E. Witten 氏の業績 I

江　口　　徹

§0. まえがき

Edward Witten は 1951 年に生まれ，1976 年にプリンストン大学で学位をとり数年間ハーバード大学で過ごした後，1980 年にプリンストン大学教授となった．1987 年からはプリンストン高等研究所の教授である．まだ 40 歳に満たない素粒子論の少壮の研究者であるが，70 年代の後半から頭角を現わし 80 年代には素粒子論の発展を左右する重要な仕事を次々に発表して世界的指導者となった．特に数理的能力に真に傑出したものがあり，近年の数理物理学隆盛の最大の原動力となっている．70 年代後半から 80 年代を通じて理論物理学，特に素粒子論の発展は現代数学の諸分野との著しい交流を生み出したが，その展開の多くは Witten によって切り開かれたものである．

Witten の仕事は物理の側からみると，物理学のさまざまなモデルや理論の背後に数学的構造をみぬき，現代数学の手法を用いて新しい境地を切り開くといったスタイルのものが多く，特に通常物理学者では手の出ない理論の大域的・非摂動的なふるまいを分析する能力に卓越している．又，数学の側からみると量子物理学の経路積分の方法に基づく Witten のアプローチは従来の数学のわく組をこえる直観的で新鮮な観点を提示し隣接する諸分野に大きな刺戟を与えてきた．20 世紀の後半に至って数学的成熟度を増した量子物理学からの現代数学への挑戦と言えるであろう．

Witten は多作で(論文数 150 余り)しかも長大な論文が多い事が特徴であるが，その多くは極めて明解で論理性が高く，物理的発想と数学的定式化が美しくとけ合っている．文章の表現力が豊かな事は，彼の教育的背景(ブランダイス大学の学部時代は歴史学専攻の学生であった)に依っているように思える．Witten の論文は物理学者には現代数学の手法を，又，数学者には場の量子論の基礎を教育する大きな教育的役割にもなってきた．特に，オリジナルな数学の文献を読む事が難しい物理学者の間では Witten の仕事を通じて初めてさまざまな現代数学の手法にふれたという現象が広範にみられる．

今回の Fields 賞は受賞者 4 名の内 3 名までが数理物理学に関連した仕事で受賞している．特にその内 1 人は物理学者であり，まことに著しい現象といえる．又，今回の ICM では様々な方面から共形場の理論に関連した講演が多く，あたかも弦理論が数学の統一理論ともなりそうな印象を与えた．物理学の統一をめざした弦理論が現在停滞状況に陥いっている事に比べて皮肉な現象である．

さて本題に戻って Witten の研究歴をざっとふりかえると以下のような仕事が目につく(文献を参照)．

1. 70 年代後半の初期の仕事には，多重インスタントン解の導出 [1]，ソリトン理論と因子化した S 行列 [2]，ゲージ理論の $1/N$ 展開 [3]，positive mass conjecture の別証明 [4] などがある．いずれも極めて優れた仕事であり，特に Shoen-Yau の証明よりはるかに簡単な positive mass conjecture の別証は今回の ICM で Faddeev (Witten の業績紹介を行なった)も高い評価を与えていた．しかし，この時期の仕事はいずれも珠玉の小品と言った感じで，Witten 独自の大きなプログラムを展開するには至っていない．個々のトピックスにおいて彼のもつ数理的能力の切れ味を示したといった感が強い．

2. 80 年代に入るとまずゲージ理論や重力理論のアノマリーの分析に際立った成果が見られる．即ち，Wess-Zumino 項のトポロジカルな解釈 [5]，Wess-Zumino-Witten 模型の導出 [6]，重力アノマリーの導出 [7] 等がある．また超対称性の自発的破れの研究に端を発した有名な Witten 指数の導入とその指数理論 [8]，Morse 理論への応用 [9] がある．

3. 80 年代の半ばからはその頃台頭してきた弦理論の研究に移り，弦模型の compact 化と Calabi-Yau 多様体の研究 [10]，orbifold 模型の分析 [11] 等があり，又，Witten の構成法と呼ばれる弦の場の理論の定式化 [12] がある．

4. ここ 2〜3 年は Donaldson, Jones, Floer 等の研究に触発されて topological quantum field theory (位相的場の理論)と呼ばれる一群の場の理論のモデルの研究に

移り[13]，特にFields賞受賞理由ともなったJonesの絡み目不変式のゲージ理論による解釈を与えた[14]．又，2次元重力に関するmatrix模型の結果を位相的場の理論の観点から解釈し直す事によって，リーマン面のモデュライ空間の交点理論とKdV方程式の解を関係づけた[15][16].

Witten自身は自分の仕事の中でJones不変式の論文が最も気に入っているそうである．又，一連の位相的場の理論の研究が将来量子重力理論の手がかりを与えてくれるものと期待すると述べている[17].

