

結び目理論の科学への応用
一プリオン分子モデルとところのモデル
を中心として

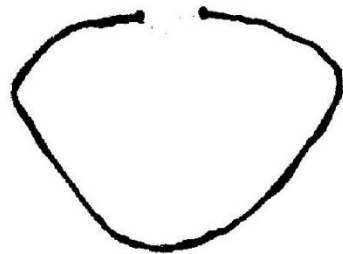
河内明夫

2009年9月23日

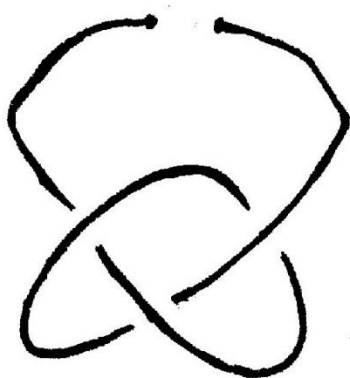
1. 結び目, 絡み目, 空間グラフの数学とその科学的意味を考える
2. プリオン蛋白分子モデルの結び目理論
3. こころのモデルの結び目理論
 - こころの有り様を図示する試み

1. 結び目, 絡み目, 空間グラフの数学とその科学的意味を考える

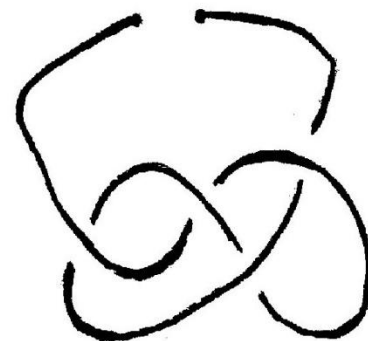
結び目 = 空間内に置かれた1本のひもの状態



結ばれていない

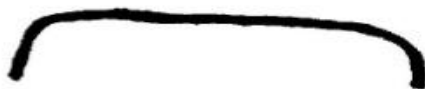


ひとえ結び

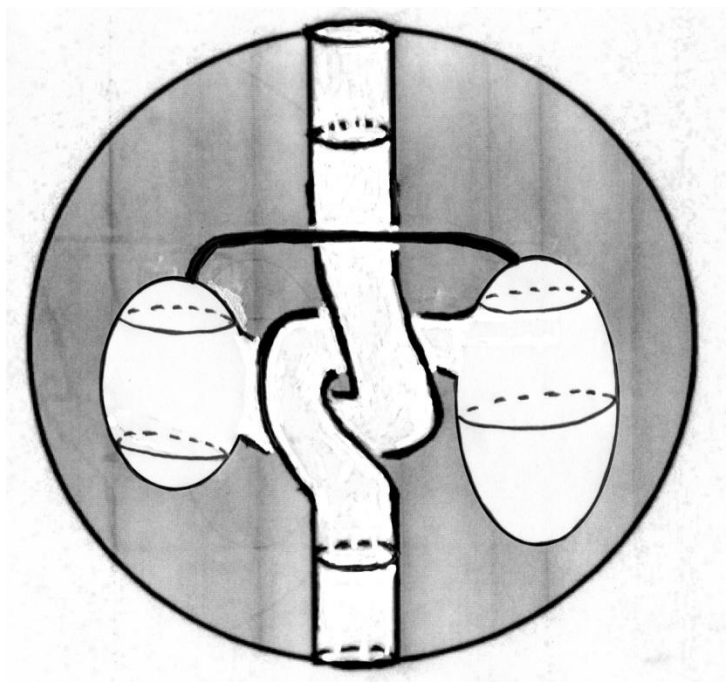
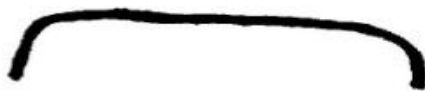


