On the structural stability of differentiable mappings

パリ大学　Henri Cartan　述
東京都立大学　福田拓生記

記録者注.　標題の背景について付記しておく. ‘微分可能写像の構造的安定性’という問題は微分位相幾何の一分野の大きな懸案であった問題である. この分野は, H. Whitney, R. Thom 等が開発・発展させたもので, 微分可能写像(特にその特異点)を研究対象とする. 写像が**安定している**とは, あらっぽく言えば, その写像を少し変形してもその位相的性質が変らないことである.

このような写像であれば考察するのに何らかの手段がある……, また少し変形すれば全く様相が変る写像は(それが非常に困難であるがゆえに)今のところ研究の対称からはづそう……, まさにこのような立場から,‘安定しているという性質は一般的であるか’という問題が必然的に出てくる. すなわち,‘ほとんどすべての写像は安定しているか’という写像空間の構造上の興味と共に, この問題は‘安定している写像を考察することが写像一般をほぼ考察することになるか’どうかの保障の問題である.

J. Mather は[1]～[6]においてこの問題に決定的な解答を与えた. H. Cartan 教授の講演は 300 頁に余る J. Mather の論文の紹介である. なお[1]は **Weierstrass** および **Malgrange** の**準備定理**の証明の簡略化で有名である.

講演要旨.　講演は次の三つの部分よりなる.

1. stable maps and infinitesimally stable maps.
2. Classification of stable germs.
3. Transversality.

1. stable maps and infinitesimally stable maps.

1.1.　考える多様体はすべて有限次元, C^∞-級, また写像もすべて C^∞-級とする. 写像 $f: X\to Y$ 全体のなす集合を $C(X, Y)$ であらわし, X から Y への order k の jet のなす集合を $J^k(X, Y)$ であらわす. $J^k(X, Y)$ は自然な位相をもつ. また $f: X\to Y$ に対し, その $\boldsymbol{k}$**-拡大** $J^k(f): X\to J^k(X, Y)$ が自然に定義される.

定義.　$J^k(X, Y)$の開集合 U に対して, $J^k(f)(X)\subset U$ なる $f\in C(X, Y)$ の集合を $W(U)$ であらわす. 集合族 $\{W(U)\}$ は $C(X, Y)$ の位相, われわれはそれを $\boldsymbol{C^k}$**-fine 位相**とよぶ, を定める. C^k-fine 位相は自然に $\boldsymbol{C^\infty}$**-fine 位相**を導く. 以後 C^∞-位相を用いる.

定義.　$f\in C(X, Y)$ が**安定している** (stable) とは, f の近傍 $V\subset C(X, Y)$ が存在して, 任意の $g\in V$ に対して, 微分同相 $h_1\in \mathrm{Diff}\, X$ および $h_2\in \mathrm{Diff}\, Y$ が存在して $g=h_2\circ f\circ h_1$ となるときにいう.

1.2.　TX で X の接バンドルをあらわす. $\Theta(X)$ で TX の sections のなす $C(X)$-加群をあらわす, ここに $C(X)$ は X 上の関数のなす環である. $f: X\to Y$ に対して $\Theta(f)$ で $f^*(TY)$ の sections のなす $C(X)$-加群をあらわす.

定義.　$f: X\to Y$ に対して

$$\begin{cases} tf: \Theta(X)\to\Theta(f) \\ \omega f: \Theta(Y)\to\Theta(f) \end{cases}$$

を $tf(s)=Tf\circ s$ および $\omega f(v)=v\circ f$, $s\in\Theta(X)$, $v\in\Theta(Y)$, で定義する. ただし $Tf: TX\to TY$ は f の differential である.

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "Tf"] & TY \\ X \arrow[u, "s"] \arrow[ur, shift left, "tf(s)"] \arrow[ur, shift right, "\omega f(v)"'] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

定義.　$f: X\to Y$ が **infinitesimally stable** とは $\Theta(f)=tf(\Theta(X))+\omega f(\Theta(Y))$ のときにいう.

定理 1.　Proper な写像 f に対して次の二つの条件は同値である.

(a)　f は stable

(b)　f は infinitesimally stable

1.3.　定理1の証明を手短かに説明する (完全な証明は Mather の論文で 200 頁を起える). 次の命題は写像空間の間の写像の連続性に関して非常に有効である.

