# 力学の変遷 ー古典・量子・弦ー

加藤晃史 (東京大学 数理科学研究科)

日本数学会 市民講演会 於東京工業大学

2019 年 3 月 17 日

# 現代物理学と日常生活

## 新しい国際単位系 SI

2018 年 11 月 16 日に決議・承認、2019 年 5 月 20 日から施行。

- 真空中の光速 $c = 299792458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
- プランク定数 $h = 6.62607015 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
- 電気素量 $e = 1.602176634 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
- ボルツマン定数 $k = 1.380649 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$
- アボガドロ定数 $N_A = 6.02214076 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$

これらの基本定数は「定義」「厳密値」となる。

「国際キログラム原器」による定義は廃止へ。

## 現代物理学と日常生活

### 新しい国際単位系 SI

2018 年 11 月 16 日に決議・承認、2019 年 5 月 20 日から施行。

- 真空中の光速 $c = 299792458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
- プランク定数 $h = 6.62607015 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
- 電気素量 $e = 1.602176634 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
- ボルツマン定数 $k = 1.380649 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$
- アボガドロ定数 $N_A = 6.02214076 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$

これらの基本定数は「定義」「厳密値」となる。

キログラムとは、周波数が $\dfrac{(299792458)^2}{6.62606957} \times 10^{34}$

ヘルツの光子のエネルギーに等価な質量である。

$$E = mc^2 = h\nu \qquad \text{相対性理論＋量子力学}$$

# 現代物理学と日常生活

## 新しい国際単位系 SI

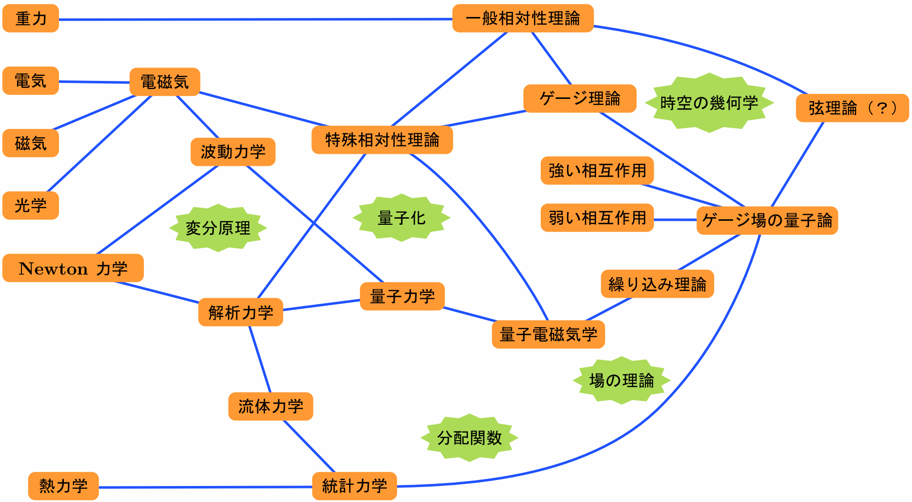
2018 年 11 月 16 日に決議・承認、2019 年 5 月 20 日から施行。

- 真空中の光速 $c = 299792458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
- プランク定数 $h = 6.62607015 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
- 電気素量 $e = 1.602176634 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
- ボルツマン定数 $k = 1.380649 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$
- アボガドロ定数 $N_A = 6.02214076 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$

これらの基本定数は「定義」「厳密値」となる。

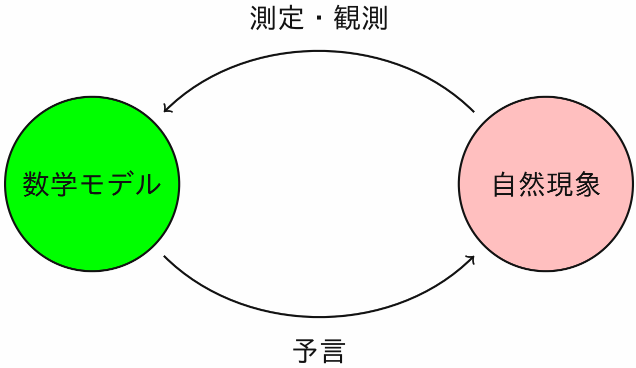
- 「基本定数」の種類は非常に少ない。
- 特に直接に力学 (mechanics) に関係するものは
「光速 $c$」と「プランク定数 $h$」
だけ。

# 物理学の系統樹

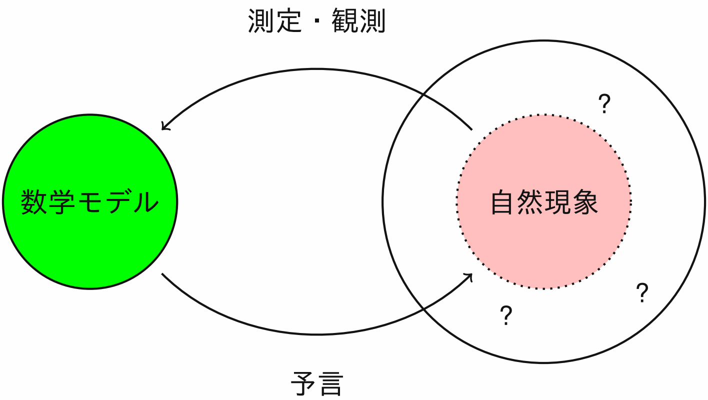


重力
一般相対性理論
電気
電磁気
ゲージ理論
時空の幾何学
弦理論（？）
磁気
波動力学
特殊相対性理論
強い相互作用
光学
変分原理
量子化
弱い相互作用
ゲージ場の量子論
Newton 力学
繰り込み理論
量子力学
解析力学
量子電磁気学
場の理論
流体力学
分配関数
熱力学
統計力学

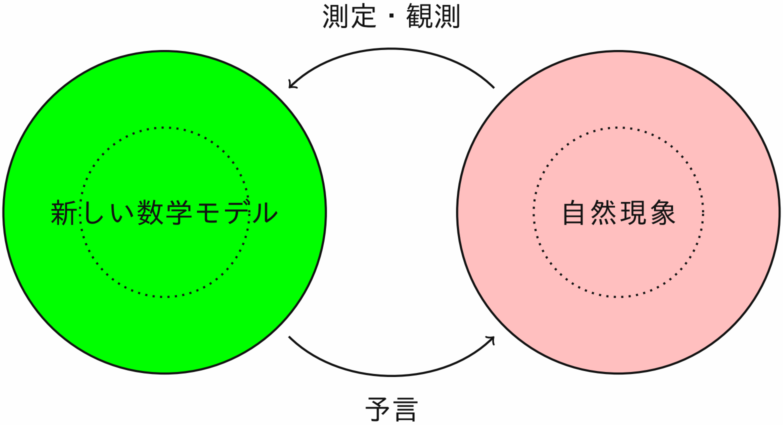
# 物理と数学



# 物理と数学



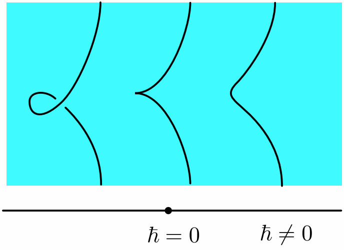
# 物理と数学



# 物理学の変遷

- 物理の各理論（数学モデル）には適用限界がある。
- 適用範囲を押し広げる形で理論が変遷してきた。

- もとのモデルが、数学的に「破綻」したわけではない。
  — もしそうなら学ぶ必要なし。
- 新しい理論は独自の「基本定数」を持ち、それを特殊化すると古い理論が復元される。
  1. 特殊相対論 (光速度 $c$ )
     $(c \to \infty) \to$ Newton 力学
  2. 量子力学 (Planck 定数 $\hbar$ )
     $(\hbar \to 0) \to$ 古典力学
- 数学的には $c, \hbar$ は「変形パラメータ」と見なせる。



サブタイトルの「一古典・量子・弦一」とは何か？

サブタイトルの「一古典・量子・弦一」とは何か？

- Q: 古典力学 (classical mechanics) と対をなす言葉は？

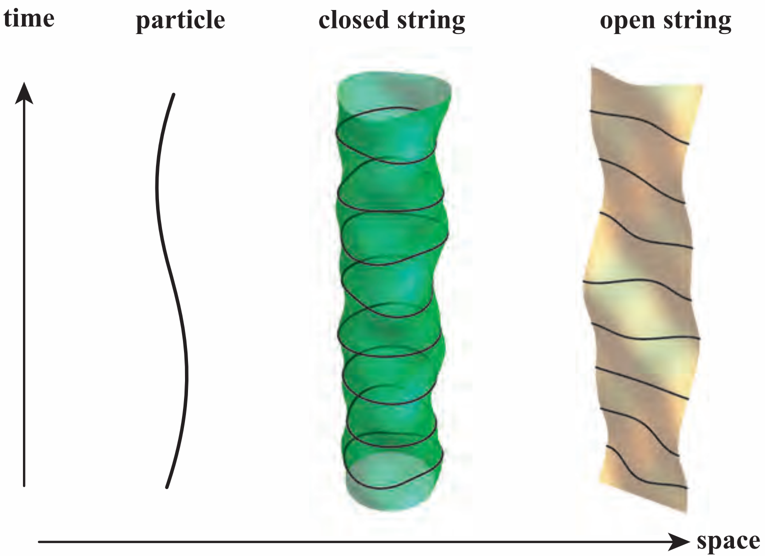
サブタイトルの「一古典・量子・弦一」とは何か？

- Q: 古典力学 (classical mechanics) と対をなす言葉は？
- A: ~~現代力学 (modern mechanics)~~

サブタイトルの「一古典・量子・弦一」とは何か？

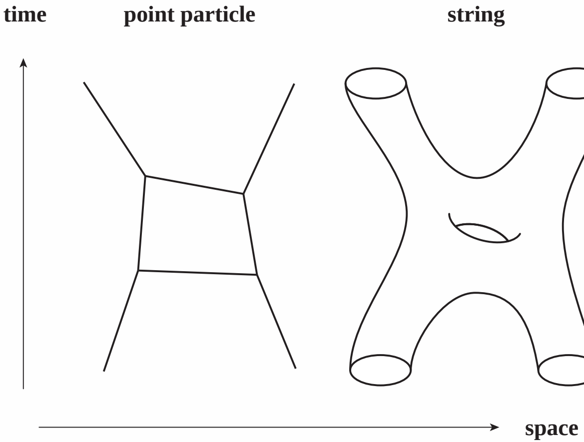
- Q: 古典力学 (classical mechanics) と対をなす言葉は？
- A: ~~現代力学 (modern mechanics)~~
- A: 量子力学 (quantum mechanics)

# 弦理論




Planck の長さ $\ell_P = \sqrt{\dfrac{\hbar G}{c^3}} = 1.16252(81) \times 10^{-35}\,\mathrm{m}$

# 弦理論



# 今回お伝えしたいこと

解析力学・量子化・一般共変性をすべて内包する理論は、必然的に弦理論と等価なものになる。

- 超対称性や 10 次元など、実験的に見つかっていない対称性や時空構造は全く仮定しない。
- ここで言う弦理論とは、２次元の曲面上の場を量子化して得られる理論をさす。
- 弦理論の必然性を納得するには、解析力学・座標不変性・量子力学などについて、ある程度の知識が必要。

# 目次

# Newton の運動方程式

問題１：図の曲線を特徴づける性質は何か？

普通の解答：放物線のグラフ

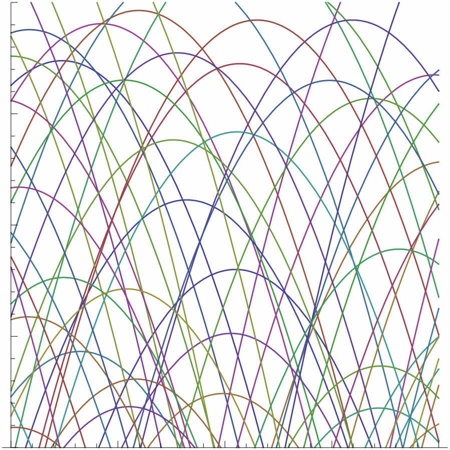
$$x(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + x_0$$