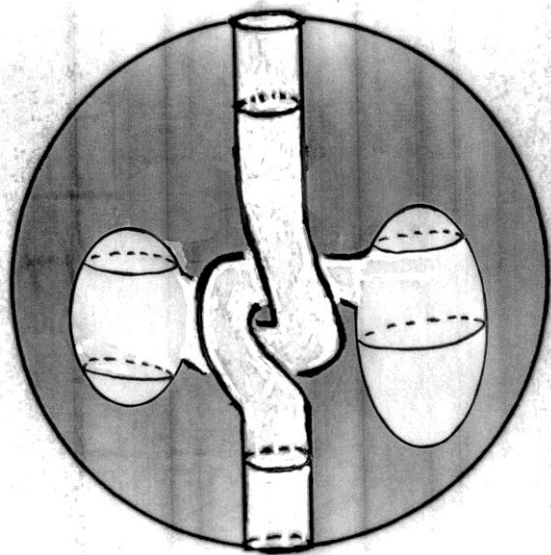
8の字結び

☆両端のあるひもでは、それを含む領域も考える

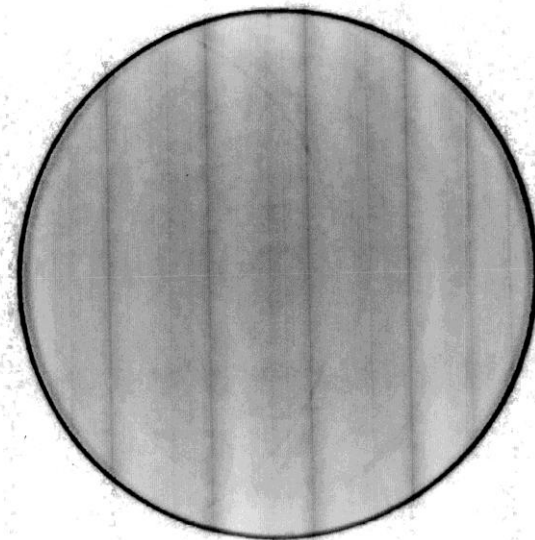


☆両端のあるひもでは、それを含む領域も考える



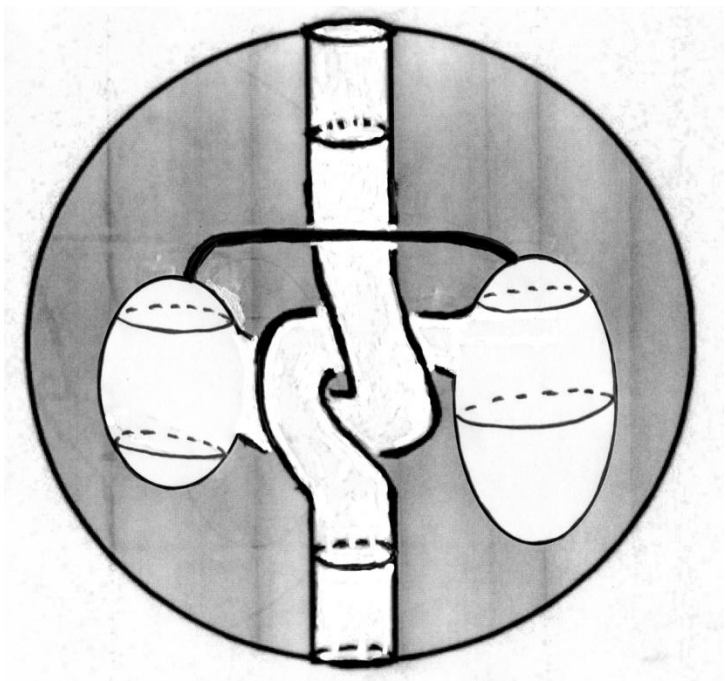


=

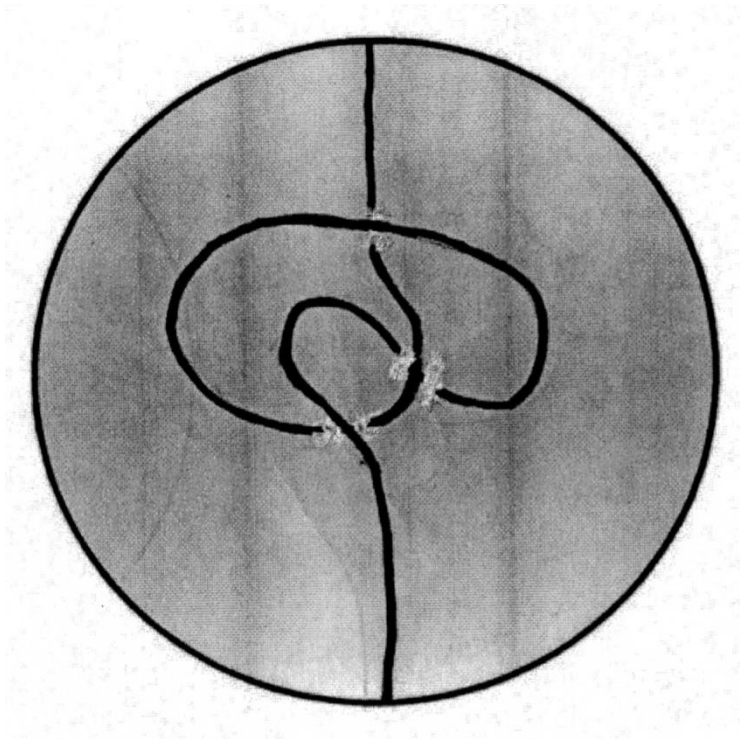


**位相的には同じ
(連続的な1対1の対応がある)**

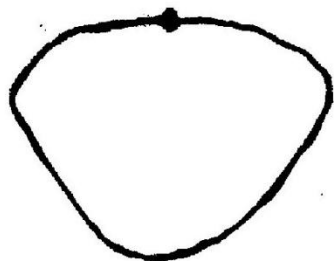
☆両端のあるひもでは、それを含む領域も考える



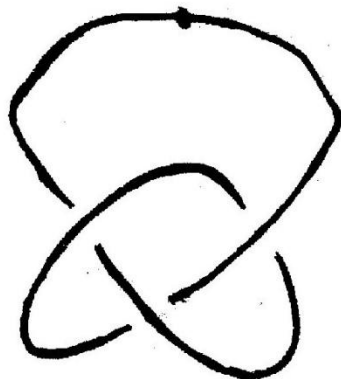
=



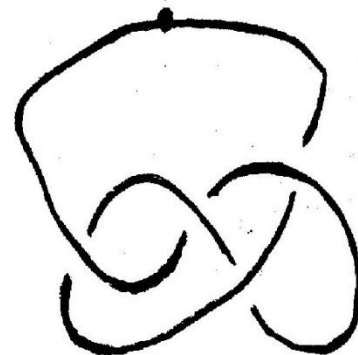
☆ふつうは、結び目は輪として考える



自明な結び目



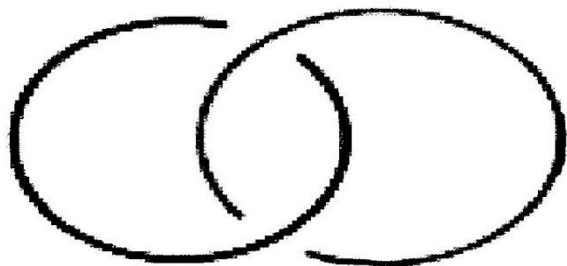
三葉結び目



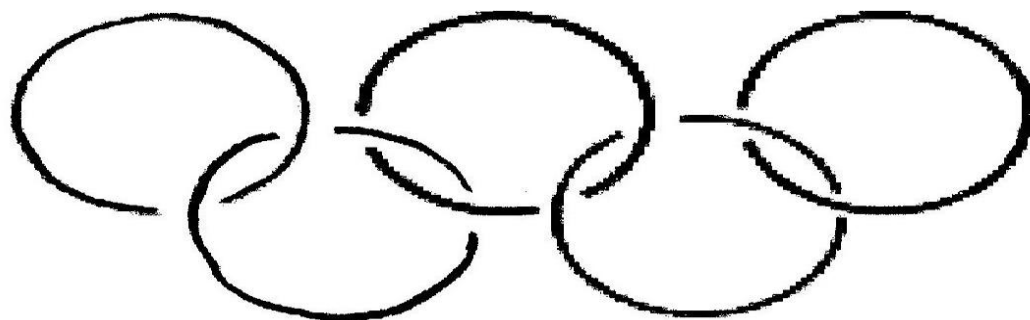
8の字結び目

絡み目

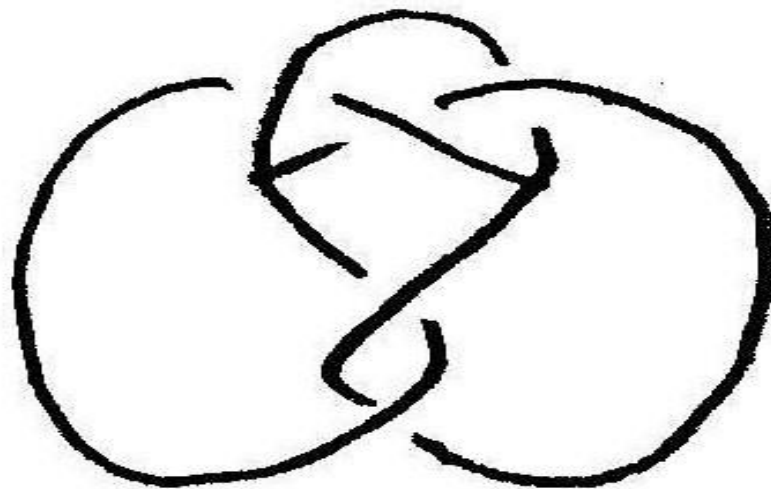
=いくつかの閉じたひもの結び目の集まり



ホップの絡み目



空間グラフ



樹下の θ 曲線

歴史的には
結び目理論はトポロジー(位相幾何学)の分野
と考えられてきた

その理由:
連続的な1対1の対応という同型の概念の位相
の言葉による定義

定義

2つの与えられた結び目(あるいは絡み目, 空間グラフ)が同じ(同型)である

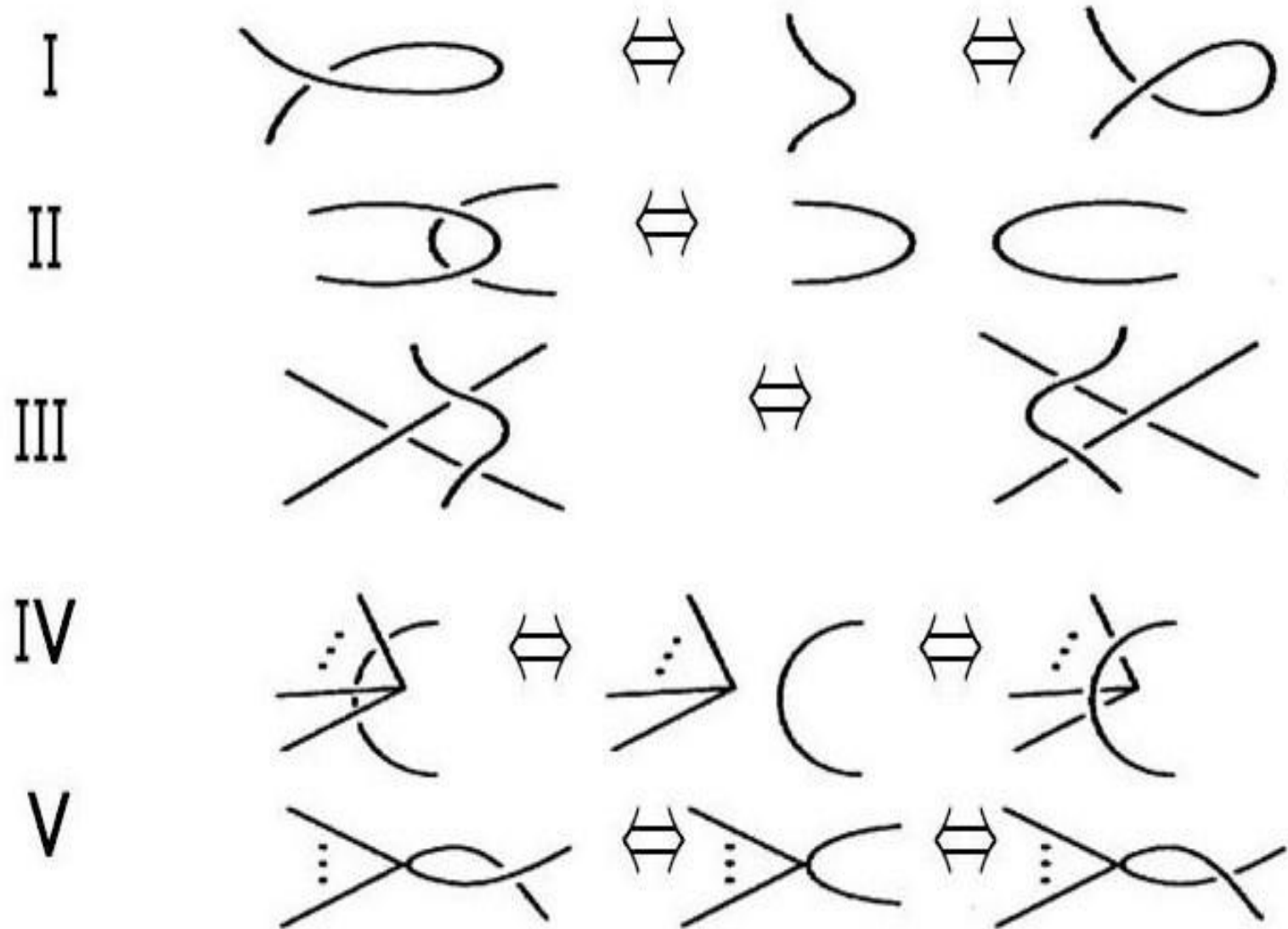
=

それらを(伸び縮みや変形可能なひもとみなして)あやとりの要領で同じ形に変形できる

=

それらを(伸び縮みや変形可能なひもとみなして)有限回のライデマイスター移動により移りあう

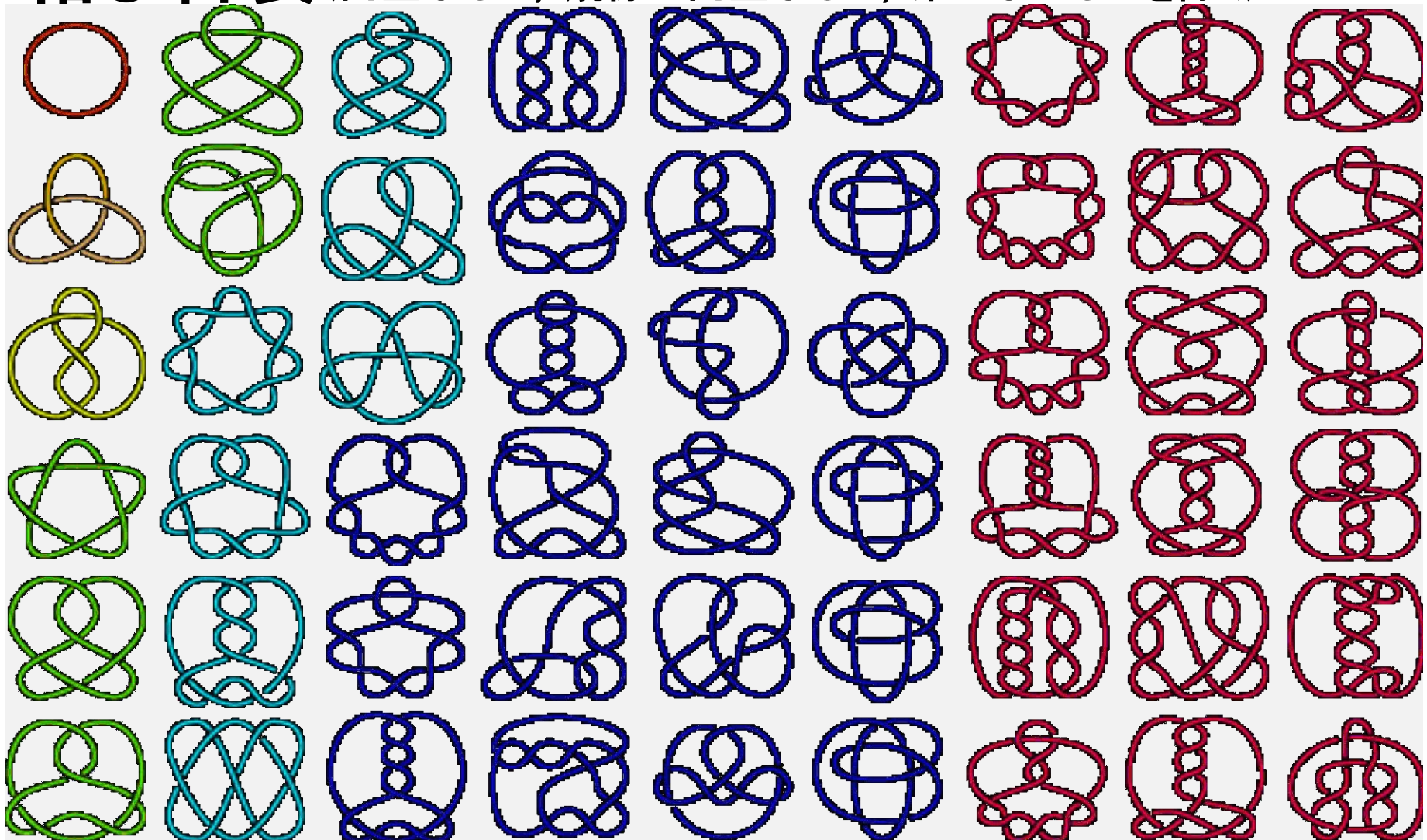
ライデマイスター移動



数学研究としての結び目理論の研究目的

- (1) どのような結び目・絡み目があるかを研究し、それらを重複なしにリストアップすること
- (2) 2つの与えられた結び目・絡み目が、同じ(同型)かどうかを判定すること

結び目表 (同型なもの, 鏡像に同型なもの, 素でないものを除く)