命題.　1)　$C_{pr}(X, Y)=\{f\in C(X, Y): f \text{ proper}\}$ は $C(X, Y)$ の開集合である.

2) 合成：$C_{pr}(X, Y)\times C(Y, Z)\to C(X, Y)$, $(f, g)\to g\circ f$ で定義，は連続である.

さて定理の証明は，次の新しい条件(a′),(a″)を導入し，(b)⇨(a″), (a″)⇨(a′), (a′)⇨(a), (a)⇨(b) の順で行なわれる．(a″)⇨(a′), (a′)⇨(a) は trivial である.

条件 (a′). f の近傍 $V\subset C(X, Y)$ と連続写像 $G: V\to \mathrm{Diff}\ X$ および $H: V\to \mathrm{Diff}\ Y$ が存在して $G(f)=\mathrm{id}_X$, $H(f)=\mathrm{id}_Y$, および $f'=H(f')\circ f\circ G(f')$ が任意の $f'\in V$ に対して成り立つ.

条件 (a″). f の近傍 V と連続写像 $G: V\to C(X\times I, X)$ および $H: V\to C(Y\times I, Y)$ が存在して次の条件をみたす.

1) $G_t\in \mathrm{Diff}\ X$, $H_t\in \mathrm{Diff}\ Y$.

2) $f'=H_1(f')\circ f\circ G_1(f')$, $\forall f'\in V$.

3) $H_0(f')=H_t(f)=\mathrm{id}_Y$, $G_0(f')=G_t(f)=\mathrm{id}_X$, $\forall t\in I$, $\forall f'\in V$.

(b)⇨(a″) の証明． f から f' へのホモトピー

$$f_t(x)=\gamma(f(x), f'(x), t)$$

を考える．ここに $\gamma(p, q, t)$ は $\gamma(p, q, 0)=p$, $\gamma(p, q, 1)=q$ なる唯一の測地線である．すると $\zeta_t=\partial f_t/\partial t$, $(at,\ t\in I\in\Theta(f))$.

次に Mather の意味での**強い Malgrange の準備定理**と条件(b)を使うことにより，各 $t\in I$ に対して，$\zeta_t=(tf_t)\xi_t+(\omega f_t)\eta_t$ をみたす $\xi_t\in\Theta(X)$, および $\eta_t\in\Theta(Y)$ が存在することが証明できる．ξ_t, η_t はそれぞれ微分同相 $H_t: X\to X$, $G_t: Y\to Y$ を定めるが，これらが (a″) のもとめるものである．$G(f')$ および $H(f')$ をおのおの，ξ および η の1径数変換群とすれば，それらは (a″) の G およびHを定義する． (Q.E.D.)

注意. $C(X, Y)$ には $\mathrm{Diff}\ X\times\mathrm{Diff}\ Y$ が作用するが，f の orbit を $O(f)$ であらわすとき，条件 (a′) は次の命題を導く.

命題. stable な f に対して $\mathrm{Diff}\ X\times\mathrm{Diff}\ Y\to O(f)$ は局所自明なファイバーバンドルである.

2. Classification of stable germs.

次に微分可能写像 $f: X^n\to Y^p$ の局所的な特性は f の $p+1$ 階までの偏微係数で定まること(定理2, §2.2)をみる．そのために写像芽の概念を導入する.

2.1. $S\subset X$ を有限部分集合，$y\in Y$ とする．写像族$C((X, S), (Y, y))=\{f\in C(X, Y): f(S)=y\}$ に次の同値関係を入れる；$f, g\in C((X, S), (Y, y))$ は S のある近傍 W に対して $f|W=g|W$ となるときに同値という．同値類のおのおのを**写像芽** (map germ) といい，記号 $f:(X, S)\to(Y, y)$ であらわす.

$C_S(X)$ を X 上の関数の S での芽のなす環，$C_y(Y)$ も同様，と定義する．そのとき §1.2 で定義したと同様に

$\Theta_S(X)=TX$ の sections の S での芽のなす C_S-加群,

$\Theta_y(Y)=$同様,

と定義する．そのとき，写像芽 $f:(X, S)\to(Y, y)$ に対して $\Theta_S(f), tf_S: \Theta_S(X)\to\Theta_S(f), \omega f_y: \Theta_y(Y)\to\Theta_S(f)$ が §1.2 と同様に定義できる.

