

力学の変遷 —古典・量子・弦—

以下に掲載いたしますスライドは、2019年度年会にて開催された市民講演会（3月17日）における講演

「力学の変遷 —古典・量子・弦—

加藤晃史氏（東京大学大学院数理科学研究科 教授）

で用いられたものです。講演記録として、加藤氏に改めてご投稿いただきました。

「数学通信」編集部

講演概要：ガリレイは「宇宙は数学の言葉で書かれている」という言葉を残しましたが、我々人類は自然の神秘を解読できるレベルにはまだまだ達していません。ガリレイが没した年に生まれたニュートンの「自分は海辺できれいな貝殻を拾って喜んでる子供のようにだ」という言葉は、ガリレイから400年を経た現代の研究者にも突き刺さっています。本講演では、物理学、特に力学の発展に焦点を絞って、人類が自然をいかに数学的に解読しようと苦闘してきたかを振り返るとともに、今後の課題にも思いを馳せたいと思います。

* * * * *

力学の変遷 —古典・量子・弦—

加藤晃史 (東京大学 数理科学研究科)

日本数学会 市民講演会 於東京工業大学

2019年3月17日

新しい国際単位系 SI

2018年11月16日に決議・承認、2019年5月20日から施行。

- 真空中の光速 $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 - プランク定数 $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
 - 電気素量 $e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$
 - ボルツマン定数 $k = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
 - アボガドロ定数 $N_A = 6.02214076 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- これらの基本定数は「定義」「厳密値」となる。



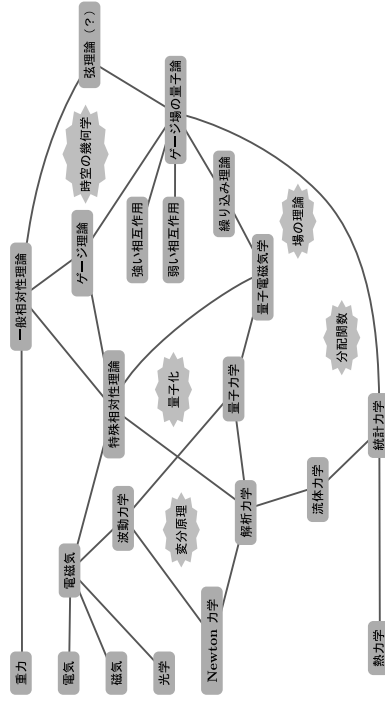
「国際キログラム原器」による定義は廃止へ。

1 キログラムとは、周波数が $\frac{(299792458)^2}{6.62606957} \times 10^{34}$ ヘルツの光子のエネルギーに等価な質量である。(誤差なし！)

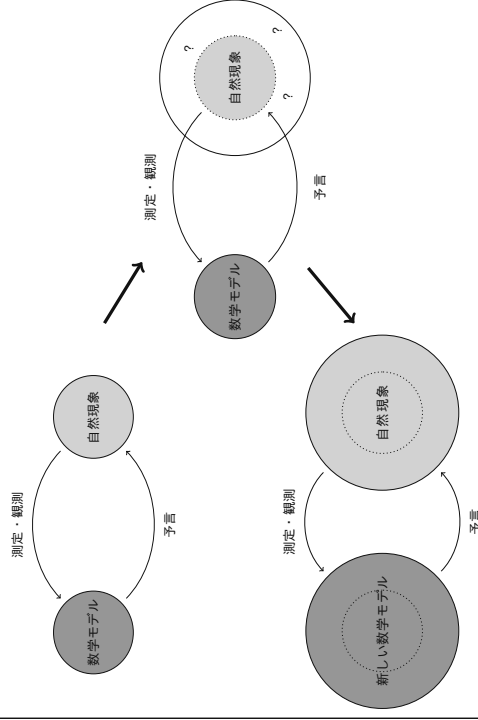
$$E = mc^2 = h\nu \quad \text{相対性理論} + \text{量子力学}$$

- 国際単位系における「基本定数」の種類は非常に少ない。
- 特に直接に力学 (mechanics) に関係するものは「光速 c 」と「プランク定数 h 」だけ。

物理学の系統樹



物理と数学

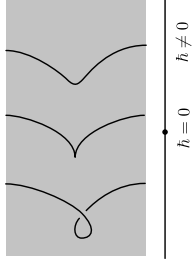


物理学の変遷

- 物理の各理論（数学モデル）には適用限界がある。
- 適用範囲を押し広げる形で理論が変遷してきた。

- もとのモデルが、数学的に「破綻」したわけではない。
 一もそうなら学ぶ必要なし。
- 新しい理論は独自の「基本定数」を持ち、それを特殊化すると古い理論が復元される。

- 1 特殊相対論 (光速度 c)
 $(c \rightarrow \infty) \rightarrow$ Newton 力学
 - 2 量子力学 (Planck 定数 h)
 $(h \rightarrow 0) \rightarrow$ 古典力学
- 数学的には c, h は「変形パラメータ」と見なせる。

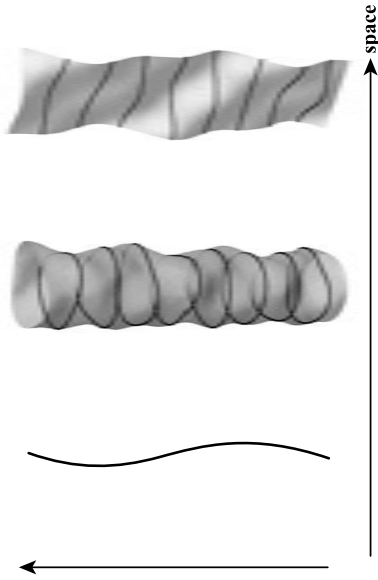


サブタイトルの「-古典・量子・弦-」とは何か？

- Q: 古典力学 (classical mechanics) と対をなす言葉は？
- A: 現代力学 (modern mechanics)
- A: 量子力学 (quantum mechanics)

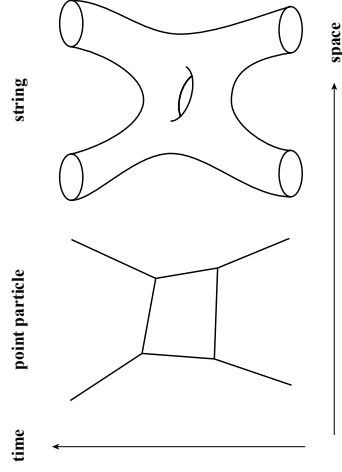
弦理論

time particle closed string open string space



$$\text{Planck の長さ } \ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.16252(81) \times 10^{-35} \text{ m}$$

弦理論



今回お伝えしたいこと

解析力学・量子化・一般共変性をすべて内包する理論は、必然的に弦理論と等価なものになる。

- 超対称性や 10 次元など、実験的に見つかっていない対称性や時空構造は全く仮定しない。
- ここで言う弦理論とは、2 次元の曲面上の場を量子化して得られる理論をさす。
- 弦理論の必然性を納得するには、解析力学・座標不変性・量子力学などについて、ある程度の知識が必要。

10/99

目次

- 1 Newton の運動方程式とその問題点
- 2 Hamilton 力学, Poisson 力学
- 3 微分方程式から変分原理へ
- 4 曲がった時空の幾何学
- 5 正準量子化とその問題点
- 6 経路積分
- 7 変形量子化と弦理論

11/99

Newton の運動方程式

問題 1 : 図の曲線の特徴づける性質は何か?

