg の定理 [21]). 従って複素構造は上のような部分束によって特徴付けられる. これは局所的な定理であり, 証明は簡単でない.

注意 1.1.1. $\mathbb{C}TN$ の部分束 E を与へることは, 階数が常数の 1 位の線形齊次偏微分方程式

$$\text{任意の } X \in \Gamma(E) \text{ に対して } Xf = 0$$

を与へることと同値である. 上の方程式を E で決まる方程式と呼ぶことにする.

1.1.2

以下 D を滑らかな境界を持つ複素 n 次元多様体とし, $\text{bd}D$ の一点 p_0 を固定して p_0 の $\text{bd}D$ における近傍 M の局所的な問題を考へる. 簡単のため, M を $\text{bd}D$ と書くことが多い. この場合, T'' は $\text{bd}D$ での点でも定義出来て居るとして $\text{bd}D$ には D の $(0, 1)$ 型の束 T'' から導かれる束 $T''(\text{bd}D)$ が次のように定義出来る:

$$T''(\text{bd}D) = \mathbb{C}T(\text{bd}D) \cap T''.$$

$X \in \mathbb{C}TD$ が $\mathbb{C}T(\text{bd}D)$ に入る (すなはち $\text{bd}D$ に接して居る) ための条件は 1 つの実係数の 1 次の線型方程式で書け, この方程式は T'' の元を決める方程式とは独立である. 従って上の (iii) により $T''(\text{bd}D)$ のファイバーは $n - 1$ 次元である. このとき $T''_b = T''(\text{bd}D)$ は次の性質を満たす;

- (i) T_b'' の切断はリーブラケットで閉じて居る,
- (ii) $T_b'' \cap \overline{T_b''} = \{0\}$,
- (iii) T_b'' のファイバーは $n - 1$ 次元.

一般に $(2n - 1)$ 次元多様体 M に対して, $\mathbb{C}TM$ の部分束 T_b'' が上の条件 (i)~(iii) を満たすとき M の CR 構造と云う. 従って M が実超曲面 (すなはち M は $\text{bd}D$ の開集合) のときには上のようにして CR 構造が与えられて居る. T_b'' の切断を微分作用素と考へたとき, M の CR 作用素と呼ぶ.

次元の計算により $T(M)$ の一次元の部分束 F で

$$(1.1.2) \quad T_b'' + \overline{T_b''} + \mathbb{C}F = \mathbb{C}TM$$

を満たすものが存在する. このとき F の生成元を l とし, X, Y を $T_b''(M)$ の切断として

$$(1.1.3) \quad [X, \overline{Y}] \equiv ic(X, Y)l \pmod{T_b'' + \overline{T_b''}}$$

とおけば, $c(X, Y)$ は双線形エルミート形式になる. $c(X, Y)$ を T_b'' のレビ形式と云う.

以下レビ形式が定値 (すなはち固有値が同符号) である場合を考へる. (このとき M は強擬凸であると云う.) 特に, $M = \text{bd}D$, 且つ l が外に向かった M の法線 N に i をかけたベクトルで $T_b'' = T''(\text{bd}D)$ のとき, これが正定値の場合には D は強擬凸境界を持つと云う.

この場合には, 滑らかな f が T_b'' で決まる方程式の解であることと, f が $\overline{D}$ の正則函数 h の境界値であることが同値になる. (Bochner の定理と云われて居るが, Range [23] (第二刷序文もみよ) によれば Fischer の定理). このような f を $\text{bd}D$ 上の正則函数と呼ぼう. 上の事情によって D の複素構造の議論を $\text{bd}D$ の CR 構造の議論に置き換えることが出来る. 大域的に考へた場合, $\text{bd}D$ は滑らかな境界のない多様体なので CR 構造については微分幾何を使いやすい便宜がある. 以下 T_b'' の b を省略して T'' と書き, D はいつも滑らかな強擬凸境界を持つと假定する.

1.1.3

例 1.1.4. $\Omega \subset \mathbb{C}^{n+1} = \{(z^0, z^1, \dots, z^n)\}$ を

$$(1.1.5) \quad \operatorname{Im} z^0 > \frac{1}{2}|z_+|^2, \quad z_+ = (z^1, \dots, z^n)$$

とするとき, $\operatorname{bd}\Omega = H$ を原点の近傍で考へよう. $\mathbb{C}^{n+1}$ の標準基底を $(e_0, \dots, e_n)$ とすれば, 原点での H への外向きの法線として $N = -ie_0$ をとれる. よって $w = z^0$ とおくと,

$$iN = e_0 = \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$$

であるから,

$$(1.1.6) \quad l = \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$$

としてよい. $T''H$ の基底として,

$$(1.1.7) \quad P^\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} - iz^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{w}}, \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

をとれる. $\bar{P}^\beta = \frac{\partial}{\partial z^\beta} + i\bar{z}^\beta \frac{\partial}{\partial w}$ とすれば

$$[P^\alpha, \bar{P}^\beta] = \delta_\beta^\alpha il$$

であるから

$$(1.1.8) \quad c(P^\alpha, P^\beta) = \delta_\beta^\alpha.$$

従って H は Ω の強擬凸な境界である. 上の Ω はジューゲル上半空間, H はハイゼンバーグ空間と呼ばれて居る. 以下に示すように全ての $2n+1$ 次元の強擬凸な境界は ($n \geq 2$ のとき) 局所的には H を $\mathbb{C}^{n+1}$ の中で少し変形したものに同型になって居る. H を M のモデルと呼ぶことにする.

$2n+1$ 次元の強擬凸な CR 構造は $\mathbb{C}^{n+1}$ の実超曲面と局所的に同型であるかどうかと云う問題については, $n \geq 3$ のときにはいつも局所同型である ([12, 13, 14], [1]). $n = 2$ のときには未だ結論が出ていない. $n = 1$ のときは否定的な例がある ([20]). [20] の例の CR 構造には常数でない正則函数が存在しないのである. N がコンパクトで boundary のない場合には Boutet de Monvel の簡単な証明がある [3].

1.1.4

ここで (後で出てくるので) H の同型群について述べておこう. 実際には, H を射影空間 $\mathbb{C}P^{n+1}$ の中に埋め込んでその閉包 $\overline{H}$ をとり, $\overline{H}$ をそれ自身にうつす射影変換全体の作る群 G である.

以下 $(z^0, z^1, \dots, z^n)$ のかわりに $(w, z^1, \dots, z^n) = (w, z)$ と書くことにする. $\mathbb{C}P^{n+1}$ の斉次座標を $[\zeta^0, \zeta^1, \dots, \zeta^{n+1}]$ とし, 埋め込み:

$$H \rightarrow \{[\zeta]; \zeta^0 \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^{n+1}$$

を

$$(1.1.9) \quad w = \frac{\zeta^{n+1}}{\zeta^0}, \quad z^\alpha = \frac{\zeta^\alpha}{\zeta^0}, \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

で定義する. 従って $\overline{H}$ は $\mathbb{C}P^{n+1}$ の実超曲面:

$$(1.1.10) \quad i\zeta^0\bar{\zeta}^{n+1} - i\bar{\zeta}^0\zeta^{n+1} - \sum \zeta^\alpha\bar{\zeta}^\alpha = 0$$

である. $(\infty) = [0, \dots, 0, 1]$ とすれば $\overline{H} = H \cup (\infty)$ である. $[1, 0, \dots, 0] = e_0$ とおく.

$\{g \in G; ge_0 \neq \infty\}$ はハイゼンバーク変換群 G_0 と e_0 のイソトロピー群 G_1 との積になり, G の開集合である. 定義に従って計算すれば, G_0 は $(\tilde{w}, \tilde{z}) \in H$ をパラメーターに持ち, H への作用は

$$(1.1.11) \quad (w, z) \mapsto (w + \tilde{w} + i \langle z, \tilde{z} \rangle, z + \tilde{z})$$

で与えられることがわかる. $u \in GL(n, \mathbb{C})$, $\beta \in \mathbb{C}^n$, $a (\neq 0) \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{R}$ で次の条件 (1.1.12) を満たすものの全体が G_1 のパラメーターである:

$$(1.1.12) \quad u^*u = I, \quad \frac{a}{\bar{a}} \det u = 1.$$

$\sigma = s - \frac{i}{2} \langle \beta, \beta \rangle$ とするとき, G_1 の H への作用は

$$(1.1.13) \quad (w, z) \mapsto (w^*, z^*)$$

$$(1.1.14) \quad w^* = (1 - i \langle uz, \beta \rangle + \sigma w)^{-1} \frac{1}{|a|^2} w$$

$$(1.1.15) \quad z^* = (1 - i \langle uz, \beta \rangle + \sigma w)^{-1} a^{-1} (uz + \beta w)$$

である.

1.1.5

ここでは大域的な函数を考へる. $\widetilde{M}$ を複素多様体とし, $\widetilde{M}$ の体積要素 dv を1つ固定し, その L^2 -空間を $L^2(\widetilde{M})$ とする. L^2 正則函数の集合を $H(\widetilde{M})$ と表すと $H(\widetilde{M})$ は $L^2(\widetilde{M})$ の閉部分空間であるので, 直交射影

$$(1.1.16) \quad \rho_B : L^2(\widetilde{M}) \longrightarrow H(\widetilde{M})$$

があり, 核函数 $K_B(z, w)$ を使って

$$(1.1.17) \quad \rho_B f(z) = \int_{\widetilde{M}} K_B(z, w) f(w) dv(w)$$

と積分表示することが出来る. ρ_B を (dv に関する) バーグマン (Bergman) 射影, $K_B(z, w)$ をバーグマン核と云う.

$M = \text{bd}\widetilde{M}$ の体積要素 dv を1つ固定し, その L^2 -空間を $L^2(M)$ とする. $H(M)$ を M 上で正則な L^2 函数の全体としたとき, 直交射影

$$(1.1.18) \quad \rho_S : L^2(M) \longrightarrow H(M)$$

も核函数 $K_S(z, w)$ を使って

$$(1.1.19) \quad \rho_S f(z) = \int_M K_S(z, w) f(w) dv(w)$$

と積分表示出来る. ρ_S をセゲー (Szegő) 射影, $K_S(z, w)$ をセゲー核と云う.

1.1.6

ジーゲル上半空間を Ω とし, その標準座標を $z = (z^0, \dots, z^n)$ とするとき,

$$z^0 = x^0 + iy^0, \quad z^\alpha = x^{2\alpha-1} + ix^{2\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

として実座標 $(y^0, x^0, x^1, \dots, x^{2n})$ が入る. $(x^0, x^1, \dots, x^{2n})$ はハイゼンバーグ空間 H の座標と考へられる. Ω にはその標準体積要素

$$(1.1.20) \quad dv_\Omega = dx^0 \wedge dy^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{2n}$$

を, ハイゼンバーク空間には体積要素

$$(1.1.21) \quad dv_H = dx^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}$$

を採用する. その場合のバークマン核を K_Ω , セゲー核を K_H とする. $\zeta = (\zeta^0, \dots, \zeta^n)$ を $z = (z^0, \dots, z^n)$ のコピーとし

$$(1.1.22) \quad r(z, \zeta) = \frac{1}{i} (z^0 - \bar{\zeta}^0) - \langle z', \zeta' \rangle, \quad \langle z', \zeta' \rangle = \sum_{\alpha=1}^n z^\alpha \bar{\zeta}^\alpha$$

とすれば

$$(1.1.23) \quad K_\Omega(z, \zeta) = c_B r(z, \zeta)^{-(n+2)}, \quad c_B = \frac{(n+1)!}{\pi^{n+1}}$$

$$(1.1.24) \quad K_H(z, \zeta) = c_S r(z, \zeta)^{-(n+1)}, \quad c_S = \frac{n!}{2\pi^{n+1}}$$

である. $r(z, z) = 0$ は H の定義方程式になって居る.

証明 $\mathbb{C}^{n+1}$ の単位球の標準体積要素に関するバークマン核は

$$(1.1.25) \quad c_B r_B(z, \zeta)^{-(n+2)}, \quad r_B = 1 - \langle z, \zeta \rangle$$

である ([11, Th.1.4.22], [20, Th.4.6]) ことを認めて上のような式が成立することを確かめることにする. ジーゲル上半空間 Ω ($\{z\}$ -変数) は単位球 B ($\{Z\}$ -変数) に次のケーリー変換で写れる:

$$(1.1.26) \quad Z^0 = \frac{z^0 - i}{z^0 + i}, \quad Z^\alpha = \frac{\sqrt{2} z^\alpha}{z^0 + i} \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

計算によれば, ケーリー変換のもとで

$$(1.1.27) \quad r_B(Z, Z_1) = \frac{2}{(z^0 + i)(\bar{z}_1^0 - i)} r(z, z_1)$$

であり,

$$(1.1.28) \quad dZ^0 \wedge d\bar{Z}^0 \wedge \cdots \wedge dZ^n \wedge d\bar{Z}^n \\ = 2^{n+2} |z^0 + i|^{-2(n+2)} dz^0 \wedge d\bar{z}^0 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^n$$

である. 従って $h(Z)$ を B 上の正則な L^2 函数とすれば

$$\begin{aligned} h(Z) &= c_B \int_B r_B(Z, Z_1)^{-(n+2)} h(Z_1) \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} dZ_1^0 \wedge d\bar{Z}_1^0 \wedge \cdots \wedge dZ_1^n \wedge d\bar{Z}_1^n \\ &= c_B \int_\Omega r(z, z_1)^{-(n+2)} \left(\frac{z_1^0 + i}{z_1^0 + i}\right)^{n+2} h(z_1) \\ &\quad \times \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} dz_1^0 \wedge d\bar{z}_1^0 \wedge \cdots \wedge dz_1^n \wedge d\bar{z}_1^n \end{aligned}$$

従って

$$(1.1.29) \quad \frac{h(z)}{(z^0 + i)^{n+2}} = c_B \int_\Omega r(z, z_1)^{-(n+2)} \times \frac{h(z_1)}{(z_1^0 + i)^{n+2}} \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} dz_1^0 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_1^n.$$

$h(z)(z^0 + i)^{-(n+2)}$ の形の正則函数は Ω 上の正則な L^2 函数全体になって居る. よって上の式により Ω の標準体積要素に関するパーグマン核は (1.1.23) で与えられることがわかる.

セゲー核をあつかうために, 1.1.6 節の最初に導入した記号を使って Ω 上の $(2n+1)$ -form

$$(1.1.30) \quad d\hat{v}_H = dz^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}$$

を導入する. $\iota: H \rightarrow \Omega$ を自然の埋め込みとすれば

$$(1.1.31) \quad \iota^* d\hat{v}_H = dv_H$$

である. $h(z)$ を Ω 上の L^2 -正則函数とすれば, ストークスの定理により

$$\begin{aligned}
c_B \int_H r(z, \zeta)^{-(n+1)} h(\zeta) dv_H(\zeta) \\
&= c_B \int_H \iota^* \left(r(z, \zeta)^{-(n+1)} h(\zeta) d\hat{v}_H(\zeta) \right) \\
&= c_B \int_\Omega d_\zeta \left(r(z, \zeta)^{-(n+1)} h(\zeta) d\hat{v}_H(\zeta) \right) \\
&= -c_B \int_\Omega (n+1) r(z, \zeta)^{-(n+2)} h(\zeta) i d\bar{\zeta}^0 \wedge d\zeta^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n} \\
&= 2(n+1) c_B \int_\Omega r(z, \zeta)^{-(n+2)} h(\zeta) dv_\Omega(\zeta) \\
&= 2(n+1) h(z)
\end{aligned}$$

よって

$$(1.1.32) \quad h(z) = \frac{c_B}{2(n+1)} \int_H r(z, \zeta)^{-(n+1)} h(\zeta) dv_H(\zeta)$$

であるから, (1.1.24) が成立して居る.

注意 1.1.33. 計算によれば $H \subset \bar{\Omega}$ として dv_Ω から導入された H 上の体積要素は

$$(1 + |z_+|^2)^{\frac{1}{2}} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}$$

である. 従って吾々の H 上の標準体積要素 dv_H は dv_Ω から導入された体積要素ではない.

1.1.7

D を滑らかな強擬凸な境界 $\text{bd}D = M$ を持つ複素多様体とし 1.1.5 節の記号を使う. ヒルベルト空間 L の部分空間 L_1 への直交射影 ρ は, ν_j を L_1 の長さ 1 の直交基底としたとき

$$(1.1.34) \quad \rho u = \sum \langle u, \nu_j \rangle \nu_j$$

と書ける. 従って $K_B(z, w), K_S(z, w)$ は $(z, \bar{w})$ の正則函数である.

$K_B(z, w)$ と $K_S(z, w)$ とは $z \neq w$ (対角線以外) なるところでは滑らかであり, 境界上に特異点があることが知られて居るが, その特異性については, D が強擬凸境界をもつとき次の Fefferman の定理 (cf. [6]) がある.

定理 1.1.35 (Fefferman の定理). $\dim D = n$ (複素次元) とする. $\text{bd}D$ の対角線上 0 となる $D \times D$ 上の適当なスムーズな函数 $r(z, w)$ に対して

$$(1.1.36) \quad K_B(z, w) = Fr^{-n-1} + G \log r$$

$$(1.1.37) \quad K_S(z, w) = F'r^{-n} + G' \log r$$

となるような函数 F, G, F', G' が存在する.

$r(z, w)$ は局所的には次のように決まる函数としてよい: D 上の実函数 r を D の内部で正であり且つ方程式 $r = 0$ が M の定義方程式になって居るものとする. このとき $D \times D$ 上の C^∞ の函数 $r(z, w)$ で次の条件を満たして居るものが存在する.

- (i) $r(z, z) = r(z)$,
- (ii) $r(z, w) = \overline{r(w, z)}$,
- (iii) 対角集合 $= \{(z, z)\}$ の各点は $\frac{\partial r}{\partial \bar{z}^\alpha}$ と $\frac{\partial r}{\partial w^\alpha}$ との次数無限の零点である.

上の条件 (i)~(iii) をみたす $r(z, w)$ は (対角集合の各点は次数無限の零点になって居る C^∞ 函数を法として) $r(z)$ によって一意的に決まる.

1.1.5 節に述べたジューゲル上半空間とハイゼンバーク空間のバークマン核とセゲー核の式は Fefferman の定理の特別な場合になって居る.

(1.1.36), (1.1.37) の形をした核函数によって導入される作用素は L^2 に関して連続になる (Ahern–Phong–Schneider–Stein の定理 [2], [22]).

K_B, K_S の対角集合上での特異性は局所的な不変量であることが知られて居る. この特異性をよく調べることによって D や $\text{bd}D$ 上の不変量を作り, その意味を見つきたい. 例えば

- (i) E を複素多様体 M 上のエルミートベクトル束のとき, 単位球部分束 Ω を調べることににより, M の情報を引き出したい. (Grauert のアイデア)
- (ii) $\mathbb{C}^n$ の孤立特異点を持つ部分空間と, その特異点を中心にした超球との共通部分のバークマン核やセゲー核を調べることににより, 孤立特異点の

様子を知りたい.

この講義では K_S の特異性を書き表す方法について話をする. Fefferman の仕事のその後の発展として, 次の 2 つの方法がある.

- (i) 佐藤の超函数 (hyperfunction) を使う方法. これは柏原に始まり, 平地-小松-中沢 [8] により更に詳しく調べられた. Boutet de Monvel [3] もこの部類に属する.
- (ii) フーリエ積分作用素を使う方法. これは Boutet de Monvel と Sjöstrand [4] により開発された.

ここでは 2 番目のフーリエ積分作用素を使う方法を解説する: 強擬凸な CR 構造 M の CR 作用素で生成される作用素環を $A(M)$ とすれば, p_0 の近傍で $A(M)$ を $A(H)$ に移すユニタリーなフーリエ積分作用素 F を構成する. F を使って, M のセゲー核の特異性を, H のセゲー核の特異性によって書き表すことによって, M のセゲー核の特異性を構成する.

1.2 強擬凸な実超曲面

先ず強擬凸な実超曲面の CR 構造を調べることから始めよう.

1.2.1

$M \subset \mathbb{C}^{n+1}$ を実超曲面とし ($n \geq 1$), $p_0 \in M$ を決めてこの点の充分小さい近傍を考へる. $\mathbb{C}^{n+1}$ の座標を $(z^1, \dots, z^n, w)$, $w = x^0 + iy^0$ とする ((x^0, y^0) は実数値). 1.1.3 節に導入したハイゼンバーグ空間

$$(1.2.1) \quad H = \left\{ (z, w) : y^0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n |z^\alpha|^2 \right\} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}, \quad p_0 = 0$$

をモデルケースとして考へる. この CR 構造は

$$(1.2.2) \quad P^\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} - iz^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$$

の H への制限により生成される.

一般の M の場合 $(z^1, \dots, z^n, w)$ を $\mathbb{C}$ 上のアファイン変換で置き換えれば, p_0 が原点で

$$(1.2.3) \quad T''_{p_0}(M) \text{ は } \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} \right)_{p_0} \text{ で張られる,}$$

$$(1.2.4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)_{p_0} \in T_{p_0}(M)$$

のように出来る. 以下の議論は上の条件を満たす座標 (z, w) のもとで原点の充分小さい近傍で成り立つ.

このとき $\partial/\partial \bar{z}^\alpha$ に近い $T''(M)$ の生成元があるはずだから, $T''(M)$ の生成元で

$$(1.2.5) \quad Q^\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} - i h^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{w}}, \quad h^\alpha(0) = 0$$

と云う形のものがとれる. このことと CR 構造の条件 (i) とから

$$(1.2.6) \quad [Q^\alpha, Q^\beta] \equiv 0 \pmod{T''(M)}$$

がわかる. 上の Q^α の形から $z^1, \dots, z^n$ は M の上で独立としてよい. $x^0 = \Re w$ とする. 上の w の取り方から (z, x^0) は M の座標となって居るとしてよい. と云うことは

$$(1.2.7) \quad (z, x^0 + \frac{i}{2}Y(z, x^0)), \quad Y \text{ は実数値}$$

と云う M の助変数表示があることになる. 従って M の方程式は

$$(1.2.8) \quad r = \frac{1}{i}(w - \bar{w}) - Y(z, \frac{1}{2}(w + \bar{w})) = 0$$

である. $(\partial/\partial z^\alpha)_M$, $(\partial/\partial \bar{z}^\alpha)_M$, $(\partial/\partial x^0)_M$ を (z, x^0) に関する M の偏微分とすれば, 埋め込み;

$$(1.2.9) \quad (z, x^0) \mapsto (z, w) \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad w = x^0 + \frac{i}{2}Y$$

によって

$$(1.2.10) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}\right)_M \rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} + \frac{i}{2} Y_{\bar{z}^\alpha} \frac{\partial}{\partial w} - \frac{i}{2} Y_{\bar{z}^\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{w}},$$

$$(1.2.11) \quad \left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)_M \rightarrow \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \frac{i}{2} Y_{z^\alpha} \frac{\partial}{\partial w} - \frac{i}{2} Y_{z^\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{w}},$$

$$(1.2.12) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)_M \rightarrow \left(1 + \frac{i}{2} Y_{x^0}\right) \frac{\partial}{\partial w} + \left(1 - \frac{i}{2} Y_{x^0}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$$

となる. ここで $Y_{z^\alpha}, Y_{\bar{z}^\alpha}, Y_{x^0}$ は $Y(z, x^0)$ の $z^\alpha, \bar{z}^\alpha, x^0$ に関する偏微分. 従って

$$(1.2.13) \quad a^\alpha = \frac{1}{2} \frac{Y_{\bar{z}^\alpha}}{1 + \frac{i}{2} Y_{x^0}}$$

とおけば計算によって

$$(1.2.14) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}\right)_M - ia^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)_M \rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} - 2ia^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$$

が分かる. 従って, 上の右辺は $T''(M)$ の元だから (1.2.5) によって

$$(1.2.15) \quad h^\alpha = 2a^\alpha = \frac{Y_{\bar{z}^\alpha}}{1 + \frac{i}{2} Y_{x^0}}$$

が導かれる. よって $T''(M)$ は座標 (z, x^0) を使えば

$$(1.2.16) \quad Q^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}\right)_M - \frac{i}{2} h^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)_M$$

である. 座標 (z, w) では

$$(1.2.17) \quad Q^\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} - ih^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{w}}.$$

1.2.2

次に h^α を調べよう. (1.2.3), (1.2.4) をみたす座標系 (z, w) を取れば, 上の h^α は唯一に決まった. しかし上のような (z, w) は唯一ではないので, 適当な座標変換で h^α を簡単化することを試みる. h^α は (1.2.15) により (1.2.7), (1.2.8) で導入された実函数 Y で書けるので, Y を調べることにする. つまり, 座標変換で Y をどれだけ簡単化出来るかと云う問題である.

p_0 は M の元だから Y の定義 (1.2.7), (1.2.8) により $Y(0, 0) = 0$ である. (1.2.10), (1.2.11), (1.2.12), 条件 (1.2.3), (1.2.4) により

$$(\partial Y / \partial \bar{z}^\alpha)(0, 0) = 0, (\partial Y / \partial z^\alpha)(0, 0) = 0, (\partial Y / \partial x^0)(0, 0) = 0$$

である. 従って, Y は実函数であることから,

$$Y(z, \frac{1}{2}(w + \bar{w})) \equiv H(z) + \overline{H(z)} + A(z, \bar{z}) \mod ((z, \bar{z})^3, (w + \bar{w})(z, \bar{z}), (w + \bar{w})^2).$$

ここで $H(z)$ は 2 次の斉次多項式, $A(z, \bar{z})$ は $(z, \bar{z})$ のエルミート 2 次型式である. $H(z)$ が零になるように座標変換する. (w_1, z_1) を

$$w = w_1 + iH(z), \quad z = z_1$$

と置けば,

$$r = \frac{1}{i}(w_1 - \bar{w}_1) - A(z, \bar{z}) \mod ((z, \bar{z})^3, (w_1 + \bar{w}_1)(z, \bar{z}), (w_1 + \bar{w}_1)^2)$$

である. と云うことは (z, w) をうまくとっておけば

$$(1.2.18) \quad Y \equiv h_{\alpha\bar{\beta}} z^\alpha \bar{z}^\beta \mod ((z, \bar{z})^3, (w + \bar{w})(z, \bar{z}), (w + \bar{w})^2)$$

$(h_{\alpha\bar{\beta}})$ はエルミート行列とかけて居ることになる. 従って (1.2.15) により

$$(1.2.19) \quad h^\alpha \equiv h_{\beta\bar{\alpha}} z^\beta, \quad \mod ((z, \bar{z})^2, w + \bar{w}).$$

ここでレビ形式を計算しよう. 1.1.2 節の記号を使う.

$$l = (\frac{\partial}{\partial x^0})_M$$

にとれる.

$$(1.2.20) \quad [Q^\alpha, \bar{Q}^\beta] \equiv i c^{\alpha\bar{\beta}} (\frac{\partial}{\partial x^0})_M \mod T'(M), T''(M),$$

$$(1.2.21) \quad c^{\alpha\bar{\beta}} = c(Q^\alpha, \bar{Q}^\beta).$$

一方上の Q^α の式 (1.2.16), (1.2.17) から

$$(1.2.22) \quad [Q^\alpha, \overline{Q}^\beta] = \frac{i}{2}(Q^\alpha \bar{h}^\beta + \overline{Q}^\beta h^\alpha) \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right)_M,$$

従って

$$(1.2.23) \quad \begin{aligned} c^{\alpha\bar{\beta}} &= \frac{1}{2}(Q^\alpha \bar{h}^\beta + \overline{Q}^\beta h^\alpha) \\ &\equiv h_{\beta\bar{\alpha}} \pmod{((z, \bar{z}), w + \bar{w})}. \end{aligned}$$

強擬凸性の定義から $(c^{\alpha\bar{\beta}}) > 0$ であるから, z^α をその一次変換で置き換えれば

$$(1.2.24) \quad c^{\alpha\bar{\beta}}(0) = \delta_\beta^\alpha$$

としてよい. 従って $h_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_\alpha^\beta$ としてよいから

$$(1.2.25) \quad h^\alpha \equiv z^\alpha \pmod{(z, \bar{z})^2, w + \bar{w}}$$

としてよい. 以下混乱のおそれがない限り $(\partial/\partial z^\alpha)_M$ と $(\partial/\partial x^0)_M$ の M を省略する.