以下では§1, 2で超対称性をもつ量子力学を用いてWittenの指数理論とMorse理論を解説する．§3で位相的場の理論のアウトラインを説明する．いずれの場合もフェルミオンの場やフェルミオン的対称性(超対称性・BRS対称性)が重要な役割を果たす．

§1. 超対称量子力学

超対称模型とは場の理論のモデルでボーズ粒子とフェルミ粒子の場が対になって現れるため特に高い対称性をもつ理論である．技術的な複雑さを避けるため最も簡単な模型，超対称量子力学(supersymmetric quantum mechanics)を考えてみよう．

フェルミオンはいわゆるPauliの排他律に従う粒子で同じ量子状態に1つの粒子までしか入る事ができない．今，理論にただ1つの量子状態しかない場合にはフェルミオンはこの準位に入っているかいないかの2通りしかない．この2つの状態を2次元ベクトルを用いて $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ のように表わそう．Pauli行列，$\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\sigma_+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\sigma_-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ を用いると，フェルミオン数 F は $F=\frac{1}{2}(1+\sigma_3)$ となり，σ_+ はフェルミオンの生成演算子，σ_- はフェルミオンの消滅演算子である．反交換関係 $\{\sigma_+,\sigma_-\}=1$ と $(\sigma_+)^2=(\sigma_-)^2=0$ に注意する．理論の状態空間は(規格化可能な)2成分波動関数 $\begin{pmatrix}\varphi_F(x)\\\varphi_B(x)\end{pmatrix}$ の全体で与えられる．

さて次に超対称性の生成子(supercharge)を

$$Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_+\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{d}{dx}-iW(x)\right) \tag{1}$$

$$Q^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_-\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{d}{dx}+iW(x)\right) \tag{2}$$

で定義しよう．$W(x)$ (super potentialと呼ばれる)は x の任意の多項式とする．Q はボゾニックな波動関数 $\begin{pmatrix}0\\\varphi_B(x)\end{pmatrix}$ に作用してフェルミオニックな波動関数 $\begin{pmatrix}\varphi_F(x)\\0\end{pmatrix}$, $\varphi_F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{d}{dx}-iW(x)\right)\varphi_B(x)$ を与える．ボゾニックな状態が作る空間を V_B，フェルミオニックな状態が作る空間を V_F とすると理論のHilbert空間は直和 $V_B\oplus V_F$ に分解し $Q(Q^*)$ は $V_B(V_F)$ から $V_F(V_B)$ への線形写像を与える．

$$Q: V_B\longrightarrow V_F \tag{3}$$

$$Q^*: V_F\longrightarrow V_B \tag{4}$$

次に系のハミルトニアンを

$$H=QQ^*+Q^*Q=\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2}+W(x)^2\right)+\frac{1}{2}\sigma_3W'(x) \tag{5}$$

で定義する．Q, Q^* は互いのadjointなので H は非負値 $H\geq 0$ である．

今，V_B に属する状態を $|b\rangle\in V_B$ と表わすと，$|b\rangle$ が零でない固有値 $E\,(>0)$ をもつハミルトニアンの固有状態であれば

$$H|b\rangle=(QQ^*+Q^*Q)|b\rangle=Q^*Q|b\rangle=E|b\rangle \tag{6}$$

(任意の $|b\rangle\in V_B$ につき $Q^*|b\rangle=0$ に注意)．そこで $|f\rangle\equiv Q|b\rangle$ と定義すると $\langle f|f\rangle=E\langle b|b\rangle\,(>0)$ となるためベクトル $|f\rangle\in V_F$ が存在し $|b\rangle$ と等しいエネルギー固有値をもつ．

$$H|f\rangle=(QQ^*+Q^*Q)Q|b\rangle=E|f\rangle \tag{7}$$

同様に $E\neq 0$ の固有状態 $|f\rangle\in V_F$ が存在すれば縮退した固有値をもつボゾニックな状態 $|b\rangle=Q^*|f\rangle$ が存在する．即わち，$E\neq 0$ のボゾニックな状態とフェルミオニックな状態は常に対を作っており，これがモデルの超対称性を表わしている．

一方，$E=0$ の状態にはボソンとフェルミオンの非対称が生じる．今，$|b\rangle\in V_B$ が $H|b\rangle=0$ を満たすと $Q|b\rangle=0$ となり対になる状態 $|f\rangle$ が作れない．同様に $|f\rangle\in V_F$ が $H|f\rangle=0$ を満たすと $Q^*|f\rangle=0$ となり相棒のボソンが存在しない．ボゾニックな零エネルギー状態は $Q|b\rangle=0$ で特徴づけられるのでその全体は $\mathrm{Ker}\,Q$ に等しい．同様にフェルミオニックな零エネルギー状態全体は $\mathrm{Ker}\,Q^*$ に等しい．$n_B=\mathrm{Ker}\,Q$, $n_F=\mathrm{Ker}\,Q^*$ とすると複体

$$V_B\underset{Q^*}{\overset{Q}{\rightleftarrows}}V_F \tag{8}$$

に対して $\mathrm{index}=n_B-n_F$ が定義されるがこれがいわゆるWitten指数である．$E\neq 0$ の状態ではボソン・フェルミオンが対になって現われる事を用いるとWitten指数は

$$\mathrm{index}=\mathrm{tr}(-1)^F \qquad (9)$$

とも表わされる．ここでtraceはHilbert空間全体に渡る和である．(9)の右辺で$E\neq0$の状態はボソン($F=0$)，フェルミオン($F=1$)の間で打ち消し合い零エネルギー状態のみが寄与するため$\mathrm{tr}(-1)^F$はn_B-n_Fに等しい．

Witten指数を(5)のハミルトニアンについて計算してみよう．零エネルギー状態はQないしQ^*のKernelに入るので一階の微分方程式

$$\left(\frac{d}{dx}\pm W(x)\right)\varphi(x)=0 \qquad (10)$$

を解けばよい．(10)は直ちに積分できて

$$\varphi(x)=\mathrm{const}\cdot\exp\left(\mp\int^x W(x')dx'\right) \qquad (11)$$