普通の解答 : 放物線のグラフ

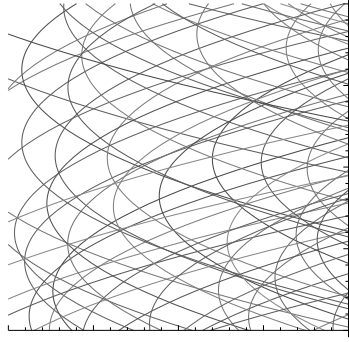
$$x(t) = -\frac{g}{2}(t-t_0)^2 + x_0$$

で表される。(t₀, x₀ はパラメータ)

Newton の解答 :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -g$$

と表される。



12/99

Newton の運動方程式

問題 2 : 図の曲線の特徴づける性質は何か?

Kepler :

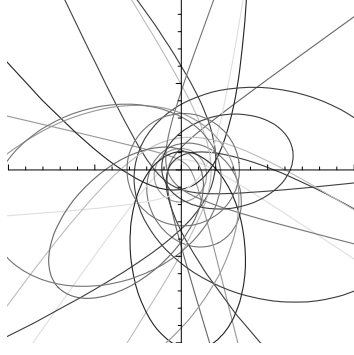
$$r(\theta) = \frac{L}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

と表される。

Newton :

$$\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = -k \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|^3}$$

と表される。



13/99

Newton の運動方程式

- 運動：時刻 t の関数として位置 $x(t)$ が定まること
- 運動の法則を時刻に関する「微分」方程式として定式化した。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

- 曲線族に含まれるパラメータを消去することができた。
- これにより、
 - 運動を支配する普遍的な法則と、
 - 個々の運動の軌跡（初期条件ごとに変化）を明確に区別した。
- 微分方程式を解くことで、未来を予言できる。



14/99

Newton の運動方程式の問題点

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

問題点

- 時間について2階の微分方程式なので、解が初期位置だけで決まらず、初速度にも依存する。このため解軌道の性質が直感的にとらえにくい。
- \Rightarrow Hamiltonian 力学、Poisson 括弧
- 運動方程式がこの形に表されるのは慣性系 (inertia system) で、しかも空間座標として通常の直交座標を取った場合だけ。
- \Rightarrow 変分原理による定式化

15/99

Newton の運動方程式

- 運動：時刻 t の関数として位置 $x(t)$ が定まること
- 運動の法則を時刻に関する「微分」方程式として定式化した。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

- 曲線族に含まれるパラメータを消去することができた。
- これにより、
 - 運動を支配する普遍的な法則と、
 - 個々の運動の軌跡（初期条件ごとに変化）を明確に区別した。
- 微分方程式を解くことで、未来を予言できる。



14/99

Newton の運動方程式の問題点

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

問題点

- 時間について2階の微分方程式なので、解が初期位置だけで決まらず、初速度にも依存する。このため解軌道の性質が直感的にとらえにくい。
- \Rightarrow Hamiltonian 力学、Poisson 括弧
- 運動方程式がこの形に表されるのは慣性系 (inertia system) で、しかも空間座標として通常の直交座標を取った場合だけ。
- \Rightarrow 変分原理による定式化

15/99

Hamilton 力学

- Newton の運動方程式 (2 階微分方程式)
- $$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F(t)$$
- 変数を倍に増やせば1階連立微分方程式に書き直せる

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{m} p(t) \\ \frac{dp(t)}{dt} = F(t) \end{cases}$$

- x 位置 p 運動量
- 配位空間 (configuration space) : x を座標とする空間
- 相空間 (phase space) : (x, p) を座標とする空間
- 1 階微分方程式の解は初期値で一意に決まるので、運動を相空間の「流れ」として理解できる

16/99

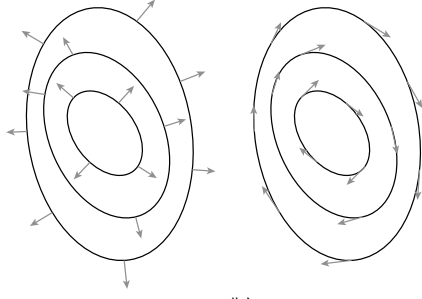
Hamilton 力学

- Hamiltonian $H(q, p)$: 相空間で定義された、位置と運動量の関数
- H の勾配流 (gradient flow)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \text{grad } H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ -\frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$

- Hamiltonian flow = 勾配流を「90度回転」して得られる流れ

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$



17/99

Hamilton 力学

定理

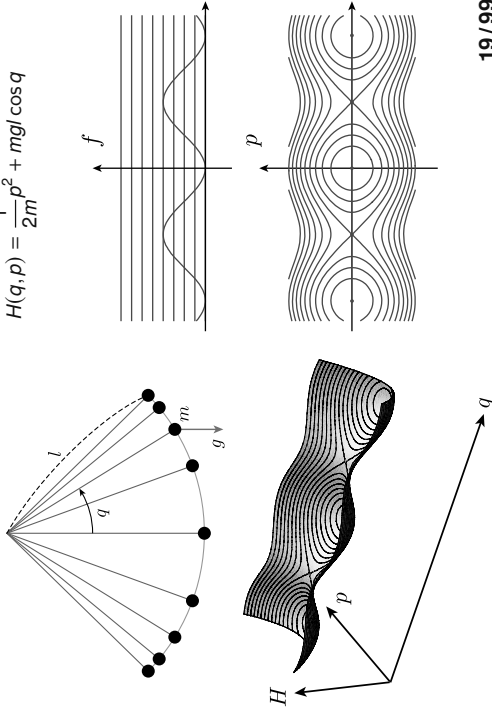
保存力場 $\mathbf{F} = -\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ を仮定する。

- ① $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + U(\mathbf{q})$ で Hamiltonian を定めると、Hamilton 流は Newton の運動方程式を再現する。
- ② 運動の解曲線に沿って、 H は一定値を取る (エネルギー保存則)

18/99

例：有限振り子

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + mgl \cos q$$



19/99

Poisson 括弧

- 解析力学の最も一般的な定式化
- 運動法則をベクトル場ではなく、スカラー値関数の関係で記述
- (q, p) : 正準座標 (canonical coordinate) = 相空間 M の (位置、運動量) という座標では