1.2.3

Y の形をさらに簡単にする議論を続けていくには, $z, \bar{z}$ を重み 1, $w, \bar{w}$ を重み 2 として $(z, \bar{z}, w, \bar{w})$ の関数を重み付き斉次部分に分けて扱うのが便利である. 吾々の場合

$$(1.2.26) \quad Y = \sum_{\nu=2}^{\infty} Y_{(\nu)}(z, \bar{z}, w, \bar{w}), \quad Y_{(2)} = |z|^2$$

ここで $Y_{(\nu)}$ は重み付き斉次数が ν である. 座標変換 ψ も

$$(1.2.27) \quad z_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{(\nu)}(z, \bar{z}, w, \bar{w}), \quad w_1 = \sum_{\nu=2}^{\infty} g_{(\nu)}(z, \bar{z}, w, \bar{w})$$

と重み付き斉次部分に分けて ν に関する帰納法で Y が形式的な意味で ψ によって変化する様子を調べる. Y の定義から, M の方程式は

$$r = \frac{1}{i}(w - \bar{w}) - Y(z, \frac{1}{2}(w + \bar{w})) = 0$$

と云う形をして居る. 従って吾々の問題は上の M の方程式に出てくる Y を, 座標変換により, どれだけ簡単化出来るかと云う問題になる. この問題は次に述べる形で Moser [16, 5] により完全に解かれた.

上の座標変換 ψ を $\psi = \psi_1 \circ \psi_0, \psi_0 \in G, \psi_1$ は G の supplementary space の元と書ける. ここで G は 1.1.4 節で述べた e_0 を固定する H の変換群. G による Y の変化はかなり扱いにくいのでこの部分には手をつけず, ψ_1 の影響を調べることにする. Moser は計算により, Y は上に述べた意味で次の形に一意的に書けることを発見した.

$$(1.2.28) \quad Y = |z|^2 + \sum_{k,l} Y_{kl}(z, \bar{z}, w + \bar{w}).$$

Y_{kl} は $z, \bar{z}$ に関し斉次次数 k, l で

$$\begin{aligned} \min(k, l) \leq 1 \text{ のとき } Y_{kl} &= 0, \\ \text{tr} Y_{2\bar{3}} &= (\text{tr})^2 Y_{3\bar{2}} = (\text{tr})^3 Y_{3\bar{3}} = 0. \end{aligned}$$

ここで $Y = Y_{\alpha_1 \dots \alpha_k \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_l}(w, \bar{w}) z^{\alpha_1} \dots z^{\alpha_k} \bar{z}^{\beta_1} \dots \bar{z}^{\beta_n}$ のとき

$$(1.2.29) \quad (\text{tr} Y)_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1} \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_{l-1}} = \sum_{\alpha} Y_{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \bar{\alpha} \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_{l-1}}$$

とする. 上の Y の表現は形式的に得られるものであるが, 実解析的な場合には実際に収斂級数であることも証明されて居る. Y が上の形をして居るとき,

$$r = \frac{1}{i}(w - \bar{w}) - Y(z, \bar{z}, w, \bar{w})$$

は Moser の正規形である云う.

1.2.4

以下座標 (z, x^0) で多様体 M を $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ の原点の近傍 $\mathbb{M}$ と同一視することにする. 従って M は $\mathbb{M}$ の上に定義された CR 構造である. モデル H も $\mathbb{M}$ の上の CR 構造と考へる.

命題 1.2.30. $\mathbb{M}$ 上の CR 構造 T_t'' で $T_0'' = \text{モデルケースの CR 構造}$, $T_1'' = M$ の CR 構造, $t \neq 0$ のとき M_t は M の p_0 の近傍に同型, となるものが存在する.

証明 $t \neq 0$ の時 M の座標 $(z_t, w_t) = \left(\frac{1}{t}z, \frac{1}{t^2}w\right)$ で Q^α を書くと

$$\begin{aligned} Q^\alpha &= \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_t^\alpha} - i h^\alpha(tz_t, t^2w_t) \frac{1}{t^2} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_t} \\ &= \frac{1}{t} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_t^\alpha} - \frac{i}{t} h^\alpha(tz_t, t^2w_t) \frac{\partial}{\partial \bar{w}_t} \right). \end{aligned}$$

従って

$$(1.2.31) \quad Q_t^\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} - i h_t^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{w}}, \quad h_t^\alpha = \frac{1}{t} h^\alpha(tz, t^2w)$$

と置くと, これは M に同型な CR 構造 M_t を生成する. (1.2.25) により M_t は $t = 0$ にまで滑らかに拡張できて, M_0 は H になる. $\square$

上のような Q_t^α を考へたのは, 将来セゲー核の特異性を書き表すのに使われる函数のいくつかは, h_t その他を使って書き表せるような, t を独立変数とする常微分方程式の解として構成することになるからである.

1.2.5

本論に入る前に, 一般的な事柄についていくつか注意しておく. 先ず $T^*\mathbb{C}^n$ の複素座標について述べる.

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &= \{z = (z^1, \dots, z^n), z^\alpha \in \mathbb{C}\}, \\ z^\alpha &= x^{2\alpha-1} + ix^{2\alpha}, x^j \text{ real} \end{aligned}$$

とする. $T^*\mathbb{C}^n$ を実の空間と見たとき $\theta \in T^*\mathbb{C}^n$ はその標準座標 (x, ξ) を使って

$$\theta = \sum_{j=1}^{2n} \xi_j dx^j$$

と書ける. z 座標を使って θ を

$$(1.2.32) \quad \theta = \sum_{\alpha=1}^n (\zeta_{\alpha} dz^{\alpha} + \bar{\zeta}_{\alpha} d\bar{z}^{\alpha})$$

と書けば,

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sum_{\alpha=1}^n \{ \zeta_{\alpha} (dx^{2\alpha-1} + i dx^{2\alpha}) + \bar{\zeta}_{\alpha} (dx^{2\alpha-1} - i dx^{2\alpha}) \} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \{ (\zeta_{\alpha} + \bar{\zeta}_{\alpha}) dx^{2\alpha-1} + i (\zeta_{\alpha} - \bar{\zeta}_{\alpha}) dx^{2\alpha} \}. \end{aligned}$$

よって

$$(1.2.33) \quad \zeta_{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\xi_{2\alpha-1} + \frac{1}{i} \xi_{2\alpha} \right)$$

と云う関係がある. 従って (z, ζ) を $T^*\mathbb{C}^n$ の複素座標と考へてよく, 実数値函数 $f(\xi)$ に対し,

$$df = \frac{\partial f}{\partial \zeta_{\alpha}} d\zeta_{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_{\alpha}} d\bar{\zeta}_{\alpha}$$

として偏微分作用素 $\partial/\partial \zeta_{\alpha}$, $\partial/\partial \bar{\zeta}_{\alpha}$ を定義すれば

$$(1.2.34) \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \xi_{2\alpha-1}} + i \frac{\partial}{\partial \xi_{2\alpha}}$$

になる.

次に $\mathbb{R}^m$ 上の複素ベクトル場とそのシンボルについて復習しよう. 偏微分作用素 (又は複素ベクトル)

$$(1.2.35) \quad P = p^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$$

のシンボル $p(x, \xi)$ とは

$$(1.2.36) \quad T^{\psi}\mathbb{R}^m = \{ \xi_j dx^j \in T^*\mathbb{R}^m ; \xi \neq 0 \}$$

上の函数で

$$(1.2.37) \quad p(x, \xi) = ip^j(x) \xi_j$$

で与えられるものとする. シンボルは座標 (x) によらない $T^*\mathbb{R}^m$ 上の関数であることは簡単にチェック出来る.

$$(1.2.38) \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

と置くと

$$(1.2.39) \quad p(x, D) = P$$

が得られる. フーリエ解析の立場からは, D_j を使ふのはきわめて自然のことである.

次にベクトル場 P, Q のシンボル $p(x, \xi), q(x, \xi)$ と, リーブラケット $[P, Q]$ のシンボル $r(x, \xi)$ との関係を調べる.

$$P = p^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Q = q^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

と置くと

$$[P, Q] = \left(p^k(x) \frac{\partial q^j}{\partial x^k} - q^k(x) \frac{\partial p^j}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

よって

$$\begin{aligned} r(x, \xi) &= ip^k(x) \frac{\partial q^j}{\partial x^k} \xi_j - iq^k(x) \frac{\partial p^j}{\partial x^k} \xi_j \\ &= -i \frac{\partial p(x, \xi)}{\partial \xi_k} \frac{\partial q(x, \xi)}{\partial x^k} + i \frac{\partial q(x, \xi)}{\partial \xi_k} \frac{\partial p(x, \xi)}{\partial x^k} \\ &= i\{p, q\} \end{aligned}$$

が得られる. ここで

$$(1.2.40) \quad \{p, q\} = \frac{\partial p}{\partial x^k} \frac{\partial q}{\partial \xi_k} - \frac{\partial p}{\partial \xi_k} \frac{\partial q}{\partial x^k}$$

は p と q のポアソンブラケット. 従って

$$(1.2.41) \quad [P, Q] \text{ のシンボルは } i\{p, q\}$$

である.

$$(1.2.42) \quad \overline{P} \text{ のシンボルは } -\bar{p}$$

である. また $f = f(x)$ とすれば

$$(1.2.43) \quad \frac{1}{i}Pf = \{p, f\}$$

になる.

1.3 シンプレクティック変換

1.3.1

次にシンプレクティック変換について復習する. X を n 次元の多様体とし, $(\dots, x^j, \dots)$ をその座標とする. $\xi \in T^*X$ のとき, $\xi = \xi_j dx^j$ とすれば, (x, ξ) は T^*X の座標となる. $\omega = d\xi_j \wedge dx^j$ は座標のとり方によらない. 従って T^*X の 2-form $d\xi_j \wedge dx^j$ がきまる. これを ω_X とかく. X, Y を n 次元の多様体として, T^*X の領域 Γ_X , T^*Y の領域 Γ_Y , さらにその間の写像 $\chi: \Gamma_X \rightarrow \Gamma_Y$ が与へられたとする.

定義 1.3.1 (シンプレクティック写像, 無限小シンプレクティック変換).

- (i) χ がシンプレクティック写像であるとは, $\chi^*\omega_Y = \omega_X$ が成り立つときに云う.
- (ii) Γ_X 上のベクトル場 $\mathfrak{X}$ が無限小シンプレクティック変換であるとは, Γ_X の各点に対し, その充分小さい近傍 Γ'_X の上で

$$(1) \quad \frac{d\chi_t}{dt}\bigg|_{t=0} = \mathfrak{X}, \quad (2) \quad \chi_0(x, \xi) = (x, \xi), \quad (3) \quad \chi_t^*\omega_X = \omega_X \pmod{t^2}$$

を満たす写像のなめらかな族 $\chi_t: \Gamma'_X \rightarrow \Gamma_X$ が存在することである.

$\mathfrak{X} = V^j (\partial/\partial x^j) + V_j (\partial/\partial \xi_j)$ が無限小シンプレクティック変換であるための条件を求める. 上に述べた Γ'_X 上の χ_t は t^2 以上の高次の項を省略すれば

$$\chi_t \equiv (x^j + tV^j, \xi_j + tV_j)$$

となり,

$$\begin{aligned} \chi_t^*\omega &= (d\xi_j + t dV_j) \wedge (dx^j + t dV^j) \\ &= \omega + t (dV_j \wedge dx^j + d\xi_j \wedge dV^j) + \{t \text{ に関して高次の項} \}. \end{aligned}$$

よって $dV_j \wedge dx^j + d\xi_j \wedge dV^j = 0$, つまり

$$\frac{\partial V_j}{\partial x^k} = \frac{\partial V_k}{\partial x^j}, \quad \frac{\partial V^j}{\partial \xi_k} = \frac{\partial V^k}{\partial \xi_j}, \quad \frac{\partial V_j}{\partial \xi_k} + \frac{\partial V^k}{\partial x^j} = 0$$

となって居ることが条件である. これから $\mathfrak{X}$ (x が十分小さいとき) が無限小シンプレクティック変換であるためには

$$V_j = \frac{\partial \sigma}{\partial x^j}, \quad V^j = -\frac{\partial \sigma}{\partial \xi_j}$$

となる実数値函数 σ が存在することが必要十分条件である事を証明するのはそれほど難しいことではない. σ を $\mathfrak{X}$ のハミルトン函数またはポテンシャルと云う.

1.3.2

シンプレクティック写像と無限小シンプレクティック変換の関係を調べる. $\{\chi_t : \Gamma_X \rightarrow \Gamma_Y\}$ をシンプレクティック写像のなめらかな 1 パラメーター族とし, その像は各 t に対し $\Gamma'_Y \subset \Gamma_Y$ を含むと假定する. このとき Γ'_Y の上で

$$(1.3.2) \quad \frac{d}{dt} (\chi_{t_0+t} \circ \chi_{t_0}^{-1})|_{t=0} = \mathfrak{X}_{t_0}$$

と置くと $\mathfrak{X}_t$ は Γ'_Y 上の無限小シンプレクティック変換になる. 逆に無限小シンプレクティック変換の 1 パラメーター族

$$(1.3.3) \quad \mathfrak{X}_t = V^j(x, \xi, t) \frac{\partial}{\partial x^j} + V_j(x, \xi, t) \frac{\partial}{\partial \xi_j}$$

が Γ'_Y の上に与へられたとし, $\Gamma''_Y \subset \bar{\Gamma}_Y \subset \Gamma'_Y \subset \bar{\Gamma}'_Y \subset \Gamma_Y$ であるときに, $(x, \xi) \in \Gamma''_Y$ に対し

$$(1.3.4) \quad \frac{\partial y^j(x, \xi, t)}{\partial t} = V^j(y(x, \xi, t), \eta(x, \xi, t), t), \quad y^j(x, \xi, 0) = x$$

$$(1.3.5) \quad \frac{\partial \eta_j(x, \xi, t)}{\partial t} = V_j(y(x, \xi, t), \eta(x, \xi, t), t), \quad \eta_j(x, \xi, 0) = \xi$$

と云う常微分方程式を充分小さい t に対して解いて

$$\chi_t(x, \xi) = (y^j(x, \xi, t), \eta_j(x, \xi, t))$$

と置くと, これは Γ_Y'' 上のシンプレクティック写像になる. この χ_t から上の方法で作った無限小変換の族は与へられた $\mathfrak{X}_t$ の Γ_Y'' への制限になる.

1.3.3

シンプレクティック写像

$$\chi : \Gamma_X \ni (x, \xi) \mapsto (y, \eta) \in \Gamma_Y$$

に対して (x, ξ) は $\text{graph}(\chi)$ ($\subset \Gamma_X \times \Gamma_Y$) の座標系になって居るが, (ξ, y) も $\text{graph}(\chi)$ の座標系になると假定する. この場合には, 標準埋め込み $\iota : \text{graph}(\chi) \rightarrow \Gamma_X \times \Gamma_Y$ は, 関係

$$x^j = S^j(y, \xi), \quad \eta_j = S_j(y, \xi)$$

によって決まる. この S^j, S_j が満たすべき条件を求める. χ がシンプレクティック変換であるための必要十分条件は $\Omega = d\xi_j \wedge dx^j - d\eta_j \wedge dy^j$ に対して

$$\iota^* \Omega = 0$$

である. これを書き直すと

$$d\xi_j \wedge dS^j - dS_j \wedge dy^j = 0,$$

つまり

$$(1.3.6) \quad \frac{\partial S^j}{\partial \xi_k} = \frac{\partial S^k}{\partial \xi_j}, \quad \frac{\partial S_j}{\partial y^k} = \frac{\partial S_k}{\partial y^j}, \quad \frac{\partial S^j}{\partial y^k} = \frac{\partial S_k}{\partial \xi_j}.$$

よって

$$(1.3.7) \quad S^j = \frac{\partial S(y, \xi)}{\partial \xi_j}, \quad S_k = \frac{\partial S(y, \xi)}{\partial y^k}$$

となる $S(y, \xi)$ が局所的に存在することが必要十分条件である. $S(y, \xi)$ のことを χ の生成函数 (generating function) と云う. 特に χ が恒等写像なら χ のグラフの座標は (y, ξ, y, ξ) であるので $S(y, \xi) = y \cdot \xi$ にとれる. 従って χ が恒等写像に近ければ, それに対する, 函数 $y \cdot \xi$ に近い生成函数が存在する. 結論として $S(y, \xi)$ が $(y, \eta) = \chi(x, \xi)$ の生成函数であれば, (x, ξ, y, η) が χ のグラフの元であることは

$$(1.3.8) \quad x = \frac{\partial S(y, \xi)}{\partial \xi}, \quad \eta = \frac{\partial S(y, \xi)}{\partial y}$$

と同値になる.

以下 Γ_X と Γ_Y は錐領域で $\chi(x, \xi) = (y(x, \xi), \eta(x, \xi))$ は斉次, つまり y は ξ について斉次 0 次, η は ξ について斉次 1 次とする. このような χ を斉次と呼ぶことにする. この場合生成函数 $S(y, \xi)$ は斉次 1 次にとれる.

χ_t を 1.3.2 節で与えられたシンプレクティック変換族とし, χ_t が斉次で $\chi_0 =$ 恒等写像とする. χ_t を導入する無限小シンプレクティック変換族 $\mathfrak{X}_t$ が (1.3.4), (1.3.5) で与えられて居るとするとき, χ_t の生成函数 $S(y, \xi, t)$ を次のコーシー・コワレフスキー型の偏微分方程式系の解として構成出来る:

$$(1.3.9) \quad S(y, \xi, 0) = y \cdot \xi,$$

$$(1.3.10) \quad \frac{\partial S(y, \xi, t)}{\partial t} + V^j \left(y, \frac{\partial S(y, \xi, t)}{\partial y}, t \right) \frac{\partial S(y, \xi, t)}{\partial y^j} = 0.$$

証明 $x = S'_\xi(y(x, \xi, t), \xi, t)$ であるから

$$0 = \dot{S}'_\xi(y_t, \xi, t) + S''_{\xi, y}(y_t, \xi, t) \frac{\partial y(x, \xi, t)}{\partial t}.$$

$S(y, \xi, t)$ は斉次次数 1 であるから, $S(y, \xi, t) = \xi_j (\partial S(y, \xi, t) / \partial \xi_j)$. 従って

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(y, \xi, t)}{\partial t} \Big|_{y=y_t} &= \xi_j \dot{S}'_{\xi_j}(y_t, \xi, t) \\ &= -\xi_j S''_{\xi_j y^k}(y_t, \xi, t) V^k \left(y_t, \frac{\partial S(y, \xi, t)}{\partial y}, t \right) \\ &= -S'_{y^k}(y_t, \xi, t) V^k \left(y_t, \frac{\partial S(y, \xi, t)}{\partial y}, t \right) \end{aligned}$$

従って y_t の動く領域の上で (1.3.9), (1.3.10) が成立して居る. □

1.3.4

以降の議論は次のように進める. 1.2.4 節で導入した記号を使う. CR 構造を生成する Q_t^α , P^α のシンボルをそれぞれ $q^\alpha(x, \xi, t)$, $p^\alpha(x, \xi)$ とする. $C(M) \subset \mathbb{C}T^\psi M$ cf. (1.2.36), (1.2.37) を $q^1(x, \xi) = \cdots = q^n(x, \xi) = 0$ で定義される部分空間 (characteristic と云う) とする. $C(H)$ を $p^\alpha(x, \xi)$ を使って同様に定義する. $T^\psi M$ の定義により $C(H), C(M)$ 上では $\xi_0 \neq 0$ である.

(1) $C(H), C(M)$ の錐近傍 Γ_1, Γ_2 , 斉次シンプレクティック写像の 1-パラメーター族 $\chi_t : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ で非退化行列を値にとる適当な斉次 0 次の函数 ($r_\beta^\alpha(x, \xi, t)$) に対して

$$(1.3.11) \quad q^\alpha(\chi_t(x, \xi), t) = r_\beta^\alpha(x, \xi, t)p^\beta(x, \xi), \quad \chi_0(x, \xi) = (x, \xi)$$

となるものを見つける. つまり, χ は M の CR 作用素のシンボルで生成される加群を H の CR 作用素のシンボルで生成される加群にうつす変換である.

吾々の目的である核の特異性は後に述べるように characteristic の錐近傍で発生するので, この場合に χ_t を構成すれば充分なのである.

(2) 以下記号を簡単にするために t を省略する. χ の生成函数 $S(y, \xi)$ の領域で定義されたシンボル $a(y, \xi)$ に対して, χ によって引き起こされたフーリエ積分作用素 F_a^χ を定義する.

(3) $a(y, \xi)$ と擬微分作用素 B_β^α を選んで等式:

$$(1.3.12) \quad F_a^\chi \circ B_\beta^\alpha \circ P^\beta = Q^\alpha \circ F_a^\chi$$

が成立するようにする cf. (4.1.3). つまり, F_a^χ によって M の CR 作用素は H の CR 作用素にうつされると云ってよい.

(4) モデルケースのセゲー核を使い, 一般の場合のセゲー核と同じ特異性をもつ核函数を上フーリエ積分作用素を使って作る.

第2章 シンプレクティック写像

2.1 シンプレクティック写像

2.1.1

等式 (1.3.11) を満たす斉次シンプレクティック写像 χ_t を作ろう. $x = (x^0, x^1, \dots, x^{2n})$, $z^\alpha = x^{2\alpha-1} + ix^{2\alpha}$ とする. モデルケース H の構造を考へて居るか, 一般の場合 M の構造を考へて居るかを明確にするために, (x, ξ) のコピーを (y, η) と書いて, H に対しては (x, ξ) 変数, M に対しては (y, η) 変数を使う. 従って χ_t は (x, ξ) -空間から (y, η) -空間へのシンプレクティック写像の族と考へる.

Q_t^α のシンボルを $q^\alpha(y, \eta, t)$ とすると 1.1.1 節と (1.2.16), (1.2.17) により

$$\begin{aligned} q^\alpha(y, \eta, t) &= \frac{i}{2} \left(\eta_{2\alpha-1} - \frac{1}{i} \eta_{2\alpha} \right) - \frac{i}{2} h_t^\alpha(y) i \eta_0 \\ &= i \left\{ \frac{1}{2} \left(\eta_{2\alpha-1} - \frac{1}{i} \eta_{2\alpha} \right) - \frac{i}{2} h_t^\alpha(y) \eta_0 \right\} \end{aligned}$$

(cf. (1.2.33)) だから

$$(2.1.1) \quad q^\alpha(y, \eta, t) = i \left(\bar{\zeta}_\alpha(\eta) - \frac{i}{2} h_t^\alpha(y) \eta_0 \right)$$

となる. 同様に P^α のシンボル $p^\alpha(x, \xi)$ は

$$(2.1.2) \quad p^\alpha(x, \xi) = i \left(\bar{\zeta}_\alpha - \frac{i}{2} z^\alpha \xi_0 \right)$$

である. characteristics $C(M), C(H)$ の適当な錐近傍 Γ_1 と Γ_2 とに対して斉次シンプレクティック写像 $\chi_t : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ と, 非特異な行列に値をとる ξ に関

し斉次次数 0 の Γ_1 上の函数族 $(r_\beta^\alpha(x, \xi, t))$ とを

$$(2.1.3) \quad q^\alpha(\chi_t(x, \xi), t) = r_\beta^\alpha(x, \xi, t)p^\beta(x, \xi)$$

$$(2.1.4) \quad \chi_0(x, \xi) = (x, \xi), \quad r_\beta^\alpha(x, \xi, 0) = \delta_\beta^\alpha$$

を満たすように作る. 以下簡単のため t を省略することが多い.