で表される。($t_0, x_0$ はパラメータ)

Newton の解答：

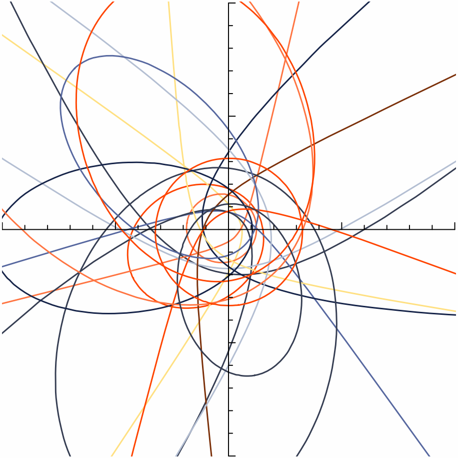
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -g$$

と表される。



# Newton の運動方程式

問題２：図の曲線を特徴づける性質は何か？



Kepler ：

$$r(\theta) = \frac{L}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

と表される。

Newton：

$$\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = -\kappa \frac{\boldsymbol{x}(t)}{||\boldsymbol{x}(t)||^3}$$

と表される。

# Newton の運動方程式

- 運動：時刻 $t$ の関数として位置 $x(t)$ が定まること
- 運動の法則を時刻に関する「微分」方程式として定式化した。

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

- 曲線族に含まれるパラメータを消去することができた。
- これにより、
  - 運動を支配する普遍的な法則と、
  - 個々の運動の軌跡（初期条件ごとに変化）

  を明確に区別した。
- 微分方程式を解くことで、未来を予言できる。

# Newton の運動方程式の問題点

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

## 問題点

# Newton の運動方程式の問題点

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

## 問題点

- 時間について 2 階の微分方程式なので、解が初期位置だけで決まらず、初速度にも依存する。このため解軌道の性質が直感的にとらえにくい。

# Newton の運動方程式の問題点

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

## 問題点

- 時間について 2 階の微分方程式なので、解が初期位置だけで決まらず、初速度にも依存する。このため解軌道の性質が直感的にとらえにくい。
- 運動方程式がこの形に表されるのは慣性系 (inertia system) で、しかも空間座標として通常の直交座標を取った場合だけ。

## Newton の運動方程式の問題点

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

### 問題点

- 時間について 2 階の微分方程式なので、解が初期位置だけで決まらず、初速度にも依存する。このため解軌道の性質が直感的にとらえにくい。
- $\Longrightarrow$ **Hamiltonian 力学、Poisson 括弧**
- 運動方程式がこの形に表されるのは慣性系 (inertia system) で、しかも空間座標として通常の直交座標を取った場合だけ。

# Newton の運動方程式の問題点

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

## 問題点

- 時間について 2 階の微分方程式なので、解が初期位置だけで決まらず、初速度にも依存する。このため解軌道の性質が直感的にとらえにくい。
- $\Longrightarrow$ **Hamiltonian 力学、Poisson 括弧**
- 運動方程式がこの形に表されるのは慣性系 (inertia system) で、しかも空間座標として通常の直交座標を取った場合だけ。
- $\Longrightarrow$ 変分原理による定式化

## Hamilton 力学

- Newton の運動方程式 ( 2 階微分方程式)

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}(t)}{dt^2} = \boldsymbol{F}(t)$$

- 変数を倍に増やせば 1 階連立微分方程式に書き直せる

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \dfrac{1}{m}\boldsymbol{p}(t) \\ \dfrac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt} = \boldsymbol{F}(t) \end{cases}$$

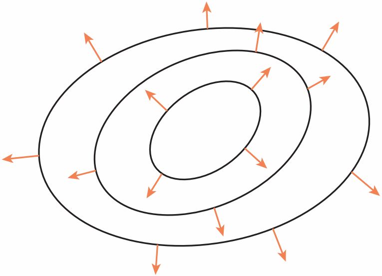
- $\boldsymbol{x}$ 位置　$\boldsymbol{p}$ 運動量
- 配位空間 (configuration space) ：$\boldsymbol{x}$ を座標とする空間
- 相空間 (phase space) ：$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ を座標とする空間
- １階微分方程式の解は初期値で一意に決まるので、運動を相空間の「流れ」として理解できる

# Hamilton 力学

- Hamiltonian $H(q,p)$ : 相空間で定義された、位置と運動量の関数

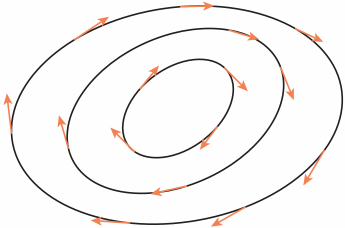
- $H$ の勾配流 (gradient flow)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\ H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$



- Hamiltonian flow = 勾配流を「90 度回転」して得られる流れ

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$



# Hamilton 力学

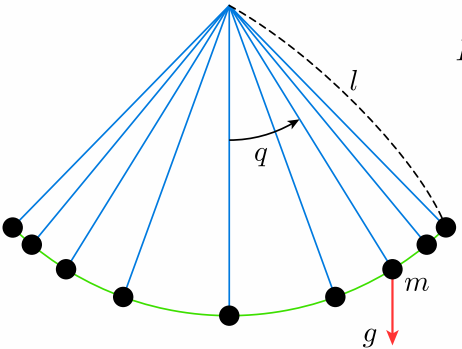
**定理**

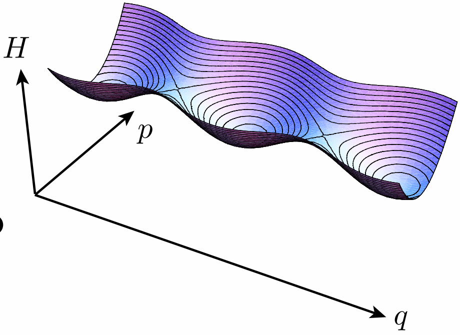
保存力場 $\boldsymbol{F} = \dfrac{\partial U(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}$ を仮定する。

1. $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \dfrac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + U(\boldsymbol{q})$ で Hamiltonian を定めると、Hamilton 流は Newton の運動方程式を再現する。
2. 運動の解曲線に沿って、$H$ は一定値を取る (エネルギー保存則)

# 例：有限振り子

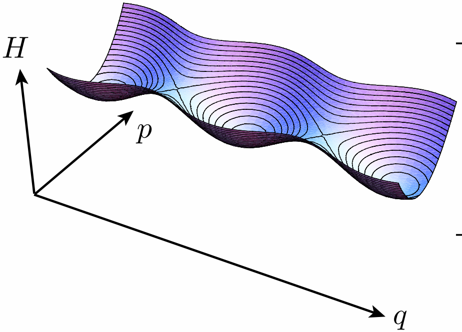
$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + mgl\cos q$$

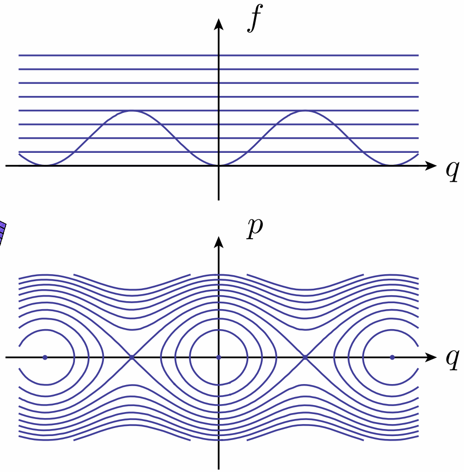


# 例：有限振り子

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + mgl\cos q$$



# Poisson 括弧

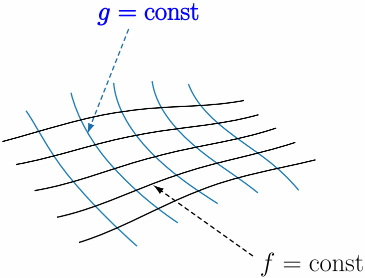
- 解析力学の最も一般的な定式化
- 運動法則をベクトル場ではなく、スカラー値関数の関係で記述
- $(q, p)$ : 正準座標 (canonical coordinate) ＝相空間 $M$ の (位置、運動量) という座標では

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} = f\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)g \qquad (f, g \in C^\infty(M))$$

- $H$ を Hamiltonian とする時間発展

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}$$

- 任意の $g \in C^\infty(M)$ を Hamiltonian とする「時間発展」が考えられる。
- 物理量全体 $C^\infty(M)$ が本来持つべき「無限小の非可換性」を記述



# Poisson 代数

- Poisson 括弧

$$\{-,-\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

- 反対称

$$\{f,g\} = -\{g,f\} \qquad (f,g \in C^\infty(M))$$

- Leibnitz 則=積の微分法

$$\{f, g \cdot h\} = \{f,g\} \cdot h + g \cdot \{f,h\} \qquad (f,g,h \in C^\infty(M))$$

$$\{f \cdot g, h\} = f \cdot \{g,h\} + \{f,g\} \cdot h \qquad (f,g,h \in C^\infty(M))$$

- Jacobi 恒等式

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0 \qquad (f,g,h \in C^\infty(M))$$

- Poisson 括弧 $\{\ ,\ \}$ は可換環 $C^\infty(M)$ 上に Lie 環の構造を定める。

# Poisson 代数の例

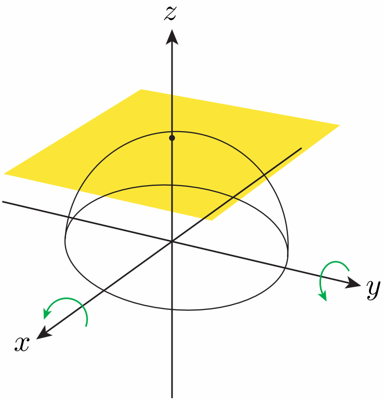
$M = \mathbb{R}^3$ の座標関数 $x, y, z$

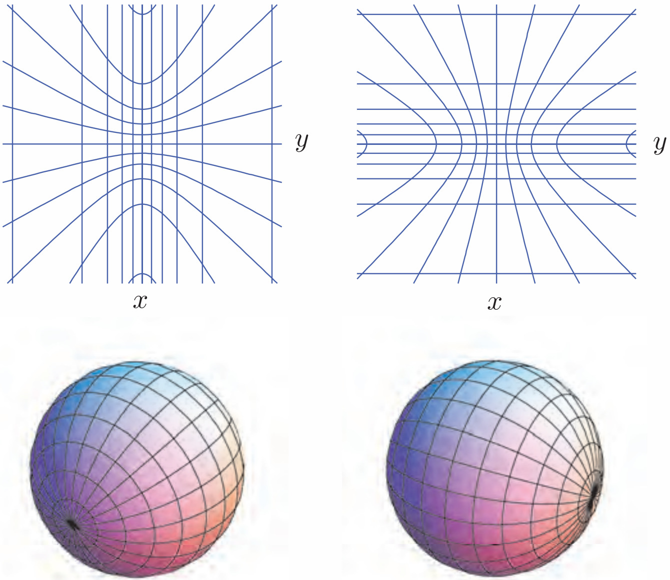
$$\{x, y\} = z, \qquad \{y, z\} = x, \qquad \{z, x\} = y$$

原点を中心とする剛体の回転を表す代数構造。

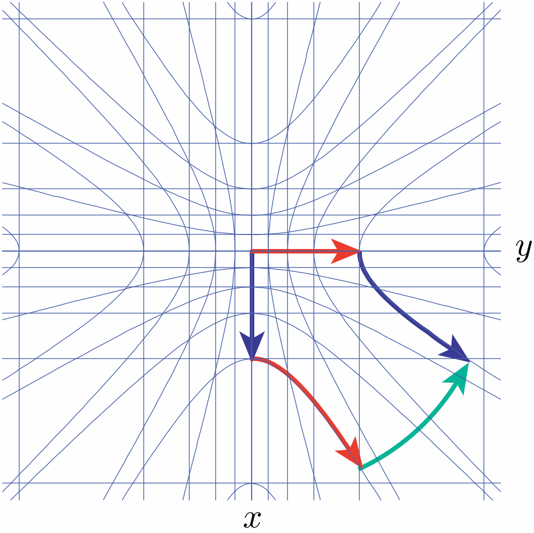
Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$