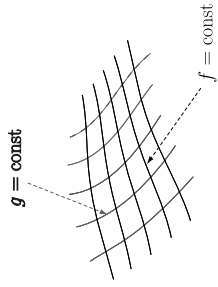
$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} = f \left(\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \frac{\partial}{\partial p} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \frac{\partial}{\partial q} \right) g \quad (f, g \in C^\infty(M))$$

- H を Hamiltonian とする時間発展

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}$$

- 任意の $g \in C^\infty(M)$ を Hamiltonian とする「時間発展」が考えられる。

- 物理量全体 $C^\infty(M)$ が本来持つべき「無限小の非可換性」を記述



20/99

Poisson 代数

- Poisson 括弧 $\{-, -\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$
- 反対称 $\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (f, g \in C^\infty(M))$
- Leibnitz 則=積の微分法 $\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, h\} \quad (f, g, h \in C^\infty(M))$
 $\{f \cdot g, h\} = f \cdot \{g, h\} + \{f, g\} \cdot h \quad (f, g, h \in C^\infty(M))$
- Jacobi 恒等式 $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (f, g, h \in C^\infty(M))$
- Poisson 括弧 $\{-, -\}$ は可換環 $C^\infty(M)$ 上に Lie 環の構造を定める。

21/99

Poisson 代数の例

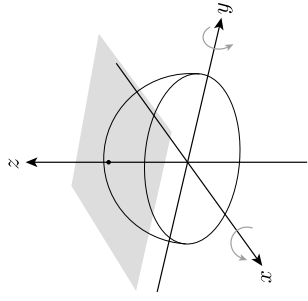
$M = \mathbb{R}^3$ の座標関数 x, y, z

$$\{x, y\} = z, \quad \{y, z\} = x, \quad \{z, x\} = y$$

原点を中心とする剛体の回転を表す代数構造。

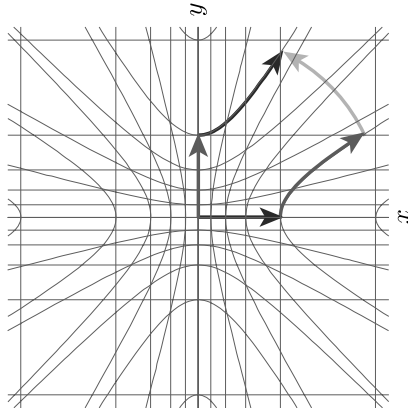
Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$

Poisson 括弧 $\{x, y\} = z$ の意味？



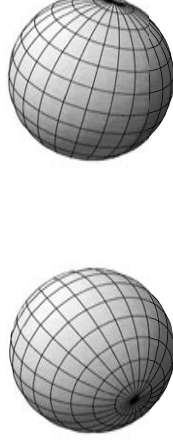
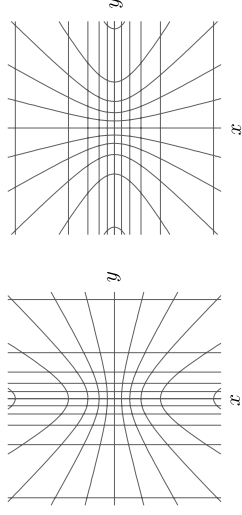
22/99

Poisson 括弧



Poisson 括弧 $\{x, y\} = z$ の意味

24/99



23/99

Poisson 代数の例

$M = \mathbb{R}^3$ の座標関数 x, y, z

$$\{x, y\} = z, \quad \{y, z\} = x, \quad \{z, x\} = y$$

原点を中心とする剛体の回転を表す代数構造。Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$ Casimir 元 = 半径の 2 乗

$$C = x^2 + y^2 + z^2$$

回転不変性

$$\begin{aligned} \{C, x\} &= \{x^2 + y^2 + z^2, x\} \\ &= \{x^2, x\} + \{y^2, x\} + \{z^2, x\} \\ &= 2\{x, x\} + 2y\{y, x\} + 2z\{z, x\} \\ &= 2 \cdot 0 + 2y \cdot (-z) + 2z \cdot y = 0 \end{aligned}$$

同様にして $\{C, y\} = \{C, z\} = 0$

25/99

Newton の運動方程式の問題点

- 運動方程式が

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

と表されるのは慣性系 (inertia system) で、しかも空間座標として通常の直交座標を取った場合だけ。

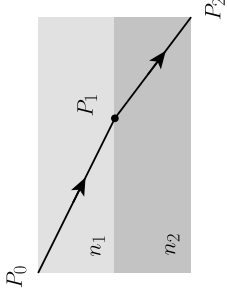
- 慣性系以外では「みかけの力」を導入する必要がある。
遠心力、Coriolis 力、...
- 自分が慣性系にいることをあらかじめ知ることはできるのか？
- 地球の自転、公転、太陽の運動、銀河系の運動、...
- ただし、これらは物理的な困難であって、数学的な困難ではない。
- 運動法則を座標系＝観測者に依らない形で定式化できないか？
Einstein
- 相対性 (relativity), 一般共変性 (general covariance)

26 / 99

変分原理：光の屈折の法則

$$\text{屈折率} = \frac{\text{真空中の光速}}{\text{媒質中の光速}}$$

問題：屈折率が異なる媒質の層があるときの光線の進路を求めよ。



27 / 99

Newton の運動方程式の問題点

- 運動方程式が

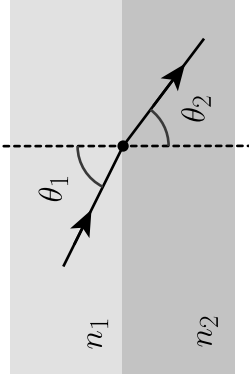
$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

と表されるのは慣性系 (inertia system) で、しかも空間座標として通常の直交座標を取った場合だけ。

- 慣性系以外では「みかけの力」を導入する必要がある。
遠心力、Coriolis 力、...
- 自分が慣性系にいることをあらかじめ知ることはできるのか？
- 地球の自転、公転、太陽の運動、銀河系の運動、...
- ただし、これらは物理的な困難であって、数学的な困難ではない。
- 運動法則を座標系＝観測者に依らない形で定式化できないか？
Einstein
- 相対性 (relativity), 一般共変性 (general covariance)

26 / 99

Snell の法則

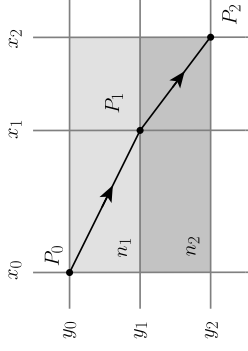


$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

28 / 99

Fermat の原理

『光は所要時間が最小になる経路を通る』



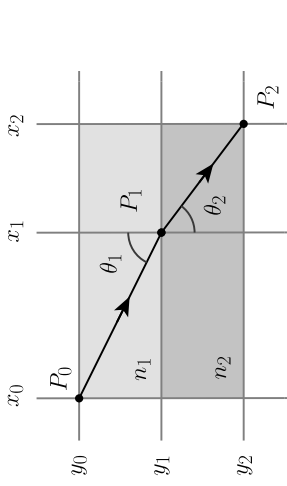
所要時間 T

$$\begin{aligned} T &= n_1 \cdot |P_0 P_1| + n_2 \cdot |P_1 P_2| \\ &= n_1 \cdot \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + n_2 \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$



29 / 99

Fermat の原理



$$\frac{dT}{dx_1} = n_1 \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} - n_2 \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = 0$$

$$= n_1 \sin \theta_1 - n_2 \sin \theta_2 = 0$$

Fermat の原理 \Rightarrow Snell の法則!