1.3.1 節に述べたように χ_t を作るには, χ_t を生成する無限小シンプレクティック変換族 $\mathfrak{X}_t$ の斉次次数 1 のポテンシャル σ_t を作ればよい. $\sigma_t = \sigma_t(y, \eta)$ が与へられれば $\chi_t(x, \xi) = (y(x, \xi), \eta(x, \xi))$ は

$$(2.1.5) \quad \frac{\partial y^j(x, \xi)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial \eta_j}(y(x, \xi), \eta(x, \xi)),$$

$$(2.1.6) \quad \frac{\partial \eta_j(x, \xi)}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial y^j}(y(x, \xi), \eta(x, \xi))$$

$$(2.1.7) \quad (y^j(x, \xi))_{t=0} = x^j, \quad (\eta_j(x, \xi))_{t=0} = \eta_j$$

で決まる. 以下 σ_t を χ_t のポテンシャルと呼ぶ. いつも斉次のシンボルを考へる.

2.1.2

χ_t のポテンシャル σ_t と函数 $l(y, \eta, t)$ が与へられたとき

$$\begin{aligned} \frac{dl(\chi_t(x, \xi), t)}{dt} &= \frac{\partial l}{\partial y^j}(\chi_t, t) \frac{\partial y^j}{\partial t} + \frac{\partial l}{\partial \eta_j}(\chi_t, t) \frac{\partial \eta_j}{\partial t} + \dot{l}(\chi_t, t) \\ &= \frac{\partial l}{\partial y^j}(\chi_t, t) \frac{\partial \sigma}{\partial \eta_j}(\chi_t, t) - \frac{\partial l}{\partial \eta_j}(\chi_t, t) \frac{\partial \sigma}{\partial y^j}(\chi_t, t) + \dot{l}(\chi_t, t) \\ &= \left(\{l, \sigma\} + \dot{l} \right) (\chi, t) \end{aligned}$$

であるから

$$(2.1.8) \quad \frac{\partial l(\chi_t(x, \xi), t)}{\partial t} = \left(\{l, \sigma\} + \dot{l} \right) (\chi_t(x, \xi), t)$$

($\dot{l} = \partial l / \partial t$) が成立する.

もし適当な $r_\beta^\alpha(x, \xi, t)$ に対して (2.1.3) が成立して居るならば, 上の式から

$$(2.1.9) \quad (\{q^\alpha, \sigma\} + \dot{q}^\alpha)(\chi_t(x, \xi), t) = \frac{\partial r_\beta^\alpha(x, \xi, t)}{\partial t} p^\beta(x, \xi)$$

である. 一方, 行列 (r_β^α) が非特異だから

$$(2.1.10) \quad \frac{dr_\beta^\alpha(x, \xi, t)}{dt} = S_\gamma^\alpha(x, \xi, t) r_\beta^\gamma(x, \xi, t)$$

となる斉次次数 0 の S_γ^α が存在する. ここで

$$(2.1.11) \quad S_\beta^\alpha(x, \xi, t) = s_\beta^\alpha(\chi_t(x, \xi), t)$$

と書けば, (2.1.3) が成立して居るとして (2.1.9) と (2.1.10) とから

$$(2.1.12) \quad \{q^\alpha, \sigma\} + \dot{q}^\alpha = s_\beta^\alpha q^\beta$$

が導かれる. 従って σ をポテンシャルとする χ が適当な r_β^α に対して (2.1.3) を満たして居れば, σ は s_β^α を補助の未知函数とする偏微分方程式 (2.1.12) の解でなければならない. 逆に σ と s_β^α とを (2.1.12) の解としよう. χ_t を σ をポテンシャルとするシンプレクティック写像とすれば, (2.1.8) と (2.1.12) により

$$\frac{\partial q^\alpha(\chi_t(x, \xi), t)}{\partial t} = s_\beta^\alpha(\chi_t(x, \xi), t) q^\beta(\chi_t(x, \xi), t)$$

である. 一方 $s_\beta^\alpha(y, \eta, t)$ から (2.1.11) と (2.1.10) とで $r_\beta^\alpha(x, \xi, t)$ を作れば r_β^α の構成の仕方から

$$\frac{\partial r_\beta^\alpha(x, \xi, t) p^\beta(x, \xi)}{\partial t} = s_\gamma^\alpha(\chi_t(x, \xi), t) r_\beta^\gamma(x, \xi, t) p^\beta(x, \xi).$$

従って $q^\alpha(\chi_t(x, \xi), t)$ も $r_\beta^\alpha(x, \xi, t) p^\beta(x, \xi)$ も

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial t} = s_\beta^\alpha(\chi_t(x, \xi), t) A^\beta$$

と云う常微分方程式の解になっていて, 初期条件が一致して居る. よって常微分方程式の解の一意性から (2.1.3) が成立して居ることが分かる. 従って次の命題が証明できた.

命題 2.1.13. 実数値の函数 $\sigma(y, \eta, t)$ と行列値の函数 $(s_\beta^\alpha(y, \eta, t))$ とが

$$(2.1.14) \quad \{q^\alpha, \sigma\} + \dot{q}^\alpha = s_\beta^\alpha q^\beta$$

を満たして居るとする. このとき χ_t を σ_t をポテンシャルとするシンプレクティック写像 (cf (2.1.5), (2.1.6)) で $\chi_0 =$ 単位写像となるものとし, $r_\beta^\alpha(x, \xi, t)$ を微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dr_\beta^\alpha(x, \xi, t)}{dt} &= s_\gamma^\alpha(\chi_t(x, \xi, t), t) r_\beta^\gamma(x, \xi, t), \\ r_\beta^\alpha(x, \xi, 0) &= \delta_\beta^\alpha \end{aligned}$$

の解とすれば

$$q^\alpha(\chi_t(x, \xi, t), t) = r_\beta^\alpha(x, \xi, t) p^\beta(x, \xi)$$

が充分小さい t について成立して居る.

2.1.3

上の議論により吾々の問題を解くには characteristic の錐近傍の上で (2.1.12) を満たす斉次次数 1 の σ と斉次次数 0 の s_β^α を作ればよいことになった. つまり $\{q^\alpha\}$ の characteristic の錐近傍 Γ_M の上で方程式 (2.1.12) を解くのである.

$$(2.1.15) \quad g^\alpha(y, \eta) = \frac{\bar{\zeta}_\alpha(\eta)}{\eta_0} - \frac{i}{2} h_t^\alpha(y) \quad \left(= \frac{q^\alpha(y, \eta, t)}{i\eta_0} \right)$$

と置く. 充分小さい $\delta > 0$ に対し

$$\Gamma_M = \{(y, \eta); |g^\alpha(y, \eta, t)| < \delta\}$$

とする. さらに (2.1.12) の未知の実函数 σ は

$$(2.1.16) \quad \sigma = \eta_0 \left(\sigma_{(0,0)}(y, g, \bar{g}) + \sigma_{(1,0)}(y, g, \bar{g}) \right. \\ \left. + \sigma_{(0,1)}(y, g, \bar{g}) + \cdots + \sigma_{(p,q)}(y, g, \bar{g}) + \cdots \right)$$

と形式的和に展開できて居る場合を考える. ここで $\sigma_{(p,q)}$ は g^α , $\bar{g}^\alpha$ に関して, それぞれ p 次, q 次の項とする.

任意の $\sigma_{(0,0)}$ から始めて (2.1.12) を形式的に満たすように $\sigma_{(p,q)}$ を定めていく. $\tilde{\partial}/\partial y^j$, $\partial/\partial g^\alpha$, $\partial/\partial \bar{g}^\alpha$ を $(y, g, \bar{g})$ に関する偏微分とすれば,

$$\begin{aligned} \{q_t^\alpha, \eta_0 \sigma_{(p,q)}\} &= \{q_t^\alpha, \eta_0\} \sigma_{(p,q)} + \eta_0 \{q_t^\alpha, y^j\} \frac{\tilde{\partial} \sigma_{(p,q)}}{\partial y^j} \\ &\quad + \eta_0 \{q_t^\alpha, g_t^\beta\} \frac{\partial \sigma_{(p,q)}}{\partial g_t^\beta} + \eta_0 \{q_t^\alpha, \bar{g}_t^\beta\} \frac{\partial \sigma_{(p,q)}}{\partial \bar{g}_t^\beta} \end{aligned}$$

と展開出来る. 各項ごとに計算していく.

$$\begin{aligned} \{q_t^\alpha, \eta_0\} &= \frac{\partial q_t^\alpha}{\partial y^0} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_t^\alpha(y)}{\partial y^0} \eta_0, \\ \{q_t^\alpha, y^j\} \frac{\tilde{\partial} \sigma_{(p,q)}}{\partial y^j} &= -\frac{\partial q_t^\alpha}{\partial y^j} \frac{\tilde{\partial} \sigma_{(p,q)}}{\partial y^j} \\ &= -i \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tilde{\partial} \sigma_{(p,q)}}{\partial y^{2\alpha-1}} + \frac{i}{2} \frac{\tilde{\partial} \sigma_{(p,q)}}{\partial y^{2\alpha}} - \frac{i}{2} h_t^\alpha(y) \frac{\tilde{\partial} \sigma_{(p,q)}}{\partial y^0} \right\} \\ &= -i \tilde{Q}_t^\alpha \sigma_{(p,q)}. \end{aligned}$$

ここで $\tilde{Q}_t^\alpha$ は偏微分作用素 Q_t^α の $\partial/\partial y^j$ を $\tilde{\partial}/\partial y^j$ と置き換えたときの作用素とする.

$$\begin{aligned} \{q_t^\alpha, g_t^\beta\} &= \frac{1}{i} \{q_t^\alpha, \frac{1}{\eta_0} q_t^\beta\} \\ &= \frac{1}{i} \{q_t^\alpha, \eta_0\} \left(-\frac{1}{\eta_0^2} q_t^\beta\right) + \frac{1}{i \eta_0} \{q_t^\alpha, q_t^\beta\} \\ &= -\frac{g_t^\beta}{2} \frac{\partial h_t^\alpha(y)}{\partial y^0} + \frac{1}{i \eta_0} \{q_t^\alpha, q_t^\beta\}, \end{aligned}$$

$\{q_t^\alpha, q_t^\beta\}$ は $(1/i)[Q_t^\alpha, Q_t^\beta] = 0$ のシンボルであるからそれぞれ比較して $\{q_t^\alpha, q_t^\beta\} = 0$. よって

$$\{q_t^\alpha, g_t^\beta\} = -\frac{g_t^\beta}{2} \frac{\partial h_t^\alpha(y)}{\partial y^0}$$

である.

$$\{q_t^\alpha, \bar{g}_t^\beta\} = \frac{1}{2i\eta_0} \frac{\partial h_t^\alpha(y)}{\partial y^0} \bar{q}_t^\beta - \frac{1}{i\eta_0} \{q_t^\alpha, \bar{q}_t^\beta\}.$$

(1.2.20)–(1.2.23) により

$$(2.1.17) \quad [Q_t^\alpha, \bar{Q}_t^\beta] = ic^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial}{\partial y^0}$$

となる. $\bar{Q}_t^\beta$ のシンボルは $-\bar{q}_t^\beta$ なので (1.2.5 節 (1.2.42))

$$i\{q_t^\alpha, \bar{q}_t^\beta\} = c^{\alpha\bar{\beta}} \eta_0.$$

よって

$$\{q_t^\alpha, \bar{g}_t^\beta\} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_t^\alpha(y)}{\partial y^0} \bar{g}_t^\beta + c^{\alpha\bar{\beta}}$$

である.

すべてまとめると

$$\begin{aligned} \{q_t^\alpha, \eta_0 \sigma_{(p,q)}\} &= \eta_0 \frac{1}{2} \frac{\partial h_t^\alpha(y)}{\partial y^0} \sigma_{(p,q)} - \eta_0 i \tilde{Q}_t^\alpha \sigma_{(p,q)} \\ &\quad - \eta_0 \frac{g_t^\beta}{2} \frac{\partial h_t^\alpha(y)}{\partial y^0} \frac{\partial \sigma_{(p,q)}}{\partial g_t^\beta} + \eta_0 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial h_t^\alpha(y)}{\partial y^0} \bar{g}_t^\beta + c^{\alpha\bar{\beta}} \right\} \frac{\partial \sigma_{(p,q)}}{\partial \bar{g}_t^\beta} \end{aligned}$$

となる.

(2.1.12) の解は一意的ではない. 簡単のために $pq \neq 0$ のときは $\sigma_{(p,q)} = 0$ となる σ を作ろう. 従って $\sigma_{(0,p)}$ を決めればよい. σ は実数に値を取るから $\sigma_{(p,0)} = \overline{\sigma_{(0,p)}}$ ($p > 0$) は $s_\beta^\alpha q^\beta$ の中に繰り込めるからである. 上の式を (2.1.12) に代入して $g, \bar{g}$ を含まない項を 0 にして

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h_t^\alpha(y)}{\partial y^0} \sigma_{(0,0)} - i \tilde{Q}_t^\alpha \sigma_{(0,0)} + c^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial \sigma_{(0,1)}}{\partial \bar{g}_t^\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_t^\alpha}{\partial t} = 0.$$

行列 $c^{\alpha,\bar{\beta}}$ は可逆なのでこれにより任意の $\sigma_{(0,0)}$ に対して $\sigma_{(0,1)}$ が定まる. すなわち

$$(2.1.18) \quad L_{\bar{\beta}}^{(l)} = c_{\alpha\bar{\beta}} (\tilde{Q}_y^\alpha - l c^\alpha)$$

$$(2.1.19) \quad c^\alpha = \frac{i}{2} \frac{\partial h^\alpha}{\partial y^0} = i \frac{1}{\eta_0} \{q^\alpha, \eta_0\}$$

として

$$(2.1.20) \quad \sigma_{(0,1)} = i\bar{g}^\beta (L_{\bar{\beta}}^{(-1)} \sigma_{(0,0)} + \frac{i}{2} c_{\alpha\bar{\beta}} \dot{h}^\alpha)$$

とすればよい.

さらに (2.1.12) で $\bar{g}$ を含み, かつ g を含まない項を 0 とすると,

$$\bar{g}_t^\beta \left(\frac{\partial \sigma_{(0,q)}}{\partial \bar{g}_t^\beta} \right) = q \sigma_{(0,q)}$$

であるから $\sigma_{(0,0)}, \dots, \sigma_{(0,q)}$ が定まったとして $\sigma_{(0,q+1)}$ の条件は, $\sigma_{(0,q+1)} = \lambda_{(q+1)}$ は方程式

$$(2.1.21) \quad \frac{\partial \lambda_{(q+1)}}{\partial \bar{g}^\beta} = i L_{\bar{\beta}}^{(q-1)} \sigma_{(0,q)}$$

の解でなければならない. $\sigma_{(0,q+1)}$ は $\bar{g}$ に関して次数 $q+1$ の斉次だから, (2.1.21) の解は存在するとすれば唯一で

$$(2.1.22) \quad \sigma_{(0,q+1)} = \frac{i}{q+1} \bar{g}^\beta L_{\bar{\beta}}^{(q-1)} \sigma_{(0,q)}$$

である. 従って (2.1.22) で定義された $\lambda = \sigma_{(0,q+1)}$ が $q \geq 1$ のとき (2.1.21) の解になって居ることを証明すればよい.

$$\lambda_{(q+1)}(y, \bar{g}) = i(q+1)^{-1} \bar{g}^\beta L_{\bar{\beta}}^{(q-1)} \sigma_{(0,q)}$$

として $\lambda_{(q+1)}$ が (2.1.21) をみたすことを q に関する帰納法で示そう. $q=0$ の場合は明らかである.

$$\frac{\partial \lambda_{(q+1)}}{\partial \bar{g}^\beta} = i(q+1)^{-1} \left(L_{\bar{\beta}}^{(q-1)} \sigma_{(0,q)} + \bar{g}^\gamma \frac{\partial}{\partial \bar{g}^\beta} L_{\bar{\gamma}}^{(q-1)} \sigma_{(0,q)} \right)$$

であるから

$$(2.1.23) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{g}^\beta} L_{\bar{\gamma}}^{(q-1)} \sigma_{(0,q)} = \frac{\partial}{\partial \bar{g}^\gamma} L_{\bar{\beta}}^{(q-1)} \sigma_{(0,q)}$$

が成立して居ればよい. (2.1.18) により, $[\partial/\partial \bar{g}^\beta, L_{\bar{\gamma}}^{(q-1)}] = 0$. 一方 $\sigma_{(0,q)} = \lambda_{(q)}$ は (2.1.21) で q の場合の解であるから, $q \geq 2$ のときには

$$(2.1.24) \quad L_{\bar{\beta}}^{(q-1)} L_{\bar{\gamma}}^{(q-2)} = L_{\bar{\gamma}}^{(q-1)} L_{\bar{\beta}}^{(q-2)}$$

が云へればよく, $q = 1$ のときには (2.1.20) によって (2.1.24) の $q = 1$ の場合と

$$(2.1.25) \quad c_{\phi\bar{\gamma}}[Q^\phi, c_{\psi\bar{\beta}}\dot{h}^\psi] = c_{\phi\bar{\beta}}[Q^\phi, c_{\psi\bar{\gamma}}\dot{h}^\psi]$$

が云へればよい.

(2.1.24) を証明するため $K_l^\phi = Q_y^\phi - lc^\phi$ とおく. ψ と ϕ とに関するシンメトリックな項を法として計算すれば

$$K_l^\phi K_{l-1}^\psi \equiv c^\psi Q^\phi - (l-1)[Q^\phi, c^\psi]$$

である. 一方 c^ψ の定義により,

$$c^\psi \frac{\partial}{\partial y^0} = [Q^\psi, \frac{\partial}{\partial y^0}]$$

であるから

$$\begin{aligned} [Q^\phi, c^\psi] \frac{\partial}{\partial y^0} &= [Q^\phi, [Q^\psi, \frac{\partial}{\partial y^0}]] - c^\psi [Q^\phi, \frac{\partial}{\partial y^0}] \\ &= [Q^\psi, [Q^\phi, \frac{\partial}{\partial y^0}]] - c^\psi c^\phi \frac{\partial}{\partial y^0} \end{aligned}$$

は ψ と ϕ とに関してシンメトリックである. 従って

$$\begin{aligned} (2.1.26) \quad c^\psi Q^\phi - c^\phi Q^\psi &= K_l^\phi K_{l-1}^\psi - K_l^\psi K_{l-1}^\phi \\ &= c^{\phi\bar{\beta}} L_{\bar{\beta}}^{(l)} c^{\psi\bar{\gamma}} L_{\bar{\gamma}}^{(l-1)} - c^{\psi\bar{\beta}} L_{\bar{\beta}}^{(l)} c^{\phi\bar{\gamma}} L_{\bar{\gamma}}^{(l-1)} \\ &= c^{\phi\bar{\beta}} c^{\psi\bar{\gamma}} (L_{\bar{\beta}}^{(l)} L_{\bar{\gamma}}^{(l-1)} - L_{\bar{\gamma}}^{(l)} L_{\bar{\beta}}^{(l-1)}) + R_\gamma L_{\bar{\gamma}}^{(l-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2.1.27) \quad R_\gamma &= c^{\phi\bar{\beta}} c_{\nu\bar{\beta}} [Q^\nu, c^{\psi\bar{\gamma}}] - c^{\psi\bar{\beta}} c_{\nu\bar{\beta}} [Q^\nu, c^{\phi\bar{\gamma}}] \\ &= [Q^\phi, c^{\psi\bar{\gamma}}] - [Q^\psi, c^{\phi\bar{\gamma}}]. \end{aligned}$$

$[Q^\psi, Q^{\bar{\gamma}}] = ic^{\psi\bar{\gamma}} (\partial/\partial y^0)$ であるから

$$(2.1.28) \quad i[Q^\phi, c^{\psi\bar{\gamma}}] \frac{\partial}{\partial y^0} = [Q^\phi, [Q^\psi, Q^{\bar{\gamma}}]] - ic^{\psi\bar{\gamma}} c^\phi \frac{\partial}{\partial y^0}.$$

よって

$$\begin{aligned} R_\gamma L_{\bar{\gamma}}^{(l-1)} &= (-c^{\psi\bar{\gamma}} c^\phi + c^{\phi\bar{\gamma}} c^\psi) c_{\nu\bar{\gamma}} (Q^\nu - (l-1)c^\nu) \\ &= -c^\phi Q^\psi + c^\psi Q^\phi \end{aligned}$$

であるから (2.1.26), (2.1.27) によって (2.1.24) が証明された. (2.1.25) を証明するには,

$$\begin{aligned} & c^{\alpha\bar{\gamma}} c^{\nu\bar{\beta}} (c_{\phi\bar{\gamma}} [Q^\phi, c_{\psi\bar{\beta}} \dot{h}^\psi] - c_{\phi\bar{\beta}} [Q^\phi, c_{\psi\bar{\gamma}} \dot{h}^\psi]) \\ &= [Q^\alpha, \dot{h}^\nu] - [Q^\alpha, c^{\nu\bar{\beta}}] c_{\psi\bar{\beta}} \dot{h}^\psi - [Q^\nu, \dot{h}^\alpha] + [Q^\nu, c^{\alpha\bar{\beta}}] c_{\psi\bar{\beta}} \dot{h}^\psi, \end{aligned}$$

従って

$$[Q^\alpha, \dot{h}^\nu] - [Q^\nu, \dot{h}^\alpha] + ([Q^\nu, c^{\alpha\bar{\gamma}}] - [Q^\alpha, c^{\nu\bar{\gamma}}]) c_{\psi\bar{\gamma}} \dot{h}^\psi = 0$$

を云へればよい. (2.1.28) により

$$[Q^\nu, c^{\alpha\bar{\gamma}}] - [Q^\alpha, c^{\nu\bar{\gamma}}] = c^{\nu\bar{\gamma}} c^\alpha - c^{\alpha\bar{\gamma}} c^\nu.$$

従って

$$[Q^\alpha, \dot{h}^\nu] - [Q^\nu, \dot{h}^\alpha] + c^\alpha \dot{h}^\nu - c^\nu \dot{h}^\alpha = 0$$

を証明すればよい. 1.2.5 節 (1.2.43) によって上の式は

$$\{q^\alpha, \dot{h}^\nu\} - \{q^\nu, \dot{h}^\alpha\} - ic^\alpha \dot{h}^\nu + ic^\nu \dot{h}^\alpha = 0$$

と書き直せる. $\dot{q}^\nu = (1/2)\dot{h}^\nu\eta_0$ であるから (2.1.19) によって, 結局

$$\{q^\alpha, \dot{q}^\nu\} - \{q^\nu, \dot{q}^\alpha\} = 0$$

を云へばよいことになる. この式は $\{q^\alpha, q^\nu\} = 0$ に $\partial/\partial t$ を作用させれば自明である.

以上で次のことが証明出来た: $\sigma_{(0,0)}$ を任意の y の函数として $\sigma_{(0,p)}$ を (2.1.20) から出発して, (2.1.22) を使って帰納的に定義したものとすれば,

$$(2.1.29) \quad \sigma = \eta_0(\sigma_{(0,0)} + \sum_{p=1}^{\infty} (\sigma_{(0,p)} + \sigma_{(p,0)})), \quad \sigma_{(p,0)} = \overline{\sigma_{(0,p)}},$$

として σ は形式的に方程式 (2.1.12) をみたす. ここで

$$(2.1.30) \quad s_\beta^\alpha = \sum_{k \geq 0} (s_\beta^\alpha)_{(k,0)},$$

$$(2.1.31) \quad (s_\beta^\alpha)_{(k,0)} = \frac{i}{k+1} \left((k+2)c^\alpha - \tilde{Q}^\alpha \right) \frac{\partial \sigma_{(k+1,0)}}{\partial g^\beta}$$

である.

逆に上の手段により得られる σ を (2.1.12) に代入すると $g_t^\alpha, \bar{g}_t^\alpha$ の形式的べき級数として形式的に 0 である. つまり上のようにして定まる $\sigma_{(0,p)}$ を使って (2.1.29) が形式的に成立する函数を σ とすれば

$$\{q^\alpha, \sigma\} + \dot{q}^\alpha - s_\beta^\alpha q^\beta = R^\alpha$$

は形式的に $g, \bar{g}$ に関して 0 である. よって $|q|^2$ で割ることが出来, $R^\alpha = R_\beta^\alpha q^\beta$ と書くことが出来る. s_β^α を改めて $s_\beta^\alpha - R_\beta^\alpha$ と書けば, 上に得られた σ が真の解となる.

以上により

$$\sigma = \eta_0(\sigma_{(0,0)} + \sum_{k \geq 1} (\sigma_{(0,k)} + \overline{\sigma_{(0,k)}}))$$

が (2.1.12) を満たすように定まる.

2.1.4

以下

$$(2.1.32) \quad \sigma_{(0,0)} = 0$$

の場合を考える. 吾々の基点は (x_*, ξ_*) , (y_*, η_*) , $x_* = y_* = 0$ で $\xi_* = \eta_* = e_0 = (1, 0, \dots, 0)$ とする. これは CR シンボルの characteristic である. $h^\alpha \equiv 0 \bmod (z, \bar{z})^2$ であり, $\sigma_{(1,0)} = -(1/2)c_{\alpha\bar{\beta}}g^\alpha\bar{h}^\beta$ であるから

$$(2.1.33) \quad \sigma(x_*, \xi_*) = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x^j}(x_*, \xi_*) = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_j}(x_*, \xi_*) = 0.$$

従って常微分方程式 (2.1.5), (2.1.6) の解の一意性から

$$(2.1.34) \quad \chi_t(x_*, \xi_*) = (x_*, \xi_*).$$

上に構成された σ_t をポテンシャルとするシンプレクティック写像を χ_t とする. χ_t は基点 (x_*, ξ_*) の錐近傍で定義されて居て, 2.1.2 節の終わりに述べた命題により, (2.1.3) が成立して居る. 従って χ_t の生成函数を $S(y, \xi)_t$ とすれば,

$$(2.1.35) \quad q^\alpha(y, S'_y(y, \xi)_t) = r_\beta^\alpha(S'_\xi(y, \xi)_t, \xi)p^\beta(S'_\xi(y, \xi)_t, \xi).$$

一般の強擬凸の CR 微分作用素のシンボルは, モデルの場合の CR 微分作用素のシンボルへ, シンプレクティック写像を使って写すことが出来たので, 次の問題は CR 微分作用素そのものを写す作用素を作ることである. そのためにフーリエ積分作用素を使うので, それについて解説する.