となるが肩の符号は$x\to+\infty$で$\varphi(x)$がdumpし規格化可能になるようにとらなければならない．このため$W(x)$の$|x|$大でのふるまいに注目し$W(x)\approx\lambda x^n$，(1) n: 奇数(2) n: 偶数に分けて調べる．

(1)の場合は$\int^x W(x')\,dx'=\frac{1}{n}\lambda x^{n+1}$．したがって$\lambda$の正(負)に応じて$-(+)$符号が規格化可能な波動関数を与える．従って$\mathrm{index}=\mathrm{sign}(\lambda)$となる．

(2)の場合は$\int^x W(x')\,dx'$が$x\to\pm\infty$で符号を変えるため規格化可能な波動関数は存在せず$\mathrm{index}=0$となる．

このようにindexはsuper potential $W(x)$の詳細によらずその漸近形のみで定まる．そこで$W(x)$をスケール変換，$W(x)\to\frac{1}{\varepsilon}W(x)$，して$\varepsilon$を1から0へ動かしてもindexは変らない．スケール変換の後ハミルトニアンは

$$H_\varepsilon=\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{\varepsilon^2}W(x)^2\right)+\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{2}\sigma_3W'(x) \qquad (12)$$

となる．H_εを$\varepsilon\to0$の極限で調べてみよう．$\varepsilon\to0$でH_εのポテンシャルエネルギーはいくらでも大きくなるため，その固有値は一般に$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$で発散する．$\varepsilon\to0$で固有値が有限に留まるためには波動関数が$W(x)$の零点付近に集中する必要がある．$W(x)$をその零点(簡単のため$x=0$にあるとする)付近で線型近似して$W(x)\cong\lambda x$とすると

$$H_\varepsilon\cong\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}x^2\right)+\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\frac{\sigma_3}{2} \qquad (13)$$

となる．上式第1項は量子力学でよく知られた調和振動子の形をしている．その固有値は$E_n=\frac{|\lambda|}{\varepsilon}\left(n+\frac{1}{2}\right)$，$n=0,1,2,\cdots$，で与えられる．一方$\sigma_3$の固有値は$\pm1$なので$\lambda$の正負に応じて$\varphi_0(x)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ないし$\varphi_0(x)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ($\varphi_0(x)=\exp\left(-\frac{|\lambda|}{2\varepsilon}x^2\right)$は調和振動子の基底状態$n=0$の波動関数)をとると(13)式右辺第1項と第2項の固有値が消し合ってH_εの近似的零エネルギー状態が作れる(正確には固有値をεで漸近展開，$E=\frac{C_{-1}}{\varepsilon}+C_0+C_1\varepsilon+\cdots$，した時$C_{-1}=0$となる状態)．

パラメーターεは量子力学でよく知られたPlanck定数$\hbar$に相当し上の計算はWKB近似にあたっている．WKB近似を用いて$\varepsilon\to0$の極限で有限に留まるエネルギー準位の数が計算され正確な零エネルギー状態の数の上限を加える．

図1のようなsuper potentialの場合($W(x)\cong\lambda x$)はWKB近似で求めた準位は実際正しい零エネルギー状態を与え$\mathrm{index}=1$となる．一方，図2のようなsuper potentialの場合($W(x)\cong\lambda x^2$)，x_1とx_2に局在した近似的零エネルギー状態があるがこれらはトンネル効果によって混り合いエネルギー準位が両方共に正にシフトする．その結果正しい零エネルギー状態は存在しない．このようにWKB近似はトンネル効果を無視した時のn_B, n_Fの見つもりを与える．これはMorse理論におけるMorseの不等式に相当する．

図2のタイプのsuper potentialをもつ超対称量子力学は零エネルギー状態をもたず超対称変換の下で不変な状態$Q|s\rangle=0$ないし$Q^*|s\rangle=0$，が存在しない．ハミルトニアンには構成より超対称なのでこの理論では超対弥性が‘自発的に’破れている．(対称性が自発的に破れるとはハミルトニアンがある対称変換で不変であるにもかかわらず，系の基底状態が対称変換で不変にならない場合を言う)．

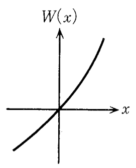

図1

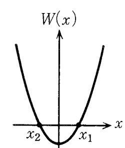

図2

超対称性はそのままの形では自然界に存在しないため(質量の等しいボソンとフェルミオンの対は知られていない)，自発的に破れた形で存在すると期待される．Wittenは超対称性の破れの機構を長く考えていた際，ある時Bottから聞いたMorse理論の話をふと思い出しその関連を見抜いたと言う事である[17]．

§2. Morse 理論

上で議論してきた模型を拡張してMorse理論とのからみ合いを調べてみよう．今，座標をn個，$x^1, x^2, \cdots$,

x^n，導入しこれらがある compact 多様体 M 上の座標を表わす事にする．また対応するフェルミオンを n 個導入して関係

$$\{\psi_i, \psi^{*j}\} = \delta_i^j, \quad \{\psi_i, \psi_j\} = \{\psi_i{}^*, \psi_j{}^*\} = 0 \quad i, j=1, 2, \cdots, n \tag{14}$$

を満たすとする．(添字の上げ下げは M 上の計量 g_{ij} を用いて行なう.)次に supercharge のオペレーターを

$$Q = \sum_{j=1}^{n} \psi^{*j}\Big(\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial h}{\partial x^j}\Big) \tag{15}$$

$$Q^* = \sum_{j=1}^{n} \psi^{j}\Big(\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x^j} + i\frac{\partial h}{\partial x^j}\Big) \tag{16}$$