光は一体どうやって、最短経路を事前に知るのか?

30/99

関数と汎関数

- 関数：数 \rightarrow 数
- 汎関数：関数 (グラフ・曲線...) \rightarrow 数
- 微分法：関数の増減を調べる手段
- 変分法：汎関数の増減を調べる手段

31/99

Newton 力学と変分原理

定義

- Lagrangian $L(t, x, y) = \frac{m}{2} \dot{y}^2 - U(x)$
- 作用汎関数 (action functional) $S[x(\bullet)] = \int_a^b L \left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt} \right) dt = \int_a^b \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 - U(x) \right\} dt$



32/99

Newton 力学と変分原理

定理 (最小作用の原理)

曲線 $x(\bullet)$ について、次の 2 つの条件は同値である:

- (1) 作用汎関数 S の停留点 (臨界点) である。

$$S[x(\bullet)] = \int_a^b \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 - U(x) \right\} dt$$
- (2) Newton の運動方程式の解である。

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = - \frac{dU(x(t))}{dx}$$



33/99

方向微分

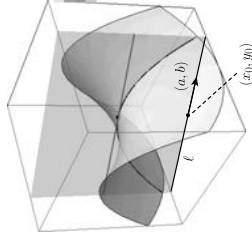
- 関数のグラフを特定の方向に切って調べ
る = 方向微分
- (x_0, y_0) を通り、方向ベクトル (a, b) であるような直線 l を考える。
- l の任意の点は、パラメータ s で表される:

$$\begin{cases} x(s) = x_0 + s \cdot a \\ y(s) = y_0 + s \cdot b \end{cases}$$

- s の関数 (1 変数関数)

$$f(x(s), y(s)) = f(x_0 + s \cdot a, y_0 + s \cdot b)$$

- 1 変数関数の増減は普通の微分で調べられる。



34/99

停留点

定義

- $P(x_0, y_0)$ が関数 f の停留点 $\iff P$ を通るあらゆる方向微分が 0.
- このとき $df(x_0, y_0) = 0$ と表す。

停留点の性質

- どのような方向にグラフを切っても、切り口のグラフが水平な接線を持つ。
- グラフは水平な接平面を持つ。
- 「停留点である」という性質は座標系のとりかたに依らない。

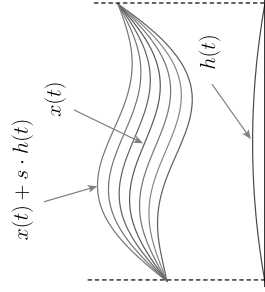
35/99

汎関数の方向微分

$h(a) = h(b) = 0$ となる関数 $h(\bullet)$ を任意に選び、固定する。

『汎関数 $S[x(\bullet)]$ の $x(\bullet)$ における $h(\bullet)$ 方向微分は？』

s をパラメータとする $x(t) + s \cdot h(t)$ という曲線の集まりは「 \mathcal{I} の中の直線」と考えられる。
(グラフが端点を止めたまま s の 1 次式で変形している)



36/99

陽	陰
既知 \rightarrow 未知	未知 \rightarrow 既知
$\{(x, y) \mid x = \cos t, y = \sin t\}$ 粒子の軌跡	$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 波動関数
刺激	応答
ホモロジー	コホモロジー

37/99

一般的な汎関数

要請

- 曲線をパラメータ表示したとき、パラメータについて1階微分までの情報を用いて表される。e.g. 「運動」のうち「位置」と「速度」
- 局所性：曲線を繋ぐことについて加法的

$$S[\gamma_1 \# \gamma_2] = S[\gamma_1] + S[\gamma_2]$$

$$S[x(\bullet)] := \int_a^b L\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) dt$$

$L(t, x, y)$ は Lagrangian と呼ばれる3変数関数。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{区間 } [a, b] \text{ で定義された} \\ \text{滑らかな関数全体} \end{array} \right\} \xrightarrow{S} \{ \text{実数全体} \}$$

$$\parallel \quad \mathcal{P} \xrightarrow{S} \mathbb{R}$$

38/99

Euler-Lagrange の方程式

定理

次の2条件は互いに同値

(1) $x(\bullet) \in \mathcal{P}$ は汎関数

$$S[x(\bullet)] = \int_a^b L\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) dt$$

の停留曲線である。

(2) $x(\bullet) \in \mathcal{P}$ は Euler-Lagrange の微分方程式

$$\left(\frac{\partial L(t, x, y)}{\partial x} \right) \Big|_{\substack{x=x(t) \\ y=\frac{dx(t)}{dt}}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{\substack{x=x(t) \\ y=\frac{dx(t)}{dt}}} = 0$$

の解である。



39/99

Newton 力学と変分原理

要請

- 曲線をパラメータ表示したとき、パラメータについて1階微分までの情報を用いて表される。e.g. 「運動」のうち「位置」と「速度」
- 局所性：曲線を繋ぐことについて加法的

$$S[\gamma_1 \# \gamma_2] = S[\gamma_1] + S[\gamma_2]$$

$$S[x(\bullet)] := \int_a^b L\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) dt$$

$L(t, x, y)$ は Lagrangian と呼ばれる3変数関数。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{区間 } [a, b] \text{ で定義された} \\ \text{滑らかな関数全体} \end{array} \right\} \xrightarrow{S} \{ \text{実数全体} \}$$

$$\parallel \quad \mathcal{P} \xrightarrow{S} \mathbb{R}$$

38/99

Newton 力学と変分原理

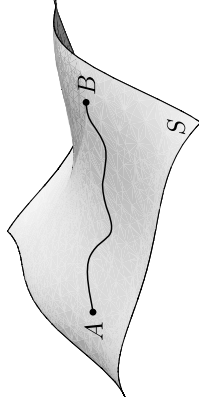
- Newton の運動法則は運動の各瞬間の位置・速度・加速度などの関係を表す。時刻について局所的。
- 変分原理は、時間を過去から未来まで見渡した、時間について大域的なもの（神様の視点）
- 最小作用の原理と運動方程式の数学的等価性
「毎日を目一杯生きることが、人生を目一杯生きることになる」
- 変分原理の利点：座標のとりにかた（＝観測者）に依らずに法則を述べられる
- 例えば極座標 (r, θ) で Euler-Lagrange 方程式を解いても、正しい運動方程式を再現する。
- 作用汎関数さえ正しく与えれば、任意の座標を用いて力学法則の記述できる！
- 一般相対性理論の一般共変性