第3章 フーリエ積分作用素

3.1 位相ベクトル空間

3.1.1

位相ベクトル空間からの準備をする. E をベクトル空間, $\{p\}$ を E 上の半ノルムの族とする. この組 $(E, \{p\})$ を位相ベクトル空間と云う. 以下, 全ての p に対して $p(u) = 0$ ならば $u = 0$ が成り立つと假定する. よって E はハウスドルフ空間となる. 例えば $Y \subset \mathbb{R}^m$ を開集合とし, $u \in E = C^\infty(Y)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\partial_x^\alpha = (\partial/\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x^m)^{\alpha_m}$ としたときに, $K \Subset Y$ に対して

$$(3.1.1) \quad p_K^\alpha(u) = \sup \{ |\partial_x^\alpha u|; x \in K \}$$

は E 上の半ノルムである. $C^\infty(Y)$ は $\{p_K^\alpha; K \subset Y, \alpha\}$ をノルムの族とする位相ベクトル空間になる. 以下 $C^\infty(Y)$ はこの意味の位相ベクトル空間とする.

位相ベクトル空間 $(E, \{p_\sigma\}), (E_1, \{q_j\})$ に対して, 線形写像 $\lambda: E \rightarrow E_1$ が連続であるとは, 任意の q_j に対して有限個の $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ と定数 C が存在して

$$(3.1.2) \quad q_j(\lambda(u)) \leq C \sum_s p_{\sigma_s}(u)$$

が成り立つこととする.

簡単のため, 可付番個の半ノルムの族で定義される位相ベクトル空間を考へよう. $u_l \in E$ ($l = 1, 2, \dots$) がコーシー族であるとは, E のすべての半ノルム p に対し, $p(u_l - u_m) \rightarrow 0$ ($l, m \rightarrow \infty$) が成り立つこととする. E が完備であるとは, 任意のコーシー族 $\{u_l\}$ に対し, $u_l \rightarrow u$ となる $u \in E$ が存在することとする. $C^\infty(Y)$ は完備である.

定理 3.1.3. E, F を位相ベクトル空間とし, F を完備とする. $E_0 \subset E$ を稠密なベクトル部分空間とし, λ を連続な線形写像 $E_0 \rightarrow F$ とする. このとき λ は連続な線形写像 $\lambda: E \rightarrow F$ に一意的に拡張出来る.

3.2 フーリエ積分作用素

3.2.1

フーリエ積分作用素を Hörmander [9] に従って定義し, その基本的性質を述べる. フーリエ積分作用素の解説書としては他に Grigis-Sjöstrand [7] がある. $X \subset \mathbb{R}^{n_1}, Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$ を開部分集合, $x \in \mathbb{R}^{n_1}, y \in \mathbb{R}^{n_2}$ とする.

定義 3.2.1 (フーリエ積分作用素). $F: C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(Y)$ がフーリエ積分作用素であるとは, $\theta \in \mathbb{R}^N$ に対して, 次の表示を持つものとする: $u \in C_0^\infty(X)$ に対し

$$(3.2.2) \quad Fu(y) = c_\phi \int e^{i\phi(y,x,\theta)} a(y,x,\theta) u(x) dx d\theta.$$

ここで ϕ を相函数, θ を相変数, a をシンボルといい, c_ϕ は ϕ に依存して選ぶ適当な常数である. 次に上の記号の意味を説明しよう.

(I) 一般に相函数 $\phi(y, x, \theta)$, 位数 m のシンボル $a(y, x, \theta)$ を次のように定義する.

定義 3.2.3 (相函数, シンボル). (a) $Y \times X \times \mathbb{R}^N$ 内の錐開集合 Γ で定義された函数 $\phi(y, x, \theta)$ が相函数であるとは次の条件を満たすときに云う.

- (i) $\text{Im } \phi(y, x, \theta) \geq 0$
- (ii) $t > 0$ に対して $\phi(y, x, t\theta) = t\phi(y, x, \theta)$
- (iii) (x, θ) -空間上, 各 y に対して $d\phi \neq 0$ である.

Hörmander [9] では ϕ は実数値として居る. 複素数値の場合は Melin と Sjöstrand [15, Lecture Note in Math. vol. 459] に始まる.

(b) $Y \times X \times \mathbb{R}^N$ で定義され, その台が Γ に含まれる函数 $a(y, x, \theta)$ が, 位数 m のシンボルであるとは, 任意の $K \Subset \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_1}$, 任意の $Y, X, \mathbb{R}^N$ に関する

る多重添字 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ に対してある c が存在して, 任意の $(y, x) \in K$ に対して

$$\left| \partial_y^{\alpha_1} \partial_x^{\alpha_2} \partial_\theta^\beta a(y, x, \theta) \right| \leq c(1 + |\theta|)^{m-|\beta|}$$

が成立するときに云う.

Γ を固定して $\sum^m$ を位数 m のシンボル全体の空間とする. このとき $\sum^m$ は半ノルム

$$(3.2.4) \quad p_{\alpha_1, \alpha_2, \beta, K}^{(m)} = \inf \{ c : c \text{ はシンボルの定義に現れる常数} \}$$

からなる半ノルムの族で定まる位相ベクトル空間である. $m_1 < m_2$ ならば, 明らかに $\sum^{m_1} \subset \sum^{m_2}$ であり自然な埋め込みは連続である. $\bigcap_m \sum^m = \sum^\infty$ の元をオーダー $(-\infty)$ と云う.

Γ が $Y \times X \times \mathbb{R}^N$ に等しいこともあるが一般には等しいとは限らない. ϕ が Γ でしか定義されていないときに, シンボル a はいつも Γ に台を持つもののみを使う. F が (3.2.2) で定義されたフーリエ積分作用素であると云うとき (ときにははっきり書いていないかもしれないが) Γ がいつも固定されて居る.

従って $e^{i\phi(y, x, \theta)} a(y, x, \theta)$ は $Y \times X \times \mathbb{R}^N$ の上で定義されて居るので Fu は Y の上の函数になる.

(II) 次に (3.2.2) の積分の定義を述べよう. これは振動積分と呼ばれるものである. $|e^{i\phi(y, x, \theta)}| \leq e^{-\text{Im } \phi}$ で $\text{Im } \phi \geq 0$ なので, $m < -(N+1)$ のとき (3.2.2) の積分は定義されて居る. $-(N+1) \leq m_1$ とすると $\sum^m \subset \sum^{m_1}$ であるので, (3.2.2) の積分を使って, 図式

$$\begin{array}{ccc} \sum^m & \longrightarrow & C^\infty(Y) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \sum^{m_1} & \xlongequal{\quad} & \sum^{m_1} \end{array}$$

が任意の $u \in C_0^\infty(X)$ に対して考へられる. 上の図で $\sum^m \rightarrow C^\infty(Y)$ と $\sum^m \rightarrow \sum^{m_1}$ は定義されて居て連続である. 上向きの写像 $\sum^{m_1} \rightarrow C^\infty(Y)$ を連続になるように定義して上が可換図式になるようにすれば, (3.2.2) の積分が一般に定義されたことになる. 上向きの写像 $\sum^{m_1} \rightarrow C^\infty(Y)$ は少し手の込んだ連続拡張の概念を使って定義する: すなはち $\sum^m$ に $\sum^{m_1}$ の位相を入れたものを $\sum^m | \sum^{m_1}$ とするとき, (3.1.1 節に述べた定理により) 次の補題を証明すればよい.

命題 3.2.5. $m \leq -(N+1) < m_1 < m_2$ に対し次が成立する.

- (i) $\sum^m | \sum^{m_2} \rightarrow C^\infty(Y)$ は連続である.
- (ii) $\sum^m | \sum^{m_2}$ は $\sum^{m_1} | \sum^{m_2}$ で稠密である.

補題を証明するため, まず

$$L_1 = l_\lambda(y, x, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_\lambda} + k^j(y, x, \theta) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad l_\lambda \in \sum^0, \quad k^j \in \sum^{-1}$$

の形の偏微分作用素で $L_1 \phi = 1$ なる等式が $|\theta| > \delta$ なるところで成立して居るものを作れることを注意しよう. たとえば

$$(3.2.6) \quad \sum_\lambda |\partial \phi / \partial \theta_\lambda|^2 + \sum_j |\partial \phi / \partial x^j|^2 = \Phi$$

は (iii) により, $\theta \neq 0$ のところで零にならないので

$$l_\lambda = \Phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial \theta_\lambda}, \quad k^j = \Phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}$$

と置けばよい. オーダー $(-\infty)$ のシンボルについて連続性は明らかだから, $\sum^{-\infty}$ を法として証明すればよい.

(i) を証明するためには, cut-off 函数 χ , すなはち台がコンパクトな C^∞ 函数 $\chi(t)$ で, $|t| < \delta$ ならば $\chi(t) = 1$ になるものをとれば,

$$L = (1 - \chi(|\theta|))L_1 + \chi(|\theta|)$$

は滑らかな偏微分作用素で

$$L\phi = 1 \pmod{\sum^{-\infty}}$$

であり,

$$(1/i)L e^{i\phi} = e^{i\phi}$$

である.

$a \in \sum^m$ ($m < -(N+1)$) であるから, (3.2.2) の積分が定義出来て, 部分積分に関する法則が成立するから, (簡単のため $\chi(|\theta|)$ を χ と書く)

$$\begin{aligned}
F_a u &= F_{a_1} u + \sum_j F_{a^j} \frac{\partial u}{\partial x^j} \\
a_1 &= -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_\lambda} (1 - \chi) l_\lambda a - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j} (1 - \chi) k^j a + \frac{1}{i} \chi a \\
a^j &= i(1 - \chi) k^j a.
\end{aligned}$$

上の L_1 の形から, a_1 も a^j も $\sum^{m-1}$ に属し更に, $a \mapsto a_1$ も $a \mapsto a^j$ も連続写像 $\sum^m | \sum^{m_1} \rightarrow \sum^{m-1} | \sum^{m_1-1}$ になって居る. 従ってこの作用を繰り返せばよい.

(ii) をみるには $a \in \sum^{m_1}$ とする. コンパクトな台を持つ函数 φ で, $0 \leq \varphi(\xi) \leq 1$, 且つ $|\xi| \leq 1$ に対して $\varphi(\xi) = 1$ となるものを一つ取ってくる. $a_\lambda(x, \xi) = \varphi(\lambda\xi)a(x, \xi)$ とすれば $a_\lambda \in \sum^m$ であり,

$$|a(x, \xi) - a_\lambda(x, \xi)| = 0, \text{ ただし } |\xi| < \frac{1}{\lambda}$$

となる. $|\xi| > 1/\lambda$ ならば $m_2 > m_1$ のとき

$$\begin{aligned}
|a(x, \xi) - a_\lambda(x, \xi)| &\leq c(1 + |\xi|)^{m_1} \\
&= c(1 + |\xi|)^{m_1 - m_2} (1 + |\xi|)^{m_2} \\
&\leq c\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{m_1 - m_2} (1 + |\xi|)^{m_2}.
\end{aligned}$$

よって $\lambda \rightarrow 0$ のとき

$$\sup |a(x, \xi) - a_\lambda(x, \xi)| (1 + |\xi|)^{-m_2} \rightarrow 0$$

である. 従って a_λ は $p_{0,0,0,K}^{(m_2)}$ -ノルムで a に収束して居る. 一般の $p_{\alpha_1, \alpha_2, \beta, K}^{(m_1)}$ についても同じように扱える. 以上で積分 (3.2.2) の説明が終わった.

定義によれば, 任意の $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n_1})$ と $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ とに対し積分 (3.2.2) は定義されて居る. 従って $F : C_0^\infty(\mathbb{R}^{n_1}) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^{n_2})$ が定義されて居る. シンボル a の台の $\mathbb{R}^{n_2}$ への射影の外にある y については $Fu(y) = 0$ である. 普通適当な $X \subset \mathbb{R}^{n_1}$ と $Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$ とを選んで $Fu : C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(Y)$ を考へる. X と Y とは F を利用しようとする問題を扱うに都合のいいように選ぶのである.

注意 3.2.7. a がオーダー $(-\infty)$ の場合を考へよう. この場合には (3.2.2) の積分で θ について先に積分出来るので, F_a は滑らかな核を持つ積分作用素になる. 従って $u(x)$ に特異性がある場合にも適当な条件のもとで $F_a u$ は定義出来て滑らかな函数になる.

注意 3.2.8. フーリエ積分作用素の理論では相変数の無限遠点の近傍の影響によって出てくる特異点を主要な対象とする.

相変数の原点の近傍の影響で出てくる特異点は無視されることが多い. すなはち, (3.2.2) において $\theta = 0$ が $a(y, x, \theta)$ の特異点のとき, $a(x, y, \theta)$ を $(1 - \chi(\theta))a(y, x, \theta)$ でおきかえるのである. ここで $\chi(\theta)$ は $\theta = 0$ の近傍で 1 になり, コンパクト集合を台とする函数 (cut-off 函数) とする. 従って (3.2.2) で F は一意的に決まらず, スムース作用素を法として一意的に決まる. フーリエ積分作用素の理論はスムース作用素を法とした理論である. 例えばラプラシアン Δ の逆函数のシンボルは $|\xi|^{-2}$ であると云へる. 次元が 2 以上のとき, $|\xi|^{-2}$ は可積分なので古典的には $|\xi|^{-2}$ が使われて居るが, 吾々は $(1 - \chi(|\xi|))|\xi|^{-2}$ を使う. 位数 $-\infty$ の作用素を法として, 上のシンボルで決まるフーリエ積分作用素は Δ の逆になって居る.

注意 3.2.9. $-\infty < l < l_1$ に対して $a_{(l)}(x, \xi)$ を位数 l のシンボルの列としたとき, 形式和 $\sum a_{(l)}(x, \xi)$ は次の意味でいつも収束する; シンボル $b(x, \xi)$ があって, 任意の k に対し

$$(3.2.10) \quad b - \sum_{l > k} a_{(l)} \in \sum^k$$

上のような b は位数 $-\infty$ の作用素を法として一意的に決まる. 以後 $\sum a_{(l)}(x, \xi)$ は上の意味の和である. 証明は cut-off 函数 χ と $\varepsilon_l \rightarrow 0$ となる列をとって

$$b(x, \xi) = \sum (1 - \chi(\varepsilon_l |\xi|)) a_{(l)}(x, \xi)$$

はいつも有限和なので, 上の和は定義されて居る. ε_l を充分速く小さくなるようにとればよい.

3.2.2

例 3.2.11. $l \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Re} p \geq 0$, $p \neq 0$ のとき

$$(3.2.12) \quad \int_0^\infty e^{-pt} t^l dt = l! p^{-(l+1)}, \quad (l \geq 0),$$

$$(3.2.13) \quad \int_0^\infty e^{-pt} t^{-l} dt = \frac{(-1)^l}{(l-1)!} p^{l-1} \log p, \quad (l \geq 1).$$

上の積分は普通の積分の定義では発散する. 等式は振動積分として成立して居る.

上で述べたように $t = 0$ での特異性からの寄与は無視するので, 積分 (3.2.13) は, cut-off 函数 χ を使って

$$\int_0^\infty (1 - \chi(t)) f(t) dt$$

として定義する. 従って等式は p に関するスムーズな函数を法とする等式である.

$\operatorname{Re} p > 0$ の場合: 吾々の積分は古典的な意味で定義できて居る. (3.2.12) は $l = 0$ の場合,

$$e^{-pt} = -\frac{1}{p} \frac{de^{-pt}}{dt}$$

であるから, 明らかに成立して居る. 一般の l については, l に関する帰納法を使って容易に確かめられる. (3.2.13) については, 先ず

$$\int_0^\infty e^{-pt} \log t dt$$

を調べる. 古典的定理により

$$(3.2.14) \quad -\int_0^\infty e^{-t} \log t dt = \gamma = \text{オイラーの常数}$$

である. 正則微分形式 $e^{-\zeta} \log \zeta d\zeta$ を $\zeta = pt$, $t > 0$ なる直線上で積分したものは $\operatorname{Re} p > 0$ なる p によらない. 従って

$$\int_0^\infty e^{-pt} \log t dt = -\frac{1}{p} (\gamma + \log p).$$

上に (注意 3.2.8) 述べたように, 吾々は $t = 0$ の近くの特異点の寄与は無視して居るので,

$$(3.2.15) \quad \frac{1}{t} = \frac{d \log t}{dt}$$

を使って部分積分を使えば (3.2.13) の $l = 1$ の場合が出てくる. $l \geq 2$ の場合も部分積分と帰納法とによって同様に滑らかな項を法として得られる.

$\operatorname{Re} p = 0$ ($p \neq 0$) の場合: $l \in \mathbb{Z}$ のとき, (3.2.12), (3.2.13) の右辺を $J(l, p)$ とする. $a(t) = t^l$, $a_\epsilon(t) = e^{-\epsilon t} a(t)$, ($\epsilon > 0$) とすれば,

$$I_\epsilon = \int e^{-pt} a_\epsilon(t) dt = \int e^{-(p+\epsilon)t} t^l dt = J(l, p+\epsilon).$$

一方

$$a_\epsilon(t) \rightarrow a(t) \text{ in } \sum^{-(|l|+\gamma)}$$

であるから,

$$\int e^{-pt} a(t) dt = \lim I_\epsilon.$$

従って吾々の式が成立して居る.

例 3.2.16. $\phi(y, x, \theta) = \langle y - x, \theta \rangle$, $N = n_1 = n_2 = n$ のとき擬微分作用素と云う. シンボル $a(y, x, \theta)$ が x によらない θ の多項式で

$$a(y, x, \theta) = a(y, \theta) = \sum a_\alpha(y) \theta^\alpha$$

と展開されて居る場合を考へよう.

常数 c_ϕ をすべての $u(x)$ に対し

$$u(y) = c_\phi \int e^{iy \cdot \theta} \hat{u}(\theta) d\theta, \quad \hat{u}(\theta) = \int e^{-ix \cdot \theta} u(x) dx$$

となるように選ぶ. $c_\phi = (2\pi)^{-n}$ である (フーリエ積分の公式). このときフーリエ積分作用素は

$$\begin{aligned} Fu(y) &= c_\phi \int e^{i\langle y-x, \theta \rangle} a(y, x, \theta) u(x) dx d\theta \\ &= a(y, D_y) u(y) \\ &= \sum_{\alpha} a_\alpha(y) D_y^\alpha u(y) \end{aligned}$$

と云う表示を持つ. つまり F は $a(y, \theta)$ をシンボルとする偏微分作用素である.

例 3.2.17. $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset T^*\mathbb{R}^n$ を錐開集合, $\chi: \Gamma_1 \ni (x, \xi) \mapsto (y, \eta) \in \Gamma_2$ を斉次のシンプレクティック写像とする.

χ の斉次の生成函数 $S(y, \xi)$ が $\Gamma_3 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を定義域として存在するとする. (cf. 1.3.3 節) このとき $\Gamma_3 \times \mathbb{R}^n = \Gamma_S$ の上の函数

$$(3.2.18) \quad \varphi_S(y, x, \xi) = S(y, \xi) - x \cdot \xi \quad \{(y, \xi) \in \Gamma_3, x \in \mathbb{R}^n\}$$

は相函数になって居る. φ_S を χ によって導入された相函数, $c_{\varphi_S} = (2\pi)^{-n}$ としたとき, φ_S によって決まるフーリエ積分作用素 F^χ を χ によって導入されたフーリエ積分作用素と呼ぶ. 従って $a(y, x, \xi)$ を $\Gamma = \Gamma_S$ に台を持つシンボルとするととき $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と $y \in \mathbb{R}^n$ とに対し

$$(3.2.19) \quad F_a^\chi u(y) = c_n \int e^{i\varphi_S(y, x, \xi)} a(y, x, \xi) u(x) dx d\xi, \quad c_n = (2\pi)^{-n}$$

である. χ が恒等写像のときには F_χ は例 3.2.16 になって居る.

3.2.3

$a_j \in \sum^j$ をシンボルとし, A_j を a_j をシンボル, φ を相函数とするフーリエ積分作用素とする. フーリエ積分作用素の定義から次のことは自明である. 関係式 $G(A_1, A_2, \dots)$ があったとき, $G(A_1, A_2, \dots) = 0$ とする主張は次の条件が満たされて居れば正しい;

- (i) $a_1, a_2, \dots$ の位数が充分 $-\infty$ に近いとき, $G(A_1, A_2, \dots) = 0$.
- (ii) $G(A_1, A_2, \dots)$ は $a_j \in \sum^{m_j} \mid \sum^{m'_j}, m'_j < m_j$ のとき連続である.

例へばこのやり方で部分積分

$$\begin{aligned} \int e^{i\varphi(y, x, \theta)} i \frac{\partial \varphi(y, x, \theta)}{\partial \theta_\lambda} a(y, x, \theta) u(x) dx d\theta \\ = -i \int e^{i\varphi(y, x, \theta)} \frac{\partial a(y, x, \theta)}{\partial \theta_\lambda} u(x) dx d\theta \end{aligned}$$

が得られる. この原理は以下, 合成公式その他の証明で使はれて居る.

3.2.4

フーリエ積分作用素 $F : C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(Y)$ が位数 $-\infty$ の作用素であることを次のように定義する; 任意の $m = m_1, m_1 - 1, \dots, -\infty$ に対して位数 m のシンボル a があって $F = F_a$ と書ける. 位数 $-\infty$ の作用素は, 滑らかな核による積分作用素と思ってよい. フーリエ積分作用素の計算は, 一般に位数 $-\infty$ の作用素を法とした計算である. 吾々の目的はセゲー核の特異性であるので, 心配なくフーリエ積分作用素を使へる.

$\varphi(y, x, \theta)$ を Γ 上の相関数としたとき

$$(3.2.20) \quad \{(y, x, \theta) \in \Gamma; \frac{\partial \varphi(y, x, \theta)}{\partial \theta^\lambda} = 0, \lambda = 1, \dots, N\}$$

を φ の臨界集合と名づける. $\partial \varphi / \partial \theta^\lambda$ の微分が一次独立 (このとき φ を非退化とよぶ) で, φ が実数値ならば臨界集合は余次元 N の部分多様体になる.

φ が複素数値の場合には, 臨界集合の様子は簡単ではないので半臨界集合と云うものを考へよう. これは Γ の錐部分多様体 C で次のようにして決まるものとする: 適当な次数 0 の斉次の行列 $b_\nu^\lambda(y, x, \theta)$, $\nu = 1, \dots, N_1$ をとれば

$$(3.2.21) \quad \sigma_\nu = b_\nu^\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \theta^\lambda}$$

は実数値で, $\sigma_1 = \dots = \sigma_{N_1} = 0$ は C の定義方程式になって居る. φ が実数値で非特異のとき臨界集合は半臨界集合である. 半臨界集合が一意的に決まるわけではない. F_a の特異点は a と φ の半臨界集合との近傍の様子で決まる:

命題 3.2.22. C を半臨界集合とする. もし $\{a \text{ の台 } \} \cap C$ が有界ならば, F_a は位数 $-\infty$ の作用素である.

証明 $\{a \text{ の台 } \} \cap C = \text{空集合}$ として一般性を失わない. 従って

$$a(y, x, \theta) = c^\nu(y, x, \theta) \sigma_\nu(y, x, \theta), \quad (c^\nu(y, x, \theta) \text{ の階数} \leq a \text{ の階数})$$

と書ける. a の台の上で 1 であり, その台は a の台の十分小さい錐近傍に入る χ をとって c^ν を χc^ν で置き換えてよい. 従って $\{c^\nu(y, x, \theta) \text{ の台 } \} \cap C$ は空

集合としてよい. すると

$$\begin{aligned} F_a u(y) &= -i \int \frac{\partial e^{i\varphi(y,x,\theta)}}{\partial \theta^\lambda} b_\nu^\lambda(y,x,\theta) c^\nu(y,x,\theta) u(x) dx d\theta \\ &= F_{a_1} u(y), \\ a_1(y,x,\theta) &= i \frac{\partial b_\nu^\lambda(y,x,\theta) c^\nu(y,x,\theta)}{\partial \theta^\lambda} \end{aligned}$$

で, a_1 の位数は a の位数より小さくなり, $\{a_1 \text{ の台 } \} \cap C = \text{空集合}$ である. 上の議論を繰り返せるから, F_a が位数 $-\infty$ の作用素であることが云へた.

□

例 3.2.23. $\chi: \Gamma_1 \ni (x, \xi) \mapsto (y, \eta) = (y(x, \xi), \eta(x, \xi)) \in \Gamma_2$ を 3.2.2 節の例 3.2.17 のシンプレクティック写像とする. (3.2.18) により φ_S の臨界集合は $\{(y, x, \xi); S'_\xi(y, \xi) = x\}$, すなはち

$$(3.2.24) \quad \varphi_S \text{ の臨界集合} = \{(y, x, \xi); y = y(x, \xi)\}.$$

従って次の命題が成立する.

命題 3.2.25. 開集合 $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ に対し, $F_a^\chi: C^\infty(M_1) \rightarrow C^\infty(M_2)$ が定義できて居るとする. $x \in M_1$ ならば, いつも $y(x, \xi) \notin M_2$ とする. このとき $f(y)$ を M_2 に台を持つ滑らかな函数とすれば,

$$C_0^\infty(M_1) \ni u \mapsto f F_a^\chi u \in C_0^\infty(M_2)$$

は位数 $-\infty$ の作用素である.

系 3.2.26. 上の χ が斉次でパラメーター $t \in [0, 1]$ に従属していて, $t = 0$ のとき χ は恒等写像とする. もし $\overline{M_1} \cap \overline{M_2} = \text{空集合}$ ならば, 十分小さい t に対して

$$C_0^\infty(M_1) \ni u \mapsto f F_a^\chi u \in C_0^\infty(M_2)$$

は位数 $-\infty$ の作用素である.

C を臨界集合とすると

$$\{(x, \theta); (y, x, \theta) \in C\} \rightarrow \varphi'_x \in T^*X$$

の像を φ に付随したラグランジアン錐とよぶ.