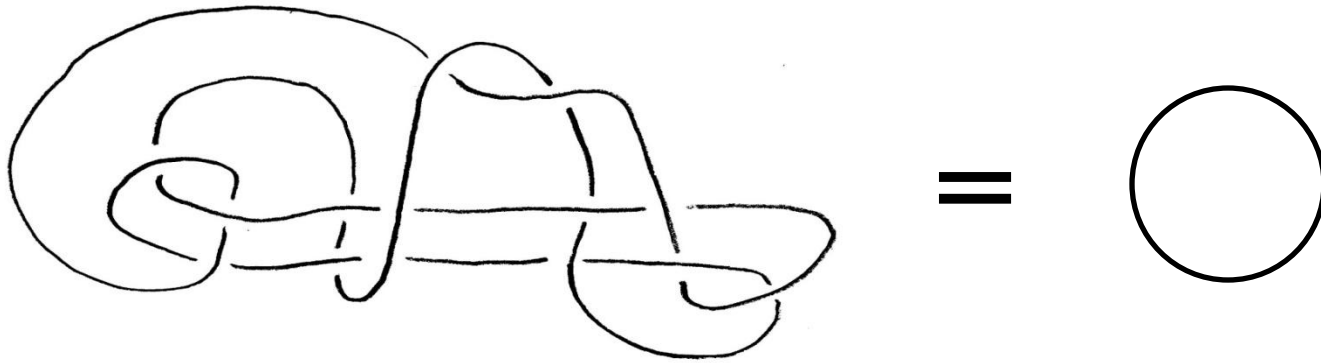


最小交差数が同じ結び目は同じ色で示してある

☆ 自明な結び目かどうかの判定だけでも
難しい

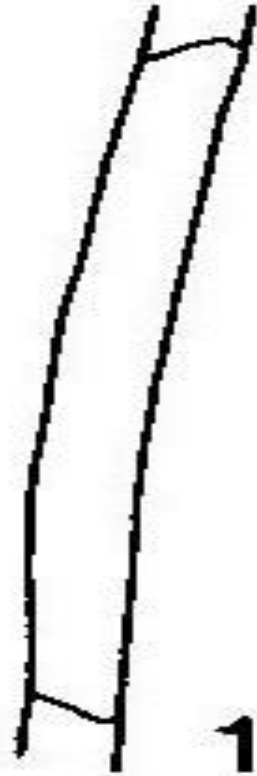


数学による考察(位相不変量)が必要



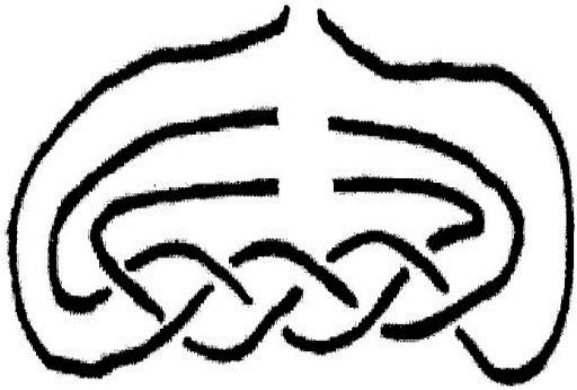
この結び目は、自明な結び目を表しているが、もしこの事実を予め知っているのであれば、どのようにして判定するか。

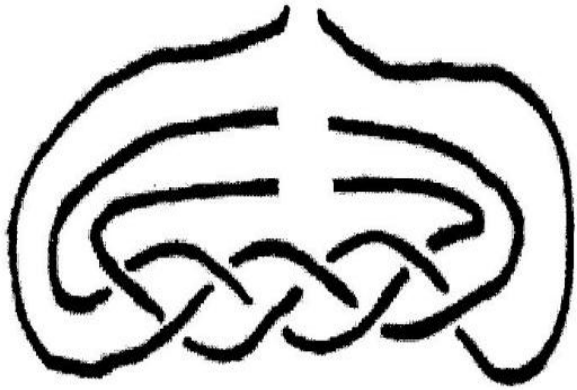
- ・例：三つ編み(縄文土器にも見られる)

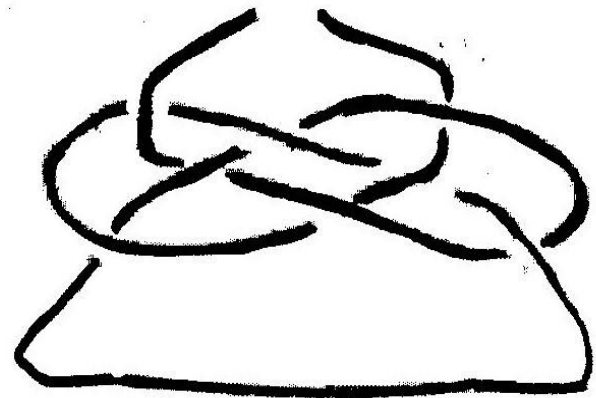
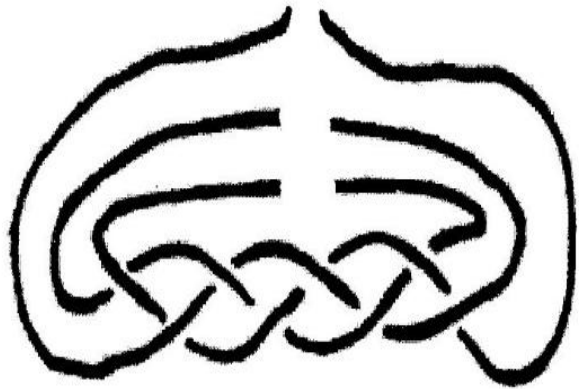


170

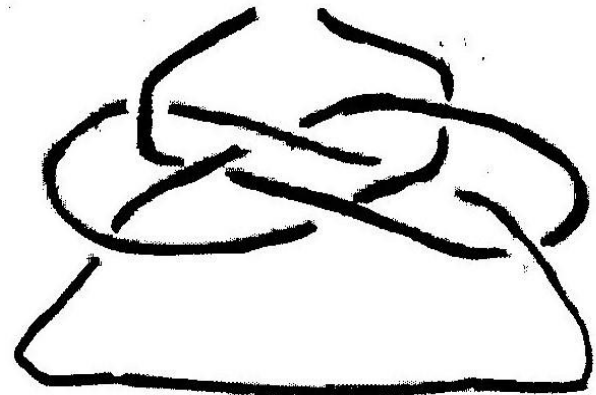
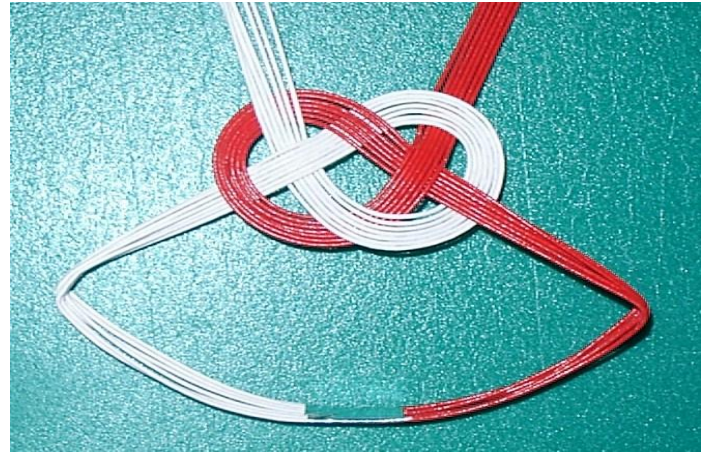
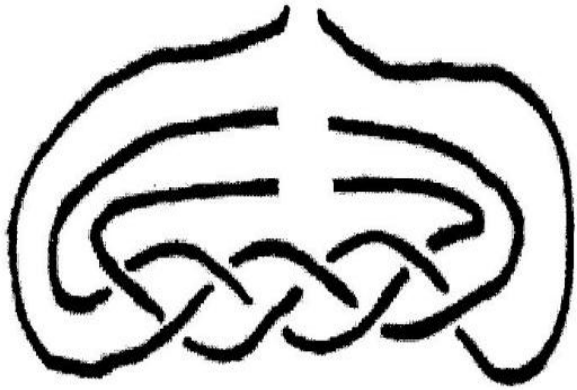
北海道恵庭市ユカンボシE8遺跡B地点(縄文時代前期)



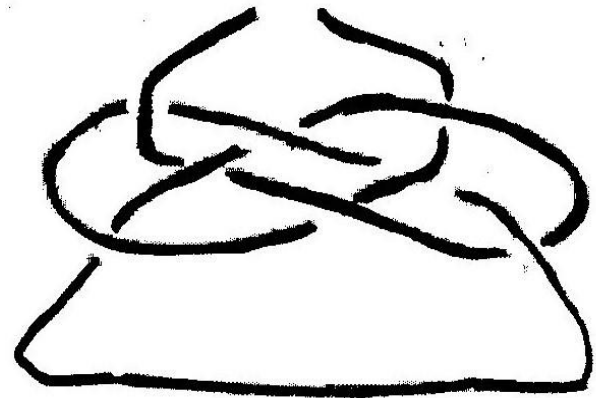
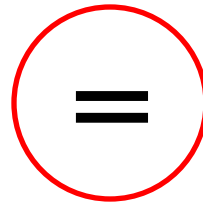
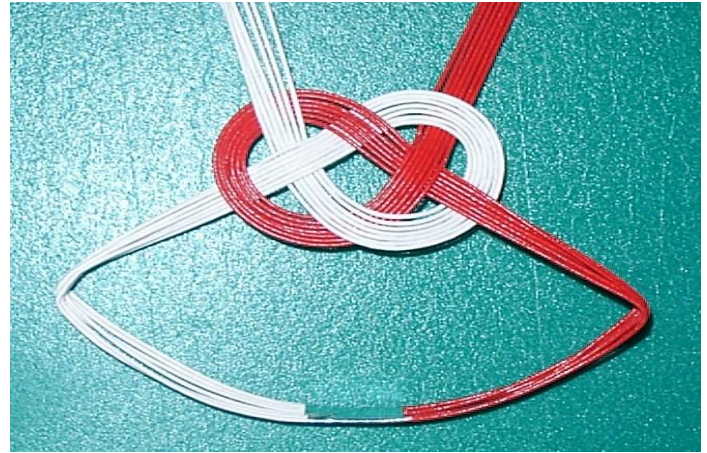
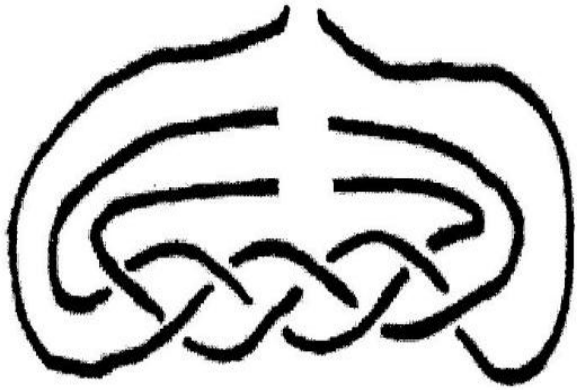




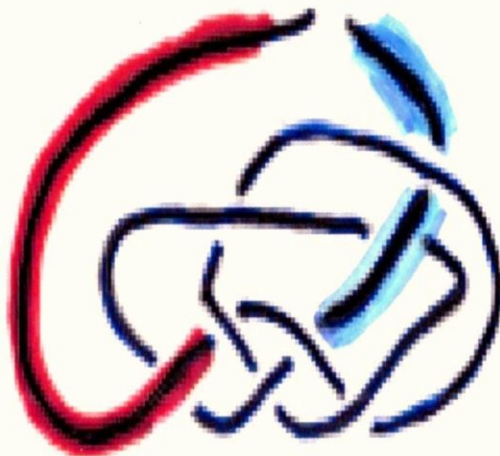
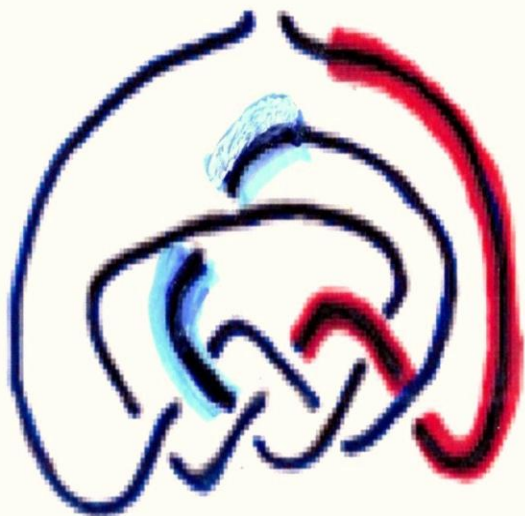
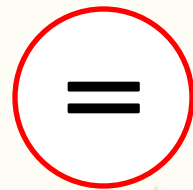
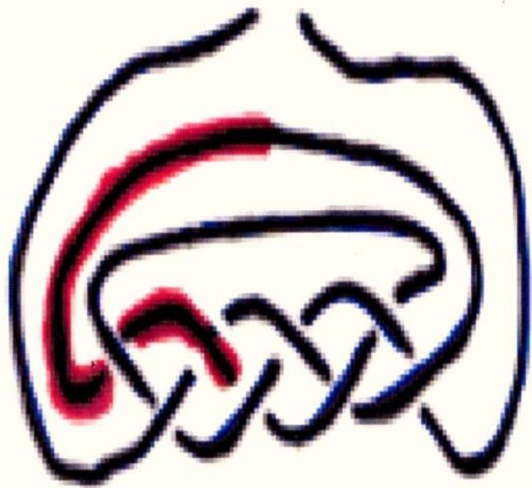
「水引き」の結び目(あわび結び)