40/99

曲面上の測地線と内在的幾何学

曲面 S 上の2点 A, B を結ぶ曲線で長さは最短のもの（測地線）は？

- 「 S からはみ出さない」条件付き極値問題と見ると、拘束条件の扱いが非常に難しい。
- はじめから「 S 内の曲線だけ」を扱ううまい方法はないだろうか？



41/99

地図を持つ図形＝多様体

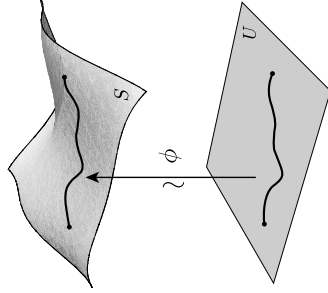
曲面 S の「地図」 U があれば？

- 地図 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の点で曲面 S 上の任意の点が表される
- 滑らかな 1 対 1 写像

$$\phi : U \xrightarrow{\sim} S$$

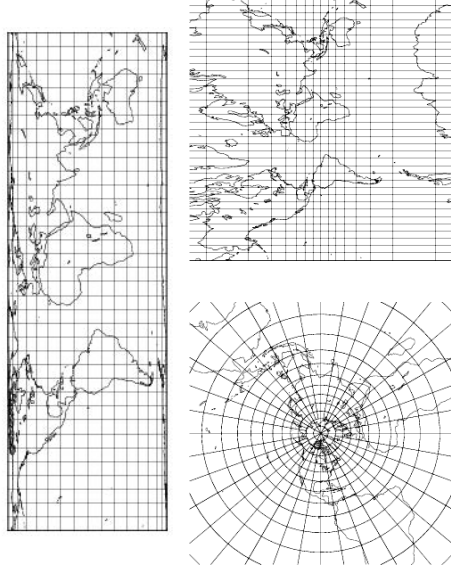
が存在する

- 曲面 S 上のどんな曲線も、地図 U 上の曲線で表せる。



42/99

地図を持つ図形＝多様体

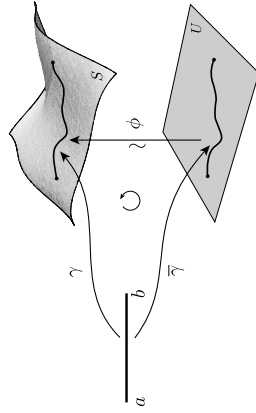


43/99

地図を持つ図形＝多様体

- $\{ \text{曲面上の曲線 } \gamma : [a, b] \rightarrow S \} \xleftrightarrow{1:1} \{ \text{地図上の曲線 } \bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow U \}$

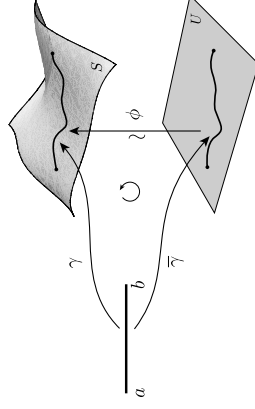
$$\gamma = \phi \circ \bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma} = \phi^{-1} \circ \gamma$$



- 「曲面 S 上の曲線 γ を動かして最短経路を探す問題」
 \Rightarrow 「地図 U 上の曲線 $\bar{\gamma}$ を動かして最短経路を探す問題」

44/99

地図を持つ図形＝多様体



- 地図を導入するだけで、「曲線が S からはみ出たはいいけない」という拘束条件の問題が回避されると同時に、問題が平面上の曲線の変分問題になってしまった！

- では S の曲がり具合の情報はどこへ行ったのか？

45/99

第一基本形式

- 曲線 γ の長さ

$$L[\gamma] = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left(\frac{d\gamma^k(t)}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(\tilde{\gamma}(t)) \frac{d\tilde{\gamma}^i(t)}{dt} \frac{d\tilde{\gamma}^j(t)}{dt}} dt$$

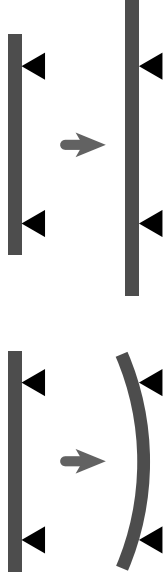
- 第一基本形式 $g_{ij}(x) := \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \phi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^k}{\partial x^j}$
- 地図上の点 x におけるベクトル v の「本当の長さ」

$$\|v\|_x = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(x) v^i v^j}$$
- $\{g_{ij}(x)\}$ 地図の情報 $\phi: U \rightarrow S$ だけで決まる：場所と方向に応じて変化する「縮尺」

内在的幾何からリーマン幾何・一般相対論へ

曲線の長さに関するあらゆる情報は、縮尺付きの地図 $(U, g_{ij}(x))$ に集約されており、曲面 S がその外側の空間 \mathbb{R}^3 にどのように埋め込まれているかという情報は必要でない。— Gauss

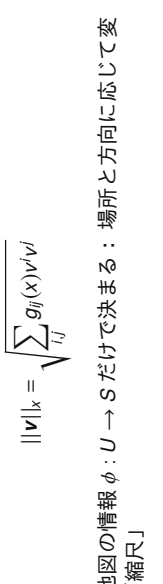
- 曲線の長さ \implies 距離・角度・面積
- 計量 (metric) $g_{ij}(x)$ = 縮尺：実際の長さを地図上の長さから計算するためのデータ
- 曲がり具合を「たわみ」でなく、「伸び縮み」で理解可能



内在的幾何からリーマン幾何・一般相対論へ

曲線の長さに関するあらゆる情報は、縮尺付きの地図 $(U, g_{ij}(x))$ に集約されており、曲面 S がその外側の空間 \mathbb{R}^3 にどのように埋め込まれているかという情報は必要でない。— Gauss

- 曲線の長さ \implies 距離・角度・面積
- 計量 (metric) $g_{ij}(x)$ = 縮尺：実際の長さを地図上の長さから計算するためのデータ
- 曲がり具合を「たわみ」でなく、「伸び縮み」で理解可能