Hörmander は, F の特異性はそのラグランジアン錐で決まることを示した. すなはち φ_1 と φ_2 とが同じラグランジアン錐を持てば, F_{φ_1} と F_{φ_2} とは適当なシンボルの変換のもとで位数 $-\infty$ の作用素の違いがあるだけである. 系として φ を適当に取り替えて (位数 $-\infty$ の作用素の差を省いて), $N = n_1$ に出ることが分かる. ここはフーリエ積分作用素の理論の大変面白い部分であるが, 吾々は彼の方法は使はないので省略する.

3.2.5

$K \Subset Y$ があってシンボル a の台が $K \times X \times \mathbb{R}^N$ に含まれて居るとき a は Y にコンパクトな台を持つと呼ぶことにする. シンボル a が Y にコンパクトな台を持つとすると F_a の値域は $C_0^\infty(Y)$ になる. このようなフーリエ積分作用素の合成;

$$(3.2.27) \quad C_0^\infty(X) \xrightarrow{F_a} C_0^\infty(Y) \xrightarrow{F_b} C^\infty(W)$$

を考へる. この合成もフーリエ積分作用素である.

$$(3.2.28) \quad F_b \circ F_a u(w) = c_\psi c_\varphi \int e^{i(\psi(w, y, \sigma) + \varphi(y, x, \theta))} b(w, y, \sigma) \\ \times a(y, x, \theta) u(x) dx dy d\theta d\sigma$$

となるが, その相関数について注意が必要である. $\tau = (y, \sigma, \theta)$ と書いて相関数は

$$r(w, x, \tau) = \psi(w, y, \sigma) + \varphi(y, x, \theta)$$

である. しかしこのままでは相関数の定義の2つ目の条件

$$r(w, x, t\tau) = tr(w, x, \tau)$$

が満たされない. そこで座標変換

$$(3.2.29) \quad y = \frac{\rho}{(|\sigma|^2 + |\theta|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

で変数 ρ を導入して, 改めて $\tau = (\rho, \sigma, \theta)$ と置く. この変数では

$$r(w, x, t\tau) = tr(w, x, \tau)$$

が満たされる. 相関数の定義の他の条件が満たされるのもチェック出来る. このときのシンボルは

$$c(w, x, \rho) = b(w, (|\sigma|^2 + |\theta|^2)^{-\frac{1}{2}}\rho, \sigma)a((|\sigma|^2 + |\theta|^2)^{-\frac{1}{2}}\rho, x, \theta)$$

である. 実際の計算では ρ を導入せず, y のままで計算した方が簡単な場合が多い. このような場合, y を位数 0 の相変数とよぶことにする.

擬微分作用素の合成を考える. シンボル $a(y, \xi)$ はコンパクトな台を持つとする. $c = (2\pi)^{-n}$ として

$$(3.2.30) \quad F_1 u(y) = c \int e^{i\langle y-x, \xi \rangle} a(y, \xi) u(x) dx d\xi,$$

$$(3.2.31) \quad F_2 v(w) = c \int e^{i\langle w-y, \theta \rangle} b(w, \theta) v(y) dy d\theta$$

とする.

$$\begin{aligned} F_2 \circ F_1 u(w) &= c \int e^{i\langle w-y, \theta \rangle} b(w, \theta) F_1 u(y) dy d\theta \\ &= c^2 \int e^{i(\langle w-y, \theta \rangle + \langle y-x, \xi \rangle)} b(w, \theta) a(y, \xi) u(x) dx dy d\theta d\xi \\ &\quad (\text{変数 } \theta \text{ を変数 } \rho = \theta - \xi \text{ に変換する}) \\ &= c^2 \int e^{i\langle w-y, \xi + \rho \rangle + \langle y-x, \xi \rangle} b(w, \xi + \rho) a(y, \xi) u(x) dx dy d\rho d\xi \\ &= c \int e^{i\langle w-x, \xi \rangle} \left(c \int e^{i\langle w-y, \rho \rangle} b(w, \xi + \rho) \right. \\ &\quad \left. \times a(y, \xi) dy d\rho \right) u(x) dx d\xi. \end{aligned}$$

よって合成したものは擬微分作用素で, そのシンボルは

$$(3.2.32) \quad c(w, \xi) = c \int e^{i\langle w-y, \rho \rangle} b(w, \xi + \rho) a(y, \xi) dy d\rho$$

となる.

$$(3.2.33) \quad c(w, \xi) = b(w, \xi + D_y) a(y, \xi)|_{y=w}$$

と書けることに注意する.

3.2.6

次にシンボル $a(y, x, \theta)$ が与へられたとき,

$$\begin{aligned} Fu(y) &= c_\phi \int e^{i\phi(y, x, \theta)} a(y, x, \theta) u(x) dx d\theta \\ (3.2.34) \quad &= c_\phi \int e^{i\phi(y, x, \theta)} b(y, \theta) u(x) dx d\theta \end{aligned}$$

となるシンボル $b(y, \theta)$ を構成する.

(I) 擬微分作用素の場合

$$Fu(y) = c \int e^{i\langle y-x, \theta \rangle} a(y, x, \theta) u(x) dx d\theta$$

である. $a(y, x, \theta)$ を x の函数として y を中心とするテーラー展開して

$$a(y, x, \theta) = \sum (-1)^l \frac{1}{l!} a_{j_1 \dots j_l}(y, \theta) (y^{j_1} - x^{j_1}) \dots (y^{j_l} - x^{j_l})$$

と書く.

$$a_{j_1 \dots j_l}(y, \theta) = \left(\frac{\partial^l a(y, x, \theta)}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_l}} \right)_{x=y}$$

である.

$$(3.2.35) \quad \frac{\partial^l e^{i\langle y-x, \theta \rangle}}{\partial \theta_{j_1} \dots \partial \theta_{j_l}} = i^l e^{i\langle y-x, \theta \rangle} (y^{j_1} - x^{j_1}) \dots (y^{j_l} - x^{j_l})$$

であるから

$$\begin{aligned} Fu(y) &= c \int \sum \frac{1}{i^l} \frac{\partial^l e^{i\langle y-x, \theta \rangle}}{\partial \theta_{j_1} \dots \partial \theta_{j_l}} (-1)^l \frac{1}{l!} a_{j_1 \dots j_l}(y, \theta) u(x) dx d\theta \\ &\quad (\text{部分積分により}) \\ &= c \int e^{i\langle y-x, \theta \rangle} \sum \frac{1}{i^l l!} \frac{\partial^l a_{j_1 \dots j_l}(y, \theta)}{\partial \theta_{j_1} \dots \partial \theta_{j_l}} u(x) dx d\theta \\ &= c \int e^{i\langle y-x, \theta \rangle} \sum \frac{1}{i^l l!} \frac{\partial^{2l} a(y, x, \theta)}{\partial \theta_{j_1} \dots \partial \theta_{j_l} \partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_l}} \Big|_{x=y} u(x) dx d\theta. \end{aligned}$$

よってこの場合には

$$b(y, \theta) = \sum \frac{1}{i^l l!} \frac{\partial^{2l} a(y, x, \theta)}{\partial \theta_{j_1} \dots \partial \theta_{j_l} \partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_l}} \Big|_{x=y}$$

と置けばよい.

$$(3.2.36) \quad \square_{(\theta, x)} = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

と置くと,

$$(3.2.37) \quad b(y, \theta) = \sum \frac{1}{i^l l!} \square^l a(y, x, \theta) \Big|_{x=y}$$

と書ける.

(II) 例 3.2.17 に導入した $\phi(y, x, \theta) = S(y, \theta) - \langle x, \theta \rangle$ と云う形の場合.

$$(3.2.38) \quad Fu(y) = c \int e^{i\phi(y, x, \theta)} a(y, x, \theta) u(x) dx d\theta$$

である. 函数 $F(y, \theta)$ に対して

$$\frac{\partial F(y, \theta)}{\partial \theta_j} = F'_\theta(y, \theta)^j$$

と略記する. $a(y, x, \theta)$ を x に関して $S'_\theta(y, \theta)$ を中心にして展開すれば

$$(3.2.39) \quad a(y, x, \theta) = \sum_{j_1, \dots, j_l} \frac{(-1)^l}{l!} a_{j_1, \dots, j_l}(y, S'_\theta(y, \theta), \theta) \\ \times (S'_\theta(y, \theta)^{j_1} - x^{j_1}) \dots (S'_\theta(y, \theta)^{j_l} - x^{j_l})$$

である. ここで

$$S'_\theta(y, \theta)^j - x^j = \frac{\partial \phi(y, x, \theta)}{\partial \theta_j}$$

に注意する. この場合上の (3.2.35) に相当する式が複雑になる. $y - x$ は θ に独立であるが, $S'_\theta(y, \theta) - x$ は θ に依るからである.

$J = (j_1, \dots, j_k)$ に対して

$$(S' - x)^J = (S'_\theta(y, \theta)^{j_1} - x^{j_1}) \dots (S'_\theta(y, \theta)^{j_k} - x^{j_k})$$

と書く. このとき

$$\frac{\partial^{|J|}}{\partial \theta_J} = \frac{\partial^{|J|}}{\partial \theta_{j_1} \dots \partial \theta_{j_k}}$$

として

$$e^{i\phi(y,x,\theta)}(S' - x)^J = \sum_{J'} A_{J'}^J(y, \theta) \frac{\partial^{|J'|} e^{i\phi(y,x,\theta)}}{\partial \theta_{J'}}, \quad |J'| \leq |J|$$

となる $A_{J'}^J$ を求めれば (I) の場合と同じ計算が出来る.

例えば

$$e^{i\phi(y,x,\theta)}(S' - x)^{(j_1 j_2)} = i^{-2} \frac{\partial^2 e^{i\phi}}{\partial \theta_{j_1} \partial \theta_{j_2}} + i \frac{\partial^2 S(y, \theta)}{\partial \theta_{j_1} \partial \theta_{j_2}} e^{i\phi}$$

だから $J = \{j_1, j_2\}$ のときは,

$$A_{(j_1, j_2)}^J = i^{-2}, \quad A_{\{\emptyset\}}^J = i \frac{\partial^2 S(y, \theta)}{\partial \theta_{j_1} \partial \theta_{j_2}},$$

その他の場合 $A_{J'}^J = 0$ である. 一般の場合を知るために, 次の記号の準備をする. p 個の自然数の順序のついた組 $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ に対し, $i_1 < \dots < i_p$ のときに I は自然の順序に並べられて居ると云うことにする.

定義 3.2.40 (許容分解). p 個の自然数の順序のついた組 $I = (i_1, \dots, i_p)$ の許容分解 $J = (J_0, J_1, \dots, J_q)$ とは, 次を満たすものである.

- (i) I は互いに素な (集合としての) 分解 $I = J_0 \cup \dots \cup J_q$ を持つ.
- (ii) J_j は自然の順に並べられて居る.
- (iii) $\iota(J_j)$ で J_j に含まれる数のうち最小の数を表すとき $\iota(J_1) < \iota(J_2) < \dots < \iota(J_q)$.
- (iv) $q \geq 1$ のときには $|J_1|, \dots, |J_q| \geq 2$ かつ $|J_0| \geq 0$, ($J_0 = \{\emptyset\}$ でもよく, $q = 0$ でもよい).

I の許容分解全体の集合を $\tilde{I}$ と表す. $I = \{1\}$ ならば $\tilde{I} = \{J\}$, $J = J_0 = (1)$. $I = \{1, 2\}$ ならば $\tilde{I}$ は 2 つの分解 J^1, J^2 の集合である. ここで J^1 については $q = 0$ であり, $J_0^1 = \{1, 2\}$. J^2 については $q = 1$ であり $J_0^2 = \{\emptyset\}$, $J_1^2 = \{1, 2\}$. $I = \{1, 2, 3\}$ ならば, $\tilde{I} = (J^0, J^1, J^2, J^3, J^4)$. J^0 については $q = 0$ で

$J_0^0 = \{1, 2, 3\}$. J^1, J^2, J^3, J^4 については $q = 1$ であり, $J^1 = (\{1\}, \{2, 3\})$, $J^2 = (\{2\}, \{1, 3\})$, $J^3 = (\{3\}, \{1, 2\})$, $J^4 = (\{\emptyset\}, \{1, 2, 3\})$ である.

I に含まれる成分の個数 p についての帰納法により次が示される.

命題 3.2.41. $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ に対して

$$e^{i\phi(y, x, \theta)} (S' - x)^I = \sum_{J \in \tilde{I}} \left(\frac{1}{i}\right)^{q+|I|} S^{J_1} \dots S^{J_q} \partial_\theta^{J_0} e^{i\phi(y, x, \theta)}$$

が成り立つ. ここで $J = (j_1, \dots, j_k)$ に対して

$$\partial_\theta^J = \frac{\partial^k}{\partial \theta_{j_1} \dots \partial \theta_{j_k}}, \quad S^J = \partial_\theta^J S(y, \theta)$$

とする.

この補題により $I = \{i_1, \dots, i_l\}$ とし, その許容分解を $J = (J_0, \dots, J_q)$ とすれば

$$\begin{aligned} & e^{i\phi(y, x, \theta)} a(y, x, \theta) \\ &= \sum_{|I|=l} \sum_{J \in \tilde{I}} \frac{(-1)^l}{l!} \left(\frac{1}{i}\right)^{q+l} a_{i_1, \dots, i_l}(y, S'_\theta(y, \theta), \theta) S^{J_1} \dots S^{J_q} \partial_\theta^{J_0} e^{i\phi(y, x, \theta)} \end{aligned}$$

となる. よって

$$\begin{aligned} Fu(y) &= c_\phi \int e^{i\phi(y, x, \theta)} a(y, x, \theta) u(x) dx d\theta \\ &= c_\phi \sum_{|I|=l} \sum_{J \in \tilde{I}} \left(\frac{1}{i}\right)^{q+l} \frac{(-1)^l}{l!} \int a_{i_1, \dots, i_l}(y, S'_\theta(y, \theta), \theta) S^{J_1} \dots S^{J_q} \\ &\quad \times \partial_\theta^{J_0} e^{i\phi(y, x, \theta)} u(x) dx d\theta \end{aligned}$$

(部分積分により)

$$\begin{aligned} &= c_\phi \int e^{i\phi(y, x, \theta)} u(x) \sum_{|I|=l} \sum_{J \in \tilde{I}} \frac{(-1)^{l+|J_0|}}{l!} \left(\frac{1}{i}\right)^{q+l} \\ &\quad \times \partial_\theta^{J_0} (S^{J_1} \dots S^{J_q} a_{i_1, \dots, i_l}(y, S'_\theta(y, \theta), \theta)) dx d\theta \end{aligned}$$

従って, (3.2.39) で与へられた $a(y, x, \theta)$ に対し, (3.2.34) の $b(y, \theta)$ は

$$(3.2.42) \quad b(y, \theta) = \sum_{|I|=l} \sum_{J \in \tilde{I}} \frac{(-1)^{l+|J_0|}}{l!} \left(\frac{1}{i}\right)^{q+l} \\ \times \partial_{\theta}^{J_0} (S^{J_1} \dots S^{J_q} a_{i_1, \dots, i_l}(y, S'_{\theta}(y, \theta), \theta))$$

である. 従って

$$(3.2.43) \quad b(y, \theta) = a(y, S'_{\theta}(y, \theta), \theta) + b_R(y, \theta), \quad b_R \text{の次数} < a \text{の次数}.$$

が成立して居る.

3.3 局所ユニタリーフーリエ積分作用素

3.3.1

3.2.2 節の例 3.2.17 で定義した相函数を $\phi(y, x, \theta)$ とし, 3.2.2 節の例 3.2.17 の記号を使う. $\phi(y, x, \theta)$ は実数値である. $a(y, \theta)$ を Γ の上で定義された Y についてコンパクトな台を持つシンボルとする. $u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ に対し $F_a : C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^{\infty}(Y)$ を

$$(3.3.1) \quad \phi(y, x, \theta) = S(y, \theta) - x \cdot \theta,$$

$$(3.3.2) \quad F_a u(y) = c_n \int e^{i\phi(y, x, \theta)} a(y, \theta) u(x) dx d\theta$$

とするとき, Y の基点 y_* に関し, F_a が局所的にユニタリーであると云うことを次のように定義する: y -空間の函数 $v(y)$, ($y \in Y$), から x -空間の函数への写像 F_a^* を

$$(3.3.3) \quad F_a^* v(x) = c_n \int e^{-i\phi(y, x, \xi)} \overline{a(y, \xi)} v(y) dy d\xi$$

で定義する. 定義により

$$\langle v, F_a u \rangle = \langle F_a^* v, u \rangle, \quad (v \in C_0^{\infty}(Y), u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n))$$

である。吾々の条件は: y_* の充分小さい近傍 Y_1 をとれば, スムースな作用素を法として

$$F_a \circ F_a^* v = v, \quad (v \in C_0^\infty(Y_1))$$

である。

F_a が局所的にユニタリーになるために $a(y, \theta)$ が満たすべき条件を求めよう。先ず準備として, χ_t の生成函数 $S(y, \theta)$ が Γ で定義されて居るとして F_a を (3.3.1), (3.3.2) で定義したとき, その臨界集合は $\{(y, x, \theta); x = S'_\theta(y, \theta)\}$. Γ の θ -方向への射影の外の θ は F_a の特異性とは無関係である。従って, F_a をスムース作用素を法としておきかえて, $\phi(y, x, \theta)$ は $Y \times \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1}$ の上で定義されて居るとしてよいことに注意しよう。 $f_\varepsilon(x)$ を cut-off 函数として $f_\varepsilon(x) = f(\varepsilon x)$ とおけば,

$$\begin{aligned} F_a \circ f_\varepsilon \circ F_a^* v(y) &= c_n \int e^{i\phi(y, x, \theta)} a(y, \theta) f(\varepsilon x) F_a^* v(x) dx d\theta \\ &= c_n^2 \int e^{i(\phi(y, x, \theta) - \phi(w, x, \xi))} a(y, \theta) f(\varepsilon x) \\ &\quad \times \overline{a(w, \xi)} v(w) dx d\xi d\theta. \end{aligned}$$

$\phi(y, x, \theta) - \phi(w, x, \xi) = S(y, \theta) - S(w, \xi) - \langle \theta - \xi, x \rangle$ であるから

$$\begin{aligned} F_a \circ f_\varepsilon \circ F_a^* v(y) &= c_n \int e^{iS(y, \theta)} a(y, \theta) I_\varepsilon(w, \theta) v(w) dw d\theta, \\ I_\varepsilon(w, \theta) &= c_n \int e^{-i\langle \theta - \xi, x \rangle} f(\varepsilon x) e^{-iS(w, \xi)} \overline{a(w, \xi)} dx d\xi \end{aligned}$$

である。変数 ξ を $\rho = \xi - \theta$ に変換してフーリエ変換の式を使へば

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(w, \theta) = e^{-iS(w, \theta)} \overline{a(w, \theta)}$$

である。従って

$$F_a \circ F_a^* v(y) = c_n \int e^{i(S(y, \xi) - S(w, \xi))} a(y, \xi) \overline{a(w, \xi)} v(w) dw d\xi$$

を得る。 $\tau = \tau(y, w, \xi)$ を

$$(3.3.4) \quad S(y, \xi) - S(w, \xi) = \langle y - w, \tau \rangle$$

により定義する. これを ξ について解いて $\xi = \xi(y, w, \tau)$. 変数 ξ を τ に変換する.

$$(3.3.5) \quad F_a \circ F_a^* v(y) = c_n \int e^{i\langle y-w, \tau \rangle} a(y, \xi(y, w, \tau)) \overline{a(w, \xi(y, w, \tau))} \det \frac{\partial \xi(y, w, \tau)}{\partial \tau} v(w) dw d\tau$$

となる. 従って $F_a \circ F_a^*$ は

$$(3.3.6) \quad b(y, w, \tau) = a(y, \xi(y, w, \tau)) \overline{a(w, \xi(y, w, \tau))} \det \frac{\partial \xi(y, w, \tau)}{\partial \tau}$$

をシンボルに持つ擬微分作用素となる. よって

$$(3.3.7) \quad m(y, \tau; a) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{i^l l!} \left\{ \square_{(w, \tau)}^l \left(a(y, \xi(y, w, \tau)) \overline{a(w, \xi(y, w, \tau))} \det \frac{\partial \xi(y, w, \tau)}{\partial \tau} \right) \right\}_{w=y}$$

とおけば, $F_a \circ F_a^*$ は 3.2.6 節 (I) により $m(y, \tau; a)$ をシンボルにもつ擬微分作用素になる. 従って次の結論に達する.

命題 3.3.8. $Y \supset \overline{Y_1} \supset Y_1 \supset \overline{Y_2}$, Y_1, Y_2 は開集合とする. Y_1 上 $f(y) = 1$ で台が Y に含まれるとする. χ が恒等写像に十分近いときには, すべての $v \in C_0^\infty(Y_2)$ に対し

$$(3.3.9) \quad F_a \circ f \circ F_a^* v \equiv v \pmod{\text{位数} - \infty \text{ の作用素}}$$

となるには

$$(3.3.10) \quad m(y, \tau; a) \equiv 1 \pmod{\text{位数} - \infty \text{ のシンボル}} \quad (y \in Y_1)$$

が十分条件である.

第4章 CR構造の同値性

以下基点の十分小さい錐近傍 $Y \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ の上のコンパクト台のなめらかな函数に作用する作用素をいつも考へる. 作用素やシンボルの間の等式はいつも位数 $-\infty$ を法として考へる.

4.1 CR作用素の変換則

4.1.1

モデルケース, 及び一般の場合の CR ベクトル

$$P^\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} - \frac{iz^\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad Q^\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} - \frac{ih^\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial x^0}$$

が $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ の原点の充分小さい近傍 U の上で定義されて居るとする. 更に h^α は z^α に充分近いとする. 1.2.4 節にある命題により, 局所的には, このような Q^α を与へることによって一般性は失わない. 2.1.1 節の最初に述べた Γ_1, Γ_2 とシンプレクティック写像 $\chi = \chi_t : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ を t が充分小さいときを使う. 従つて等式

$$(4.1.1) \quad q^\alpha(\chi_t(x, \xi), t) = r_\beta^\alpha(x, \xi, t) p^\beta(x, \xi)$$

が Γ_1 上で成立して居る. 簡単のため t を省略することが多い.

$a = a_t$ を未知のシンボル族とし, F_a を χ_t によって導入される a_t をシンボルとするフーリエ積分作用素 (3.2.2 節の例 3.2.17) とする. 従つて $S(y, \theta)$ を χ_t の生成函数とし

$$\phi(y, x, \theta) = S(y, \theta) - \langle x, \theta \rangle$$

とするとき

$$(4.1.2) \quad F_a u(y) = c \int e^{i\phi(y,x,\theta)} a(y,\theta) u(x) dx d\theta$$

である. ここで u は基点の充分小さい近傍 $Y_1 \subset Y$ に台を持つスムーズな函数である. スムースな作用素を法として次の問題を考へる.

問題 適当な擬微分作用素の行列 B_β^α が存在して (スムーズな作用素を法として)

$$(4.1.3) \quad F_a \circ B_\beta^\alpha \circ P^\beta = Q^\alpha \circ F_a$$

と云う式が充分小さい Y_1 の上で成り立つような, 局所的にユニタリーなフーリエ積分作用素 F_a を見つけよ.

このような F_a は, 少し正確ではないが, M の CR 作用素をモデルケースの CR 作用素に移すと云へる. 従って, F_a によって一般の場合がモデルケースに結びつくことになる. F_a が局所的にユニタリーであるための条件式 3.3.1 節 (3.3.9) と等式 (4.1.2) とから, シンボル a が満たすべき方程式を見つける.

4.1.2

w 変数を x 変数のコピーとする. つまりコピー写像 $w \mapsto x, x \mapsto w$ が決まって居るとする. w 変数は計算のとき便宜上導入される独立変数であるが, 計算が終わったあと, 必要があればコピー写像を使って x 変数でおきかえられるのである.

B_β^α を x 空間から w 空間へのシンボル $b_\beta^\alpha(w, \theta)$ によって決まる未知の擬微分作用素とする.

$$(4.1.4) \quad (B_\beta^\alpha u)(w) = c \int e^{i\langle w-x, \theta \rangle} b_\beta^\alpha(w, \theta) u(x) dx d\theta.$$

3.2.5 節 (3.2.33) により $B_\beta^\alpha \circ P^\beta$ は x 空間から w 空間への擬微分作用素

$$\begin{aligned} B_\beta^\alpha \circ P^\beta u(w) &= c \int e^{i\langle w-x, \xi \rangle} c^\alpha(w, \xi) u(x) dx d\xi \\ c^\alpha(w, \xi) &= (b_\beta^\alpha(w, \xi + D_x) p^\beta(x, \xi))|_{x=w} \end{aligned}$$

と書ける. さらに

$$b_{\beta}^{\alpha}(w, \xi + D_x) = b_{\beta}^{\alpha}(w, \xi) + \frac{\partial b_{\beta}^{\alpha}(w, \xi)}{\partial \xi_j} D_{x_j} + (D_x \text{ の 2 次以上の項}).$$

$$p^{\beta}(x, \xi) = i(\bar{\zeta}_{\beta} - i \frac{z^{\beta}}{2} \xi_0), \quad \frac{\partial z^{\beta}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \zeta_{\beta}}$$

(cf. 1.2.5 節 (1.2.34)) であるから

$$b_{\beta}^{\alpha}(w, \xi + D_x) p^{\beta}(x, \xi) = b_{\beta}^{\alpha}(w, \xi) p^{\beta}(x, \xi) + \frac{\xi_0}{2i} \frac{\partial b_{\beta}^{\alpha}(w, \xi)}{\partial \zeta_{\beta}}.$$

よって上の c^{α} の式により

$$(4.1.5) \quad c^{\alpha}(w, \xi) = b_{\beta}^{\alpha}(w, \xi) p^{\beta}(w, \xi) + \frac{\xi_0}{2i} \frac{\partial b_{\beta}^{\alpha}(w, \xi)}{\partial \zeta_{\beta}}.$$

従って

$$\begin{aligned} F_a \circ B_{\beta}^{\alpha} \circ P^{\beta} u(y) &= c^2 \int e^{i(\phi(y, w, \theta) + \langle w - x, \xi \rangle)} c^{\alpha}(w, \xi) a(y, \theta) u(x) dx dw d\xi d\theta \\ &= c^2 \int e^{i\phi(y, x, \xi)} \left(\int e^{i(S(y, \theta) - S(y, \xi) + \langle w, \xi - \theta \rangle)} \right. \\ &\quad \left. \times c^{\alpha}(w, \xi) a(y, \theta) dw d\theta \right) u(x) dx d\xi \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} \phi(y, w, \theta) + \langle w - x, \xi \rangle &= \phi(y, x, \xi) + (\phi(y, w, \theta) - \phi(y, x, \xi) + \langle w - x, \xi \rangle) \\ &= \phi(y, x, \xi) + S(y, \theta) - S(y, \xi) + \langle w, \xi - \theta \rangle \end{aligned}$$

と云う変形を使った. 上の積分で変数 θ を $\lambda = \theta - \xi$ でおきかえれば

$$(4.1.6) \quad F_a \circ B_{\beta}^{\alpha} \circ P^{\beta} u(y) = c_n \int e^{i\phi(y, x, \xi)} a_P^{\alpha}(y, \xi) u(x) dx d\xi,$$

$$(4.1.7) \quad a_P^{\alpha} = c \int e^{i(S(y, \xi + \lambda) - S(y, \xi) - \langle w, \lambda \rangle)} c^{\alpha}(w, \xi) a(y, \xi + \lambda) dw d\lambda$$

となる.

$$(4.1.8) \quad S(y, \xi + \lambda) - S(y, \xi) = \sigma(y, \xi, \lambda) \cdot \lambda$$

として $\sigma(y, \xi, \lambda) = (\dots, \sigma^j(y, \xi, \lambda), \dots)$ を導入して

$$(4.1.9) \quad v = w - \sigma(y, \xi, \lambda)$$

とすれば

$$(4.1.10) \quad a_P^\alpha(y, \xi) = c \int e^{-i\langle v, \lambda \rangle} c^\alpha(v + \sigma(y, \xi, \lambda), \xi) a(y, \xi + \lambda) dv d\lambda$$

と書ける.