「水引き」の結び目(あわび結び)



「水引き」の結び目(あわび結び)



☆ 科学における結び目とは何か

- ・ **数学**ではひもは**線**
- ・ **科学**においては、**ひもとみなせるものがひも**



(この図の対象は、絡み目と考えることもあるし、
また1本のひもと考えることもある)

☆ 科学における結び目の研究対象

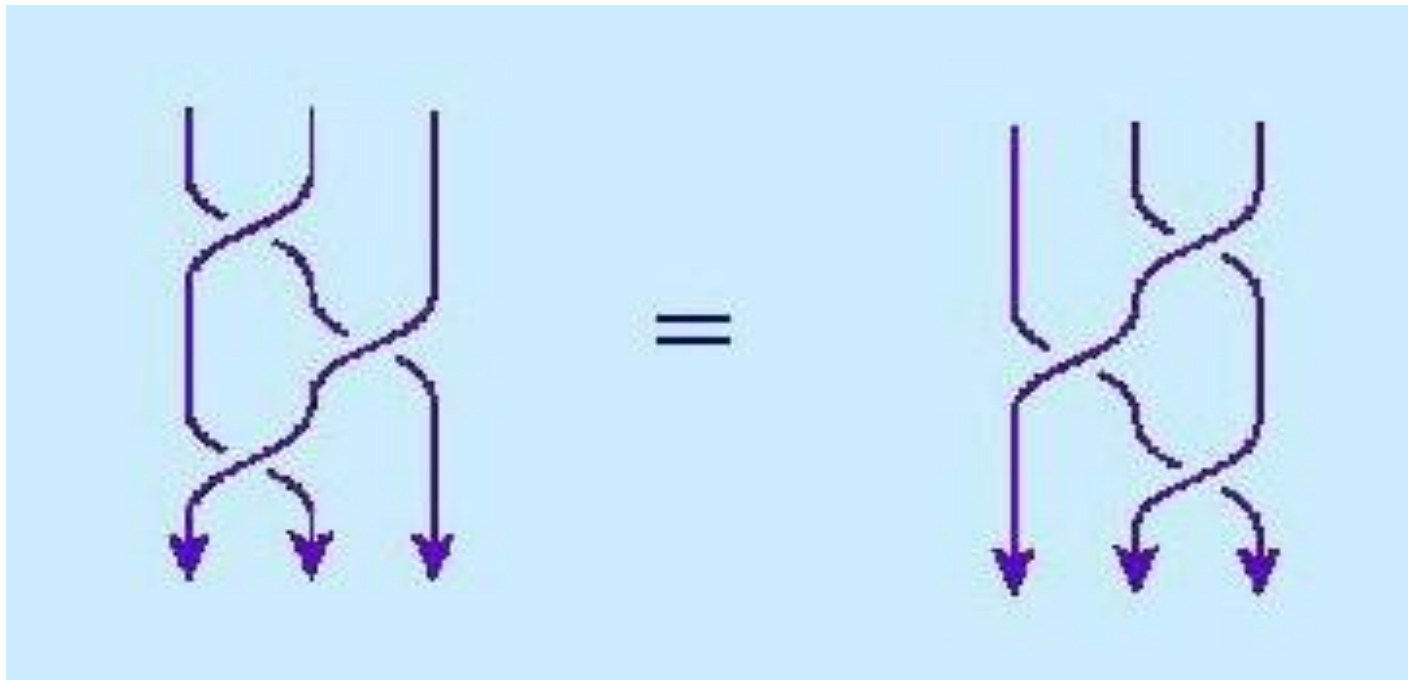
- ・ 3次元空間(3次元としてみた宇宙)内の“ひも”
- ・ 4次元空間(時空)内の“曲面”

☆科学における結び目の数学の役割

それぞれの科学において課された条件の下で,

- (1) どのような絡まり方が可能かを研究し, それらを重複なしにリストアップすること
- (2) 2つのひもの絡まりが与えられているときに, それらは同じか違うかを判定すること

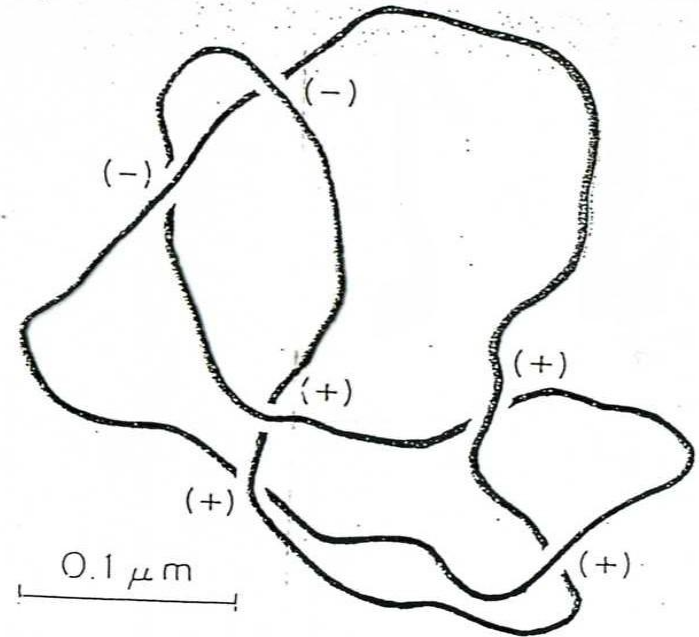
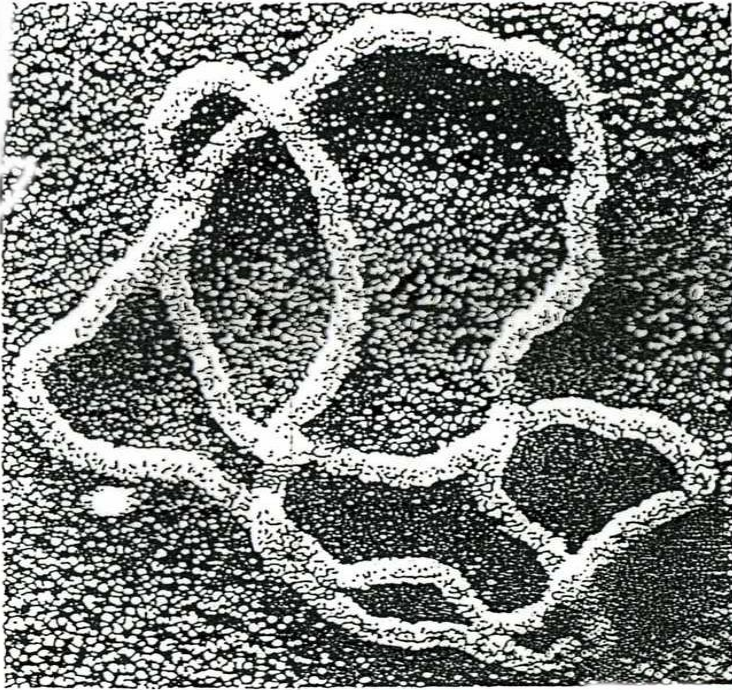
例1 ヤン・バクスター方程式



・粒子の変化についての方程式(行列の方程式として表現)

この解から, 結び目を区別するための位相不変量が導ける

例2 DNA結び目

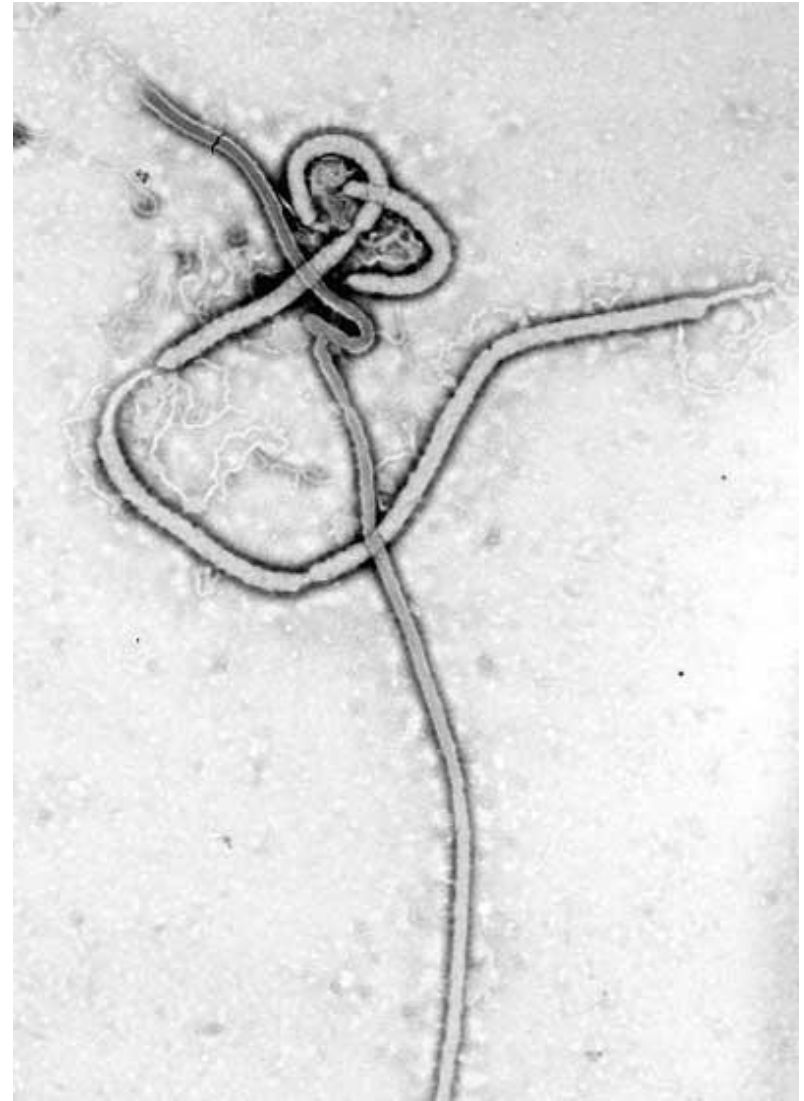


Circular DNA

**S. A. Wassermann, J. M. Dungan, N. R. Cozzarelli,
Science 229 (1985)**

例3 ひも状ウイルス

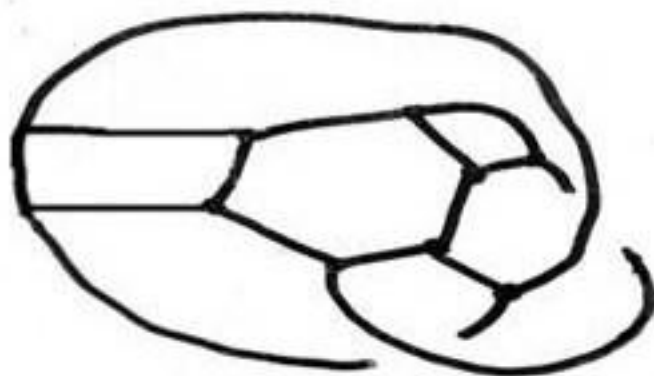
エボラ出血熱の
ウイルス



<http://www.scumdoctor.com/Japanese/disease-prevention/infectious-diseases/virus/ebola/Pictures-Of-The-Effects-Of-Ebola.html>

例4 分子の立体構造(分子グラフ)