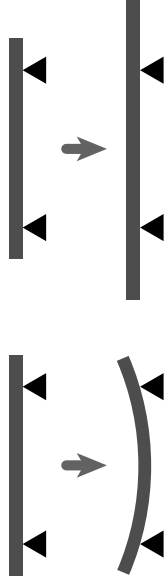
内在的幾何からリーマン幾何・一般相対論へ

地図 + 縮尺で捕えられる性質の総体こそが図形である — Riemann

- Riemann 多様体 (manifold) の概念
- $g_{ij}(x)$: 計量 (metric) = 曲線の長さを定義するデータ

重力場 = 計量 — Einstein

- 曲がり具合を「たわみ」でなく、「伸び縮み」で理解可能
- 宇宙の外に出られない人間でも宇宙の曲がり具合を議論できる



一般相対性理論

重力場 \iff Riemann 多様体 (M, g)

$$L[x(\bullet)] = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^j(t)}{dt}} dt$$

$$E[x(\bullet)] = \int_a^b \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^j(t)}{dt} dt$$

測地線の方程式 = 自由落下の運動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} x^j(t) + \sum_{i,k=1}^n \Gamma_{ik}^j(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^k(t)}{dt} = 0$$

$$\Gamma_{jk}^i \equiv \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{im}(x) \left(\frac{\partial g_{mk}(x)}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}(x)}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^m} \right)$$

Christoffel's symbol, Levi-Civita connection



経路積分 as "advanced" calculus

対象	微分	積分
1変数関数	微分 $\frac{df(x)}{dx}$	$\int_a^b f(x) dx$
多変数関数	方向微分 $\nabla_a f(\mathbf{x})$	$\int \dots \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$
汎関数	変分 (汎関数微分)	汎関数積分 (経路積分)
	古典論	量子論

50/99

量子力学 (Quantum Mechanics)

- 粒子と波動の双対性 (相補性)
- 物質や光が、あるときは粒子的に、またあるときは波動として振る舞う

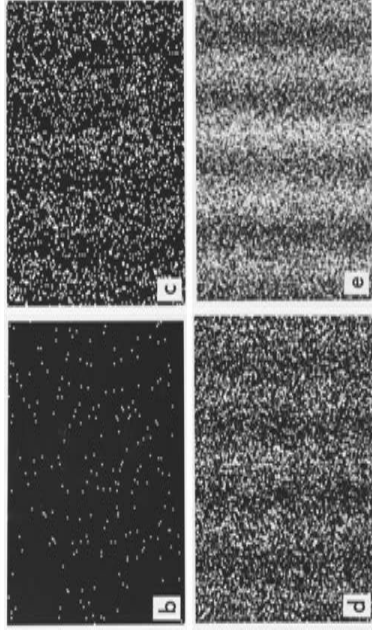
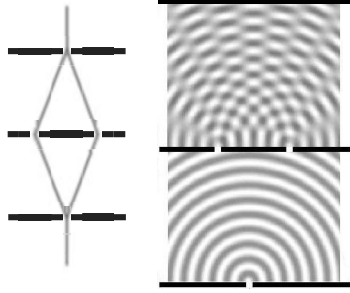


Photo Credit: Dr. Tonomura and Belsazar (Wikimedia Commons)

51/99

量子力学 (Quantum Mechanics)



古典解 (=運動方程式を満たす軌道) だけに注目して他の可能性を無視すると、正しい結果を与えない!

52/99

重ね合わせの原理 = 線型性

量子力学の法則は線形代数の言葉で記述される

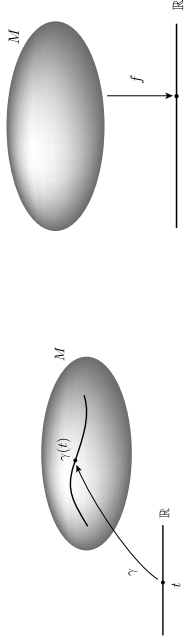
- 古典力学にない量子力学の最大の特徴
- 物理的状态は重ね合わせ (線形結合) が可能
- 物理的状态の全体はベクトル空間 (Hilbert space) をなす
- 時間変化は線型写像 (unitary operator) で表される
- 無限小時間発展 = Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

- 1階線形常微分方程式!

53/99

線形空間はどこに？



$\{\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M\}$ は自然なベクトル空間の構造を持たないが、
 $\{f: M \rightarrow \mathbb{R}\}$ は自然なベクトル空間の構造を持つ：

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = c(f(x)) \quad (x \in M)$$

量子力学は M 上の関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対する法則として定式化するのが自然。

54/99

対応原理

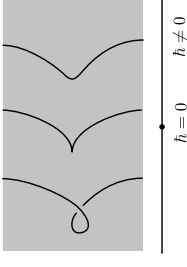
Niels Bohr が提唱した一つの指導原理：

プランク定数 \hbar を 0 にする極限で、量子力学は古典力学を再現する。

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} (\text{量子論的な量}) = (\text{古典論での量})$$

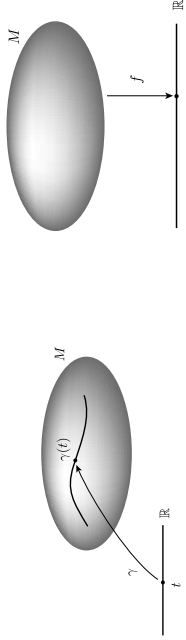
いいかえると、

\hbar をパラメータとして古典力学を
 変形した理論が量子力学である



55/99

線形空間はどこに？



$\{\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M\}$ は自然なベクトル空間の構造を持たないが、
 $\{f: M \rightarrow \mathbb{R}\}$ は自然なベクトル空間の構造を持つ：

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = c(f(x)) \quad (x \in M)$$

量子力学は M 上の関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対する法則として定式化するのが自然。

54/99

対応原理

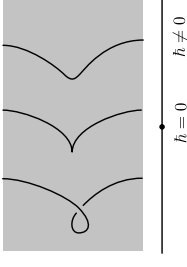
Niels Bohr が提唱した一つの指導原理：

プランク定数 \hbar を 0 にする極限で、量子力学は古典力学を再現する。

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} (\text{量子論的な量}) = (\text{古典論での量})$$

いいかえると、

\hbar をパラメータとして古典力学を
 変形した理論が量子力学である



55/99

正準量子化

- 1 対象とする系をハミルトン力学 (正準形式) で記述する。
- 2 正準変数 (q, p)

$$\{q, p\} = 1$$
 を、正準交換関係

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$
 を満たす演算子 (\hat{q}, \hat{p}) に置き換える。
- 3 正準変数 (q, p) の関数である古典的力学量 $A(q, p)$ について、
 $p \mapsto \hat{p}, q \mapsto \hat{q}$ という置き換え操作によって、古典的力学量
 $A = A(q, p)$ の量子力学的対応物 $\hat{A} = \hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ を定める。
- 4 Hamiltonian flow \iff Heisenberg の運動方程式

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} \iff \frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}]$$

56/99

正準量子化の問題点

問題点

- 演算子の積については順序の不定性が残る。
 - 対応原理は \hbar 展開の初項しか決めてくれない。
 - 量子化後にエルミート演算子同士の積は必ずしもエルミート演算子にはならない。
- ちっとも “canonical” な量子化の手続きでない！
 - むしろ場当たりにさえ見える。