Poisson 括弧 $\{x, y\} = z$ の意味？




y
x
y
x

# Poisson 括弧




Poisson 括弧 $\{x, y\} = z$ の意味

# Poisson 代数の例

$M = \mathbb{R}^3$ の座標関数 $x, y, z$

$$\{x, y\} = z, \qquad \{y, z\} = x, \qquad \{z, x\} = y$$

原点を中心とする剛体の回転を表す代数構造。Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$
Casimir 元 = 半径の 2 乗

$$C = x^2 + y^2 + z^2$$

回転不変性

$$\begin{aligned}
\{C, x\} &= \{x^2 + y^2 + z^2, x\} \\
&= \{x^2, x\} + \{y^2, x\} + \{z^2, x\} \\
&= 2\{x, x\} + 2y\{y, x\} + 2z\{z, x\} \\
&= 2 \cdot 0 + 2y \cdot (-z)\{y, x\} + 2z \cdot y = 0
\end{aligned}$$

同様にして $\{C, x\} = \{C, y\} = \{C, z\} = 0$

# Newton の運動方程式の問題点

- 運動方程式が

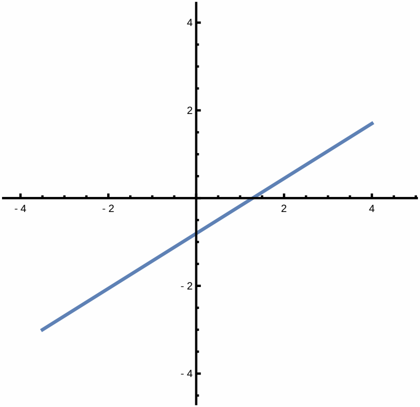
$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

  と表されるのは慣性系 (inertia system) で、しかも空間座標として通常の直交座標を取った場合だけ。
- 慣性系以外では「みかけの力」を導入する必要がある。

# 力が働かないときの運動

- 直交座標 $(x, y)$

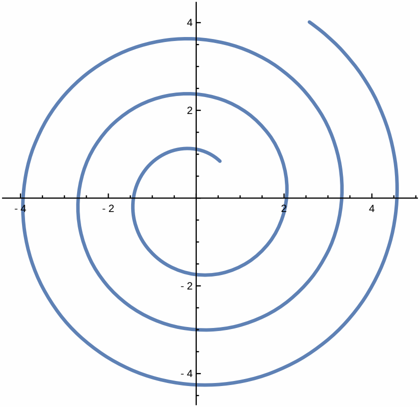
$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = 0 & \longrightarrow \quad x = x_0 + v_x\, t \\[2ex] m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = 0 & \longrightarrow \quad y = y_0 + v_y\, t \end{cases}$$



# 力が働かないときの運動

- 極座標 $(r, \theta)$

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2 r(t)}{dt^2} = 0 & \longrightarrow \quad r = r_0 + v_r\, t \\ m\dfrac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = 0 & \longrightarrow \quad \theta = \theta_0 + v_\theta\, t \end{cases}$$



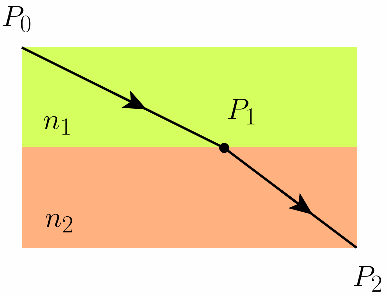
# Newton の運動方程式の問題点

- 運動方程式が
$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$
と表されるのは慣性系 (inertia system) で、しかも空間座標として通常の直交座標を取った場合だけ。
- 慣性系以外では「みかけの力」を導入する必要がある。
遠心力、Coriolis 力、...
- 自分が慣性系にいることをあらかじめ知ることはできるのか？
- 地球の自転、公転、太陽の運動、銀河系の運動、....
- ただし、これらは物理的な困難であって、数学的な困難ではない。
- 運動法則を座標系＝観測者に依らない形で定式化できないか？
Einstein
- 相対性 **(relativity),** 一般共変性 **(general covariance)**

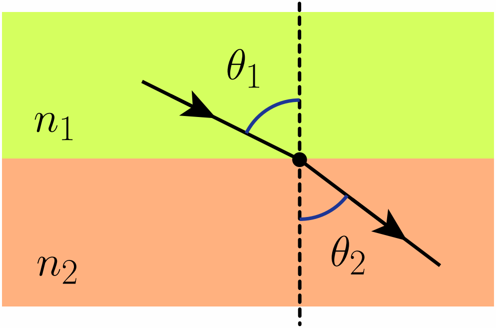
# 光の屈折

$$\text{屈折率} = \frac{\text{真空中の光速度}}{\text{媒質中の光速度}}$$

問題：屈折率が異なる媒質の層があるときの光線の進路を求めよ。



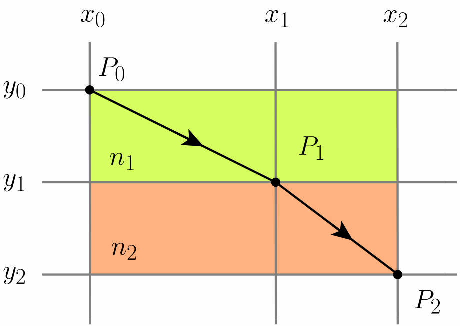
# Snell の法則




$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

# Fermat の原理

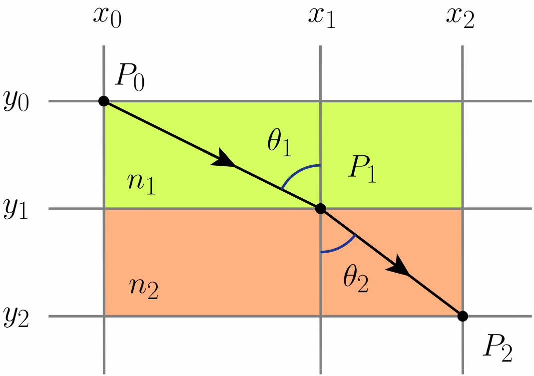
『光は所要時間が最小になる経路を通る』




所要時間 $T$

$$
\begin{aligned}
T &= n_1 \cdot |P_0P_1| + n_2 \cdot |P_1P_2| \\
&= n_1 \cdot \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \; + \; n_2 \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}
\end{aligned}
$$

# Fermat の原理




$$\frac{dT}{dx_1} = n_1 \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} - n_2 \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$$= n_1 \sin\theta_1 - n_2 \sin\theta_2 = 0$$

Fermat の原理 $\Longrightarrow$ Snell の法則！

光は一体どうやって、最短経路を事前に知るのか？

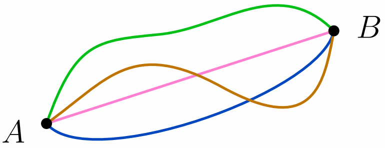
# 関数と汎関数

- 関数：数 $\longrightarrow$ 数
- 汎関数：関数（グラフ・曲線 $\cdots$） $\longrightarrow$ 数
- 微分法：関数の増減を調べる手段
- 変分法：汎関数の増減を調べる手段

# Newton 力学と変分原理

**定義**

- Lagrangian
$$L(t, x, y) = \frac{m}{2}y^2 - U(x)$$
- 作用汎関数 (action functional)
$$S[x(\bullet)] = \int_a^b L\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) dt = \int_a^b \left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 - U(x)\right\} dt$$



# Newton 力学と変分原理

**定理 (最小作用の原理)**

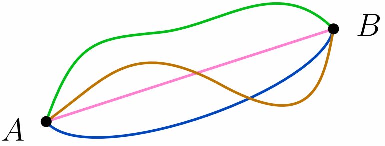
曲線 $x(\bullet)$ について、次の 2 つの条件は同値である：

**(1)** 作用汎関数 $S$ の値を最小にする。

$$S[x(\bullet)] = \int_a^b \left\{ \frac{m}{2} \left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^2 - U(x) \right\} dt$$

**(2)** Newton の運動方程式の解である。

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt} = - \frac{dU(x(t))}{dx}$$



## Newton 力学と変分原理

**定理 (最小作用の原理)**

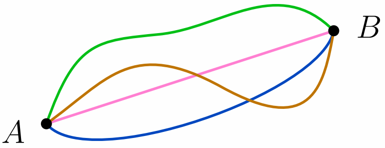
曲線 $x(\bullet)$ について、次の 2 つの条件は同値である：

**(1)** 作用汎関数 $S$ の**停留点 (臨界点)** である。

$$S[x(\bullet)] = \int_a^b \left\{ \frac{m}{2} \left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^2 - U(x) \right\} dt$$

**(2)** Newton の運動方程式の解である。

$$m\frac{d^2x(t)}{dt} = -\frac{dU(x(t))}{dx}$$



# 方向微分

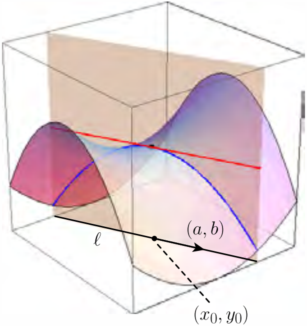
- 関数のグラフを特定の方向に切って調べる＝方向微分
- $(x_0, y_0)$ を通り、方向ベクトル $(a, b)$ であるような直線 $\ell$ を考える。
- $\ell$ の任意の点は、パラメータ $s$ で表される：

$$\begin{cases} x(s) = x_0 + s \cdot a \\ y(s) = y_0 + s \cdot b \end{cases}$$

- $s$ の関数（1 変数関数）

$$f(x(s), y(s)) = f\,(x_0 + s \cdot a,\ y_0 + s \cdot b)$$

- 1 変数関数の増減は普通の微分で調べられる。



# 停留点

## 定義

- $P(x_0, y_0)$ が関数 $f$ の停留点 $\Longleftrightarrow$ $P$ を通るあらゆる方向微分が 0.
- このとき $df(x_0, y_0) = 0$ と表す。

## 停留点の性質

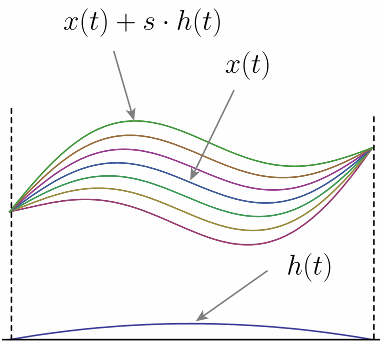
- どのような方向にグラフを切っても、切り口のグラフが水平な接線を持つ。
- グラフは水平な接平面を持つ。
- 「停留点である」という性質は座標系のとりかたに依らない。

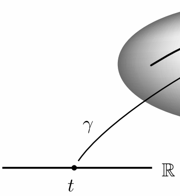
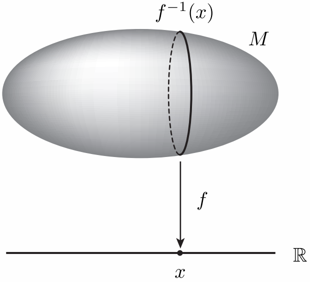
# 汎関数の方向微分

$h(a) = h(b) = 0$ となる関数 $h(\bullet)$ を任意に選び、固定する。

『汎関数 $S[x(\bullet)]$ の $x(\bullet)$ における $h(\bullet)$ 方向微分は？』

$s$ をパラメータとする
$x(t) + s \cdot h(t)$ という曲線の集まりは「$\mathcal{P}$ の中の直線」と考えられる。
(グラフが端点を止めたまま $s$ の 1 次式で変形している)



<table>
<tr><th>陽</th><th>陰</th></tr>
<tr><td>既知 → 未知</td><td>未知 → 既知</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\{(x, y) \mid x = \cos t,\ y = \sin t\}$</td><td>$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$</td></tr>
<tr><td>粒子の軌跡</td><td>波動関数</td></tr>
<tr><td>刺激</td><td>応答</td></tr>
<tr><td>ホモロジー</td><td>コホモロジー</td></tr>
</table>