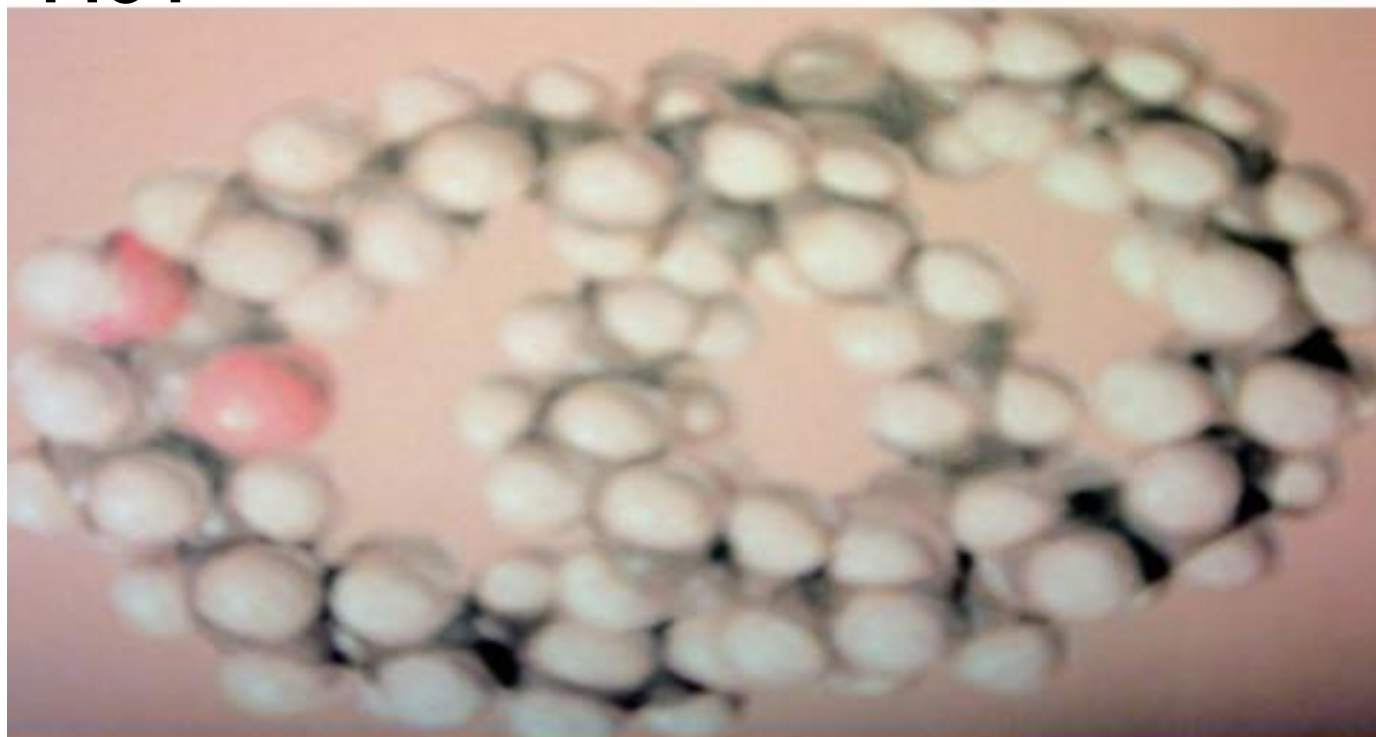
- ・原子を点で表し, そのつながりを線で表す



- カテナン(ホップの絡み目)

連結でなく, かつ分離もできない分子

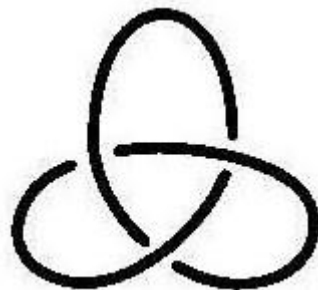
E.J. Wasserman et al, J. Am. Chem. Soc. 82(1960),
4433-4434



Model of Molecules($C_{34}H_{56}O_2$)
Pauling-Hayward(1967)

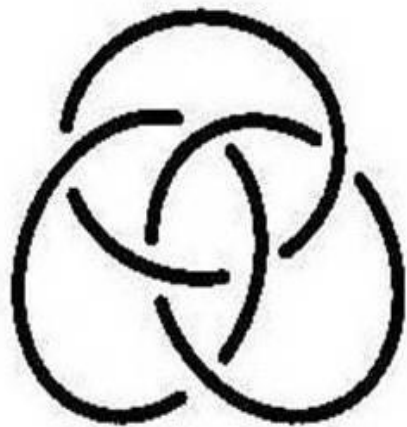
- **三葉結び目の分子**

J. -P. Sauvage et al., *Angew. Chem. Int. Ed. Engl.* 43(2004), 4487



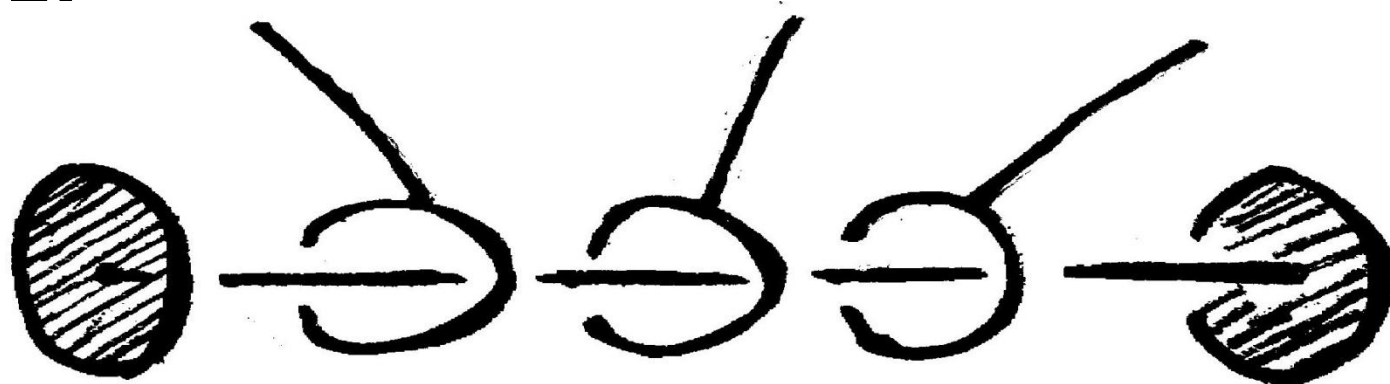
- **ボロミアン環の分子**

J. F. Stoddart et al. *Science* 304(2004), 1308



・ロタキサン(ポリロタキサン)から
分子機械へ

A. Harada; J. Li; M. Kamachi, *Nature* 356(1992),
325-327



ストッパー

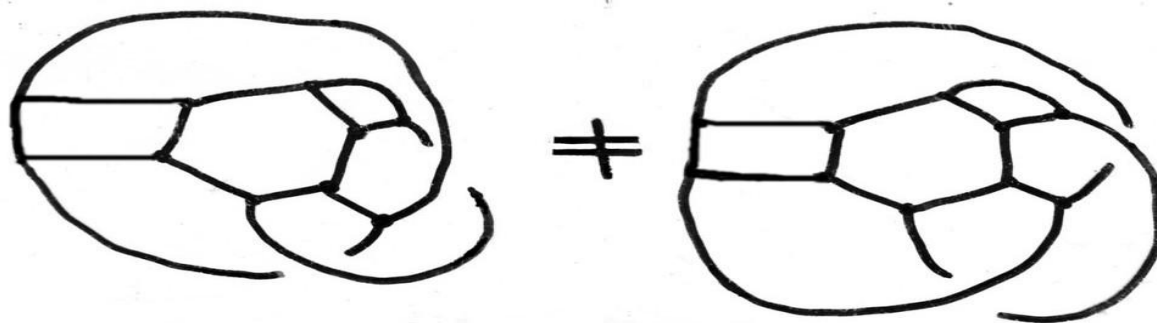
ポリロタキサン

☆絡まりの違いを明確に区別することの重要性

血液型, 薬の効き目, 蛋白質のアミノ酸配列,...

数学のカイリティ問題: 与えられた空間グラフはその鏡像と同じか違うか?

例



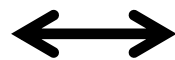
理由:



☆ 位相は距離とは無関係な概念

類似性？

ミクロの世界



マクロの世界

宇宙の大規模構造

国立天文台4次元デジタル宇宙プロジェクト提供

森羅万象の基本に結び目がある！

そこで、

<3次元時空内にひもとみなせるものがあれば、そこでは結び目理論が展開可能だろう>
と考える

問題 どのような展開が可能か？

2. プリオン蛋白質分子モデル の結び目理論

☆蛋白質分子はアミノ酸配列からなるひも

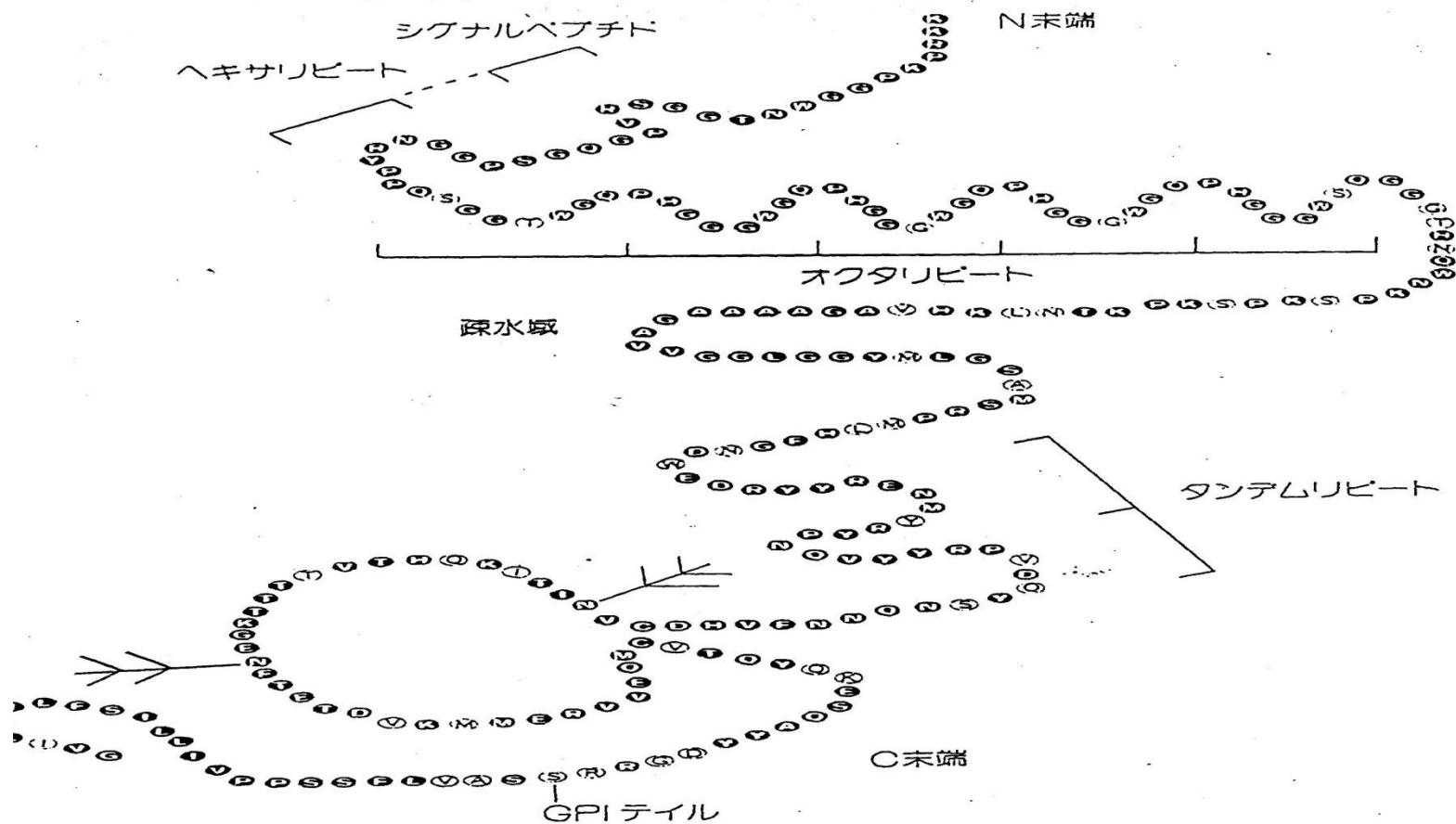
プリオン蛋白質分子のS. B. Prusiner理論:

- Basler K. et al., *Cell* 1986, 46, 417-428
- Z. Huang et al., *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 1994, 91, 7139-7143
- スローウィルス感染とプリオン, 山内・立石監修, 近代出版, 1995
- 狂牛病のすべて ファクト・ブック, 日経BP社, 1996

プリオン蛋白分子の性質:

- (1) 先駆的プリオン蛋白分子は, N-末端が失われて, **成熟型(正常型)プリオンPrP^C** または **異常型プリオンPrP^{Sc}** に変わる
- (2) $\text{PrP}^{\text{C}} + \text{PrP}^{\text{Sc}} \rightarrow \text{PrP}^{\text{Sc}} + \text{PrP}^{\text{Sc}}$
- (3) **PrP^C と PrP^{Sc} の1次構造は同じで, それらの主な違いは, 立体構造にある**
- (4) PrP^C の α -ヘリックスが, PrP^{Sc} では β -シートに変わっている
- (5) 1か所S-S 結合部がある

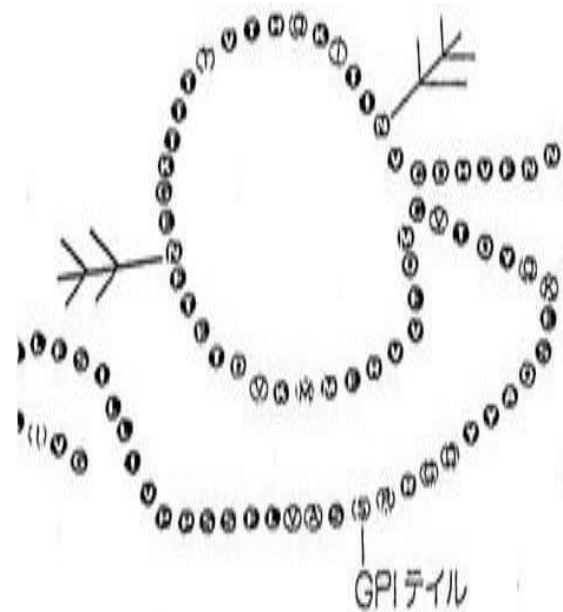
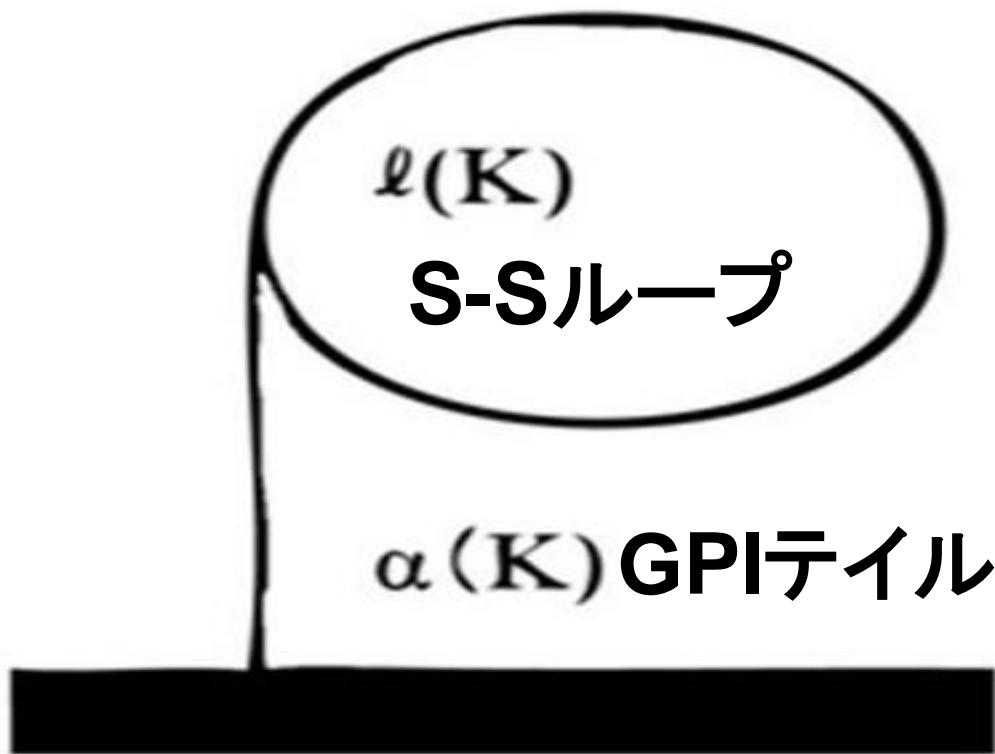
先駆的プリオン蛋白質分子



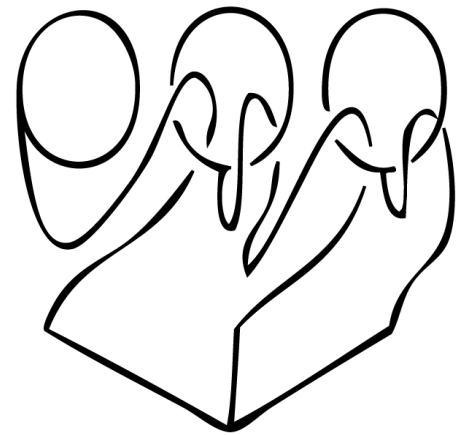
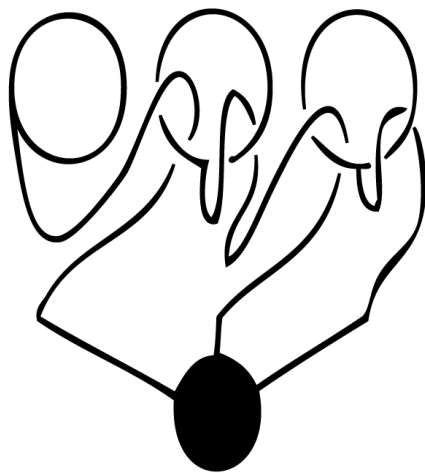
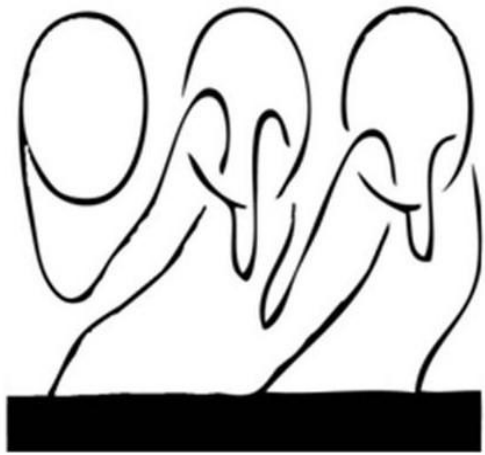
山内一也・立石潤監修, スローウィルス感染とプリオン, 近代出版(1995)

プリオンに関する結び目理論の問題

プリオン蛋白質分子は絡まりやすいか？



プリオン・ストリング



プリオン・タンゲル

プリオン・グラフ

＜プリオン・タンゲルを空間グラフと考える＞

定義

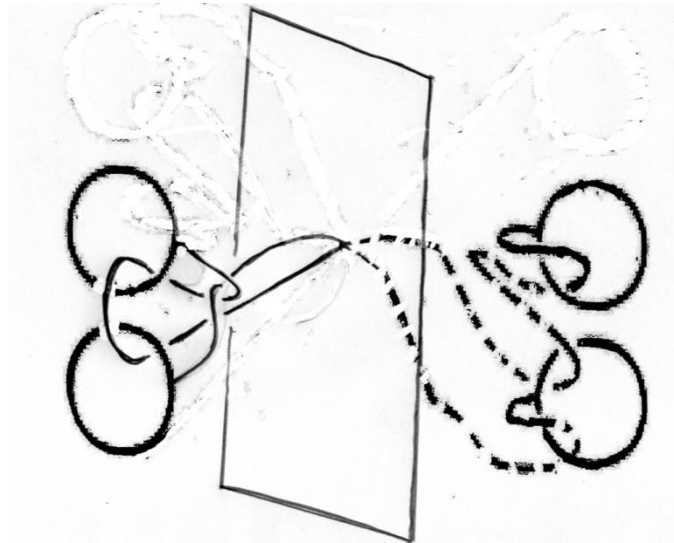
プリオン・タングル T が分離不能

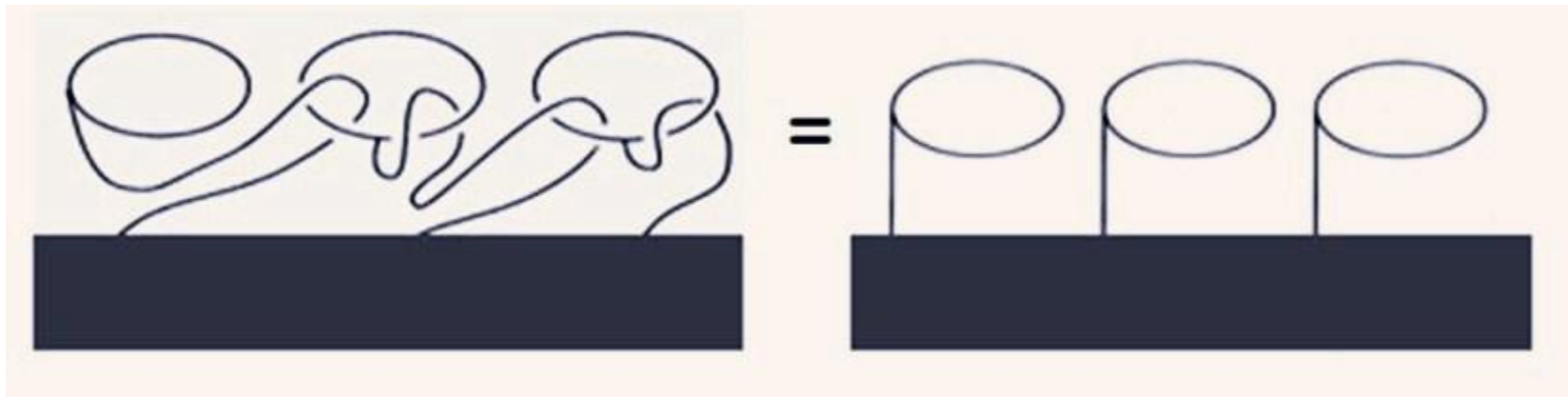
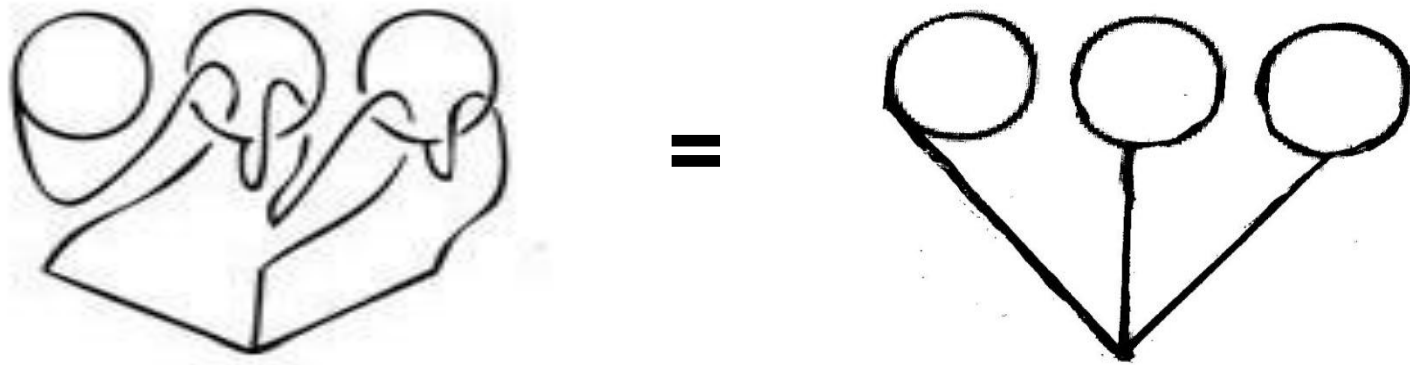
=