で定める．関数 $h(x^1, \cdots, x^n)$ は何んでもよいがここでは簡単のため多様体 M の height function ととる事にする．ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}(QQ^*+Q^*Q) &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g(x)^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g(x)^{ij}\frac{\partial h}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial h}{\partial x^j} \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\psi^{*j}\psi^i - \psi^i\psi^{*j})\frac{D^2 h}{\partial x^i \partial x^j} \end{aligned} \tag{17}$$

で与えられる．一方，(15)，(16)は次の様に書き直す事ができる．

$$Q = e^{-h(x)}\Big(\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{n}\psi^{*j}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)e^{h(x)} \tag{18}$$

$$Q^* = e^{h(x)}\Big(\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{n}\psi^{j}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)e^{-h(x)} \tag{19}$$

即ち Q, Q^* はオペレーター，$\frac{1}{i}\sum\psi^{*j}\frac{\partial}{\partial x^j}$，$\frac{1}{i}\sum\psi^{j}\frac{\partial}{\partial x^j}$，を $e^{\pm h}$ で 'conjugate' したものである．今，系の状態空間は次の形の波動関数で張られている．

$$\Phi(x^1, \cdots, x^n)\,\psi^{*j_1}\cdots\psi^{*j_m}\,|0\rangle \tag{20}$$

$|0\rangle$ は全ての種類のフェルミオンが空の状態 $\psi^j|0\rangle=0$，$j=1, 2, \cdots, n$，で $\Phi(x)$ は規格化可能な波動関数である．状態(20)では $j_1, \cdots, j_m\,(m\leqq n)$ 番目のフェルミオンがそれぞれ1つずつつまっておりその他のフェルミオンは空になっている．波動関数(20)にオペレーター $\sum\psi^{*j}\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}$，$\sum\psi^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ をほどこすと

$$\sum_{j=1}^{n}\psi^{*j}\frac{\partial}{\partial x^j}\Phi(x)\psi^{*j_1}\cdots\psi^{*j_m}|0\rangle = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^j}\Phi(x)\psi^{*j}\psi^{*j_1}\cdots\psi^{*j_m}|0\rangle \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\psi^{j}\frac{\partial}{\partial x^j}\Phi(x)\psi^{*j_1}\cdots\psi^{*j_m}|0\rangle = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\psi^{*j_1}\cdots\widehat{\psi}^{*j_k}\cdots\psi^{*j_m}|0\rangle \tag{22}$$

となる($\widehat{\psi}^{*j}$ は ψ^{*j} が欠けている事を意味する)．(21)，(22)はフェルミオンの反可換性，$\psi^{*j}\psi^{*k}=-\psi^{*k}\psi^{*j}\,(j\neq k)$，に注意すると $\Phi(x)$ を M 上の m-form と見なした時，Q, Q^* が外微分作用素 d とその adjoint d^* のように働く事を示している．フェルミオン生成演算子 ψ^{*j} は $dx^j{}_\wedge$ に相当し消滅演算子 ψ^j は dx^j をとり去る操作(interior multiplication)に相当する．又，フェルミオン数は form の次数になる．今

$$Q = \frac{1}{i}e^{-h}de^{h}, \qquad Q^* = \frac{1}{i}e^{h}d^*e^{-h} \tag{23}$$

と表わし conjugation をとる操作は d, d^* の閉(完全)形式を Q, Q^* の閉(完全)形式にうつす事に注意すると M 上の de Rham 理論が導かれる．即わちハミルトニアン $H=\frac{1}{2}(QQ^*+Q^*Q)$ の零エネルギー状態でフェルミオン数 m のものは多様体 M の m 次調和形式に一致する．Witten 指数は m 次の Betti 数を B_m として

$$\text{index} = \mathrm{tr}(-1)^F = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m B_m \tag{24}$$

となり M の Euler 数 $\chi(M)$ に一致する．

$$\mathrm{tr}(-1)^F = \chi(M) \tag{25}$$

次に Witten 指数を WKB 近似で計算してみよう．再びパラメーター ε を導入してハミルトニアンを次の形に書きかえる．

$$\begin{aligned} H_\varepsilon = &-\frac{1}{2}\sum g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\sum g^{ij}\frac{\partial h}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial h}{\partial x^j} \\ &+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\sum(\psi^{*j}\psi^i - \psi^i\psi^{*j})\frac{D^2 h}{\partial x^i\partial x^j} \end{aligned} \tag{26}$$

$\varepsilon\to 0$ で H_ε の低エネルギー状態の波動関数は $h(x)$ の極値に集中する．極値での微係数の行列 $\frac{D^2 h}{\partial x^i\partial x^j}$ (Hessian) を対角化するように座標をとり直すと各極値($x^j=x_0^j$ とする)の近傍でハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H_\varepsilon = &\frac{1}{2}\Big(-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x^{j2}} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{\varepsilon^2}(x^j - x_0^j)^2\Big) \\ &+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{\varepsilon}(\psi^{*j}\psi^j - \psi^j\psi^{*j}) \end{aligned} \tag{27}$$

となる．ただし $\left.\frac{\mathrm{D}^2 h}{\partial x^{j2}}\right|_{\text{極値}} = \lambda_j\,(j=1, 2, \cdots, n)$ である．これは(13)式と同じ形をしている．従って近似的零エネルギー波動関数は

$$\exp\Big\{-\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|(x^j - x_0^j)^2\Big\}\psi^{*j_1}\cdots\psi^{*j_m}|0\rangle \tag{28}$$

で与えられる．ここで $\lambda_{j_1}<0, \cdots, \lambda_{j_m}<0$ その他の λ_i は全て正とする(Hessian が零固有値をもつ場合は除外する)．