次に $Q^\alpha \circ F_a u(y)$ を計算する.

$$\begin{aligned} Q^\alpha \circ F_a u(y) &= c Q_y^\alpha \int e^{i\phi(y, x, \xi)} a(y, \xi) u(x) dx d\xi \\ &= c \int e^{i\phi(y, x, \xi)} (Q_y^\alpha a(y, \xi) + i a(y, \xi) Q_y^\alpha \phi(y, x, \xi)) u(x) dx d\xi \\ &= c \int e^{i\phi(y, x, \xi)} (Q_y^\alpha a(y, \xi) + i a(y, \xi) Q_y^\alpha S(y, \xi)) u(x) dx d\xi \end{aligned}$$

となる. 一方 1.2.5 節の (1.2.39), (4.1.1) により

$$Q_y^\alpha S(y, \xi) = \frac{1}{i} q^\alpha(y, S'_y(y, \xi)) = \frac{1}{i} r_\beta^\alpha(S'_\xi(y, \xi), \xi) p^\beta(S'_\xi(y, \xi), \xi)$$

であるから

$$(4.1.11) \quad Q^\alpha \circ F_a u(y) = c \int e^{i\phi(y, x, \xi)} a_Q^\alpha(y, \xi) u(x) dx,$$

$$(4.1.12) \quad a_Q^\alpha(y, \xi) = Q_y^\alpha a(y, \xi) + a(y, \xi) r_\beta^\alpha(S'_\xi(y, \xi), \xi) p^\beta(S'_\xi(y, \xi), \xi)$$

である. 従って (4.1.3) が成立するための条件は

$$(4.1.13) \quad a_P^\alpha(y, \xi) = a_Q^\alpha(y, \xi)$$

となる.

結論として, 吾々の問題は (4.1.5), (4.1.10), (4.1.11), (4.1.12), (4.1.13) と 3.3.1 節の (3.3.7), (3.3.9), (3.3.10) とが成立するようなシンボル $a(y, \xi)$ と $b_\beta^\alpha(w, \xi)$ とを構成することである.

4.1.3

未知のシンボル $a(y, \theta)$ と $b_\beta^\alpha(w, \xi)$ とによって (4.1.10) と (4.1.5) とで決まる $a_P^\alpha(y, \theta)$ をさらに調べることにする.

補題 4.1.14. $f(v, \lambda)$ をシンボルとすれば

$$(4.1.15) \quad c \int e^{-i\langle v, \lambda \rangle} f(v, \lambda) dv d\lambda \\ = (f)_{v=\lambda=0} + \cdots + \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{i}\right)^m (\square^m f)_{v=\lambda=0} + \cdots, \\ \square = \sum \frac{\partial^2}{\partial \lambda_j \partial v^j}$$

この補題は, $f(v, \lambda)$ を $\lambda = 0$ を基点とする, λ に関するテラー級数で展開して計算すれば, すぐに証明が出来る. 上の補題を使って, a_P^α を調べるために (cf. (4.1.5))

$$(4.1.16) \quad f^\alpha(y, \xi; v, \lambda) = c^\alpha(v + \sigma(y, \xi, \lambda), \xi) a(y, \xi + \lambda)$$

として $(f)_{v=\lambda=0}$ と $(\square^m f)_{v=\lambda=0}$ とを計算する. そのための準備として

$$S^{k_1 \dots k_l} = \frac{\partial^l S(y, \xi)}{\partial \xi_{k_1} \dots \partial \xi_{k_l}}$$

とおく. (4.1.8) により

$$(4.1.17) \quad \sigma^j(y, \xi, \lambda) \\ = S^j(y, \xi) + \cdots + \frac{1}{(l+1)!} S^{j \ k_1 \dots k_l}(y, \xi) \lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_l} + \cdots$$

である. $p \geq 1$ に対して

$$(4.1.18) \quad S^{\{j_1 \dots j_p, \beta\}}(y, \xi, \lambda) \frac{\partial z^\beta(\sigma(y, \xi, \lambda))}{\partial \lambda_{j_1} \dots \partial \lambda_{j_p}} \\ = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(q+1) \dots (q+p)}{(p+q+1)!} S^{\beta j_1 \dots j_p \ k_1 \dots k_q}(y, \xi) \lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_q}$$

と定義する.

補題 4.1.19. $\sigma = \sigma(y, \xi, \lambda)$ として (4.1.16) の f^α について, $m \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{i}\right)^m \square_{(v, \lambda)}^m f^\alpha(y, \xi; v, \lambda) \\ &= G_{\{m\}\beta}^\alpha(y, \xi; v, \lambda) p^\beta(v + \sigma, \xi) + \frac{\xi_0}{2i} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_\beta(\xi)} G_{\{m\}\beta}^\alpha(y, \xi; v, \lambda) \right. \\ & \quad \left. + R_{\{m-1\}}^\alpha(y, \xi; v, \lambda) - R_{\{m\}}^\alpha(y, \xi; v, \lambda) + T_{\{m\}}^\alpha(y, \xi; v, \lambda) \right), \end{aligned}$$

$$(4.1.20) \quad G_{\{m\}\beta}^\alpha = \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{i}\right)^m \square_{(v, \lambda)}^m (a(y, \xi + \lambda) b_\beta^\alpha(v + \sigma(y, \xi, \lambda), \xi)),$$

$$(4.1.21) \quad R_{\{m\}}^\alpha = \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{i}\right)^m \square_{(v, \lambda)}^m R_{\{0\}}^\alpha,$$

$$(4.1.22) \quad R_{\{-1\}}^\alpha = 0,$$

$$(4.1.23) \quad R_{\{0\}}^\alpha = \frac{\partial a(y, \xi + \lambda)}{\partial \zeta_\beta(\xi)} b_\beta^\alpha(v + \sigma, \xi) \\ + a(y, \xi + \lambda) \left(\frac{\partial b_\beta^\alpha(w, \xi)}{\partial w^j} \right)_{w=v+\sigma} \frac{\partial \sigma^j(y, \xi, \lambda)}{\partial \zeta_\beta(\lambda)},$$

$$(4.1.24) \quad T_{\{m\}}^\alpha = \sum_{p=1}^m \frac{1}{p!} \left(\frac{1}{i}\right)^{p-1} \frac{\partial^p G_{\{m-p\}\beta}^\alpha}{\partial v^{j_1} \dots \partial v^{j_p}} S^{\{j_1 \dots j_p \beta\}} \text{ for } m \geq 1,$$

$$(4.1.25) \quad T_{\{0\}}^\alpha = 0.$$

上の補題を証明するには, $l \geq 1$ のとき

$$(4.1.26) \quad K_{\{l\}}^\alpha = \frac{1}{l} \left(\frac{\partial G_{\{l-1\}\beta}^\alpha}{\partial \zeta_\beta(\lambda)} + \frac{\partial G_{\{l-1\}\beta}^\alpha}{\partial v^j} \frac{\partial z^\beta(\sigma)}{\partial \lambda_j} \right)$$

とおき, 帰納法の假定として補題と,

$$(4.1.27) \quad K_{\{l\}}^\alpha + \frac{1}{li} \square_{\{l-1\}}^\alpha = \frac{1}{l} R_{\{l-1\}}^\alpha + T_{\{l\}}^\alpha$$

を採用すればよい.

上の補題, (4.1.10) と (4.1.15) とにより $a_P(y, \xi)$ について次の等式が成立して居る.

$$(4.1.28) \quad a_P^\alpha(y, \xi) = L^\alpha(y, \xi) \xi_0 + G_\beta^\alpha(y, \xi) p^\beta(S'_\xi(y, \xi), \xi),$$

ここで $G_{\{m\}\beta}^\alpha$, $T_{\{m\}}^\alpha$ は (4.1.20), (4.1.24), (4.1.25) で定義され,

$$(4.1.29) \quad G_\beta^\alpha(y, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(G_{\{m\}\beta}^\alpha(y, \xi; v, \lambda) \right)_{v=\lambda=0},$$

$$(4.1.30) \quad T^\alpha(y, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} (T_{\{m\}}^\alpha)_{\lambda=v=0},$$

$$(4.1.31) \quad L^\alpha(y, \xi) = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial G_\beta^\alpha(y, \xi)}{\partial \zeta_\beta} + T^\alpha(y, \xi) \right).$$

従って吾々は次の結論に達した.

定理 4.1.32. (4.1.3) が成立するための充分条件は $a_P^\alpha(y, \xi)$ を (4.1.28)–(4.1.31) で定義し, $a_Q^\alpha(y, \xi)$ を (4.1.12) で定義したとき, 等式

$$(4.1.33) \quad a_P^\alpha(y, \xi) = a_Q^\alpha(y, \xi)$$

が成立することである.

4.2 シンボルの構成

4.2.1

未知の $a(y, \xi)$, $b_\beta^\alpha(y, \xi)$ を

$$\begin{aligned} a(y, \xi) &= a_{(0)}(y, \xi) + a_{(-1)}(y, \xi) + \cdots + a_{(-l)}(y, \xi) + \cdots, \\ b_\beta^\alpha(y, \xi) &= b_{\beta(0)}^\alpha(y, \xi) + b_{\beta(-1)}^\alpha(y, \xi) + \cdots + b_{\beta(-l)}^\alpha(y, \xi) + \cdots, \end{aligned}$$

$a_{(-l)}(y, \xi)$, $b_{\beta(-l)}^\alpha(y, \xi)$ は斉次 $(-l)$ として,

$$a_{(0)}, a_{(-1)}, \dots, a_{(-l)}, b_{\beta(0)}^\alpha, b_{\beta(-1)}^\alpha, \dots, b_{\beta(-l)}^\alpha$$

を l の帰納法で決めて行くことにする. 簡単のため $f(x, \xi)$ に対し,

$$(4.2.1) \quad \hat{f}(y, \xi) = f(S'_\xi(y, \xi), \xi)$$

とおく. 上の定理により $a_{(0)}(y, \xi)$ に対する方程式は

$$\begin{aligned} \widehat{b}_\beta^\alpha(y, \xi) a_{(0)}(y, \xi) \widehat{p}^\beta(y, \xi) + \frac{\xi_0}{2i} \frac{\partial \widehat{b}_\beta^\alpha(y, \xi) a_{(0)}(y, \xi)}{\partial \zeta_\beta(\xi)} \\ \equiv Q_y^\alpha a_{(0)}(y, \xi) + \widehat{r}_\beta^\alpha(y, \xi) a_{(0)}(y, \xi) \widehat{p}^\beta(y, \xi) \pmod{\text{次数} - 1} \end{aligned}$$

上の式で両辺の次数 0 の部分を比較すれば,

$$(4.2.2) \quad b_\beta^\alpha(x, \xi) = r_\beta^\alpha(x, \xi) + b_{\beta < -}^\alpha(x, \xi),$$

$b_{\beta < -}^\alpha(x, \xi)$ は次数 ≤ -1 の場合を考えるのがよいことがわかる. 従って

$$b_{\beta < -1}^\alpha(x, \xi) \equiv b_{\beta(-1)}^\alpha(x, \xi) \pmod{\text{次数} - 2},$$

$b_{\beta(-1)}^\alpha$ は斉次で次数 -1 とおけば吾々の方程式は $a_{(0)}(y, \xi)$ と $b_{\beta(-1)}^\alpha(x, \xi)$ をパラメーターに従属する未知のシンボルとして

$$\begin{aligned} (4.2.3) \quad Q_y^\alpha a_{(0)}(y, \xi) \\ = \widehat{b}_{\beta(-1)}^\alpha(y, \xi) a_{(0)}(y, \xi) \widehat{p}^\beta(y, \xi) + \frac{\xi_0}{2i} \frac{\partial \widehat{r}_\beta^\alpha(y, \xi) a_{(0)}(y, \xi)}{\partial \zeta_\beta(\xi)} \end{aligned}$$

である. この方程式を領域 $\{\xi_0 \neq 0\}$ の上で考察することにする.

$$(4.2.4) \quad f^\alpha(y, \xi) = \frac{\widehat{p}^\alpha(y, \xi)}{\xi_0} = i \frac{\bar{\zeta}_\alpha}{\xi_0} + \frac{1}{2} S'_{\zeta_\alpha}(y, \xi)$$

とすれば, 斉次次数 0 のシンボル $\varphi(y, \xi)$ は

$$(4.2.5) \quad \varphi(y, \xi) = \sum_{k, l \geq 0} \varphi_{(k, l)}(y, f, \bar{f})$$

$$(4.2.6) \quad \varphi_{(k, l)}(y, f, \bar{f}) = \varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_l}(y) f^{\alpha_1} \dots f^{\alpha_k} \bar{f}^{\beta_1} \dots \bar{f}^{\beta_l}$$

と書ける. 上の定義式により

$$(4.2.7) \quad \xi_0 \frac{\partial f^\alpha}{\partial \zeta_\beta} = 0, \quad \frac{1}{i} \xi_0 \frac{\partial \bar{f}^\alpha}{\partial \zeta_\beta} = -\delta_\alpha^\beta$$

$$(4.2.8) \quad Q^\alpha f^\beta = \frac{1}{2} Q_y^\alpha S'_{\zeta_\beta}(y, \xi), \quad Q^\alpha \bar{f}^\beta = \frac{1}{2} Q^\alpha S'_{\bar{\zeta}_\beta}(y, \xi)$$

である.

$$(4.2.9) \quad \frac{\xi_0}{2i} \frac{\partial \hat{r}_\beta^\alpha(y, \xi)}{\partial \xi_\beta(\xi)} = \hat{r}^\alpha(y, \xi)$$

とおけば方程式 (4.2.3) の $(0, 0)$ 型の部分は

$$(4.2.10) \quad A_\beta^\alpha a_{(0)\bar{\beta}} = B^{\alpha\sigma} a_{(0)\sigma} + C^\alpha a_{(0)(0,0)}$$

$$(4.2.11) \quad A_\beta^\alpha = (Q^\alpha \bar{f}^\beta)_{(0,0)} - \frac{1}{2} \hat{r}_\beta^\alpha(y, \xi)_{(0,0)}$$

$$(4.2.12) \quad B^{\alpha\sigma} = -(Q^\alpha f^\sigma)_{(0,0)}$$

$$(4.2.13) \quad C^\alpha = \left(\frac{\xi_0}{2i} \frac{\partial \hat{r}_\beta^\alpha}{\partial \xi_\beta} \right)_{(0,0)} - Q_y^\alpha$$

となる. $Q^\alpha \bar{f}^\beta$ は $P^\alpha \frac{1}{\xi_0} \bar{p}^\beta = \frac{1}{2} \delta_\beta^\alpha$ の小さい変形であり, $\hat{r}_\beta^\alpha(y, \xi)_{(0,0)}$ は δ_β^α の小さい変形であるから

$$(4.2.14) \quad \det A_\beta^\alpha \neq 0$$

としてよい. 方程式 (4.2.3) の $(0, 1)$ 型の部分は, 各 $\bar{\gamma}$ に対し, $a_{(0)(0,0)}, a_{(0)(1,0)}, a_{(0)(0,1)}$ を法として

$$(4.2.15) \quad 2A_\beta^\alpha a_{(0)\bar{\gamma}\bar{\beta}} \equiv B^{\alpha\beta} a_{(0)\bar{\gamma}\beta}$$

であり, $(1, 0)$ 型の部分は, 各 γ に対し,

$$(4.2.16) \quad A_\beta^\alpha a_{(0)\gamma\bar{\beta}} \equiv 2B^{\alpha\beta} a_{(0)\gamma\beta} + \left(b_{\gamma[0]}^\alpha(y, \xi) \right)_{(0,0)} a_{(0)(0,0)}$$

$$(4.2.17) \quad b_{\gamma[0]}^\alpha(y, \xi) = b_{\gamma(-1)}^\alpha(y, \xi) \xi_0$$

である. 方程式 (4.2.3) の (k, l) 型の部分は

$$(4.2.18) \quad \begin{aligned} & (l+1)A_\beta^\alpha a_{(0)\gamma_1 \dots \gamma_k \bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_l \bar{\beta}} \\ & \equiv (k+1)B^{\alpha\beta} a_{(0)\gamma_1 \dots \gamma_k \beta \bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_l} + C^\alpha a_{(0)\gamma_1 \dots \gamma_k \bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_l} \\ & \quad + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (b_{\gamma_j[0]}^\alpha)_{\gamma_1 \dots \gamma_j \dots \gamma_k \bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_l} a_{(0)(0,0)} \\ & \quad \text{mod } a_{(0)(k_1, l_1)}, (b_{\gamma[0]}^\alpha)_{(k_1-1, l_1)} \quad (k_1 + l_1 < k + l) \end{aligned}$$

である.

4.2.2

次に $a_{(0)}$ が方程式 3.3.1 節 (3.3.6), (3.3.7) の斉次数 0 の部分を満たすための条件を調べよう. 吾々の方程式は

$$a_{(0)}(y, \xi(y, y, \tau)) \overline{a_{(0)}(y, \xi(y, y, \tau))} \left(\det \frac{\partial \xi(y, y, \tau)}{\partial \tau} \right)_{(0)} = 1$$

である. ここで

$$\xi(y, y, \tau(y, y, \xi)) = \xi, \quad \tau(y, y, \xi) = S'_y(y, \xi).$$

従って吾々の方程式は

$$(4.2.19) \quad a_{(0)}(y, \xi) \overline{a_{(0)}(y, \xi)} = \det S''_{y, \xi}(y, \xi)$$

である. 一方 $S''_{y, \xi}(y, \xi)$ は単位行列の小さな変形であるから

$$(4.2.20) \quad \det S''_{y, \xi}(y, \xi) \neq 0$$

としてよい.

$$\begin{aligned} (a_{(0)} \overline{a_{(0)}})_{(0,0)} &= a_{(0)(0,0)} \overline{a_{(0)(0,0)}}, \\ (a_{(0)} \overline{a_{(0)}})_{(l,0)} &= a_{(0)(0,0)} \overline{a_{(0)(0,l)}} + a_{(0)(l,0)} \overline{a_{(0)(0,0)}} + \sum_{l_1 < l} a_{(0)(l_1,0)} \overline{a_{(0)(0,l-l_1)}}, \\ (a_{(0)} \overline{a_{(0)}})_{(0,l)} &= a_{(0)(0,0)} \overline{a_{(0)(l,0)}} + a_{(0)(0,l)} \overline{a_{(0)(0,0)}} + \sum_{l_1 < l} a_{(0)(0,l_1)} \overline{a_{(0)(l-l_1,0)}}, \end{aligned}$$

$k \geq 1, l \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned} (a_{(0)} \overline{a_{(0)}})_{(k,l)} &= a_{(0)(0,0)} \overline{a_{(0)(l,k)}} + \overline{a_{(0)(0,0)}} a_{(0)(k,l)} + a_{(k,0)} \overline{a_{(0)(l,0)}} \\ &\quad + a_{(0,l)} \overline{a_{(0)(0,k)}} \\ &\quad + \sum \left\{ a_{(0)(k_1, l_1)} \overline{a_{(0)(l_2, k_2)}}; k_1 + k_2 = k, l_1 + l_2 = l, \right. \\ &\quad \left. l_1, k_1, l_2, k_2 > 0 \right\} \end{aligned}$$

であるから,

$$(4.2.21) \quad \det S''_{y, \xi} = (\Delta S'')_{(0,0)} + \sum_{k, l \geq 0, (k,l) \neq (0,0)} (\Delta S'')_{(k,l)}$$

とおけば, 方程式 (4.2.19) は次のようになる.

定理 4.2.22. $a_{(0)}$ が (4.2.19) を満たすための必要にして充分な条件は:

$$(4.2.23) \quad a_{(0)(0,0)} \overline{a_{(0)(0,0)}} = (\triangle S'')_{(0,0)}.$$

$k \geq 1$ に対し, $a_{(0)(0,k)}$ と $a_{(0)(k,0)}$ とは k に関する帰納法で決まる次の関係式を満たさなければならない.

$$(4.2.24) \quad \overline{a_{(0)(0,0)} a_{(0)(k,0)}} + a_{(0)(0,0)} \overline{a_{(0)(0,k)}} \\ = (\triangle S'')_{(k,0)} - \sum_{1 \leq l < k} a_{(0)(l,0)} \overline{a_{(0)(0,k-l)}}.$$

$a_{(0)(k,l)}$, $k < l$, は任意で $a_{(0)(l,k)}$, $l > k$, は $l+k$ の帰納法で次の式によって決まる.

$$(4.2.25) \quad \overline{a_{(0)(0,0)} a_{(0)(k,l)}} + a_{(0)(0,0)} \overline{a_{(0)(l,k)}} \\ = (\triangle S'')_{(k,l)} - \sum \left\{ a_{(0)(k_1,l_1)} \overline{a_{(0)(l_2,k_2)}}; k_1 + k_2 = k, \right. \\ \left. l_1 + l_2 = l, (k_1, l_1) \neq (0,0), (k_2, l_2) \neq (0,0) \right\},$$

$k \geq 1$ のとき

$$(4.2.26) \quad \overline{a_{(0)(0,0)} a_{(0)(k,k)}} + a_{(0)(0,0)} \overline{a_{(0)(k,k)}} \\ = (\triangle S'')_{(k,k)} - \sum \left\{ a_{(0)(k_1,l_1)} \overline{a_{(0)(l_2,k_2)}}; k_1 + k_2 = k, \right. \\ \left. l_1 + l_2 = l, (k_1, l_1) \neq (0,0), (k_2, l_2) \neq (0,0) \right\}$$

以上をまとめると次のようになる.

定理 4.2.27. 定理 4.1.32 が成立し, F_a がユニタリーになるためには $a_{(0)}$ と $b_{\beta[0]}^\alpha$ とを以下に述べるようにえらばよい:

(0) $a_{(0)(0,0)}$ は (4.2.23) を満たすかぎり任意である.

(1) $a_{(0)\alpha}$ と $a_{(0)\bar{\alpha}}$ とは (4.2.10), (4.2.11), (4.2.12), (4.2.13) と (4.2.24) で $k=1$ とによって $a_{(0)(0,0)}$ から一意的にきまる.

(2) $a_{(0)(1,1)}$ は (4.2.26) で $k=1$ を満たすかぎり任意である. (4.2.15) と (4.2.24) で $k=2$ とにより $a_{(0)(2,0)}$ と $a_{(0)(0,2)}$ とが決まる. $(b_{\beta[0]}^\alpha)_{(0,0)}$ は (4.2.16) により決まる.

(3) 任意の $a_{(0)(1,2)}$ により $a_{(0)(0,3)}$ は (4.2.18) で $k=0, l=2$ により, $a_{(0)(3,0)}$ は (4.2.24) で $k=3, l=0$ により, $a_{(0)(2,1)}$ は (4.2.25) で $k=1, l=2$ によりきまる. $(b_{\bar{\gamma}[0]}^{\alpha})_{\bar{\sigma}}$ は (4.2.18) で $k=l=1$ によりきまる. $(b_{\gamma[0]}^{\alpha})_{\sigma}$ は (4.2.18) で $k=2, l=0$ を満たすかぎり任意である. 特に $(b_{\gamma[0]}^{\alpha})_{\sigma}$ が (γ, σ) について対称であるようにすれば一意的にきまる.

(4) $m \geq 4$ とする. $1 \leq k < l$ で $k+l=m$ のとき, $a_{(0)(k,l)}$ は任意にとれる. $a_{(0)(0,m)}$ は (4.2.18) で $k=0, l=m-1$ により $a_{(0)(1,m-1)}$ で決まる. $k > l$ のとき, $a_{(0)(k,l)}$ は (4.2.25) によって $a_{(0)(l,k)}$ で決まる. $m=2m_1$ が偶数のとき, $a_{(0)(m_1,m_1)}$ は (4.2.26) で $k=l=m_1$ をみたすかぎり任意である. $1 \leq k < l$ のとき, $(b_{\beta[0]}^{\alpha})_{(k-1,l)}$ は (4.2.18) を満たさなければならない. $(b_{\beta_1[0]}^{\alpha})_{\beta_2 \dots \beta_k \bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_l}$ が $\beta_1 \dots \beta_k$ について対称であるとすれば, $(b_{\beta[0]}^{\alpha})_{(k-1,l)}$ は一意的にきまる.