T をプリオン・グラフと考えたとき,

T は2つのプリオン・グラフの頂点和
に同型でない

$T \neq$





このプリオン・タングルは分離可能

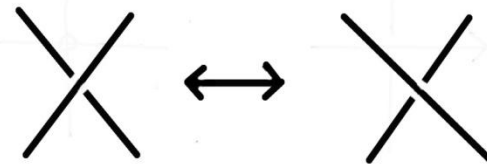
定理[K, Osaka J. Math. 26(1989),743–758]

プリオン・タンゲル T と T' が分離して与えられているとき, T と T' に同型なものをその一部に含むような分離不能合併プリオン・タンゲル $T \cup T'$ が存在する. とくに,

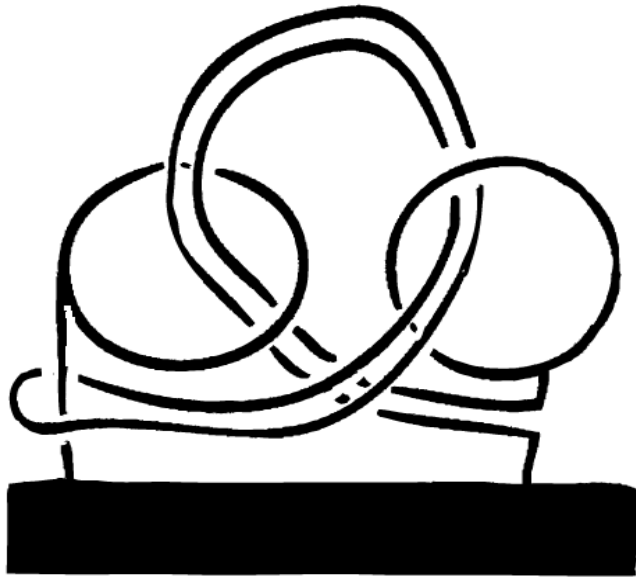
I型: GPIテイルどうしの交差交換, または

II型: GPIテイルとS-S ループの交差交換

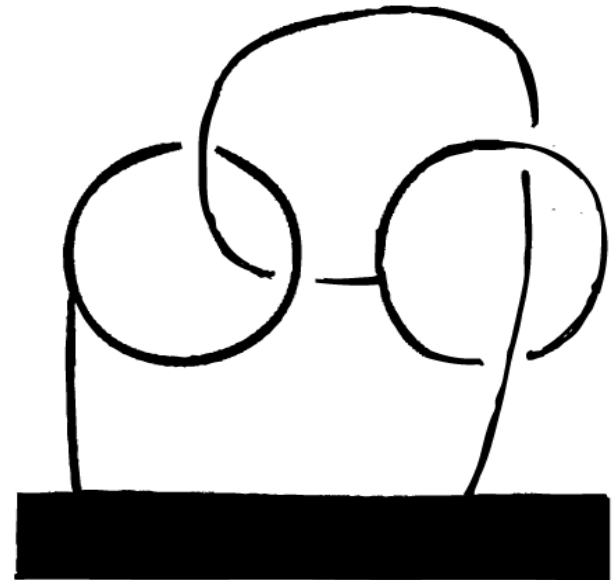
の1回の交差交換



によって, それが構成できる.



I型



II型

**分離不能プリオン・タンゲル
(II型は吉田佳代による)**

☆結び目理論における新しい数学の問題

3. こころのモデルの結び目理論

—こころの状態を図示する試み

参考文献

A. Kawauchi, A knot model in psychology,
Proc. Knot theory for Scientific Objects,
OCAMI Studies Vol. 1(2007), 129-141
<http://www.sci.osakacu.ac.jp/~kawauchi/index.html>

☆こころを結び目で図示する試み

(1) 日常生活で、性格・人格やこころのあり様をひもにたとえて表現しており、経験上結び目で表現しても矛盾が生じにくい

素直な性格, ひねくれた性格, 思いの糸, こころがつながる, こころが固い絆で結ばれる, こころの琴線, 人間関係のもつれ, わだかまりが解ける

(2) B. Stewart and P. G. Tait (1894)

“The soul exists as a knotted vortex ring in the aether.”

☆結び目によるmindのモデルの考え方

mind(こころ) = (これから定義する)結び目
personality (人格)

= その結び目の型(同型なもの集まり)

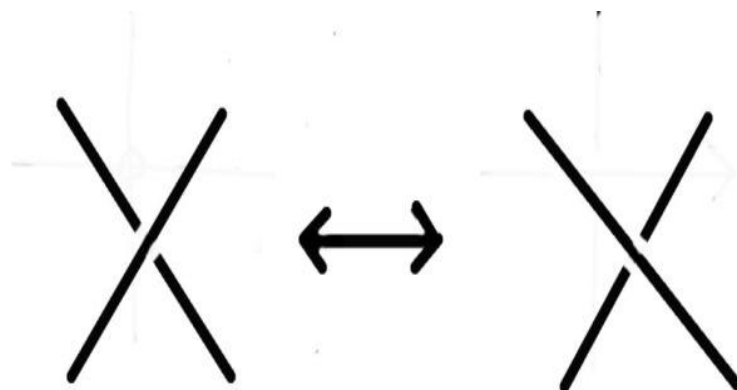
特に,

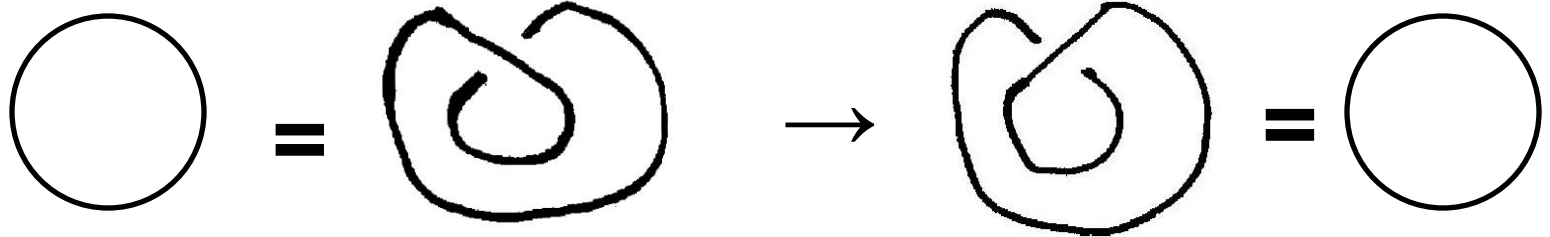
- untwisted mind = 自明な結び目
- twisted mind = 自明でない結び目

mind-change (こころの屈折)

||

結び目の交差交換





三葉結び目

<mind-changeの仕方により, untwisted mind からuntwisted mind もtwisted mindも生じる>

・参考書

榎本・桑原, 人格心理学, 放送大学教材(2004)

人格の基本因子 (H. J. Eysenck, 1967)

- (1) 内向性-外向性
- (2) 神経症的傾向
- (3) 精神病的傾向

人格の5因子モデル (Five-Factor Model)

(P. T. Costa and R. R. McCrae, 1988)

(1) 内向性-外向性

(2) 神経症的傾向

(3.1) 経験への開放性

(3.2) 協調性

(3.3) 誠実性

Mindのモデルを構成する際考慮すべき点:

(1) Birth-Time-Mind Problem:

両親から引き継がれた遺伝的性質により、
誕生時点で必ずしもmindはuntwistedと
は限らないこと

(2) 環境の変化からくるところの屈折を起こす 様々な原因があること

(i) 年齢 Age

(ii) 歴史 History

(iii) 標準化しえない要因

Non-standard event factors

☆Kという人のn歳のmindの結び目モデル の構成法

アイデア:

Kの誕生時の両親の5因子

および

Kの1歳からn歳までの5因子

のデータを数値化する

Kの誕生時の父親のデータ

(1)内向性-外向性: $IE_F = -1, 0$

(2) 神経症的傾向: $N_F = -1, 0$

(3-1)経験への開放性: $O_F = -1, 0$

(3-2)協調性: $A_F = -1, 0$

(3-3)誠実性: $C_F = -1, 0$

Kの誕生時の母親のデータ

(1)内向性-外向性: $IE_M = -1, 0$

(2) 神経症的傾向: $N_M = -1, 0$

(3-1)経験への開放性: $O_M = -1, 0$

(3-2)協調性: $A_M = -1, 0$

(3-3)誠実性: $C_M = -1, 0$

Kの誕生時の両親のデータ

$$-2 \leq I E_P = I E_F + I E_M \leq 0$$

$$-2 \leq N_P = N_F + N_M \leq 0$$

$$-2 \leq O_P = O_F + O_M \leq 0$$

$$-2 \leq A_P = A_F + A_M \leq 0$$

$$-2 \leq C_P = C_F + C_M \leq 0$$

Kのi歳時の5因子のデータの数值化 ($i=1,2,\dots,n$)

(1) 内向性-外向性: $IE_i = -1, 0, 1$

(2) 神経症的傾向: $N_i = -1, 0, 1$

(3.1) 経験への開放性: $O_i = -1, 0, 1$

(3.2) 協調性: $A_i = -1, 0, 1$

(3.3) 誠実性: $C_i = -1, 0, 1$

Kの n 歳までの5因子数値の総和

$$-2-n \leq IE_p + \sum_{i=1}^n IE_i \leq n$$

$$-2-n \leq N_p + \sum_{i=1}^n N_i \leq n$$

$$-2-n \leq O_p + \sum_{i=1}^n O_i \leq n$$

$$-2-n \leq A_p + \sum_{i=1}^n A_i \leq n$$

$$-2-n \leq C_p + \sum_{i=1}^n C_i \leq n$$

定義 Kの n 歳時の5因子の次数

$$IE[n] = \min\{ 0, IE_p + \sum_{i=1}^n IE_i \}$$

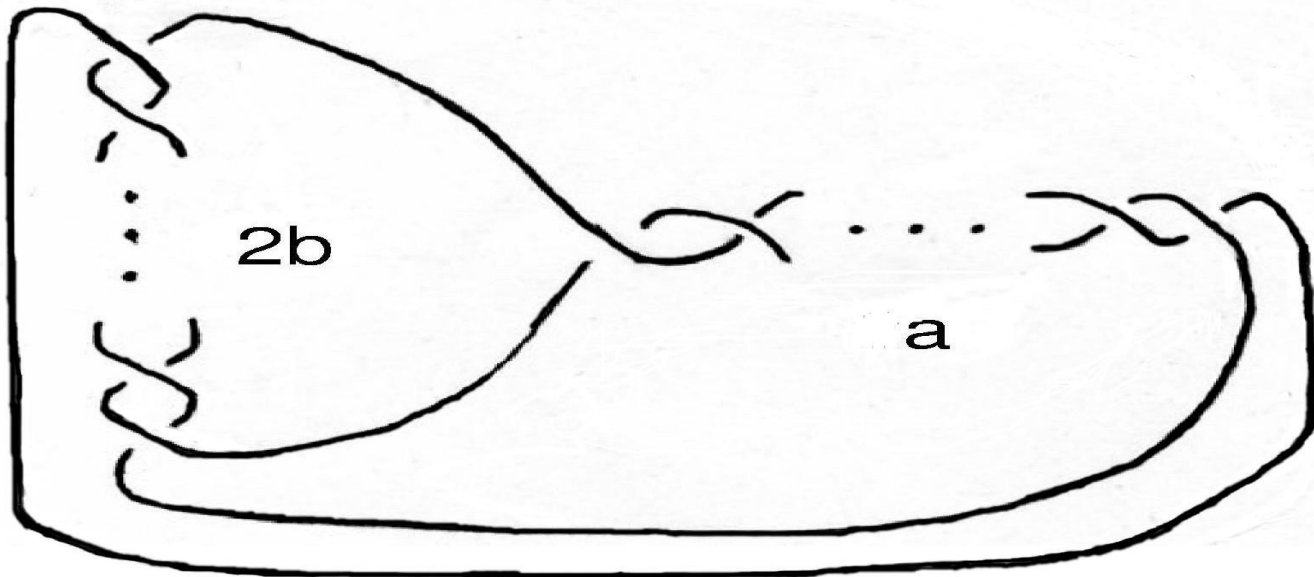
$$N[n] = \min\{ 0, N_p + \sum_{i=1}^n N_i \}$$