# 一般的な汎関数

**要請**

- 曲線をパラメータ表示したとき、パラメータについて 1 階微分までの情報を用いて表される。e.g. 「運動」のうち「位置」と「速度」
- 局所性：曲線を繋ぐことについて加法的

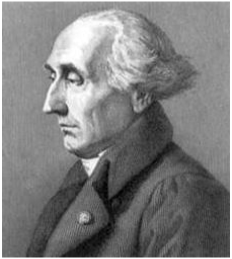
$$S[\gamma_1 \# \gamma_2] = S[\gamma_1] + S[\gamma_2]$$

$$S[x(\bullet)] := \int_a^b L\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) dt$$

$L(t, x, y)$ は **Lagrangian** と呼ばれる 3 変数関数。

$$\begin{tikzcd}
\left\{ \begin{array}{l} \text{区間 } [a,b] \text{ で定義された} \\ \text{滑らかな関数全体} \end{array} \right\} \arrow[r, "S"] \arrow[d, equal] & \{ \text{実数全体} \} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{P} \arrow[r, "S"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

# Euler-Lagrange の方程式



定理

次の２条件は互いに同値

**(1)** $x(\bullet) \in \mathcal{P}$ は汎関数

$$S[x(\bullet)] = \int_a^b L\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) dt$$

の停留曲線である。

**(2)** $x(\bullet) \in \mathcal{P}$ は Euler-Lagrange の微分方程式

$$\left(\left.\frac{\partial L(t,x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x(t)\\ y=\frac{dx(t)}{dt}}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\partial L(t,x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x(t)\\ y=\frac{dx(t)}{dt}}}\right) = 0$$

の解である。

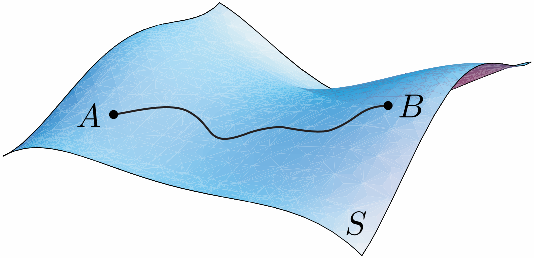
# Newton 力学と変分原理

- Newton の運動法則は運動の各瞬間の位置・速度・加速度などの関係を表す。時刻について局所的。
- 変分原理は、時間を過去から未来まで見渡した、時間について大域的なものの見方（神様の視点）
- 最小作用の原理と運動方程式の数学的等価性
「毎日を目一杯生きることが、人生を目一杯生きることになる」
- 変分原理の利点：座標のとりかた（＝観測者）に依らずに法則を述べられる
- 例えば極座標 $(r, \theta)$ で Euler-Lagrange 方程式を解いても、正しい運動方程式を再現する。
- 作用汎関数さえ正しく与えれば、任意の座標を用いて力学法則の記述できる！
- 一般相対性理論の一般共変性

# 曲面上の測地線と内在的幾何学

曲面 $S$ 上の 2 点 $A, B$ を結ぶ曲線で長さは最短のもの (測地線) は？

- 「$S$ からはみ出さない」条件付き極値問題と見ると、拘束条件の扱いが非常に難しい。
- はじめから「$S$ 内の曲線だけ」を扱ううまい方法はないだろうか？



# 地図を持つ図形＝多様体

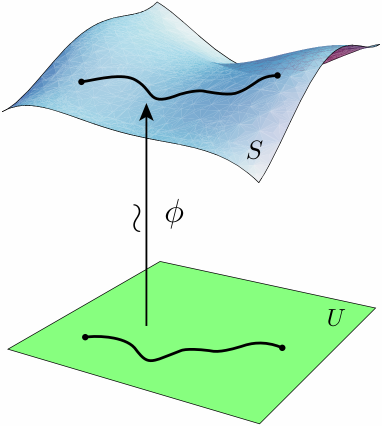
曲面 $S$ の「地図」$U$ があれば？

- 地図 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の点で曲面 $S$ 上の任意の点が表される
- 滑らかな 1 対 1 写像

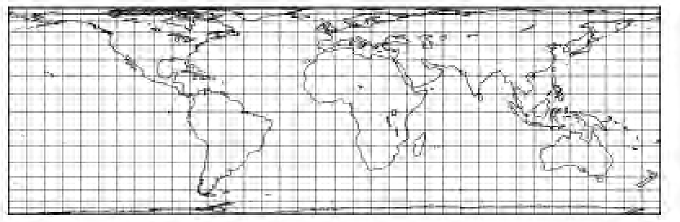
$$\phi : U \xrightarrow{\sim} S$$

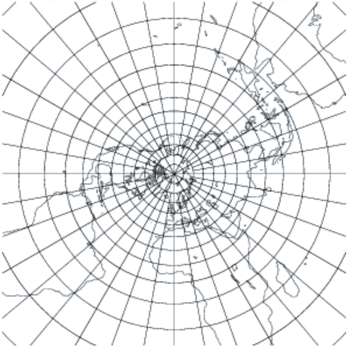
が存在する

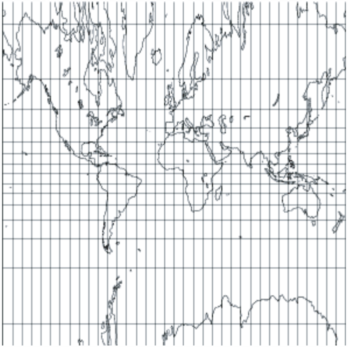
- 曲面 $S$ 上のどんな曲線も、地図 $U$ 上の曲線で表せる。



# 地図を持つ図形＝多様体



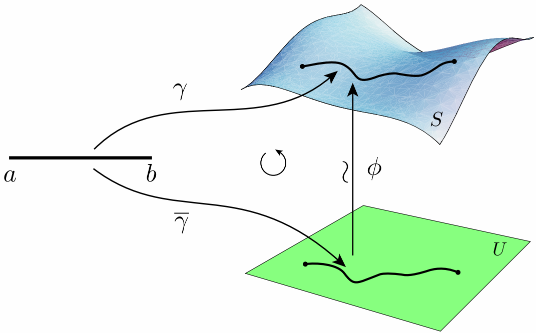




# 地図を持つ図形＝多様体

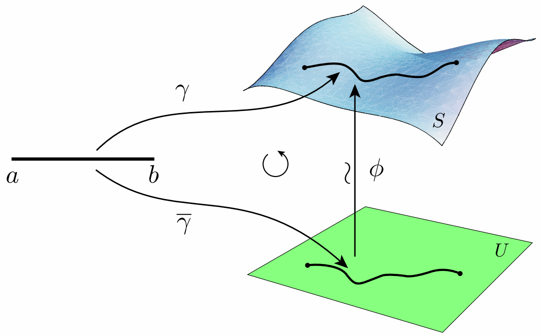
- $\{$ 曲面上の曲線 $\gamma : [a, b] \to S\} \xleftrightarrow{1:1} \{$ 地図上の曲線 $\overline{\gamma} : [a, b] \to U\}$

$$\gamma = \phi \circ \overline{\gamma}, \qquad \overline{\gamma} = \phi^{-1} \circ \gamma$$




- 「曲面 $S$ 上の曲線 $\gamma$ を動かして最短経路を探す問題」
$\Longrightarrow$ 「地図 $U$ 上の曲線 $\overline{\gamma}$ を動かして最短経路を探す問題」

# 地図を持つ図形＝多様体




- 地図を導入するだけで、「曲線が $S$ からはみ出てはいけない」という拘束条件の問題が回避されると同時に、問題が平面上の曲線の変分問題になってしまった！
- では $S$ の曲がり具合の情報は何処へ行ったのか？

# 第一基本形式

- 曲線 $\gamma$ の長さ

$$\mathcal{L}[\gamma] = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{d\gamma^k(t)}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(\bar{\gamma}(t))\frac{d\bar{\gamma}^i(t)}{dt}\frac{d\bar{\gamma}^j(t)}{dt}} dt$$

- 第一基本形式 $g_{ij}(x) := \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \phi^k}{\partial x^i}\frac{\partial \phi^k}{\partial x^j}$
- 地図上の点 $x$ におけるベクトル $\boldsymbol{v}$ の「本当の長さ」

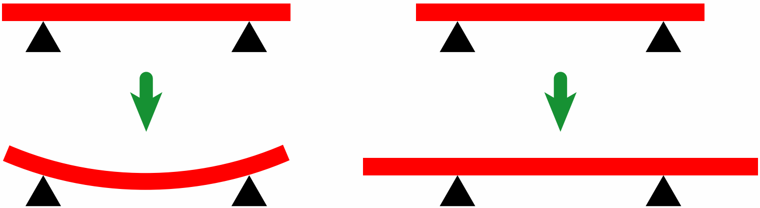
$$||\boldsymbol{v}||_x = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(x) v^i v^j}$$

- $\{g_{ij}(x)\}$ 地図の情報 $\phi : U \to S$ だけで決まる： 場所と方向に応じて変化する「縮尺」

# 内在的幾何からリーマン幾何・一般相対論へ

曲線の長さに関するあらゆる情報は、縮尺付きの地図 $(U, g_{ij}(x))$ に集約されており、曲面 $S$ がその外側の空間 $\mathbb{R}^3$ にどのように埋め込まれているかという情報は必要でない。— Gauss

- 曲線の長さ $\Longrightarrow$ 距離・角度・面積
- 計量 (metric) $g_{ij}(x)$ ≒縮尺：実際の長さを地図上の長さから計算するためのデータ
- 曲がり具合を「たわみ」でなく、「伸び縮み」で理解可能



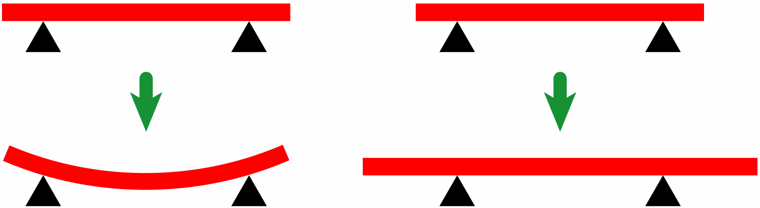
# 内在的幾何からリーマン幾何・一般相対論へ

**地図＋縮尺で捕えられる性質の総体こそが図形である— Riemann**

- Riemann 多様体 (manifold) の概念
- $g_{ij}(x)$：計量 (metric) ＝曲線の長さを定義するデータ

**重力場＝計量 — Einstein**

- 曲がり具合を「たわみ」でなく、「伸び縮み」で理解可能
- 宇宙の外に出られない人間でも宇宙の曲がり具合を議論できる



# 一般相対性理論

重力場 $\Longleftrightarrow$ Riemann 多様体 $(M, g)$

$$L[x(\bullet)] = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^j(t)}{dt}}\, dt$$

$$E[x(\bullet)] = \int_a^b \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^j(t)}{dt}\, dt$$

測地線の方程式＝自由落下の運動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} x^i(t) + \sum_{j,k=1}^n \Gamma^i_{jk}(x(t)) \frac{dx^j(t)}{dt} \frac{dx^k(t)}{dt} = 0$$

$$\Gamma^i_{jk} \equiv \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{im}(x) \left( \frac{\partial g_{mk}(x)}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}(x)}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^m} \right)$$

Christoffel's symbol, Levi-Civita connection

# 経路積分 as “advanced” calculus

| 対象 | 微分 | 積分 |
|---|---|---|
| 1 変数関数 | 微分 $\dfrac{df(x)}{dx}$ | $\int_a^b f(x)dx$ |
| 多変数関数 | 方向微分 $\nabla_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$ | $\int \cdots \int_\Omega f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ |
| 汎関数 | 変分（汎関数微分） | 汎関数積分（経路積分） |
| | 古典論 | 量子論 |