定義. 写像芽 $f:(X, S)\to(Y, y)$ が **infinitesimally stable** であるとは，次の等式が成り立つときにいう：

$$\Theta_S(f)=tf_S(\Theta_S(X))+\omega f_y(\Theta_y(Y)).$$

次の命題(証明は trivial ではない)が成り立つ.

命題. 写像芽 $f:(X, S)\to(X, y)$ が inf. stable であるための必要十分条件は，次の等式が成り立つことである；

$$\Theta_S(f)=tf(\Theta_S(X))+\omega f_y(\Theta_y(Y))+(f^*(\mathcal{M}_y)+\mathcal{M}_S^{p+1})\Theta_S(f).$$

ここに，$p=\dim Y$, $\mathcal{M}_y$ は $C_y(Y)$ の極大イデアル，$\mathcal{M}_S$ は S で消える芽のなす $C_S(X)$ のイデアル.

2.2.

定義. 写像芽 $f:(X, x)\to(Y, y)$ に対して，

$$Q(f)=C_x(X)/f^*(\mathcal{M}_y)C_x(X),$$

$$Q_k(f)=Q(f)/\mathcal{M}_{Q(f)}^{k+1},$$

とおく．ここに $\mathcal{M}_{Q(f)}$ は $Q(f)$ の極大イデアル.

次の定理は $Q_{p+1}(f)$ が f を特性づけることを主張する(証明は略).

定理 2. f, f' を inf. stable 写像芽とする．もし，$Q_{p+1}(f)\approx Q_{p+1}(f')$ (R-代数として同型)ならば，f と f' は**微分同相**である(ここに微分同相とは，微分同相の芽 h_1, h_2 が存在して $f'=h_2\circ f\circ h_1$ が成り立つことである．また $p=\dim Y$).

2.3. 例.

例 1. 定値写像芽は stable でない.

例 2. 次の写像芽は stable である.

（1） $(R,0)\to(R,0): x\to x^2$,

（2） $(R^n,0)\to(R,0): x\to\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i^2,\quad \varepsilon_i=\pm1$,

（3） $(R^2,0)\to(R^2,0): \begin{cases} y_1=x_1 \\ y_2=x_1x_2-x_2^3. \end{cases}$

3. Transversality.

最後に，安定写像の集合が $C(X, Y)$ で稠密になるための条件について述べよう．結論からいうと，$n=\dim X$ と $p=\dim Y$ の関数 $\sigma(n,p)$ が与えられ，それが稠密になる必要十分条件は $\sigma(n,p)>n$ である．

さて，$J^k(n,p)$ を原点を原点にうつす R^n から R^p への k-jet の集合とする．§2.1 の命題により，$k\geqq p+1$ ならば，$z\in J^k(n,p)$ の代表の写像芽が inf. stable であるかどうかは全く z にのみ依存する．そこで次の定義は意味をもつ．

定義. $z\in J^k(n,p)$, $k\geqq p+1$, が **inf. stable** とは，z の代表の写像芽が inf. stable のときにいう．

inf. unstable jet $z\in J^k(n,p)$ の集合を Σ^k であらわす．次の命題を得る．

命題. Σ^k は $J^k(n,p)$ の中の代数的集合である．

Whitney により，代数的集合は有限個の多様体の和集合に分割 (**stratification**) されることが知られている．ゆえに代数的集合に対しても，**Thom の横断性** (Transversality) **定理**が使える．このことを使うことにより次の定理を得る．

定理 3. stable な写像が稠密に存在するための必要十分条件は，codim Σ^k in $J^k(n,p)>n$ である．

さらに Mather は $J^k(n,p)$ の中に他の代数的集合 $\Pi^k(n,p)$ を定義し，その codimension を $\sigma(n,p)$ とおいて，性質 '$\sigma(n,p)>n \Longleftrightarrow$ codim $\Sigma^k>n$' を得ている．[6]において実際に $\sigma(n,p)$ を計算している．

文　献

J. Mather

[1] Stability of C^∞ Mappings : I. Ann. of Math. **87** (1968), 89-104.

[2] ――――― : II. Ann. of Math. (1969), 254-291.

[3] ――――― : III. to appear in Pub. Math. I.H.E.S.

[4] ――――― : IV. ―――――.

[5] ――――― : V. ―――――.

[6] ――――― : VI. ―――――.

（この講演は 1969 年 4 月 1 日虎の門ホールにおいて公開講演として行なわれた.）