$$O[n] = \min\{ 0, O_p + \sum_{i=1}^n O_i \}$$

$$A[n] = \min\{ 0, A_p + \sum_{i=1}^n A_i \}$$

$$C[n] = \min\{ 0, C_p + \sum_{i=1}^n C_i \}$$

定義 n歳でのmind結び目 $M(n; a, b)$
 = 次の $a+2b$ 交差点を持つ図式の結び目,
 ただし $-2n-4 \leq a = IE[n] + N[n] \leq 0$
 $-3n-6 \leq b = O[n] + A[n] + C[n] \leq 0$.



命題

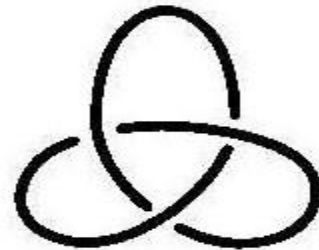
(1) mind結び目 $M(n; a, b)$ が untwisted

$\Leftrightarrow a=0$ または $b=0$

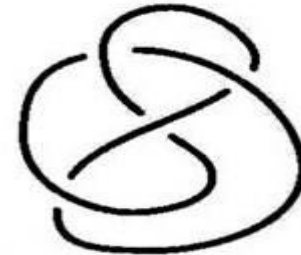
(2) twisted mind結び目 $M(n; a, b)$ と $M(m; c, d)$

が同じpersonalityをもつ $\Leftrightarrow (a, b)=(c, d)$

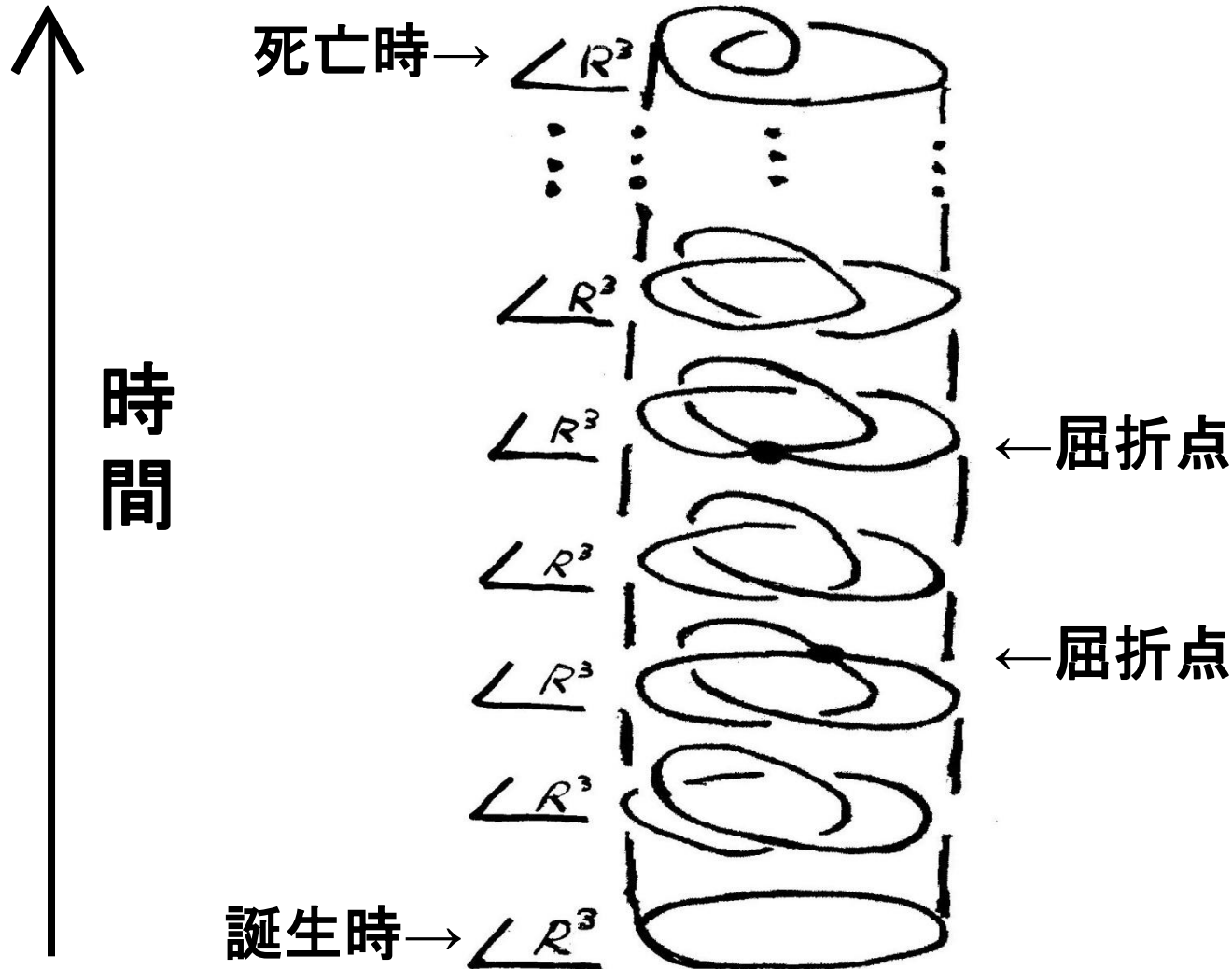
$M(n; -1, -1)$ = 三葉結び目:



$M(n; -2, -1)$ = 8の字結び目:



こころの軌跡= 時空にはめ込まれたシリンダー状の曲面(自己交差点が屈折点)



☆他人のmindとの関係

n成分mind絡み目 = n個のmind結び目の集まり

定義 K : mind結び目, L : mind絡み目

- (1) K と L が 分離可能 = K と L からなる絡み目の図式がライデマイスター移動により, K と L が交叉しない位置にまで移動できる
- (2) K は L から 自己救済可能 = K が mind-change を何回か行くと, K と L は分離可能になる

定義 n 成分mind絡み目 L と L' が(自己救済に
関して) 似た関係にある

⇔

全単射対応 $\tau : L \rightarrow L'$ で, つぎをみたすような
ものが存在する: L の任意のmind成分 K と
 $L \setminus K$ の任意の部分絡み目 S で

- (1) K と S の分離可能性と $\tau(K)$ と $\tau(S)$ の分離可能性が一致
- (2) K の S からの自己救済可能性と $\tau(K)$ の $\tau(S)$ からの自己救済可能性が一致

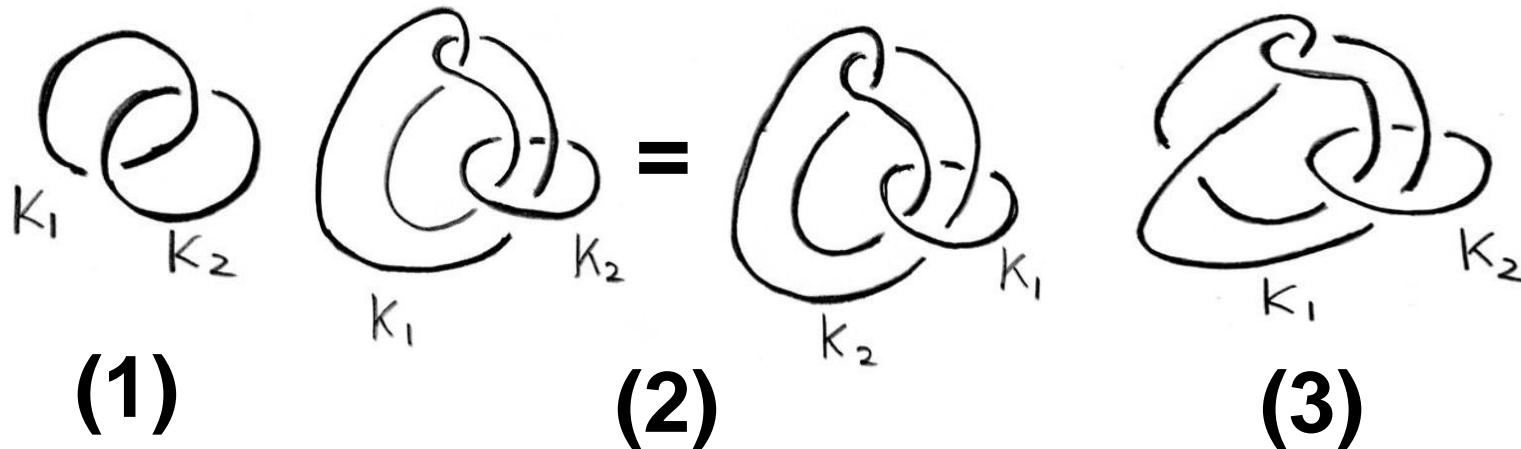
定義 n 成分mind絡み目の自己救済関係
= 似た関係を法としたそのmind絡み目のクラス

n 成分mind絡み目の結び目理論の問題

n 成分の分離不能mind絡み目の自己救済関係を分類せよ

**注: n を固定したとき, 自己救済関係は有限
個しか存在しない**

命題 2成分mind絡み目の自己救済関係は
つぎの3つの場合に分類される



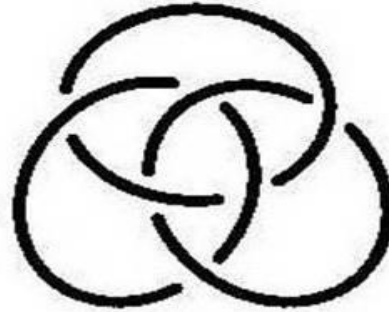
(1) 両方とも自己救済不可能 $K_1 - K_2$

(2) 両方が自己救済可能 $K_1 \leftrightarrow K_2$

(3) K_1 は自己救済可能であるが, K_2 は自己救済
不可能 $K_1 \rightarrow K_2$ (このとき, K_1 は必ず **twisted
mind!**)

3成分以上のmind絡み目の自己救済関係の分類： 複雑になる！

ボロミアン環：



どの2つも分離しているが，全体として分離不能

命題

3成分mind絡み目のmind自己救済関係は(1対2関係を無視して)30通りに分類される

☆結び目理論における新しい数学の問題

まとめ

- (1) ・森羅万象の基本に結び目がある
 - ・ひもとみなせるものがあれば, そこでは結び目理論が展開可能
- (2) プリオン分子モデルの結び目理論
- (3) 「こころ」のモデルの結び目理論