# 量子力学 (Quantum Mechanics)

- 粒子と波動の双対性 (相補性)
- 物質や光が，あるときは粒子的に，またあるときは波動として振る舞う

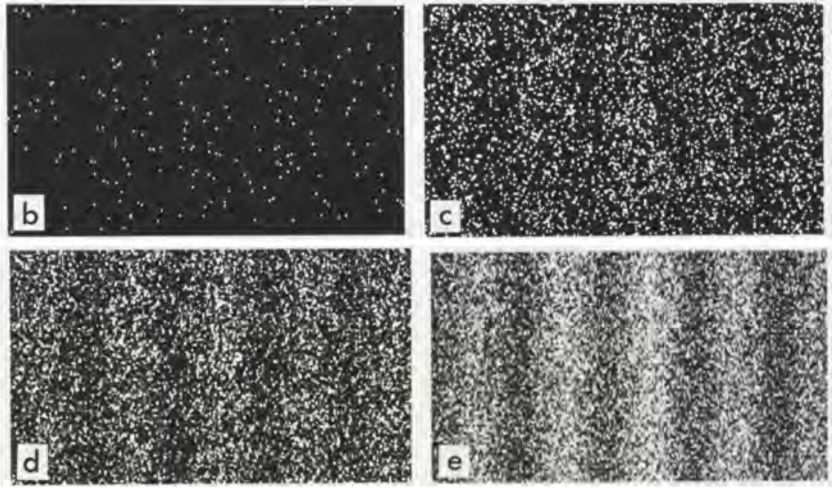
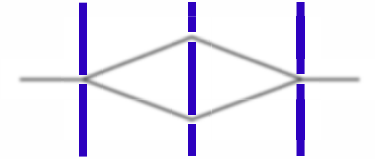
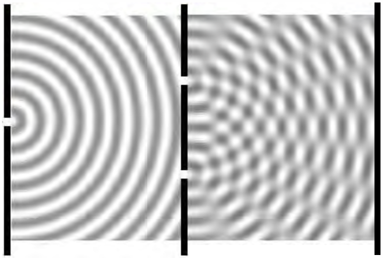



Photo Credit: Dr. Tonomura and Belsazar (Wikimedia Commons)

# 量子力学 (Quantum Mechanics)





古典解 (＝運動方程式を満たす軌道) だけに注目して他の可能性を無視すると、正しい結果を与えない！

# 重ね合わせの原理＝線型性

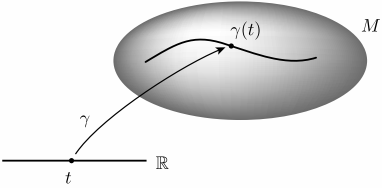
量子力学の法則は線形代数の言葉で記述される

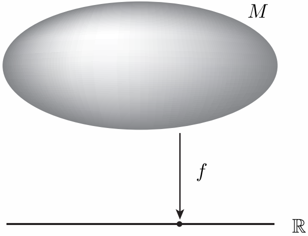
- 古典力学にない量子力学の最大の特徴
- 物理的状態は重ね合わせ (線形結合) が可能
- 物理的状態の全体はベクトル空間 (Hilbert space) をなす
- 時間変化は線型写像 (unitary operator) で表される
- 無限小時間発展 = Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

- 1 階線形常微分方程式！

# 線形空間はどこに？




$\{\gamma : \mathbb{R} \to M\}$ は自然なベクトル空間の構造を持たないが、
$\{f : M \to \mathbb{R}\}$ は自然なベクトル空間の構造を持つ：

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (cf)(x) = c(f(x)) \qquad (x \in M)$$

量子力学は $M$ 上の関数 $f : M \to \mathbb{R}$ に対する法則として定式化するのが自然。

# 対応原理

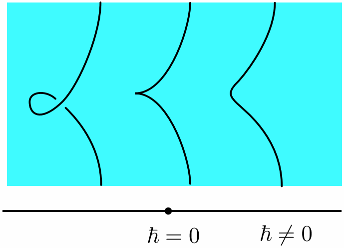
Niels Bohr が提唱した一つの指導原理：

プランク定数 $\hbar$ を 0 にする極限で、 量子力学は古典力学を再現する。

$$\lim_{\hbar\to 0}(\text{量子論的な量}) = (\text{古典論での量})$$

いいかえると、

$\hbar$ をパラメータとして古典力学を変形した理論が量子力学である



# 正準量子化

1. 対象とする系をハミルトン力学 (正準形式) で記述する。
2. 正準変数 $(q, p)$
$$\{q, p\} = 1$$
を、正準交換関係
$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$
を満たす演算子 $(\hat{q}, \hat{p})$ に置き換える。
3. 正準変数 $(q, p)$ の関数である古典的力学量 $A(q, p)$ について、$p \mapsto \hat{p}, q \mapsto \hat{q}$ という置き換え操作によって、古典的力学量 $A = A(q, p)$ の量子力学的対応物 $\hat{A} = \hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ を定める。
4. Hamiltonian flow $\Longleftrightarrow$ Heisenberg の運動方程式

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} \Longleftrightarrow \frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}]$$

# 正準量子化の問題点

**問題点**

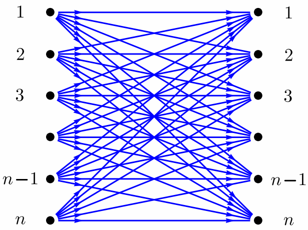
- 演算子の積については順序の不定性が残る。
- 対応原理は $\hbar$ 展開の初項しか決めてくれない。
- 量子化後にエルミート演算子同士の積は必ずしもエルミート演算子にはならない。

- ちっとも “canonical” な量子化の手続きでない！
- むしろ場当たり的にさえ見える。

# 量子力学系のおもちゃ

- 有限次元ベクトル空間 $V$
- 基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 量子力学的状態
- 線型変換 $T : V \to V$ が生成する離散的な時間発展
- $T$ の表現行列 $A = (A_{ij})$

$$T\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\boldsymbol{e}_j$$




- $A_{ij}$ = 時刻 $t$ に状態 $i$ にあった系が、次の時刻 $t+1$ で状態 $j$ に移る遷移振幅
- $A = (A_{ij})$ 転送行列 **(transfer matrix)**

# 転送行列と時間発展

- $\boldsymbol{e}_i$ という初期状態から出発し，時間が $m$ だけ経過した後の状態は、変換の反復で計算できる

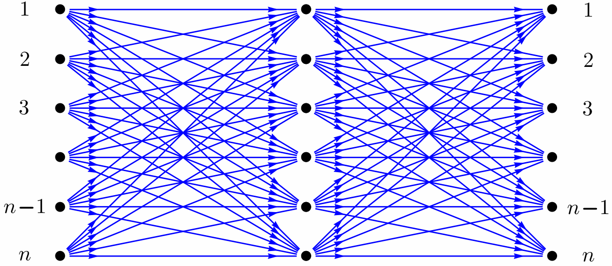
$$T(T(\cdots T(\boldsymbol{e}_i)\cdots)) = T^m \boldsymbol{e}_i$$

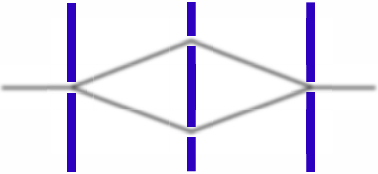
- $\boldsymbol{e}_i$ から $\boldsymbol{e}_j$ に遷移する振幅 (amplitude) = 行列要素 $(A^m)_{ij}$
- 量子力学的時間発展＝転送行列のベキ乗

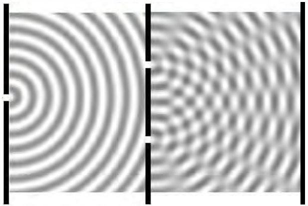
$$(A^m)_{i_0 i_m} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n} A_{i_0 i_1} A_{i_1 i_2} \cdots A_{i_{m-1} i_m}$$

# 転送行列と時間発展

- 例：$m = 2$ $\qquad (A^2)_{ik} = \sum_j A_{ij}A_{jk}$



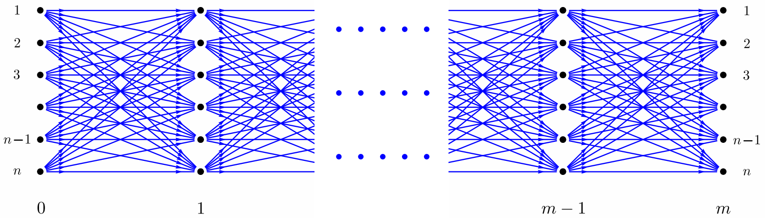





# 転送行列と時間発展

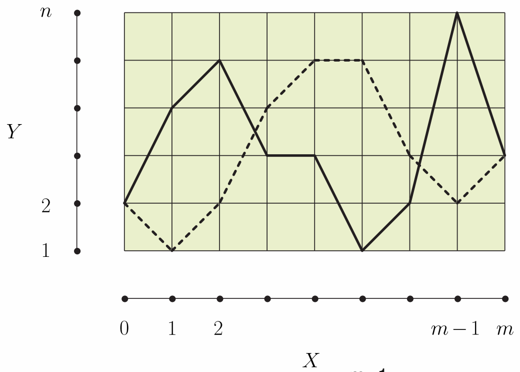
- $m$ step の時間発展

$$(A^m)_{i_0 i_m} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n} A_{i_0 i_1} A_{i_1 i_2} \cdots A_{i_{m-1} i_m}$$




- 中間に現れる添字 $(i_1, i_2, \cdots, i_{m-1})$ の和は、漏れなく取らなければならない。

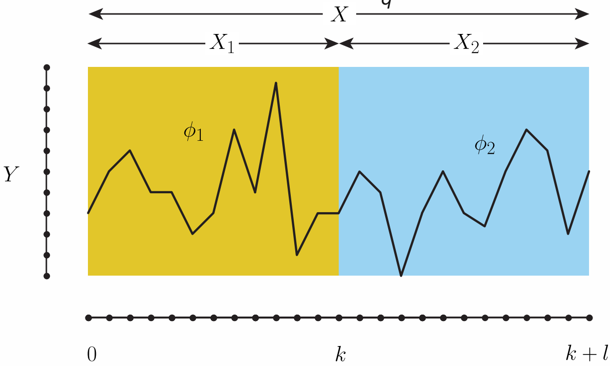
# 経路和としての見方




- 経路 $\phi \in \mathrm{Map}(X, Y)$ の重み $\quad W(\phi) = \prod_{k=0}^{m-1} A_{\phi(k)\phi(k+1)} \in \mathbb{C}$
- 経路の空間 $\mathrm{Map}(X, Y)$ 上の関数 (汎関数) $\quad W : \mathrm{Map}(X, Y) \to \mathbb{C}$
- 遷移振幅の経路和表示 $\quad (A^m)_{i_0 i_m} = \sum_{\substack{\phi \in \mathrm{Map}(X,Y) \\ \phi(0)=i_0, \phi(m)=i_m}} W(\phi)$

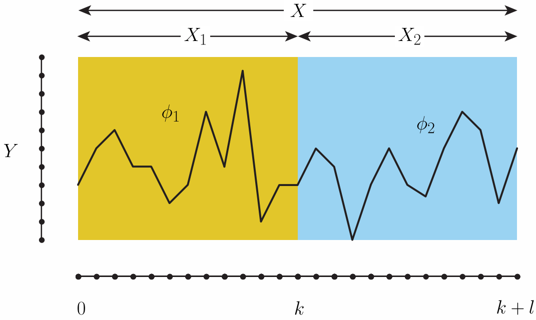
# 行列の積と経路の貼り合わせ

$$A^{k+l} = A^k A^l \qquad (A^{k+l})_{pr} = \sum_q (A^k)_{pq}(A^l)_{qr}$$




$$\sum_{\substack{\phi\in\mathrm{Map}(X,Y)\\ \phi(0)=p,\phi(k+l)=r}} W(\phi) = \sum_{q\in Y}\left\{\sum_{\substack{\phi_1\in\mathrm{Map}(X_1,Y)\\ \phi_1(0)=p,\phi_1(k)=q}} W(\phi_1)\right\}\left\{\sum_{\substack{\phi_2\in\mathrm{Map}(X_2,Y)\\ \phi_2(k)=q,\phi_2(k+l)=r}} W(\phi_2)\right\}$$