第5章 セゲー核の特異性

第4章で構成された F_a を使って強擬凸の実超曲面 M のセゲー核の特異性を構成する.

5.1 セゲー核の構成

5.1.1

モデルケースであるハイゼンバーク空間については 1.1.6 節の記号を少し変えて, $x = (x^0, z)$, $z = (z^1, \dots, z^n)$, をその標準座標とする. ハイゼンバーク空間のセゲー核は 1.1.6 節 (1.1.24) に $r(z, \xi)$ を使って与えられて居る. ここでは, 便宜上, そのかわりに $\psi_H(x, \tilde{x}) = ir(x, \tilde{x})$ を使う. 従って

$$(5.1.1) \quad \psi_H(x, \tilde{x}) = x^0 - \tilde{x}^0 + \frac{i}{2}(|z|^2 + |\tilde{z}|^2 - 2 \langle z, \tilde{z} \rangle),$$

$$(5.1.2) \quad \langle z, \tilde{z} \rangle = \sum z^\alpha \bar{\tilde{z}}^\alpha$$

とすると, セゲー射影 ρ_H は

$$(5.1.3) \quad \rho_H u(x) = c_H \int \frac{u(\tilde{x})}{\psi_H(x, \tilde{x})^{n+1}} d\tilde{x}, \quad c_H = \frac{n!}{2\pi^{n+1}}$$

である. この射影はフーリエ積分作用素とみなせる. すなはち, $\text{Im } \psi_H \geq 0$ であるから 3.2.2 節 (3.2.12) によって

$$(5.1.4) \quad \rho_H u(x) = c'_H \int e^{i\tau\psi_H(x, \tilde{x})} \tau^n u(\tilde{x}) d\tau d\tilde{x}, \quad c'_H = \frac{1}{2(\pi i)^{n+1}}$$

と書ける. 従って ρ_H は $\tau\psi_H(x, \tilde{x})$ を相関数に, τ^n をシンボルに持つフーリエ積分作用素である.

4.2.2 節 (4.2.23), (4.2.24), (4.2.25), (4.2.26) で構成された局所的にユニタリーなフーリエ積分作用素 F_a は局所的にモデルケースの CR ベクトルを, 一般の強擬凸の CR ベクトルに写していた.

$$F_a = c \int e^{i\phi(y,x,\xi)} a(y,\xi) d\xi,$$

$$\phi(y,x,\xi) = S(y,\xi) - x \cdot \xi$$

である. セゲー射影の特異性も F_a で写されるので, H に充分近い強擬凸の CR 構造 M のセゲー射影 ρ_M はスムーズな変換を法として

$$(5.1.5) \quad \rho_M \equiv F_a \circ \rho_H \circ F_a^*,$$

$$(5.1.6) \quad F_a^* u(\tilde{x}) = c \int e^{-i\phi(\tilde{y},\tilde{x},\theta)} \overline{a(\tilde{y},\theta)} u(\tilde{y}) d\tilde{y} d\theta$$

である. 従って

$$(5.1.7) \quad \rho_M u(y) = c_M \int e^{i\psi_M(y,\tilde{y},x,\tilde{x},\xi,\theta,\tau)} a(y,\xi) \overline{a(\tilde{y},\theta)} \tau^n u(\tilde{y}) d\tilde{y} dx d\tilde{x} d\xi d\theta d\tau$$

となる. ここで

$$(5.1.8) \quad c_M = c'_H c^2 = (1/\pi)^{5n+3} (1/2)^{4n+3} (1/i)^{n+1},$$

$$(5.1.9) \quad \psi_M(y,\tilde{y},x,\tilde{x},\xi,\theta,\tau) = \phi(y,x,\xi) + \tau \psi_H(x,\tilde{x}) - \phi(\tilde{y},\tilde{x},\theta).$$

吾々の目的はセゲー核の特異性なので各 y に対し, $a(y,\xi)$ の台は CR シンボルの characteristic e_0 の狭い錐近傍に含まれて居るとしてよい. 従って ξ -変数 (及び θ -変数) の積分範囲は

$$(5.1.10) \quad \left| \frac{\xi}{\xi_0} - e_0 \right| < \delta, \quad \left| \frac{\theta}{\theta_0} - e_0 \right| < \delta$$

としてよい. $\partial\psi_M/\partial x^0 = \tau - \xi_0$, $\partial\psi_M/\partial \tilde{x}^0 = \theta_0 - \tau$ なので, $\tau = \xi_0 = \theta_0$ で決まる集合は半臨界集合である. 従って 3.2.4 節で述べたように積分範囲を

$$\left| \frac{\xi_0}{\tau} - 1 \right| < \delta, \quad \left| \frac{\theta_0}{\tau} - 1 \right| < \delta$$

で決まる錐近傍に限ってよい. 従って新しい座標 (w, σ, τ) , $w = (y, \tilde{y})$ 及び $\sigma = (\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}, \sigma^{(4)})$ を

$$(5.1.11) \quad \xi = \tau\nu, \theta = \tau\mu, \sigma^{(1)} = x, \sigma^{(2)} = \nu, \sigma^{(3)} = \tilde{x}, \sigma^{(4)} = \mu$$

として導入すれば, ν, μ は e_0 の十分小さい近傍の元で

$$(5.1.12) \quad \rho_M u(y) \equiv c_M \int e^{i\tau\Phi(w, \sigma)} A(w, \sigma, \tau) u(\tilde{y}) d\sigma d\tilde{y} d\tau \quad (\text{mod 位数} - \infty \text{ の作用素})$$

と書ける. ここで

$$(5.1.13) \quad \Phi(w, \sigma) = S(y, \nu) - \langle x, \nu \rangle + \psi_H(x, \tilde{x}) + \langle \tilde{x}, \mu \rangle - S(\tilde{y}, \mu),$$

$$(5.1.14) \quad A(w, \sigma, \tau) = a(y, \tau\nu) \overline{a(\tilde{y}, \tau\mu)} \tau^{n+2(2n+1)}.$$

である. σ は位数 0 の相変数でその基点 (w_*, σ_*) は $w_* = 0, \sigma_* = (x_*, \tilde{x}_*, \nu_*, \tilde{\nu}_*)$ として $x_* = \tilde{x}_* = 0, \nu_* = \tilde{\nu}_* = e_0$ である.

5.1.2

ρ_M の特異性を調べるために,

$$(5.1.15) \quad I(w, \tau) = \int e^{i\tau\Phi(w, \sigma)} A(w, \sigma, \tau) d\sigma$$

なる形の積分を計算する. $A(w, \sigma, \tau)$ の台は, $\sigma_* = 0$ の小さい近傍に入っているとする. $\Phi(w, \sigma)$ が実数値の場合にはこの計算は “method of stationary phase” として知られて居るものであるが, 吾々の場合 Φ は複素数値なので, かなりの調整が必要である. 以下は Boutet de Monvel と Sjöstrand [4] による. 基点 (w_*, σ_*) の小さい近傍を考へればよい. 以下の計算は一般の相関数 $\Phi(w, \sigma)$ と, その基点 (w_*, σ_*) とが次の条件を満たすものについて成立する.

$$(i) \quad \Phi(w_*, \sigma_*) = 0, \quad \Phi'_\sigma(w_*, \sigma_*) = 0,$$

$$(ii) \quad \det \Phi''_{\sigma\sigma}(w_*, \sigma_*) \neq 0$$

(iii) $\text{Im } \Phi(w, \sigma) \geq 0$.

吾々の場合上の条件が満足されて居ることがたしかめられる。 χ のグラフの上では $S'_\xi(y, \xi) = x$ であり, (x_*, ν_*) は χ の固定点なので (cf. 2.1.4 節 (2.1.34)), 吾々の場合 (i) が成立して居る. (iii) のみたされて居ることは (5.1.13), (5.1.14) と ψ_H の定義式から明らかである. (ii) を確かめるために $x = (x^0, \dots, x^{2n})$ に対し

$$(5.1.16) \quad x_+ = (0, x^1, \dots, x^{2n}), \quad x_\# = (0, \dots, -x^{2\alpha}, x^{2\alpha-1}, \dots)$$

とすれば $\tilde{x} = x'$ として

$$(5.1.17) \quad \begin{aligned} \Phi''_{\sigma_a \sigma_b}(w, \sigma) \dot{\sigma}_a \dot{\sigma}_b &= i \dot{x}_+ \cdot \dot{x}_+ + i \dot{x}'_+ \cdot \dot{x}'_+ - 2i \dot{x}_+ \cdot \dot{x}'_+ - \dot{x}_\# \cdot \dot{x}'_+ \\ &\quad + \dot{x}_+ \cdot \dot{x}'_\# - 2\dot{\nu} \dot{x} + 2\dot{\mu} \dot{x}' \\ &\quad + S''_{\nu_j \nu_k}(y, \nu) \dot{\nu}_j \dot{\nu}_k - S''_{\mu_j \mu_k}(\tilde{y}, \mu) \dot{\mu}_j \dot{\mu}_k \end{aligned}$$

となる. 従って $S''_{\xi, \xi} = 0$ の場合 $\Phi''_{\sigma\sigma}$ を行列で表現して計算してみると対角化が出来て $\det \Phi''_{\sigma\sigma} \neq 0$ であることがすぐわかる. 吾々の場合モデルの小さい変形であり, モデルの場合 $S''_{\xi, \xi} = 0$ なので, $\det \Phi''_{\sigma\sigma} \neq 0$ としてよい. (iii) により σ_* は函数 $\text{Im } \Phi(w_*, \sigma)$ を最小にする点であるから,

$$(5.1.18) \quad \text{Im } \Phi''_{\sigma\sigma}(w_*, \sigma_*) \geq 0$$

が成立して居る.

前に述べたように $\Phi'_\sigma(w, \sigma) = 0$ で決まる σ の集合が重要である. この集合をうまく決めるために, σ を複素化する. $\Phi(w, \sigma)$ は単に滑らか (C^∞ 級) でしかない, そのままでは複素化出来ない. 次のような複素化を考へる: 一般に実変数 σ に依存する $f(\sigma)$ なる複素数値函数があったときに, $\sigma_{\mathbb{C}} = \sigma + iv$ (v は実数) として $f(\sigma)$ の拡張 $f(\sigma_{\mathbb{C}})$ が概解析的拡張であるとは, σ が $\partial f / \partial \bar{\sigma}_{\mathbb{C}}$ の無限位数の零点になって居ることとする. 従って

$$(5.1.19) \quad |f_{\bar{\sigma}_{\mathbb{C}}}(\sigma_{\mathbb{C}})| \leq c_N (\text{Im } \sigma_{\mathbb{C}})^N$$

が全ての N に対して成立する. 概解析的拡張は一意的には決まらないが存在する. 例えば,

$$(5.1.20) \quad f(\sigma) = \sum f_{i_1, \dots, i_l} \sigma^{i_1} \dots \sigma^{i_l}$$

と形式的に展開されて居るとするとき

$$(5.1.21) \quad \tilde{f}(\sigma_{\mathbb{C}}) = \sum f_{i_1, \dots, i_l} \sigma_{\mathbb{C}}^{i_1} \cdots \sigma_{\mathbb{C}}^{i_l}$$

と云う展開式を持つようにすればよい.

以下 $\Phi(w, \sigma)$ の概解析拡張 $\Phi(w, \sigma_{\mathbb{C}})$ を一つ固定する. w は実変数のままである.

$$(5.1.22) \quad \det \Phi''_{\sigma\sigma}(w_*, \sigma_*) \neq 0$$

であるから $\sigma_{\mathbb{C}}$ に関する方程式

$$(5.1.23) \quad \Phi'_{\sigma}(w, \sigma_{\mathbb{C}}) = 0$$

の解 $\sigma_{\mathbb{C}}(w) = Z(w)$ が一意的存在する. $\Phi'_{\sigma}(w_*, \sigma_*) = 0$ であるから $Z(w_*) = \sigma_*$ である. ここで重要なことは

$$(5.1.24) \quad \operatorname{Im} \Phi(w, Z(w)) \geq c |\operatorname{Im} Z(w)|^2$$

が云へることである. 従って $e^{i\tau\Phi(w, Z(w))}$ は有界な函数である.

上の不等式の成立して居ることを見るため w を固定して, 二次形式 $F(\sigma_{\mathbb{C}})$ を

$$(5.1.25) \quad F(\sigma_{\mathbb{C}}) = \sum \Phi''_{\sigma_a \sigma_b}(w, Z(w)) (\sigma_{\mathbb{C}})_a (\sigma_{\mathbb{C}})_b$$

で定義する. 今 w_* に十分近い w を考へて居るので, 上の (ii) により

$$(5.1.26) \quad \text{二次形式 } F(\sigma_{\mathbb{C}}) \text{ は非退化}$$

である. さらに $\Phi'_{\sigma}(w, Z(w)) = 0$ であるから, 上の (iii) と微積分の定理により

$$(5.1.27) \quad F \text{ は行列として } \operatorname{Im} F \geq 0$$

であることに注意する. $\Phi'_{\sigma}(w, Z(w)) = 0$ であるからテーラーの定理と (5.1.19) とにより

$$(5.1.28) \quad \Phi(w, \sigma) = \Phi(w, Z(w)) + \frac{1}{2} F(\sigma - Z(w)) + R,$$

$$(5.1.29) \quad |R| \leq C ((\operatorname{Im} Z(w))^3 + |\sigma - Z(w)|^3)$$

と書ける. 従って $\operatorname{Im} \Phi(w, \sigma) \geq 0$ だから

$$\operatorname{Im} \Phi(w, Z(w)) \geq -\frac{1}{2} \operatorname{Im} F(\sigma - Z(w)) - |R|$$

が成り立つ. 一方

$$-F(\sigma - Z(w)) = F(i(\sigma - Z(w)))$$

で

$$i(\sigma - Z(w)) = \operatorname{Im} Z(w) + i(\sigma - \operatorname{Re} Z(w))$$

であるから, $x = \operatorname{Im} Z(w)$ 及び $y = \sigma - \operatorname{Re} Z(w)$ の場合に, 次の補題を適用すればよいことがわかる.

補題 5.1.30. $F(x)$ を非退化二次形式で, 行列として $\operatorname{Im} F \geq 0$ とする. このとき常数 $C_F > 0$ が存在して,

$$\sup_y \{ \|F\|^{-1} \operatorname{Im} F(x + iy); |y| < \varepsilon |x| \} \geq \varepsilon |x|^2$$

が $0 < \varepsilon < C_F$ の時成立する.

証明は [4] pp. 146-147 にゆずる.

5.1.3

積分 (5.1.15) の計算を始める前に, $Z(w)$ をもう少し陽に書いておこう.

(5.1.1), (5.1.2) と (5.1.13), (5.1.14) により方程式 $\Phi'_\sigma(w, \sigma) = 0$ は

$$(5.1.31) \quad S'_\xi(y, \nu) = x, \quad \nu = e_0 + ix_+ - i\tilde{x}_+ + \tilde{x}_\sharp,$$

$$(5.1.32) \quad S'_\xi(y, \mu) = \tilde{x}, \quad \mu = e_0 + ix_+ - i\tilde{x}_+ + x_\sharp.$$

従って

$$(5.1.33) \quad Z(w) = (X(w), U(w), \tilde{X}(w), \tilde{U}(w)),$$

$$(5.1.34) \quad S'_\xi(y, U(w)) = X(w),$$

$$(5.1.35) \quad S'_\xi(\tilde{y}, \tilde{U}(w)) = \tilde{X}(w),$$

$$(5.1.36) \quad U(w) = e_0 + iX_+(w) - i\tilde{X}_+(w) + \tilde{X}_\sharp(w),$$

$$(5.1.37) \quad \tilde{U}(w) = e_0 + iX_+(w) - i\tilde{X}_+(w) + X_\sharp(w),$$

によって $Z(w)$ が決まる.

上の方程式は $X(w), \tilde{X}(w)$ を未知の函数とする方程式と考へられる. モデルの場合にはこの方程式は

$$(5.1.38) \quad X(w) = y, \quad \tilde{X}(w) = \tilde{y}$$

である. 一般の場合にはモデルの小さい変形と考へられるから, 吾々の方程式は一意的に解ける.

5.2 特異性の計算

5.2.1

積分 (5.1.15) の計算を始める. (5.1.28), (5.1.29) における R は (5.1.15) の積分の特異性には関係ないことがわかるので, 以下省略する. さらに $\sigma_{\mathbb{C}}$ を複素ベクトル変数として非退化二次形式 $F(\sigma_{\mathbb{C}})$ を対角化して

$$(5.2.1) \quad F(\sigma_{\mathbb{C}}) = i\theta(w, \sigma_{\mathbb{C}}) \cdot \theta(w, \sigma_{\mathbb{C}}),$$

$$(5.2.2) \quad \theta(w, \sigma_{\mathbb{C}}) = (\dots, \theta^a(w, \sigma_{\mathbb{C}}), \dots)$$

とする. (5.1.13), (5.1.14) により

$$(5.2.3) \quad I(w, \tau) \equiv e^{i\tau\Phi(w, Z(w))} \int_{\sigma \in \mathbb{R}^N} e^{-\frac{\tau}{2}\theta(w, \sigma - Z(w)) \cdot \theta(w, \sigma - Z(w))} A(w, \sigma, \tau) d\sigma$$

となる. ここで $\hat{\sigma} = \sigma - Z(w)$ と置く. $\hat{\theta} = \theta(w, \hat{\sigma})$ から $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(w, \hat{\theta})$ と解く. 吾々は上の式を次のように考へる. $\hat{\sigma}$ を複素変数と考へて, w に依存する複素 $4(2n+1)$ 次微分形式

$$(5.2.4) \quad \Theta(w, \hat{\sigma}, \tau) = e^{-\frac{\tau}{2}\theta(w, \hat{\sigma}) \cdot \theta(w, \hat{\sigma})} A(w, \hat{\sigma} + Z(w), \tau) d\hat{\sigma}$$

を導入すれば, $4(2n+1)$ 形式の, $4(2n+1)$ 次元の実部分多様体 $\Gamma_w = \{\hat{\sigma} = \sigma - Z(w)\}$ 上の積分として

$$(5.2.5) \quad I(w, \tau) = e^{i\tau\Phi(w, Z(w))} \int_{\Gamma_w} \Theta(w, \hat{\sigma}, \tau).$$

この見方の利点は、ストークスの定理を用いて積分領域 Γ_w を、積分の値が (admissible error を除いて) 変わらないようにホモトピーで動かすことが出来ることにある。まづ変数 $\hat{\sigma}$ を $\hat{\theta} = \theta(w, \hat{\sigma})$ に変換する:

$$(5.2.6) \quad I(w, \tau) = e^{i\tau\Phi(w, Z(w))} \int_{\Gamma'_w} e^{-\frac{\tau}{2}\hat{\theta} \cdot \hat{\theta}} A(w, \hat{\sigma}(w, \hat{\theta}) + Z(w), \tau) \det \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \hat{\theta}} d\hat{\theta},$$

$$(5.2.7) \quad \Gamma'_w = \{\hat{\theta} = \theta(w, \sigma - Z(w)) : \sigma \in \mathbb{R}^N\}$$

となる。部分多様体 Γ'_w が

$$\Gamma'_w : \hat{\theta} = r + iB(w, r), \quad r \in \mathbb{R}^{4(2n+1)}, \quad B \text{ は実数値}$$

とパラメーター表示されると假定する。吾々の場合はモデルケースの小さい変形なので、この条件は満たされて居る。概解析性から積分領域を

$$\Gamma'_w(s) : \hat{\theta} = r + isB(w, r), \quad r \in \mathbb{R}^{4(2n+1)}$$

と動かしても新しい特異性は出てこないことがわかる。従って、

$$(5.2.8) \quad I(w, \tau) = e^{i\tau\Phi(w, Z(w))} \int e^{-\frac{\tau}{2}|r|^2} A(w, \hat{\sigma}(w, r) + Z(w), \tau) \det \left(\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \hat{\theta}} \right)_{\hat{\theta}=r} dr$$

となる。これで

$$(5.2.9) \quad \int e^{i\tau\Phi(w, Z(w))} e^{-\frac{\tau}{2}|r|^2} f(r, \tau) dr d\tau$$

と云う形の積分の問題になる。 $f(r, \tau)$ を τ で展開して、結局

$$(5.2.10) \quad \int e^{-\tau p} e^{-\frac{\tau}{2}|r|^2} f(r) \tau^l dr d\tau, \quad \operatorname{Re} p \geq 0$$

と云う形の積分の解析に帰着された。ここで $r \in \mathbb{R}^N$, $N = 4(2n+1)$ である。

5.2.2

次に $\int e^{-\frac{\tau}{2}|r|^2} f(r) dr$ を調べる。 $f(r)$ のフーリエ変換を

$$(5.2.11) \quad \hat{f}(\theta) = \int e^{-ir \cdot \theta} f(r) dr$$

で定義する. $e^{-\frac{\tau}{2}r \cdot r}$ のフーリエ変換は

$$(2\pi/\tau)^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{2\tau}\theta \cdot \theta}$$

である. (cf. [10] The analysis of linear PDO I, Th. 7. 6. 1) 従ってパーセバルの公式

$$\int f(r)g(r)dr = (2\pi)^{-N} \int \hat{f}(\theta)\hat{g}(\theta)d\theta$$

により

$$(5.2.12) \quad \int e^{-\frac{\tau}{2}|r|^2} f(r)dr = (2\pi\tau)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-\frac{|\theta|^2}{2\tau}} \hat{f}(\theta)d\theta \quad (N = 4(2n+1))$$

$$(5.2.13) \quad \theta_j \hat{f}(\theta) = \frac{1}{i} \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}(\theta), \quad f(0) = (2\pi)^{-N} \int \hat{f}(\theta)d\theta$$

であるから, 計算により

$$(5.2.14) \quad \int e^{-\frac{\tau}{2}|r|^2} f(r)dr = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \sum \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{2}\right)^l \left(\frac{1}{\tau}\right)^{l+\frac{N}{2}} \Delta^l f(0)$$

となる. ここで $\Delta = \sum \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2$. 結局問題は

$$(5.2.15) \quad \int_0^\infty e^{-\tau p} \tau^l d\tau$$

と云う積分の特異性に帰着された. この積分は 3.2.2 節の例 3.2.11 として計算した. すなはち $l \geq 0$ のときは

$$(5.2.16) \quad \int_0^\infty e^{-pt} t^l dt = l! p^{-(l+1)}, \quad (\operatorname{Re} p \geq 0, p \neq 0).$$

$l \in \mathbb{N}$ のときは

$$(5.2.17) \quad \int_0^\infty e^{-\tau p} \tau^{-l} d\tau = \frac{(-1)^l}{(l-1)!} p^{l-1} \log p + \text{滑らかな項}.$$

5.2.3

以上をまとめると次のようになる. ρ_M をセゲー写像とすれば (cf. (5.1.7), (5.1.8), (5.1.9))

$$(5.2.18) \quad \rho_M u(y) = c_M \int I(w, \tau) u(\tilde{y}) d\tilde{y} d\tau.$$

ここで $I(w, \tau)$ は次のように与えられる: $\tilde{U} = V$ として

$$(5.2.19) \quad f(w, \tau, r) = a(y, \tau \hat{\sigma}^{(2)}(w, r) + \tau U(w)) \\ \times \overline{a(\tilde{y}, \tau \hat{\sigma}^{(4)}(w, r) + \tau V(w))} \left(\det \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \hat{\theta}} \right)_{\hat{\theta}=r},$$

$$(5.2.20) \quad \psi_M(w) = \Phi(w, Z(w))$$

とおけば

$$(5.2.21) \quad I(w, \tau) = e^{i\tau\psi_M(w)} \int e^{-\frac{\tau}{2}r \cdot r} f(w, \tau, r) \tau^{n+2(2n+1)} dr.$$

従って

$$(5.2.22) \quad f(w, \tau, r) = \sum_{s=0}^{\infty} B_{<s>}(w, r) \tau^{-s}$$

と書けば

$$I(w, \tau) = e^{i\tau\psi_M(w)} \int \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{2}r \cdot r} B_{<s>}(w, r) \tau^{2(2n+1)+n-s} dr \\ = (2\pi)^{2(2n+1)} \sum_{l,s} \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{2}\right)^l e^{i\tau\psi_M(w)} \tau^{n-l-s} \Delta^l B_{<s>}(w, 0).$$

よって

$$(5.2.23) \quad C_k(w) = \sum_{l+s=k} \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{2}\right)^l \Delta^l B_{<s>}(w, 0)$$

とおけば

$$c_M = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{5n+3} \left(\frac{1}{2}\right)^{4n+3} \left(\frac{1}{i}\right)^{n+1}$$

だから、セゲー核 $K^s(w)$ は

$$K^s(w) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{i}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(w) \int e^{i\tau\psi_M(w)} \tau^{n-k} d\tau$$

となる. よって (5.1.24) により $\text{Im } \psi_M \geq 0$. 従って

$$(5.2.24) \quad K^s(w) = F^s(w) + G^s(w) \log \psi_M,$$

$$(5.2.25) \quad F^s(w) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{i}\right)^k (n-k)! C_k(w) \psi_M^{-(n+1-k)},$$

$$(5.2.26) \quad G^s(w) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{i}\right)^{n+1} \sum_{l=0}^{\infty} C_{n+l+1}(w) \frac{(-1)^{l+1}}{l!} \left(\frac{1}{i}\right)^l \psi_M^l.$$

5.2.4

対角化 (5.2.1), (5.2.2) を具体的に書いておこう. 先づ

$$(5.2.27) \quad \varphi^1 = \dot{x} + i\dot{\nu} - \frac{1}{2}(\dot{x}'_+ + i\dot{x}'_{\#}),$$

$$(5.2.28) \quad \varphi^2 = i\dot{x}^0 e_0 + \dot{\nu}_+ + \frac{i}{2}(\dot{x}'_+ + i\dot{x}'_{\#}),$$

$$(5.2.29) \quad \varphi^3 = \dot{x}' - i\dot{\mu} - \frac{1}{2}(\dot{x}_+ - i\dot{x}_{\#}),$$

$$(5.2.30) \quad \varphi^4 = -i(\dot{x}')^0 e_0 + \dot{\mu}_+ - \frac{i}{2}(\dot{x}_+ - i\dot{x}_{\#})$$

とおけば

$$\begin{aligned} & \varphi^1 \varphi^1 + \varphi^2 \varphi^2 + \varphi^3 \varphi^3 + \varphi^4 \varphi^4 \\ &= \dot{x}_+ \dot{x}_+ + \dot{x}'_+ \dot{x}'_+ - 2\dot{x}_+ \dot{x}'_+ - i\dot{x}_+ \dot{x}'_{\#} + i\dot{x}_{\#} \dot{x}'_+ + 2i\dot{x}\dot{\nu} - 2i\dot{x}'\dot{\mu} - \nu^0 \nu^0 - \mu^0 \mu^0 \end{aligned}$$

である. $S''_{\nu\nu}, S''_{\mu\mu}$ はモデルの場合 0 であるから, θ は φ の小さい変形としてかける. 従って未知の L^1, L^2, L^3, L^4 を導入して

$$(5.2.31) \quad \theta^1 = \varphi^1 + L^1, \quad \theta^2 = \varphi^2 + L^2, \quad \theta^3 = \varphi^3 + L^3, \quad \theta^4 = \varphi^4 + L^4$$

として, $F(\sigma_{\mathbb{C}}) = i\theta(w, \sigma_{\mathbb{C}})\theta(w, \sigma_{\mathbb{C}})$ が成立するように L^1, L^2, L^3, L^4 を決めることにする.