Hessian が m 個負の固有値をもつ時 Morse 指数が m の臨界点と呼ばれる．(28)式は WKB 近似において

各 Morse 指数 m の臨界点近傍に局在した m 次の近似的調和型式が存在する事を示している．M 上の Morse 指数が m の臨界点の数を M_m と書くと M_m は $\varepsilon\to 0$ で有限に留まるエネルギー固有値をもつ m 形式の数を与える．従って真の m 次の調和型式の数はこれより少ない．

$$M_m \geq B_m \quad \text{(弱い形の Morse の不等式)} \tag{29}$$

また Witten 指数は WKB 近似で

$$\mathrm{tr}(-1)^F = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m M_m \tag{30}$$

と表わされるが，Morse 理論の基本定理より $\sum(-1)^m \cdot M_m = \sum(-1)^m B_m$．従って正しい値(25)に一致する．

Morse 理論における強い形の不等式は

$$\sum M_m t^m - \sum B_m t^m = (1+t)\sum Q_m t^m \tag{31}$$

で与えられる．ここで $Q_m\,(m=0, 1, \cdots, n)$ は非負の整数である．パラメーター t を $t=-1$ ととると関係式 $\sum(-1)^m M_m = \sum(-1)^m B_m$ が導かれる．よく知られているように(31)式は臨界点のデータが M のホモロジーのモデルを与える事を意味する．即わち各 $m=0, 1, \cdots, n$ に対し Morse 指数 m の臨界点全体で張られる線型空間 X_m を考える($\dim X_m = M_m$)．すると(31)式はあるコバウンダリー・オペレーター $\delta: X_m \to X_{m+1}$ が存在し，δ の定めるコホモロジーの Betti 数が多様体 M の Betti 数と一致する事を意味している．

Witten はコバウンダリー・オペレーターが，量子力学のトンネル効果，即わちインスタントンの作用で与えられる事を示唆した．多様体上の個々の臨界点の局在的なデータのみから定まる M_m は大域的なトポロジーを握え切れず正しい Betti 数を与えないが，これは WKB 近似で各臨界点付近に support をもつ波動関数(28)の重なり合いを無視する事情に対応する．今，互いに指数が 1 だけ異なる隣り合う臨界点を考えると，波動関数の overlap は臨界点を結ぶ steepest descent path に沿って最大となりトンネル効果は gradient flow の方向に沿って生じると考えられる．今，指数 $m+1$ の臨界点 B から指数 m の臨界点 A へ達する最急降下経路 Γ を考え，B における Γ への接ベクトルを v とする．B での Hessian の負の固有ベクトルの張る線形空間を V_B とし v に直交するその部分空間を $\tilde{V}_B$ と呼ぶと Γ にそって $\tilde{V}_B$ が V_A に map される．$\tilde{V}_B$ の向きづけが V_A の向きづけに一致するか否かに従って符号 $n_\Gamma = \pm 1$ を定める．A，B を結ぶ path について和をとって $n(A, B) = \sum n_\Gamma$ とおくとコバウンダリー・オペレーターは

$$\delta(A) = \sum_B n(A, B)|B\rangle \tag{32}$$

で定義される．ここで和は全ての $B \in X_{m+1}$ を渡る．

X_m の元のうち $\delta\delta^* + \delta^*\delta$ で消されるもの全体の数を N_m とすると，M_m を N_m で置き換えて(31)の形の式が成立する．特にインスタントンが WKB 近似での準位の縮退を完全に解く場合には $N_m = B_m$ となりホモロジー論が再構成される．

Morse 理論のコバウンダリー・オペレーターをインスタントンによって構成するアイディアは Witten 以後広く用いられ標準的方法となった．Witten によると Morse 理論との関連は自分自身が supersymmetry の破れを納得のいくよう理解するために考えたもので，数学的応用をもった事は意外だったと言う事である．

§3. 位相的場の理論

過去 2〜3 年の Witten の主要な研究テーマは位相的場の理論(topological quantum field theory)と呼ばれる新しいクラスの場の理論のモデルである．研究動機としては量子重力理論建設の手がかりとして一般共変性をもつ場の量子論の特性や数学的構造の分析を行なう事がある．現在重力場の量子論には極めて深刻な困難があり一般相対性の要請を満たす場の理論の具体例はほとんど知られていないが，将来こうした理論を構築するに当って topological quantum field theory (TQFT) の研究がその指針を与えてくれる可能性がある．

Witten が提案した TQFT には次の 4 種類がある．

1. 4 次元の self-dual Yang-Mills ゲージ理論 [13a]
2. 3 次元の Chern-Simons ゲージ理論 [14]
3. 2 次元の topological σ-模型 [13b]
4. 2 次元重力理論 [15], [16]

3 と 4 のモデルは密接な関係をもっている．topological な場の理論では理論の物理的観測量が種々の topological 不変量を与える．上の 4 つのモデルに対して

1. smooth な 4 次元多様体の不変量，即ち Donaldson 不変量
2. 3 次元多様体中の絡み目の不変量，即ち Jones 不変式とその一般化
3. リーマン面から compact 複素多様体への正則写像のモデュライ空間の位相不変量