# 行列の積と経路の貼り合わせ

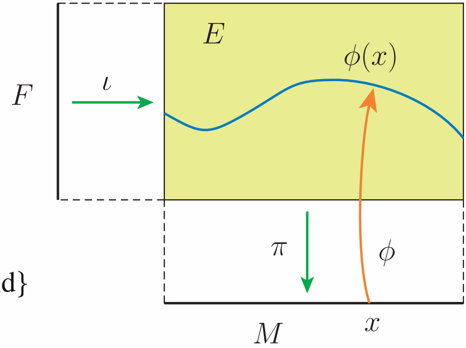



- グラフの定義域 $X$ を $X_1$ と $X_2$ で覆う
- グラフの制限 $\phi_1 : X_1 \to Y$, $\phi_2 : X_2 \to Y$
- 重み $W(\phi)$ は局所的: $W(\phi) = W(\phi_1) \cdot W(\phi_2)$
- 貼り合わせ: $\phi_1$ の終点と $\phi_2$ の始点が一致すれば，それらを繋いで $\phi : X \to Y$ が定まる.
- 逆に経路和による方法で、行列の積の結合法則が自然に理解できる。

# 場の理論の一般的枠組み

- $M$ = 「時空」≡ 場の定義域
- $F$ = 内部空間 ≡ 場の値域
- $E$ = fiber bundle
  $\iota : F \longrightarrow E, \qquad \pi : E \longrightarrow M$
- $\phi$ = 場 ($E$ の切断)
- 場の空間（一般に無限次元）

$$\Gamma(M, E) = \{\phi : M \longrightarrow E \mid \pi \circ \phi = \mathrm{id}\}$$



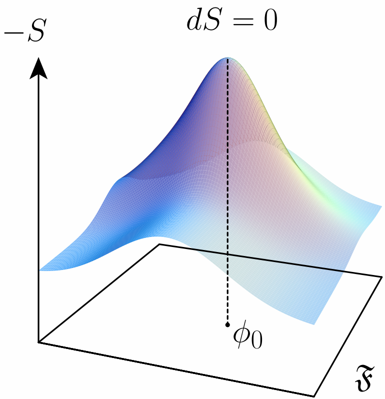

- 作用汎関数 $S : \Gamma(M, E) \longrightarrow \mathbb{C}$
- e.g. 解析力学 = 1 次元の場の理論：
  $M = \mathbb{R}$ (時間), $F = \mathbb{R}^3$ (空間), $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ (時空)

# 場の古典論

- 運動方程式 $\Longleftrightarrow$ 変分原理
  $dS = 0$ Euler-Lagrange 方程式
- 興味の対象
  運動方程式の解＝古典解
- 古典解が離散 or 連続パラメータ付きで得られることがある
  $\rightsquigarrow$ 解のモジュライ空間

$$\mathfrak{M} = \{\phi_0 \in \Gamma(M, E) \;:\; dS|_{\phi=\phi_0} = 0\}$$

- $\mathfrak{M}$ 以外の場には関心がない.

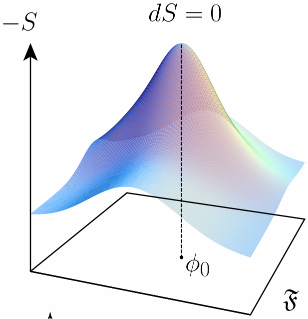


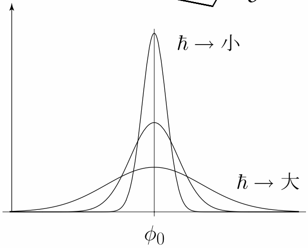
# 場の量子論

- 古典解だけでなく、すべての場の配位を重ね合わせて考える必要がある。
- 人為的な取捨選択は自然が許さない。
- 場 $\phi$ の寄与 $\propto \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}S(\phi)\right\}$
- 分配関数

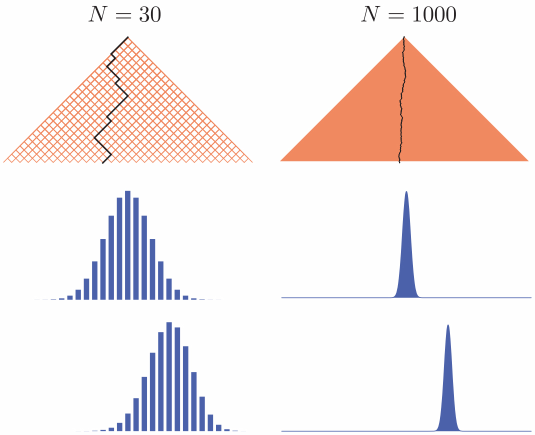
$$Z = \int_{\Gamma(M,E)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}S[\phi]\right)\mathcal{D}\phi$$

- $\hbar$ Planck 定数
- 対応原理 : $\hbar \to 0$ で古典論を再現



# 古典極限≒中心極限定理




$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \pm 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$A_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j + 1 \\ 1 & i = j - 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

中心極限定理 $\Longrightarrow$ 古典的軌道に収束

# 期待値＝相関関数

- 場の空間 $\mathfrak{F} \equiv \Gamma(M, E)$ 上には $e^{-S(\phi)/\hbar}$ に比例する測度が定義される
- 知りたい量 ＝ 汎関数 $f : \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$ の期待値

$$\big\langle f(\phi) \big\rangle := \frac{\int_{\mathfrak{F}} d\phi\, f(\phi)\, e^{-\frac{1}{\hbar}S(\phi)}}{\int_{\mathfrak{F}} d\phi\; e^{-\frac{1}{\hbar}S(\phi)}}$$

- 分配関数

$$Z = \int_{\mathfrak{F}} e^{-\frac{1}{\hbar}S(\phi)} d\phi$$

- 自由度 $= \dim \mathfrak{F}$ （場の理論はふつう無限自由度の力学系）

# 自由場と Wick の定理

- 自由場 (free field) = 作用が場 $\phi$ の高々 2 次式で表される理論 (正規分布)
- 自由度 $N$ の場 $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^N) \in \mathbb{R}^N$
- 自由場の作用=二次形式　$S(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} x^i A_{ij} x^j$

  $(\ ,\ )$ : $\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積
  $A = (A_{ij})$ : $N \times N$ 正定値対称行列
- 分配関数　$Z_0 \equiv \int_{\mathbb{R}^N} dx\ \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})\right\}$
- $n$ 点相関関数 (期待値)

$$\left\langle x^{i_1} x^{i_2} \cdots x^{i_n} \right\rangle \equiv \frac{1}{Z_0} \int_{\mathbb{R}^N} dx\ x^{i_1} \cdots x^{i_n} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})\right\}$$

# Wick の定理

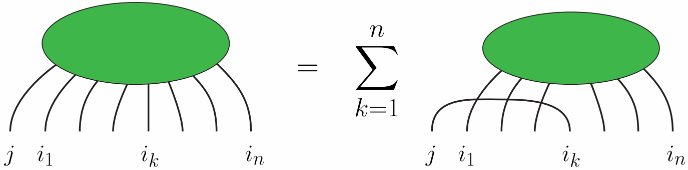
自由場の任意の相関関数は、

- $n+1$ 点相関関数を $n-1$ 点相関関数に還元する漸化式

$$\left\langle x^j x^{i_1} \cdots x^{i_n} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \left\langle x^j x^{i_k} \right\rangle \left\langle x^{i_1} \cdots \underbrace{\; x^{i_k} \;}_{\text{取り除く}} \cdots x^{i_n} \right\rangle$$

- $\left\langle x^i x^j \right\rangle = A^{ij}$ : 伝播関数 (propagator)
- $\left\langle x^i \right\rangle = 0$

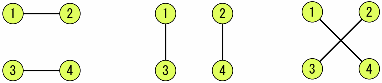
から再帰的に計算できる。



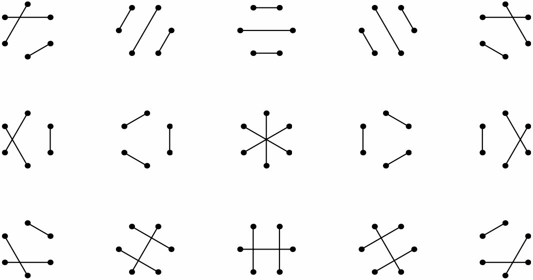
## Wick の定理

- $n = 4$

$$\langle x^1 x^2 x^3 x^4 \rangle = \langle x^1 x^2 \rangle \langle x^3 x^4 \rangle + \langle x^1 x^3 \rangle \langle x^2 x^4 \rangle + \langle x^1 x^4 \rangle \langle x^2 x^3 \rangle$$



- $n = 6$



# 相関関数の母関数

- $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_N)$ 補助的な変数＝外力
- 相関関数の母関数 (確率分布の Frourier/Laplace 変換)

$$Z(\boldsymbol{\xi}) := \left\langle \exp(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) \right\rangle = \frac{1}{Z_0} \int_{\mathbb{R}^N} dx \exp\Big\{ \underbrace{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})}_{\text{調和振動子}} + \underbrace{(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})}_{\text{外力}} \Big\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \cdots, i_n = 1}^{N} \left\langle x^{i_1} x^{i_2} \cdots x^{i_n} \right\rangle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_n}$$

相関関数 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{\xi}$ に関する Taylor 展開の係数

- 任意の相関関数は $Z(\boldsymbol{\xi})$ から求められる ($\partial_{\xi_{i_k}} := \partial / \partial \xi_{i_k}$).

$$\left\langle x^{i_1} x^{i_2} \cdots x^{i_n} \right\rangle = \partial_{\xi_{i_n}} \cdots \partial_{\xi_{i_2}} \partial_{\xi_{i_1}} \Big|_{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}} Z(\boldsymbol{\xi})$$

- Fourier 変換のもとで、「掛け算」と「微分」の役割は入れ替わる

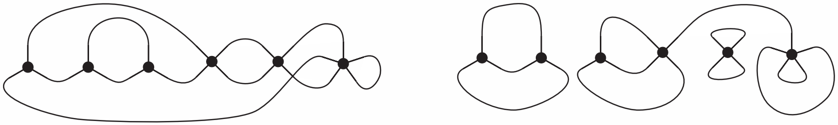
# 摂動展開

- 相互作用を含む理論を「自由場のまわりで」Taylor 展開すること
- $S(\phi) = S(\phi_0) + \frac{a}{2}(\phi - \phi_0)^2 - V(\phi) \qquad V(\phi) = \sum_{k\geq 3} \frac{\lambda_k}{k!}(\phi - \phi_0)^k$
- $\phi = \underbrace{\phi_0}_{\text{古典解}} + \sqrt{\hbar}\underbrace{\varphi}_{\text{ゆらぎ}}$ と分解し、ゆらぎ $\varphi$ については積分
- 分配関数 $Z_\lambda$ を結合定数 $\lambda$ に関するベキ級数展開で表示

$$
\begin{aligned}
Z_\lambda &= e^{-\frac{1}{\hbar}S(\phi_0)} \int d\varphi \exp\Big\{-\frac{a}{2}\varphi^2 + \sum_{k\geq 3} \frac{\lambda_k}{k!}\hbar^{(k-2)/2}\varphi^k\Big\} \\
&= Z_0 \Big\langle \exp\Big\{\sum_{k\geq 3} \frac{\lambda_k}{k!}\hbar^{(k-2)/2}\varphi^k\Big\}\Big\rangle \\
&= \sum_{n_3, n_4, \cdots}^{\infty} \frac{1}{n_3!}\Big(\frac{\lambda_3}{3!}\Big)^{n_3} \frac{1}{n_4!}\Big(\frac{\lambda_4}{4!}\Big)^{n_4} \cdots \hbar^{\frac{1}{2}\sum_{k\geq 3} n_k(k-2)} \cdot \big\langle (\varphi^3)^{n_3}(\varphi^4)^{n_4} \cdots \big\rangle
\end{aligned}
$$