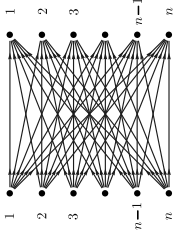
57/99

量子力学系のおもちゃ

- 有限次元ベクトル空間 V
- 基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, 量子力学的状態
- 線型変換 $T: V \rightarrow V$ が生成する離散的な時間発展 (右作用で考える)
- T の表現行列 $A = (A_{ij})$

$$T \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^n A_{ij} \mathbf{e}_i$$

- A_{ij} = 時刻 t に状態 i にあった系が、次の時刻 $t+1$ で状態 j に移る遷移振幅
- $A = (A_{ij})$ 転送行列 (transfer matrix)



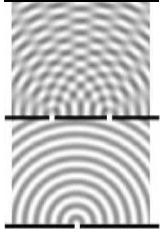
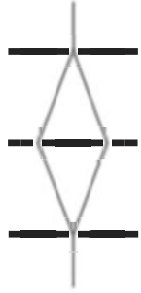
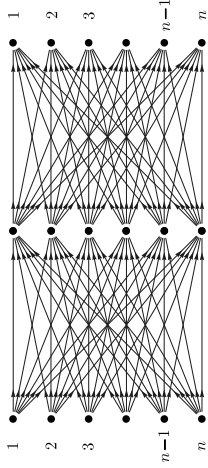
転送行列と時間発展

- \mathbf{e}_j という初期状態から出発し、時間が m だけ経過した後の状態は、変換の反復で計算できる
- $T(T(\dots T(\mathbf{e}_j) \dots)) = T^m \mathbf{e}_j$
- \mathbf{e}_j から \mathbf{e}_i に遷移する振幅 (amplitude) = 行列要素 $(A^m)_{ij}$
- 量子力学的時間発展 = 転送行列のべき乗

$$(A^m)_{ij} = \sum_{l_1=1}^n \sum_{l_2=1}^n \dots \sum_{l_{m-1}=1}^n A_{i l_1} A_{l_1 l_2} \dots A_{l_{m-1} j}$$

転送行列と時間発展

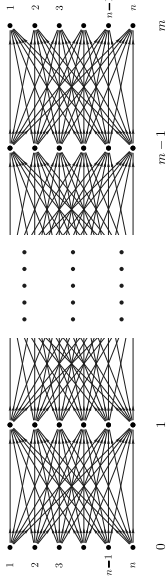
- 例: $m=2$ $(A^2)_{ik} = \sum_j A_{ij} A_{jk}$



転送行列と時間発展

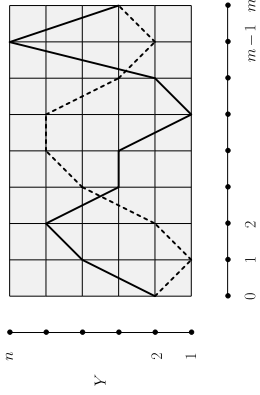
- m step の時間発展

$$(A^m)_{ij} = \sum_{l_1=1}^n \sum_{l_2=1}^n \dots \sum_{l_{m-1}=1}^n A_{i l_1} A_{l_1 l_2} \dots A_{l_{m-1} j}$$



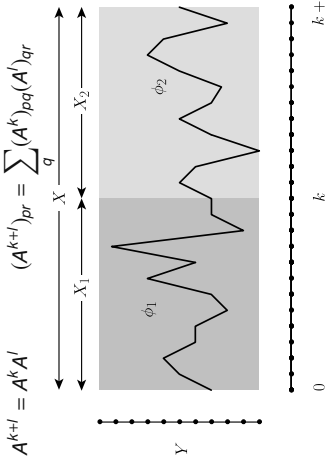
- 中間に現れる添字 $(i_1, i_2, \dots, i_{m-1})$ の和は、漏れなく取らなければならない。

経路和としての見方



- 経路 $\phi \in \text{Map}(X, Y)$ の重み $W(\phi) = \prod_{k=0}^{m-1} A_{\phi(k)\phi(k+1)} \in \mathbb{C}$
- 経路の空間 $\text{Map}(X, Y)$ 上の関数 (汎関数) $W : \text{Map}(X, Y) \rightarrow \mathbb{C}$
- 遷移振幅の経路和表示 $(A^m)_{i_0 i_m} = \sum_{\phi \in \text{Map}(X, Y)} W(\phi)$
 $\phi(0)=i_0, \phi(m)=i_m$

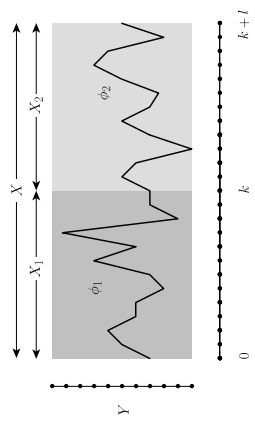
行列の積と経路の貼り合わせ



$$W(\phi) = \sum_{q \in Y} \left\{ \sum_{\phi_1 \in \text{Map}(X_1, Y)} W(\phi_1) \right\} \left\{ \sum_{\phi_2 \in \text{Map}(X_2, Y)} W(\phi_2) \right\}$$

$\phi_1(0)=p, \phi_1(k)=q$ $\phi_2(k)=q, \phi_2(k+l)=r$

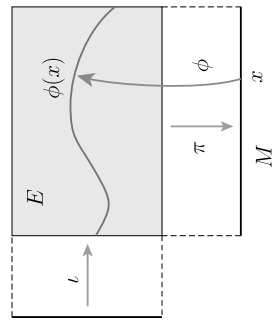
行列の積と経路の貼り合わせ



- グラフの定義域 X を X_1 と X_2 で覆う
- グラフの制限 $\phi_1 : X_1 \rightarrow Y, \phi_2 : X_2 \rightarrow Y$
- 重み $W(\phi)$ は局所的: $W(\phi) = W(\phi_1) \cdot W(\phi_2)$
- 貼り合わせ: ϕ_1 の終点と ϕ_2 の始点が一致すれば、それらを繋いで $\phi : X \rightarrow Y$ が定まる。
- 逆に経路和による方法で、行列の積の結合法則が自然に理解できる。

場の理論の一般的枠組み

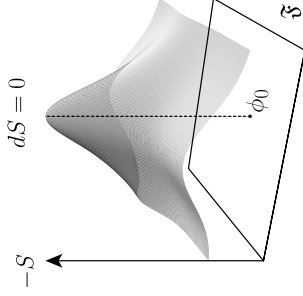
- M = 「時空」 ≡ 場の定義域
- F = 内部空間 ≡ 場の値域
- E = fiber bundle
- $\iota : F \rightarrow E, \pi : E \rightarrow M$
- ϕ = 場 (E の切断)
- 場の空間 (一般に無限次元)