4. リーマン面のモデュライ空間の位相不変量

が理論の相関関数として与えられる．このうち2の絡み目の不変量の研究は周知のように3次元トポロジーの研究に大きなインパクトを与えたものである．また4の2次元重力の研究は，去年末センセーションをまきおこしたmatrix模型の厳密解をTQFTの観点から見直したもので，KdV方程式のある種の解がリーマン面のモデュライ空間の交差点数の母関数を与えるという著しい結果を与えた．(Chern-Simonsゲージ理論については深谷氏による詳しい解説[18]を参照されたい．)ここでは紙数も限られているので物理的な観点を中心にtopological σ-モデルを例にとってTQFTの構成を簡単に説明する．

一般に(非線型)σ-模型とはリーマン面Σからあるcompact多様体K(通常Kähler多様体とする)への写像の理論である．Kの局所座標をX^i($i=1, 2, \cdots, \dim K$)とすると，写像$\phi:\Sigma\to K$の下でX^iはΣ上のボゾニックな場$X^i(x^\alpha)$と見なされる(x^α, $\alpha=1, 2$はΣの局所座標)．またKのcotangent bundleをϕでひき戻したもの$\phi^*(T^*K)$の断面がフェルミオンの場$\psi^i(x)$ ($i=1, 2, \cdots, \dim K$)である．

位相的場の理論ではBRS変換と呼ばれる一種のフェルミオニックな対称性が重要な役割を演じる．BRS変換δは場$\{X^j, \psi^j\}$に

$$\delta x^j = i\varepsilon\psi^j, \qquad \delta\psi^j = 0$$
$$(\varepsilon \text{ は反可換な定数}) \tag{33}$$

のように作用し理論のラグランジアンLはこの変換の下で不変である$\delta L=0$．(32)からわかるようにBRS変換は性質$\delta^2=0$をもつ．

経路積分による場の量子論の定式化では理論の相関関数は

$$\langle V\rangle = \prod_i \mathcal{D}X^i\mathcal{D}\psi^i \exp\left(-\int d^2xL\right)V \tag{34}$$

のように定義される．汎関数積分$\prod_i\int\mathcal{D}X^i$は写像$\Sigma\to K$の1つのホモトピークラスについて行なわれる．$V$は$X, \psi$の任意の関数である．特に$V$が‘BRSコバウンダリー’の形，$V=\delta U$，をしている場合($U$は場のある関数)理論のBRS不変性から

$$\langle V\rangle = \langle\delta U\rangle = 0 \tag{35}$$

が導かれる．したがって相関関数はBRSコバウンダリーを無視して定まり物理的観測量はBRSコホモロジークラスとなる．又，位相的場の理論ではラグランジアンはBRS不変であるのみならずそれ自身BRSコバウンダリーであると仮定される．

$$L = \delta W \tag{36}$$

要請(36)より理論の相関関数が位相不変量になる事が導かれる．

topological σ-模型の物理的観測量としては次の形のオペレーターが考えられる．

$$\mathcal{O}_A = A_{i_1\cdots i_n}(X)\,\psi^{i_1}\cdots\psi^{i_n} \tag{37}$$

$\delta\mathcal{O}_A=\partial_{i_1}A_{i_2\cdots i_{n+1}}(X)\,\psi^{i_1}\psi^{i_2}\cdots\psi^{i_{n+1}}$となるのでBRS不変なオペレーター，$\delta\mathcal{O}_A=0$，は$K$上の閉形式に対応する．又，オペレーター$\mathcal{O}_A$は$\Sigma$上の点$x$に依存するが$A$が閉形式の時はこの依存性はBRSコバウンダリーとなる．

$$d\mathcal{O}_A = -\delta\mathcal{O}_A^{(1)},\ \mathcal{O}_A^{(1)} = nA_{i_1\cdots i_n}dX^{i_1}\psi^{i_2}\cdots\psi^{i_n} \tag{38}$$

(dはΣ上の外微分)．又，$\mathcal{O}_A^{(1)}$の外微分もBRS完全形式

$$d\mathcal{O}_A^{(1)} = -\delta\mathcal{O}_A^{(2)},$$
$$\mathcal{O}_A^{(2)} = i\frac{n(n-1)}{\alpha=}A_{i_1}\cdots_{i_n}dX^{i_1}\wedge dX^{i_2}\psi^{i_3}\cdots\psi^{i_n} \tag{39}$$

となる．$\mathcal{O}_A$を改めて$\mathcal{O}_A^{(0)}$と書くと，まとめて関係式

$$0 = \delta\mathcal{O}_A{}^{(0)}, \qquad d\mathcal{O}_A{}^{(0)} = -\delta\mathcal{O}_A{}^{(1)},$$
$$d\mathcal{O}_A{}^{(1)} = -\delta\mathcal{O}_A{}^{(2)}, \qquad d\mathcal{O}_A{}^{(2)} = 0 \tag{40}$$

を得る．

位相不変量は$\gamma_1, \cdots, \gamma_k$を$\Sigma$上の次元$t_1, \cdots, t_k$のサイクルとして

$$\left\langle\sum_{i=1}^{k}V_{A_i}(\gamma_i)\right\rangle, \qquad V_{A_i}(\gamma_i) = \int_{\gamma_i}\mathcal{O}_{A_i}^{(t_i)},$$
$$i=1, 2, \cdots, k \tag{41}$$