# Feynman 図形

- $\langle \cdots \rangle$ : 自由場における相関関数 $\Leftarrow$ Wick 定理で計算できる。
- 相互作用 $\Longleftrightarrow$ グラフの頂点,　　伝搬関数 $\Longleftrightarrow$ グラフの辺
- Wick の定理 $\Longleftrightarrow$ 相関関数は、頂点と辺を、あらゆる方法で結んだ寄与の和で表される。
- Feynman 図形 (diagram) $\longleftarrow$ (素粒子の世界線と解釈)



- 相関関数の摂動展開は、Feynman 図形ごとの重みの総和

$$Z_\lambda = Z_0 \sum_{\Gamma} W(\Gamma)$$

# 正準量子化の問題点（再掲）

**問題点**

- 演算子の積については順序の不定性が残る。
- 対応原理は $\hbar$ 展開の初項しか決めてくれない。
- 量子化後にエルミート演算子同士の積は必ずしもエルミート演算子にはならない。

- ちっとも “canonical” な量子化の手続きでない！
- むしろ場当たり的にさえ見える。

# 変形量子化

- 対応原理の数学的な表現
- **Bayen-Flato-Fronsdal-Lichnerowicz-Sternheimer**
  **"Deformation theory and quantization" I,II 1977-78**
- Poisson 括弧 $\{-,-\}$ を交換子の leading term として再現できるか？

### 変形量子化問題

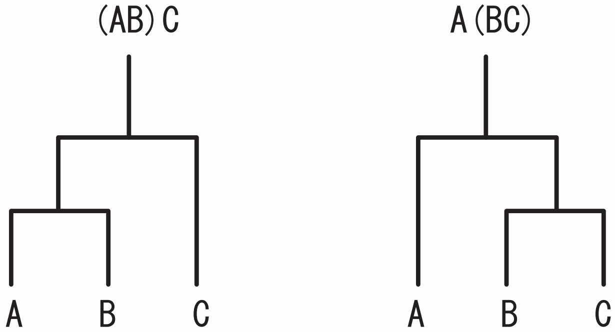
Poisson 代数 $(C^\infty(M), \cdot, \{-,-\})$ が与えられたとき、$\hbar$ を形式的パラメータとする非可換結合的代数 $(C^\infty(M)[[\hbar]], \star_\hbar)$ が存在して

$$\{f,g\} = \lim_{\hbar\to 0} \frac{f \star_\hbar g - g \star_\hbar f}{\hbar} \qquad (f,g \in C^\infty(M) \subset C^\infty(M)[[\hbar]])$$

が成り立つか？ また、そのような結合的代数は一意的に定まるか？

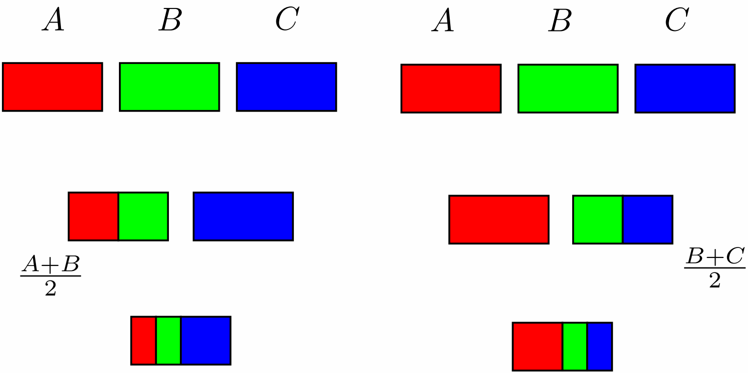
# 結合法則

$$(AB)C = A(BC)$$



## 結合法則

- 結合法則をみたすような演算を作るのは、実は自明ではない。
- 例えば「足して２で割る平均操作」は結合法則を満たさない。




$$\frac{\frac{A+B}{2}+C}{2} = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{2}C \qquad \frac{A+\frac{B+C}{2}}{2} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}$$

# Moyal 積

## Darboux の定理

Symplectic 多様体 (相空間など) には、Poisson 括弧が、正準交換関係

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}, \qquad \{q_i, q_j\} = 0, \qquad \{p_i, p_j\} = 0$$

をみたす座標系 (正準座標) $\{q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n\}$ が、局所的には常に存在する。

## 定理 ( Moyal, Weyl , Husimi, ...)

次で定義される $\star$ 積は結合法則をみたす

$$(f \star g)(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y) + \frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) + \cdots$$

$$(f \star g)(x, y) = f(x, y) \exp\left( \frac{\hbar}{2} \sum_i \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_i} \right) g(x, y)$$

# 変形量子化の存在問題

- $\star$ 積の表示は (正準) 座標に強く依存している。
- 変形量子化は非線形な座標変換（一般共変性）と両立するか？

# 変形量子化の存在問題

- $\star$ 積の表示は (正準) 座標に強く依存している。
- 変形量子化は非線形な座標変換（一般共変性）と両立するか？

## Symplectic 多様体の場合

肯定的に解決！

- **M. De Wilde and P. Lecomte, “Existence of star-products and of formal deformations of Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds” Lett. Math. Phys., 7 (1983), 487-496.**
- **H. Omori, Y. Maeda, and A. Yoshioka, “Weyl manifolds and deformation quantization” Adv. Math, 85 (1991), 224-255.**
- **B. Fedosov, “Defomation quantization and index theory” In: Mathematical Physics, Akademie Verlag, 1996.**

# 変形量子化の存在問題

- $\star$ 積の表示は (正準) 座標に強く依存している。
- 変形量子化は非線形な座標変換（一般共変性）と両立するか？

**Symplectic 多様体の場合**

肯定的に解決！

- **M. De Wilde and P. Lecomte, "Existence of star-products and of formal deformations of Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds" Lett. Math. Phys., 7 (1983), 487-496.**
- **H. Omori, Y. Maeda, and A. Yoshioka, "Weyl manifolds and deformation quantization" Adv. Math, 85 (1991), 224-255.**
- **B. Fedosov, "Defomation quantization and index theory" In: Mathematical Physics, Akademie Verlag, 1996.**

- 解析力学は symplectic 多様体に限らず、一般の Poisson 多様体上で定式化できる。
- では一般の Poisson 多様体でも、変形量子化は存在するか？

# Kontsevich の定理

**定理 (Kontsevich)**

$\alpha$ を $\mathbb{R}^D$ の領域で定義された Poisson 構造とする。このときある具体的に表される universal な表式

$$f \star_\hbar g = f \cdot g + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n B_n(f, g)$$

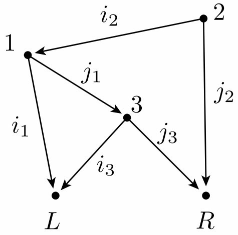
が存在し、この $\star$ 積は結合法則を満たす。また、異なる座標で求めた $\star$ 積は、もとの $\star$ 積とゲージ同値である。

任意の Poisson 多様体に対し、その変形量子化が同型を除いて一意的に存在する。

Kontsevich "Deformation Quantization of Poisson Manifolds" Letters in Mathematical Physics 66 (2003) 157-216

# Kontsevich の定理

- $n = 1, 2, 3, \cdots$ ($\hbar$ のベキ )
- $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma)$ グラフ $V_\Gamma$ = 頂点、$E_\Gamma$ = 辺
  - 頂点 $V_\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots, n\} \cup \{L, R\}$ (計 $n + 2$ 個)
  - 各頂点 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ からは ($i$ 以外の頂点に向かう) 2 本の有向辺 $i_k, j_k$ が出ている。
- $G_n$ : 上の条件を満たすグラフ全体の集合。 $|G_n| = (n(n+1))^n$.
- $U \subset \mathbb{R}^D$ : ある領域
- $\alpha = \alpha^{ij}(x) \dfrac{\partial}{\partial x_i} \wedge \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ : Poisson bi-vector
- 各グラフ $\Gamma \in G_n$ に対し以下を定義する
  1. $B_{\Gamma,\alpha} : C^\infty(U) \otimes C^\infty(U) \to C^\infty(U)$
     bi-differential operator
  2. $w_\Gamma \in \mathbb{R}$



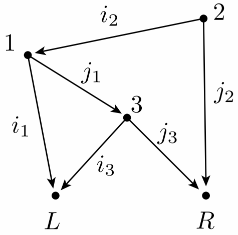
# Kontsevich の定理

**bidifferential operator**

$$B_{\Gamma,\alpha}(f,g)$$
$$= \sum_{I:E_\Gamma \to \{1,\cdots,D\}} \left[ \prod_{k=1}^{n} \left( \prod_{\substack{e\in E_\Gamma \\ e\to k}} \frac{\partial}{\partial x^{I(e)}} \right) \alpha^{I(i_k)I(j_k)} \right] \cdot \left( \prod_{\substack{e\in E_\Gamma \\ e\to L}} \frac{\partial}{\partial x^{I(e)}} \right) f \cdot \left( \prod_{\substack{e\in E_\Gamma \\ e\to R}} \frac{\partial}{\partial x^{I(e)}} \right) g$$

右図の $\Gamma$ の場合 ($I(\cdots)$ を単に $\cdots$ と略記)

$$B_{\Gamma,\alpha}(f,g) = \sum_{\substack{1\le i_1,i_2,i_3\le D \\ 1\le j_1,j_2,j_3\le D}}$$
$$\alpha^{i_2 j_2} \cdot \left(\partial_{i_2}\alpha^{i_1 j_1}\right) \cdot \left(\partial_{j_1}\alpha^{i_3 j_3}\right) \cdot \left(\partial_{i_1}\partial_{i_3} f\right) \cdot \left(\partial_{j_3}\partial_{j_2} g\right)$$

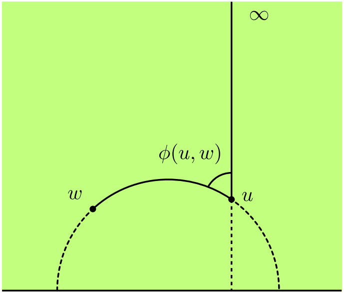


## Kontsevich の定理

### グラフの重み $w_\Gamma$

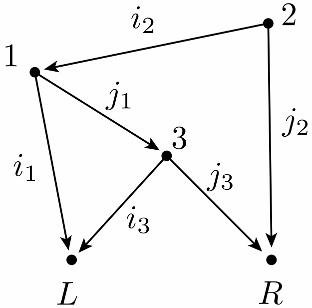
- $w_\Gamma = \dfrac{1}{n!(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathrm{Conf}_n(\mathbb{H})} \bigwedge_{k=1}^{n} (d\phi(i_k) \wedge d\phi(j_k))$
- $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{H}) = \{(u_1, \cdots, u_n) \mid \mathrm{Im}\, u_i > 0,\ u_i \neq u_j\ (i \neq j)\}$　$n$ 点配置空間
- 有向辺 $e = (i \longrightarrow j) \in E_\Gamma$ に対し、

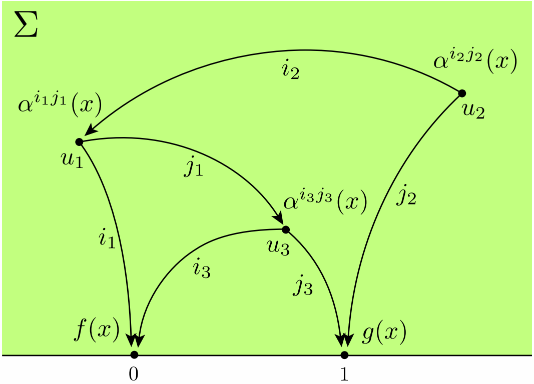
$$\phi(e) = \phi(u_j, u_i), \qquad \phi(u, w) = \frac{1}{2i} \log \frac{(w-u)(\overline{w}-u)}{(\overline{w}-\overline{u})(w-\overline{u})}$$



$$B_{\Gamma,\alpha}(f,g) = \sum_{\substack{1\le i_1,i_2,i_3\le D \\ 1\le j_1,j_2,j_3\le D}} \alpha^{i_2 j_2}(x)\frac{\partial\alpha^{i_1 j_1}(x)}{\partial x^{i_2}}\frac{\partial\alpha^{i_3 j_3}(x)}{\partial x^{j_1}}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_3}}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^{j_3}\partial x^{j_2}}$$

$$w_\Gamma = \frac{1}{3!(2\pi)^6}\int_{\mathrm{Conf}_3(\mathbb{H})} d\phi(u_1,0)\wedge d\phi(u_1,u_3)\wedge d\phi(u_2,u_1) \wedge d\phi(u_2,1)\wedge d\phi(u_3,0)\wedge d\phi(u_3,1)$$