計算によれば

$$(5.2.32) \quad \theta^1 \theta^1 + \cdots + \theta^4 \theta^4 = \varphi^1 \varphi^1 + \cdots + \varphi^4 \varphi^4 + R_1 + R_2,$$

$$\begin{aligned}
 (5.2.33) \quad R_1 = & 2\dot{x}^0((L^1)^0 + i(L^2)^0) + 2(\dot{x}')^0((L^3)^0 - i(L^4)^0) \\
 & + \dot{x}_+(2L_+^1 - (L_+^3 + iL_\#^3) - i(L_+^4 + iL_\#^4)) \\
 & + \dot{x}'_+(2L_+^3 - (L_+^1 - iL_\#^1) + i(L_+^2 - iL_\#^2)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.2.34) \quad R_2 = & 2i\dot{\nu}L^1 + 2\dot{\nu}_+L_+^2 - 2i\dot{\mu}L^3 + 2\mu_+L_+^4 \\
 & - \nu^0\nu^0 - \mu^0\mu^0 + L^1L^1 + L^2L^2 + L^3L^3 + L^4L^4.
 \end{aligned}$$

先づ, $R_1 = 0$ になるように L を選ぶ. 計算によれば, 任意の L^2 と L^4 に対し

$$(5.2.35) \quad (L^1)^0 = -i(L^2)^0, \quad (L^3)^0 = i(L^4)^0$$

$$(5.2.36) \quad L_+^1 = \frac{i}{2}(L_+^4 + iL_\#^4), \quad L_+^3 = -\frac{i}{2}(L_+^2 - iL_\#^2)$$

とすればよいことがわかる. この場合

$$\begin{aligned}
 (5.2.37) \quad R_2 = & 2\dot{\nu}^0(L^2)^0 - \dot{\nu}^0\nu^0 + 2\dot{\mu}^0(L^4)^0 - \dot{\mu}^0\mu^0 + \dot{\nu}_+(2L_+^2 - L_+^4 - iL_\#^4) \\
 & + \dot{\mu}_+(2L_+^4 - L_+^2 + iL_\#^2) + L_+^2L_+^2 + L_+^4L_+^4.
 \end{aligned}$$

従って任意の K^2 と K^4 に対し $L^1, \dots, L^4$ を

$$(5.2.38) \quad (L^1)^0 = -i(K^2)^0, \quad (L^2)^0 = (K^2)^0,$$

$$(5.2.39) \quad (L^3)^0 = i(K^4)^0, \quad (L^4)^0 = (K^4)^0,$$

$$(5.2.40) \quad L_+^1 = \frac{i}{4}(K_+^4 + K_\#^4),$$

$$(5.2.41) \quad L_+^2 = \frac{1}{2}K_+^2 + \frac{1}{4}(K_+^4 + iK_\#^4),$$

$$(5.2.42) \quad L_+^3 = \frac{1}{4i}(K_+^2 - iK_\#^2),$$

$$(5.2.43) \quad L_+^4 = \frac{1}{2}K_+^4 + \frac{1}{4}(K_+^2 - iK_\#^2)$$

とおけば

$$(5.2.44) \quad \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2 + \theta^3\theta^3 + \theta^4\theta^4 = \varphi^1\varphi^1 + \varphi^2\varphi^2 + \varphi^3\varphi^3 + \varphi^4\varphi^4 + R_2,$$

$$\begin{aligned}
 (5.2.45) \quad R_2 = & \dot{\nu}K^2 - \dot{\nu}^0\nu^0 + \dot{\mu}K^4 - \dot{\mu}^0\mu^0 + \frac{1}{4}(K_+^2K_+^2 + K_+^4K_+^4) \\
 & + \frac{1}{2}(K_+^2K_+^4 + iK_+^2K_\#^4).
 \end{aligned}$$

従って (5.2.1), (5.2.2) が成立するためには等式

$$(5.2.46) \quad R_2 = \frac{1}{i} (S''_{\nu\nu}(y, V(w))\dot{\nu}\dot{\nu} - S''_{\mu\mu}(y, U(w))\dot{\mu}\dot{\mu})$$

が成立するように K^2, K^4 をとればよいことになる. それには

$$(5.2.47) \quad K^2 = K_{(0)}^2 + K_{(1)}^2 + \dots, \quad K^4 = K_{(0)}^4 + K_{(1)}^4 + \dots$$

とおいて $K_{(0)}^2$ と $K_{(0)}^4$ とは

$$(5.2.48) \quad \begin{aligned} & \nu K_{(0)}^2 + \mu K_{(0)}^4 \\ &= -iS''_{\nu\nu}(y, V(w))\dot{\nu}\dot{\nu} + iS''_{\mu\mu}(y, U(w))\dot{\mu}\dot{\mu} + \nu^0\nu^0 + \dot{\mu}^0\dot{\mu}^0, \end{aligned}$$

$$(5.2.49) \quad K_{(0)}^2 \equiv \nu^0 e_0, \quad K_{(0)}^4 \equiv \mu^0 e_0 \quad \text{mod } t$$

を満たすようにとる. ここで吾々の CR 構造は 1.2.4 節の命題 1.2.30 にのべたようにパラメーター t に従属するものとする. 次に $K_{(1)}^2, K_{(1)}^4$ とを

$$(5.2.50) \quad \begin{aligned} & \nu K_{(1)}^2 + \mu K_{(1)}^4 \\ &= -\frac{1}{4}(K_{(0)+}^2 + K_{(0)+}^2 + K_{(0)+}^4 + K_{(0)+}^4) - \frac{1}{2}(K_{(0)}^2 K_{(0)}^4 + iK_{(0)+}^2 + K_{(0)\#}^4), \end{aligned}$$

上と同じようにして, 帰納的に $K_{(l)}^2, K_{(l)}^4, (l = 2, \dots)$ をきめて行けば

$$(5.2.51) \quad K_{(l)}^2 \equiv 0, \quad K_{(l)}^4 \equiv 0 \quad \text{mod } t^{l+1}$$

が成立して居るように出来るから, 無限和 (5.2.47) は収斂して (5.2.45), (5.2.46) が成立して居る.

変換 (5.2.27), (5.2.28), (5.2.29), (5.2.30) を

$$\varphi = \Phi \dot{\sigma}, \quad \dot{\sigma} = (\dot{x}, \dot{\nu}, \dot{x}', \dot{\mu})^{\text{tr}}$$

と行列を使って書く. 計算によれば $\det \Phi = 1$ である. $\theta = \Theta \dot{\sigma}$ とおけば $\Theta = \Phi + L$ である. 従って

$$\det \Theta = \det(I + \Phi^{-1}L).$$

変換 $\Phi^{-1} : \varphi \rightarrow \dot{\sigma}$ は計算によれば

$$(5.2.52) \quad \dot{x} = \varphi_+^1 - i\varphi^2,$$

$$(5.2.53) \quad \dot{\nu} = -i(\varphi^1)^0 e_0 + \varphi^2 - \frac{i}{2}(\varphi_+^3 + i\varphi_{\sharp}^3) + \frac{1}{2}(\varphi_+^4 + i\varphi_{\sharp}^4),$$

$$(5.2.54) \quad \dot{x}' = \varphi_+^3 + i\varphi^4,$$

$$(5.2.55) \quad \dot{\mu} = i(\varphi^3)^0 e_0 + \varphi^4 + \frac{i}{2}(\varphi_+^1 - i\varphi_{\sharp}^1) + \frac{1}{2}(\varphi_+^2 - i\varphi_{\sharp}^2)$$

である.

定理 5.2.56.

$$F(\dot{\sigma}_{\mathbb{C}}) = i\theta(w, \dot{\sigma}_{\mathbb{C}})\dot{\theta}(w, \dot{\sigma}_{\mathbb{C}})$$

$$\theta(w, \dot{\sigma}_{\mathbb{C}}) = \Theta \dot{\sigma}_{\mathbb{C}}$$

$$\Theta = \Phi + L = \Phi(I + \Phi^{-1}L)$$

Φ は (5.2.27), (5.2.28), (5.2.29), (5.2.30), Φ^{-1} は (5.2.52), (5.2.53), (5.2.54), (5.2.55) で与えられて居る.

5.3 セゲー核の相関函数

5.3.1

最後に $\psi_M(w)$ を少し調べよう (cf.(5.2.20)). 先ず

$$(5.3.1) \quad \overline{\psi_M(y, \hat{y})} = -\psi_M(\hat{y}, y)$$

を証明する. $w = (y, \hat{y})$ に対し, $\hat{w} = (\hat{y}, y)$ とおく. 上を証明するには (5.1.13) と (5.2.20) とにより

$$(5.3.2) \quad X(\hat{w}) = \overline{\widetilde{X}(w)}, \quad \widetilde{X}(\hat{w}) = \overline{X(w)},$$

$$(5.3.3) \quad U(\hat{w}) = \overline{\widetilde{U}(w)}, \quad \widetilde{U}(\hat{w}) = \overline{U(w)}$$

を云へばよい. $Z(w)$ の方程式 (5.1.33)~(5.1.37) とその “バー” とを比べると, 方程式の解の一意性から上の等式の成立して居ることが解る.

次に準備として $Z(w)$ の定義方程式を (5.1.33)~(5.1.37) とは違う形で書く. 一般に $A = (A^1, \dots, A^{2n})$ を複素ベクトルとするととき $\mathbb{C}^n$ の元

$$Z'(A) = (\dots, A^{2\alpha-1} + iA^{2\alpha}, \dots), \quad Z''(A) = (\dots, A^{2\alpha-1} - iA^{2\alpha}, \dots)$$

が決まる. 従って $(\psi_M)'_{x_+} = (\dots, \partial\psi_M/\partial x^j, \dots)$, $j > 0$, を複素ベクトルと考へて $Z'((\psi_M)'_{x_+})$ と $Z''((\psi_M)'_{x_+})$ とが定義出来る. 計算により

$$(5.3.4) \quad Z'((\psi_H)'_{x_+}) = iZ'(x_+),$$

$$(5.3.5) \quad Z''((\psi_H)'_{x_+}) = i(Z''(x_+) - 2Z''(\tilde{x}_+)),$$

$$(5.3.6) \quad Z'((\psi_H)'_{\tilde{x}_+}) = i(Z'(\tilde{x}_+) - 2Z'(x_+)),$$

$$(5.3.7) \quad Z''((\psi_H)'_{\tilde{x}_+}) = iZ''(\tilde{x}_+)$$

である. $\Phi'_x = -\nu + (\psi_H)'_x$ 且つ $\Phi'_{\tilde{x}} = \mu + (\psi_H)'_{\tilde{x}}$ だから $Z(w)$ の定義 (5.1.33) により $Z(w)$ は次の方程式で決まる.

$$(5.3.8) \quad S'_\xi(y, \xi)_{\xi=U(w)} = X(w),$$

$$(5.3.9) \quad S'_\xi(\tilde{y}, \xi)_{\xi=V(w)} = \tilde{X}(w),$$

$$(5.3.10) \quad U_0(w) = 1, \quad V_0(w) = 1,$$

$$(5.3.11) \quad Z'(U(w)) = iZ'(X(w)),$$

$$(5.3.12) \quad Z'(V(w)) = i(-Z'(\tilde{X}(w)) + 2Z'(X(w))),$$

$$(5.3.13) \quad Z''(U(w)) = i(Z''(X(w))) - 2Z''(\tilde{X}(w)),$$

$$(5.3.14) \quad Z''(V(w)) = -iZ''(\tilde{X}(w)).$$

話を ψ_M にもどし

$$(5.3.15) \quad Q_y^\alpha \psi_M(y, \tilde{y}) = 0$$

を証明しよう. $Z(w)$ の定義により $(\Phi'_\sigma(w, \sigma))_{\sigma=Z(w)} = 0$ だから,

$$\frac{\partial \Phi(w, \sigma)}{\partial y} = \Phi'_y(w, \sigma)$$

とおけば

$$\begin{aligned} Q_y^\alpha \psi_M(y, \tilde{y}) &= Q_y^\alpha \Phi(w, Z(w)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\Phi'_{y^{2\alpha-1}}(w, Z(w)) + i\Phi'_{y^{2\alpha}}(w, Z(w)) \right. \\ &\quad \left. - ih^\alpha(y)\Phi'_{y^0}(w, Z(w)) \right). \end{aligned}$$

従って Φ の定義から

$$\begin{aligned} (5.3.16) \quad Q_y^\alpha \psi_M(y, \tilde{y}) &= \frac{1}{2} \left(S'_{y^{2\alpha-1}}(y, U(w)) + iS'_{y^{2\alpha}}(y, U(w)) - ih^\alpha(y)S'_{y^0}(y, U(w)) \right). \end{aligned}$$

一方 1.3.3 節の S の定義により

$$(S'_\xi(y, U(w)), U(w), y, S'_y(y, U(w)))$$

は χ の概解析的拡張のグラフに入っている. (5.3.8) により $S'_\xi(y, U(w)) = X(w)$ だから $y^j(\chi(x, \xi)) = \chi^j(x, \xi)$, $\eta_j(\chi(x, \xi)) = \chi_j(x, \xi)$ とおけば

$$\begin{aligned} Q_y^\alpha \psi_M(y, \tilde{y}) &= \frac{1}{2} \left(\chi_{2\alpha-1}(X(w), U(w)) + i\chi_{2\alpha}(X(w), U(w)) \right. \\ &\quad \left. - ih^\alpha(X(w))\chi_0(X(w), U(w)) \right). \end{aligned}$$

従って 2.1.1 節 (2.1.1) と (2.1.3) とにより

$$\begin{aligned} Q_y^\alpha \psi_M(y, \tilde{y}) &= q^\alpha(\chi(X(w), U(w))) \\ &= r_\beta^\alpha(X(w), U(w))p^\beta(X(w), U(w)). \end{aligned}$$

一方 (5.3.8)~(5.3.14) と 2.1.1 節 (2.1.2) とにより $p^\beta(X(w), U(w)) = 0$ である. これで (5.3.15) が証明された. 次に

$$(5.3.17) \quad \psi_M(y, y) = 0$$

を証明する. $(y, y) = w(y)$ とおく. 上を証明するには

$$(5.3.18) \quad U(w(y)) = V(w(y)), \quad X(w(y)) = \tilde{X}(w(y))$$

を証明すればよい. (5.3.18) が成立して居ると假定して, 方程式 (5.3.8), (5.3.9), (5.3.10), (5.3.11), (5.3.12), (5.3.13), (5.3.14) を未知函数 $U(w(y)), X(w(y))$ の方程式として試しに書いてみると

$$(5.3.19) \quad (S'_\xi(y, \xi))_{\xi=U(w(y))} = X(w(y)),$$

$$(5.3.20) \quad U_0(w(y)) = 1,$$

$$(5.3.21) \quad Z'(U(w(y))) = iZ'(X(w(y))),$$

$$(5.3.22) \quad Z''(U(w(y))) = -iZ''(X(w(y))).$$

となる. もし (5.3.19), (5.3.20), (5.3.21), (5.3.22) が解をもてば, その解を使って $V(w(y))$ と $\tilde{X}(w(y))$ とを (5.3.18) で定義すれば, これは (5.3.19), (5.3.20), (5.3.21), (5.3.22) で $X = \tilde{X}, U = V$ の解になって居る事が容易に確かめられる. 従って (5.3.19), (5.3.20), (5.3.21), (5.3.22) の解の一意性から, (5.3.18) の成立して居ることがわかる. 結局 (5.3.17) の証明は, 方程式 (5.3.19), (5.3.20), (5.3.21), (5.3.22) の解の存在の証明に帰着される. (5.3.19), (5.3.20), (5.3.21), (5.3.22) を解くには, $X(w(y))$ を消去して未知函数 $U^j = U(w(y)), j = 1, \dots, 2n$, の方程式

$$(5.3.23) \quad S'_{\xi_{2\alpha-1}}(y, U) + iS'_{\xi_{2\alpha}}(y, U) = -iZ'(U),$$

$$(5.3.24) \quad S'_{\xi_{2\alpha-1}}(y, U) - iS'_{\xi_{2\alpha}}(y, U) = iZ''(U)$$

を解けばよい. モデルの場合, $S(y, \xi) = y \cdot \xi$ だから上は

$$(5.3.25) \quad Z'(y) = -iZ'(U), \quad Z''(y) = iZ''(U)$$

となる. 吾々の場合 (5.3.23), (5.3.24) は (5.3.25) の小さい変形だから (5.3.23), (5.3.24) の解は一意的に決まる. これで (5.3.17) が証明された.

1.1.2 節に述べたように, 原点の近傍を問題とし, M が $\mathbb{C}^{n+1}$ の実超曲面である場合を考へよう. D を $\mathbb{C}^{n+1}$ における M の内側の近傍とする. 1.2.1 節の記号を使い, $(z^1, \dots, z^n, w)$ を簡単のため $z, w = z^0$ と書く $\psi_M(z, z)$ は z を M へ制限したものの函数である. $Q_y^\alpha \psi_M(y, \tilde{y}) = 0$ であるので (5.2.52), (5.2.53), (5.2.54), (5.2.55) により $\psi_M(z, z)$ は $D \times D$ 上の函数 $\psi_M(z, \tilde{z})$ で $(z, \tilde{z})$ に関し, 形式的に正則 (概解析的) になるように一意的に拡張出来る.

$$(5.3.26) \quad \overline{\psi_M(z, \tilde{z})} = -\psi_M(\tilde{z}, z)$$

である。モデルの場合に計算すれば $X(w) = y$, $\tilde{X}(w) = \tilde{y}$ であるから,
 $\Phi(w, Z(w)) = \psi_H(y, \tilde{y})$. 従って 3.2.2 節によりモデルの場合

$$\frac{\partial}{\partial y^0} \left(\frac{1}{i} \psi_M(z, z) \right) = 2$$

である。吾々の場合、モデルの小さい変形になって居るから

$$(5.3.27) \quad r(z) = \frac{1}{i} \psi_M(z, z)$$

とすれば,

$$(5.3.28) \quad \frac{\partial r(z)}{\partial y^0} > 0.$$

(5.3.26) により r は実数値の函数であり, (5.3.17) により M の上では零になる。原点で $\partial/\partial y^0$ は内側に向かう法線であるから, (5.3.23), (5.3.24) により D の内部では $r > 0$ である。従って r は D の上で正であるような M の定義函数になって居る。吾々の $r(z, \tilde{z}) = (1/i) \psi_M(z, \tilde{z})$ は 1.1.7 節の Fefferman の定理について述べた条件 (i), (ii), (iii) をみたす函数である。

参考文献

- [1] T. Akahori, A New Approach to the Local Embedding Theorem of CR-structures for $n \geq 4$ (the local solvability for the operator $\bar{\partial}_b$ in the abstract sense), Mem. Amer. Math. Soc. **67** no. 366, xvi+257 pp., Providence Rhode Island, 1987.
- [2] P. Ahern, R. Schneider, A smoothing property of the Henkin and Szegő projections, Duke Math. J. **47** (1980), no. 1, 135–143.
- [3] L. Boutet de Monvel, Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles. Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1974–1975; Équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires, pp. Exposé. No. 9, 14 pp. Centre Math., École Polytech., Paris, 1975.
- [4] L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand, Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegő, Journées: Équations aux Dérivées Partielles de Rennes (1975), pp. 123–164. Astérisque, No. 34-35, Soc. Math. France, Paris, 1976.
- [5] S. S. Chern, J. K. Moser, Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math. **133** (1974), 219–271.
- [6] C. Fefferman, The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, Invent. Math. **26** (1974), 1–65.
- [7] A. Grigis, J. Sjöstrand, Microlocal Analysis for Differential Operators, an Introduction. London Mathematical Society Lecture Note Series **196**, iv+151 pp., Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

- [8] K. Hirachi, G. Komatsu, N. Nakazawa, Two methods of determining local invariants in the Szegő kernel. Complex geometry (Osaka, 1990), 77–96, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **143**, Dekker, New York, 1993.
- [9] L. Hörmander, Fourier integral operators I, Acta Math. **127** (1971), 79–183.
- [10] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I; Distribution Theory and Fourier Analysis, x+440 pp., Reprint of the second (1990) edition, Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [11] S. G. Krantz, Function Theory of Several Complex Variables, John Wiley and Sons, New York, 1982.
- [12] M. Kuranishi, On the equivalence of symbols of nondegenerate CR structures, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 1–21.
- [13] M. Kuranishi, Strongly pseudoconvex CR structures over small balls I: An à priori estimate, Ann. Math. (2) **115** (1982), no. 3, 451–500.
- [14] —, Strongly pseudoconvex CR structures over small balls II: A regularity theorem, Ann. Math. (2) **116** (1982), no. 1, 1–64.
- [15] —, Strongly pseudoconvex CR structures over small balls III: An embedding theorem, Ann. Math. (2) **116** (1982), no. 2, 249–330.
- [16] —, The formula for the singularity of Szegő kernel. I, J. Korean Math. Soc. **40** (2003), 641–666.
- [17] —, The formula for the singularity of Szegő kernel. II, Asian J. Math. **8** (2004), 353–362.
- [18] A. Melin, J. Sjöstrand, Fourier Integral Operators with Complex-valued Phase Function, Lec. Notes in Math., vol 459, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

- [19] J. Moser, Holomorphic equivalence and normal forms of hypersurfaces, Differential Geometry, Proc. Symp. Pure Math., Vol. XXVII, Part 2, Stanford Univ., Stanford, Calif., 1973), pp. 109–112, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1975.
- [20] L. Nirenberg, On a question of Hans Lewy, Russian Math. Surveys **29** (2) (1974), 251–262.
- [21] A. Newlander, L. Nirenberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, Ann. Math. (2) **65** (1957), 391–404.
- [22] D. H. Phong, E. M. Stein, Estimates for the Bergman and Szegő projections on strongly pseudo-convex domains, Duke Math. J. **44** (1977), no. 3, 695–704.
- [23] R. M. Range, Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1998.

索引

χ によって導入されたフーリエ積分作用素, 45

characteristic, 24

CR 構造, 3

CR 作用素, 3

Fefferman の定理, 10

method of stationary phase, 71

位数 m のシンボル, 38

位数 0 の相変数, 48

位相ベクトル空間, 37

オーダー $(-\infty)$, 39

概解析的拡張, 72

完備, 37

許容分解, 52

強擬凸, 3

強擬凸境界, 3

局所的にユニタリー, 54

コーシー族, 37

コンパクトな台を持つ, 48

シンプレクティック写像, 20

シンボル, 18

ジージェル上半空間, 4

生成函数 (generating function), 23

斉次, 23

正則函数, 1

セゲー (Szegö) 射影, 6

セゲー核, 6

相函数, 38

相変数, 38

バーグマン (Bergman) 射影, 6

バーグマン核, 6

ハイゼンバーグ空間, 4

ハミルトン函数, 21

半臨界集合, 46

フーリエ積分作用素, 38

ポアソンブラケット, 19

ポテンシャル, 21

無限小シンプレクティック変換, 20

ラグランジアン錐, 47

領域, vii

臨界集合, 46

レビ形式, 3

連続, 37

記号

$\square$, 61
 $\square_{(\theta, x)}$, 50
 $\triangle$, 77
 $\{p, q\}$, 19
 ∂_θ^J , 52
 $\Theta(w, \widehat{\sigma}, \tau)$, 75
 θ , 38
 ρ_B , 6
 ρ_S , 6
 $\sum^m$, 39
 σ , 21
 σ_t , 26
 $\sigma(y, \xi, \lambda)$, 60
 $\phi(y, x, \theta)$, 38
 Ω , 4
 ω_X , 20
 $A(M)$, 11
 $a(y, x, \theta)$, 38
 B_β^α , 58
 $C(H)$, 24
 $C(M)$, 24
 $c(X, Y)$, 3
 D_j , 19
 dv_Ω , 6
 dv_H , 7
 $(E, \{p\})$, 37
 F^x , 45
 F_α , 54
 F_α^* , 54
 $\widehat{f}(y, \xi)$, 63
 H , 4
 $H(M)$, 6
 $H(\widetilde{M})$, 6
 K_Ω , 7

$K_B(z, w)$, 6
 K_H , 7
 $K_S(z, w)$, 6
 $L^2(M)$, 6
 $L^2(\widetilde{M})$, 6
 l , 3
 $\mathbb{M}$, 16
 p_K^α , 37
 $p(x, \xi)$, 18
 S^J , 52
 $S^{k_1 \dots k_l}$, 61
 $(S' - x)^J$, 51
 $S(y, \xi)$, 23
 $S(y, \xi, t)$, 23
 T'' , 1, 3
 T_b'' , 3
 $T''(\text{bd}D)$, 2
 x_+ , 72
 $x_\sharp$, 72
 $\mathbb{Z}_+$, vii