で与えられる．(41)は$\{\gamma_i\}$のホモロジー・クラスにしかよらない．

$V_A(\gamma)$はK上のformとして次数n-tをもつが，相関関数(41)は

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i-t_i) = d \tag{42}$$

の時ゼロにならず非自明なtopological invariantを与える．ここでdは正則写像$\phi:\Sigma\to K$のモデュライ空間の次元である．(42)は次のようにして示される．まず(34)の経路積分の表示に戻りパラメーターεを導入してラグランジアンLを$\frac{1}{\varepsilon}L$におきかえてみる．期待値$\langle V\rangle$は位相不変量なのでε依存しない．$\varepsilon\to0$の極限で考えると場Xについての経路積分はラグランジアンの停留値からの寄与で置きかえられる．topological σ-模型のラグランジアンは次の形をもつ事が知られている．

$$L=\frac{1}{2}g_{ij}(X)\partial_\alpha X^i\partial^\alpha X^j+\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}J_{ij}(X)\partial_\alpha X^i\partial_\beta X^j$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{-1}\,\bar{\psi}^\alpha_i(D_\alpha\psi^i+\varepsilon_{\alpha\beta}J^i{}_jD^\beta\psi^j)$$
$$+(\psi,\ \bar{\psi}\ \text{について 4 次の項}) \tag{43}$$

ここで g_{ij}, $J_i{}^j\,(i,j=1,2,\cdots\dim K)$ はそれぞれ K のリーマン計量と複素構造，また $D_\alpha\psi^i$ は ψ^i の共変微分 $(D_\alpha\psi^i=\partial_\alpha\psi^i+\partial_\alpha X^k\Gamma^i_{kl}\psi^l$, Γ^i_{kl} は g_{ij} から定まる接続) である．(43) を X について変分すると正則写像の式

$$\partial_\alpha X^i+\varepsilon_{\alpha\beta}J^i{}_j\partial_\beta X^j=0 \tag{44}$$

を得る．又，正則写像のモデュライを調べるために (44) 式で X を微小変化させると

$$D_\alpha\Delta X^i+\varepsilon_{\alpha\beta}J^i{}_jD^\beta\Delta X^j\equiv\bar{D}_\alpha\Delta X^i=0 \tag{45}$$

を得る．上式のオペレーター $\bar{D}$ は (42) 式第 2 項に現れるものと一致している．そこで正則写像のモデュライ空間 $\mathscr{M}$ の次元 d はオペレーター $\bar{D}$ と $\bar{D}^*$ の Kernel の次元の差に等しい(Ker $\bar{D}=H^0(\Sigma,\ \phi^*(T^*K))$, Ker $\bar{D}^*=H^1(\Sigma,\ \phi^*|\,T^*K))$ の関係がある)．簡単の為 Ker $\bar{D}^*=0$ の場合を考えると dim Ker $\bar{D}=\dim\mathscr{M}=d$ となり，フェルミオンの場 $\{\psi^i\}$ は作用素 $\bar{D}$ について d 個の零固有値をもつ．今，反可換な変数に関する積分の定義より

$$\Pi\int D\psi^iD\bar{\psi}^\alpha_i\exp\left(-\frac{\sqrt{-1}}{2}\int d^2x\bar{\psi}^\alpha_i\bar{D}_\alpha\psi^i\right)$$
$$=\text{const}\det\bar{D}^*\bar{D} \tag{46}$$

が導かれるが，$\bar{D}$ が零固有値をもつため (45) はゼロとなる．ゼロにならない量は (46) の integrand に $\{\psi^i\}$ についての d 次の多項式を挿入したものである．これより (42) が導かれる．

特に $t_i=0\,(i=1,\cdots,k)$ ととると次の関係式

$$\langle\mathcal{O}_{A_1}(x_1)\cdots\mathcal{O}_{A_k}(x_k)\rangle=\#(L_1\cap L_2\cap\cdots\cap L_k) \tag{47}$$

が成り立つ．ここで L_i は $\mathscr{M}$ の部分空間で次のような正則写像の集合である，$L_i=\{\phi\in\mathscr{M}|\phi(x_i)\in M_i,\ i=1,\cdots,k,\ M_i$ は A_i に dual な K 上の $(\dim K-n_i)$ 次の cycle$\}$．(46) の右辺は部分多様体 $\{L_i\}$ の $\mathscr{M}$ 上での交点数をあらわす．特に正則写像が constant map に homotopic な場合には $L_i=M_i\,(i=1,\cdots,k)$ となり (47) の右辺は

$$\#(M_1\cap M_2\cap\cdots\cap M_k)=\int_K A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k \tag{48}$$

に等しい．

このように TQFT の相関関数はモデュライ空間や多様体上の交点理論を再現する．特に 2 次元重力理論ではリーマン面へのモデュライ空間が問題となるが，matrix 模型と TQFT との等価性から (47) の左辺が matrix 模型の結果を用いて表わされ KdV 方程式の解の展開係数で表示される．

以上，位相的場の理論に関してそのあらすじを述べたが TQFT の方法は未だ開発途上であり，その物理的・数学的な全体像は明らかになっていない．これからも多くの驚くべき発見が期待される．

Witten は未だその創造力のピークにありこれからも物理学と数学の両方の世界に驚きと興奮を巻き起こし続けるであろう．このような研究者は再び現われないかも知れない．