## Kontsevich の定理

**定理 (Kontsevich)**

$\alpha$ を $\mathbb{R}^D$ の領域で定義された Poisson 構造とする。このとき $\star$ 積を

$$f \star g = f \cdot g + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \sum_{\Gamma \in G_n} w_\Gamma B_{\Gamma,\alpha}(f,g)$$

で定めると、$\star$ は結合法則

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$$

を満たす。また、異なる座標で求めた $\star$ 積は、もとの $\star$ 積とゲージ同値である。

任意の Poisson 多様体に対し、その変形量子化が同型を除いて一意的に存在する。

# Kontsevich の定理

- 証明には変形のモジュライ空間の理論を、ホモトピー代数によって拡張したものを用いて “Formality Theorem” を証明し、その系として前の定理を得た。
- $\star$ 積の展開公式の意味は何か？

## Kontsevich の定理

- 証明には変形のモジュライ空間の理論を、ホモトピー代数によって拡張したものを用いて “Formality Theorem” を証明し、その系として前の定理を得た。
- $\star$ 積の展開公式の意味は何か？

- そもそも、このような複雑な公式をどのようにして見つけたのか？
- Kontsevich さん、何か隠していませんか？

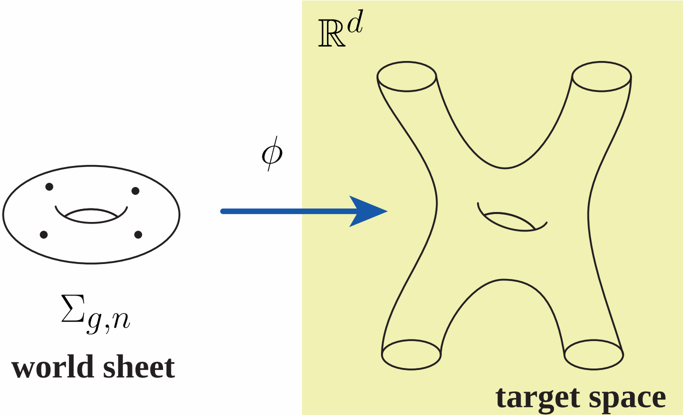
# Kontsevich の定理

- 証明には変形のモジュライ空間の理論を、ホモトピー代数によって拡張したものを用いて “Formality Theorem” を証明し、その系として前の定理を得た。
- $\star$ 積の展開公式の意味は何か？

- そもそも、このような複雑な公式をどのようにして見つけたのか？
- Kontsevich さん、何か隠していませんか？

- 背後には弦理論（**Riemann** 面上の場の理論）がある！

## Riemann 面上の場の理論としての弦理論

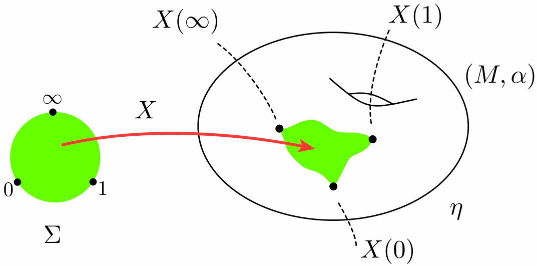



という写像全体を「場」とする Riemann 面上の場の理論。作用汎関数

$S[\phi] \propto \mathrm{Area}[\phi(\Sigma_{g,n})]$　　(南部・後藤, Polyakov)

# Poisson $\sigma$-模型

- $(M, \alpha)$ Poisson 多様体
  $x = (x^1, \cdots, x^D)$ : $M$ の座標,　$\alpha = \alpha^{ij} \dfrac{\partial}{\partial x^i} \wedge \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ : Poisson bivector
- $\Sigma = D^2$　$u = (u^1, u^2)$ : $D$ の座標
- $X : \Sigma \to M$
- $\eta$ : $M$ 上の 1-form の $X$ による引き戻し : $\eta \in \Gamma(\Sigma, X^*(T^*M) \otimes T^*D)$
  境界条件 : $u \in \partial D$ において $\eta(u)$ は $\partial D$ の接ベクトルに対し 0 となる



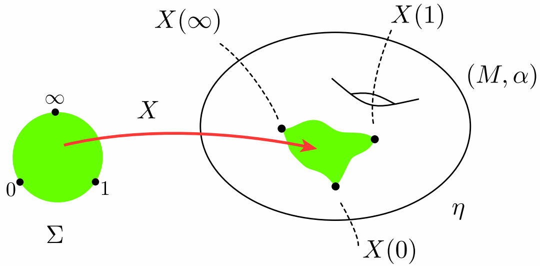
# Poisson $\sigma$-模型

- 作用汎関数

$$S[X,\eta] = \int_{\Sigma} \eta_i(u) \wedge dX^i(u) + \frac{1}{2}\alpha^{ij}(X(u))\eta_i(u) \wedge \eta_j(u)$$

- $\mathcal{O} = \mathcal{O}[X,\eta]$ の期待値

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int \mathcal{D}X\, \mathcal{D}\eta\, \mathcal{O}[X,\eta] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[X,\eta]\right\}$$



# Poisson $\sigma$-模型

特に $x \in M, f, g \in C^\infty(M)$ に対し、

$$\mathcal{O}[X, \eta] = f(X(1))g(X(0))\delta(X(\infty) - x)$$

とおくと、

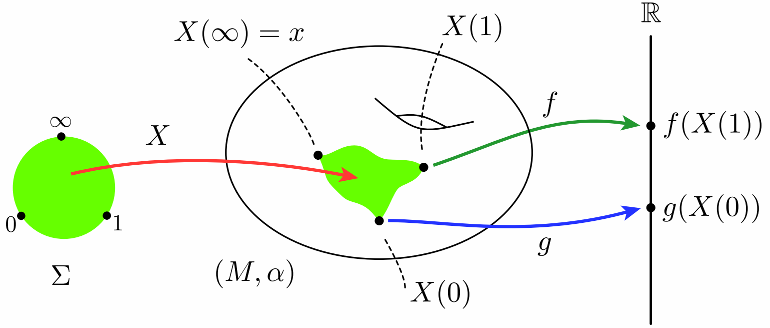
$$\boxed{(f \star g)(x) = \int_{X(\infty)=x} \mathcal{D}X\, \mathcal{D}\eta\, f(X(1))g(X(0)) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[X, \eta]\right\}}$$

が成り立つ。

Cattaneo-Felder “A Path Integral Approach to the Kontsevich Quantization Formula”, Comm. Math. Phys. 212 (2000) 591-611

# Poisson $\sigma$-模型

$$(f \star g)(x) = \int_{X(\infty)=x} \mathcal{D}X\, \mathcal{D}\eta\, f(X(1))g(X(0)) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[X, \eta]\right\}$$



# Symplectic 多様体の場合

- Poisson 形式 $\alpha = \alpha^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ が非退化
- $\alpha^{ij}(x)$ の逆行列 $\omega_{ij}(x)$ が存在
- $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ は symplectic form, $(M, \omega)$ は symplectic 多様体

$S[X, \eta]$ は $\eta$ について非退化 2 次形式 (自由場) $\Rightarrow \int \mathcal{D}\eta$ を実行可能

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O} \rangle &= \int \mathcal{D}X\, \mathcal{D}\eta\, \mathcal{O}[X] \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma} \eta_i \wedge dX^i + \frac{1}{2}\alpha^{ij}(X)\eta_i \wedge \eta_j \right\} \\ &= \int \mathcal{D}X\, \mathcal{O}[X] \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma} \frac{1}{2}\omega_{ij}(X) dX^i \wedge dX^j \right\} \\ &= \int \mathcal{D}X\, \mathcal{O}[X] \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma} dp_i \wedge dq^i \right\} \\ &= \int \mathcal{D}X\, \mathcal{O}[X] \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\mathbb{R}} p_i dq^i \right\} \qquad (\because \text{ Stokes' thm})\end{aligned}$$

$x = (q^1, \cdots, q^D, p_1, \cdots, p_D)$ Darboux 座標 : $\omega = dp_i \wedge dq^i$

## Poisson $\sigma$-模型

古典解 $(X,\eta)=(x,0)$ のまわりで摂動展開

$$X = x + \xi$$

$$\begin{aligned}
(f\star g)(x) &= \int_{X(\infty)=x} \mathcal{D}X\,\mathcal{D}\eta\, f(X(1))g(X(0)) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[X,\eta]\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\xi(\infty)=0}\mathcal{D}\xi\,\mathcal{D}\eta\, f(x+\xi(1))g(x+\xi(0)) \\
&\qquad \times \left[\int_\Sigma \frac{1}{2}\alpha^{ij}(x+\xi)\eta_i\wedge\eta_j\right]^n \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_\Sigma \eta_i\wedge d\xi^i\right\}
\end{aligned}$$

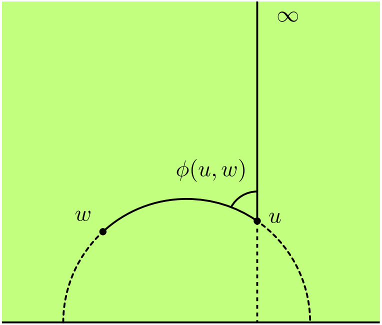
# Poisson $\sigma$-模型

propagator, Green 関数

$$\left\langle \xi^k(w)\eta_i(u) \right\rangle = \int_{\xi(\infty)=0} \mathcal{D}\xi\, \mathcal{D}\eta\; \xi^k(w)\eta_i(u) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_\Sigma \eta_i \wedge d\xi^i \right\}$$
$$= \frac{\sqrt{-1}\hbar}{2\pi} \delta_i^k d\phi(u,w)$$

$$\phi(u,w) = \frac{1}{2i} \log \frac{(w-u)(\overline{w}-u)}{(\overline{w}-\overline{u})(w-\overline{u})}$$

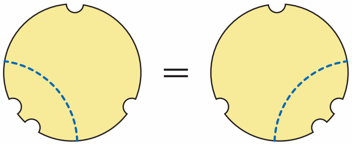
Kontsevich の公式は、Poisson $\sigma$-模型の相関関数の摂動展開そのもの！

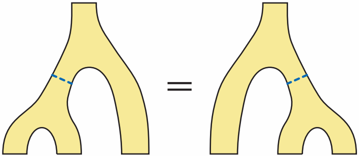


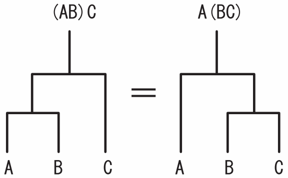
# 弦理論の双対性 ⇒ 結合法則

## 弦の双対性

- ２次元面上の場の量子論（弦理論）の相関関数は、面の切り分け方によらずに確定すべきである。
- リーマン面のモジュライに関する積分として表される



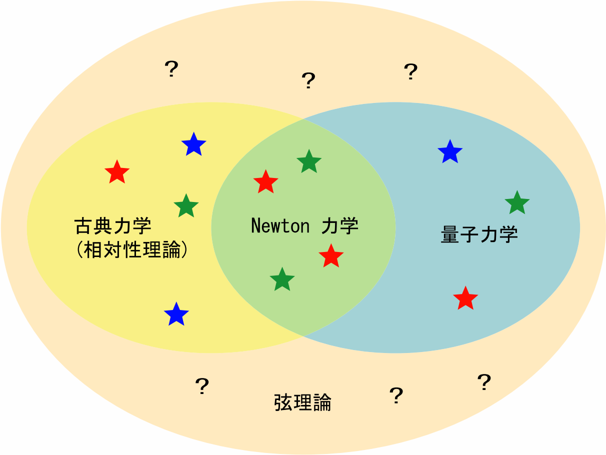




# 古典・量子・弦

解析力学 ＋ 変形量子化 (結合法則) ＋ 一般共変性

$\Longrightarrow$ 弦理論



ご静聴ありがとうございました。