Witten 氏の代表的論文

[1] E. Witten, Exact Multi-Instanton Solutions of Classical Yang-Mills Theory, Phys. Rev. Lett. 38 : 121, 1977.
[2] E. Witten, A Supersymmetric Form of the Non-linear sigma Model in Two-Dimensions, Phys. Rev. D16 : 2991, 1977.
[3] E. Witten, Baryons in the 1/N Expansion, Nucl. Phys. B160 : 57, 1979.
[4] E. Witten, A Simple Proof of the Positive Energy Theorem, Commun. Math. Phys. 80 : 381, 1981.
[5. a] E. Witten, Global Aspects of Current Algebra, Nucl. Phys. B223 : 422, 1983.
[5. b] E. Witten, Current Algebra, Baryons, and Quark Confinement, Nucl. Phys. B223 : 433, 1983.
[6] E. Witten, Nonabelian Bosonization in Two-Dimensions, Commun. Math. Phys. 92 : 455, 1984.
[7. a] L. Alvarez-Gaume, E. Witten, Gravitational Anomalies, Nucl. Phys. B234 : 269, 1984.
[7. b] E. Witten, Global Gravitational Anomalies, Commun. Math. Phys. 100 : 197, 1985.
[8. a] E. Witten, Dynamical Breaking of Supersymmetry, Nucl. Phys. B188 : 513, 1981.
[8. b] E. Witten, Constraints on Supersymmetry Breaking, Nucl. Phys. B202 : 253, 1982.
[9] E. Witten, Supersymmetry and Morse Theory, J. Diff. Geom. 17 : 661, 1982.
[10. a] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger, and E. Witten, Vacuum Configurations for Superstrings, Nucl. Phys. B258 : 46, 1985.
[10. b] A. Strominger, E. Witten, New Maniforlds for Superstring Compactification, Commun. Math. Phys. 101 : 341, 1985.
[10. c] E. Witten, New Issues in Manifords of $SU(3)$ Holonomy, Nucl. Phys. B268 : 79, 1986.
[11. a] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa, E. Witten,

Strings on Orbifolds, Nucl. Phys. B261 : 678, 1985.
[11. b] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa, E. Witten, Strings on Obifolds. 2, Nucl. Phys. B274 : 285, 1986.
[12. a] E. Witten, Noncommutative Geometry and String Field Theory, Nucl. Phys. B268 : 253, 1986.
[12. b] E. Witten, Interacting Field Theory of Open Superstrings, Nucl. Phys. B276 : 291, 1986.
[13. a] E. Witten, Topological Quantum Field Theory, Commun. Math. Phys. 117 : 353, 1988.
[13. b] E. Witten, Topological Sigma Models, Commun. Math. Phys. 118 : 411, 1988.
[14] E. Witten, Quantum Field Theory and the Jones Polynomial, Commun. Math. Phys. 121 : 351, 1989.
[15. a] E. Witten, On the Structure of the Topological Phase of Two-Dimensional Gravity, Nucl. Phys. B340 : 281, 1990.
[15. b] R. Dijkgraaf, E. Witten, Mean Field Theory, Topological Field Theory, and Multimatrix Models, Nucl. Phys. B342 : 486, 1990.
[16] E. Witten, Two Dimensional Gravity and Intersection Theory on Moduli Space, Preprint IASN=HEP-90/45, May, 1990.
[17] E. Witten, インタビュー, 1990年8月.
[18] 深谷賢治, E. Witten 氏の業績 II.
(えぐち とうる・東京大学理学部物理)

E. Witten 氏の業績 II

深 谷 賢 治

§1. 序

今回の E. Witten 氏(以後敬称略)のフィールズ賞受賞はいろいろな意味で注目すべきできごとである. その一つの理由は Witten が物理学者であることである. 以前にも物理学者が数学に転じすぐれた数学上の業績を挙げた例は多い. それが Witten の場合とちがうのは, 彼らは数学者に転向して業績を挙げたのであって, その物理の素養は意味深い問題を発見する過程で生かされてはいても, 彼らの仕事はあくまで数学者と同じやり方で数学のわくの中でなされている点である. この点, Witten は現在でもあくまで物理学者であり, 数学上の業績も, 物理学者としての立場で, 物理の手法を用いて, 数学のわくの外で, 挙げられている. そのような業績が数学に対してフィールズ賞受賞が当然であるような莫大な影響を与えるようになっているという状況は20世紀になって現代数学が確立して以来始めてであろう.

聞くところによると, いくつかの素粒子論の研究室では2, 3ヶ月に1度コピーの使用量が突然多くなる日があり, それは Witten のプレプリントが到着した日であるという. 数学の研究室では, Witten のプレプリントの殆んどが解読不能であるので, そういうことはないが, ここ数年の間に, Witten が何か新しいことを言い出したということが伝わり, 面白そうな内容なのによく分らず, 物理学者に聞きに行ったりなどしておろおろする, といった経験を何度もした. Witten がいなければこの数年間の幾何学は実にさびしかっただろうと思う.

物理学と数学の接近がいわれてひさしいが, Witten はそれを象徴する人物であり, 数学の中ではその影響は特に幾何学において著しい. 物理学特に場の量子論が幾何学に大きな影響をもつようになった背景には, 空間全体にかかわる大域的な性質が場の理論においても大きな意味をもつことが発見されたことがあるように思われる. 一昔前の印象では, 物理屋さんが興味をもつのは座標を入れてテンソル計算して出てくる式だけで大域的な不変量などは数学者のお遊びぐらいに思っているのではないか, と感じていたのであるが, 最近ではそんな印象はけしとび大域幾何学は場の理論での日常語になりつつある. さらに Witten にいたっては物理的なやり方で, 位相幾何学の新しい定理を予言したりさえしている.

空間全体に関わる大域的な性質を研究する事は, 今世紀初頭の, '物理学と数学の不幸な別れ', 以後に幾何学の主流になった問題意識であると思われるが, 再会の時である今その物理学上の意味が発見されているのであろう.

以上とりとめのない感想を書いてしまったが, Witten の仕事の, 幾何学上の, 筆者なりの, 位置づけである.

さて, Witten の幾何学上の仕事について述べるが,