- $\Gamma(M, E) = \{\phi : M \rightarrow E \mid \pi \circ \phi = \text{id}\}$
- 作用汎関数 $S : \Gamma(M, E) \rightarrow \mathbb{C}$
- e.g. 解析力学 = 1 次元の場の理論:
 $M = \mathbb{R}$ (時間), $F = \mathbb{R}^3$ (空間), $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ (時空)

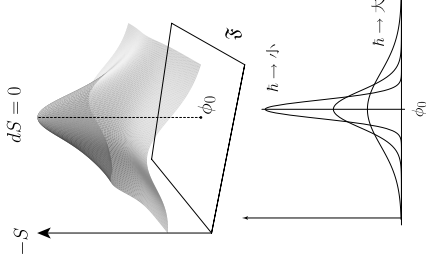
場の古典論

- 運動方程式 \iff 変分原理
 $dS = 0$ Euler-Lagrange 方程式
 - 興味の対象
 運動方程式の解 = 古典解
 - 古典解が離散 or 連続パラメータ付きで得られることがある
 \rightsquigarrow 解のモジュライ空間
- $$\mathcal{M} = \{\phi_0 \in \Gamma(M, E) : dS|_{\phi_0} = 0\}$$
- \mathcal{M} 以外の場には関心が無い。



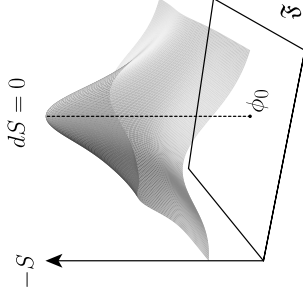
場の量子論

- 古典解だけでなく、すべての場の配位を重ね合わせて考える必要がある。
 - 人為的な取舍選択は自然が許さない。
 - 場 ϕ の寄与 $\propto \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}S(\phi)\right\}$
 - 分配関数
- $$Z = \int_{\Gamma(M, E)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}S(\phi)\right) \mathcal{D}\phi$$
- \hbar Planck 定数
 - 対応原理: $\hbar \rightarrow 0$ で古典論を再現



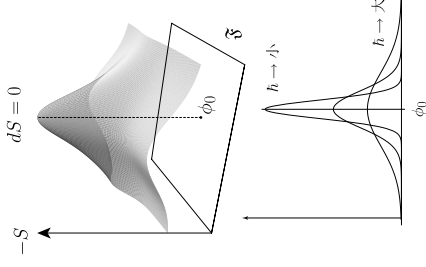
場の古典論

- 運動方程式 \iff 変分原理
 $dS = 0$ Euler-Lagrange 方程式
 - 興味の対象
 運動方程式の解 = 古典解
 - 古典解が離散 or 連続パラメータ付きで得られることがある
 \rightsquigarrow 解のモジュライ空間
- $$\mathcal{M} = \{\phi_0 \in \Gamma(M, E) : dS|_{\phi_0} = 0\}$$
- \mathcal{M} 以外の場には関心が無い。

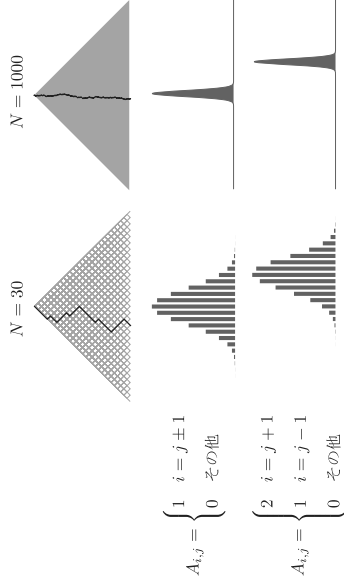


場の量子論

- 古典解だけでなく、すべての場の配位を重ね合わせて考える必要がある。
 - 人為的な取舍選択は自然が許さない。
 - 場 ϕ の寄与 $\propto \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}S(\phi)\right\}$
 - 分配関数
- $$Z = \int_{\Gamma(M, E)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}S(\phi)\right) \mathcal{D}\phi$$
- \hbar Planck 定数
 - 対応原理: $\hbar \rightarrow 0$ で古典論を再現



古典極限 = 中心極限定理



中心極限定理 \implies 古典的軌道に収束

期待値 = 相関関数

- 場の空間 $\delta \equiv \Gamma(M, E)$ 上には $e^{-S(\phi)/\hbar}$ に比例する測度が定義される
- 知りたい量 = 汎関数 $f: \delta \rightarrow \mathbb{C}$ の期待値

$$\langle f(\phi) \rangle := \frac{\int_{\delta} d\phi f(\phi) e^{-\frac{1}{\hbar}S(\phi)}}{\int_{\delta} d\phi e^{-\frac{1}{\hbar}S(\phi)}}$$

- 分配関数

$$Z = \int_{\delta} e^{-\frac{1}{\hbar}S(\phi)} d\phi$$

- 自由度 = $\dim \delta$ (場の理論はふつう無限自由度の力学系)

自由場と Wick の定理

- 自由場 (free field) = 作用が場の高々 2 次式で表される理論 (正規分布)
- 自由度 N の場 $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^N$
- 自由場の作用 = 二次形式 $S(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N x^i A_{ij} x^j$

$(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^N$ のユークリッド内積

$A = (A_{ij}) : N \times N$ 正定値対称行列

- 分配関数 $Z_0 \equiv \int_{\mathbb{R}^N} dx \exp\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A\mathbf{x})\}$

- n 点相関関数 (期待値)

$$\langle x^i x^j x^k \dots x^n \rangle \equiv \frac{1}{Z_0} \int_{\mathbb{R}^N} dx x^i x^j \dots x^n \exp\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A\mathbf{x})\}$$

Wick の定理

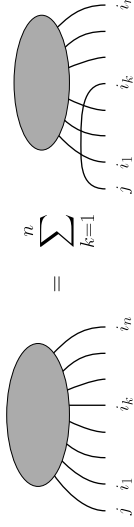
自由場の任意の相関関数は、

- $n+1$ 点相関関数を $n-1$ 点相関関数に還元する漸化式
- $$\langle x^i x^j \dots x^k \dots x^l \dots x^m \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x^i x^j \dots x^k \dots x^l \dots x^m \rangle \underbrace{x^k}_{\text{取り除く}}$$

- $\langle x^i x^j \rangle = A^{ij} : \text{伝播関数 (propagator)}$

- $\langle x^i \rangle = 0$

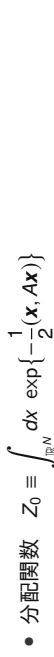
から再帰的に計算できる。



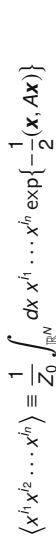
Wick の定理

- $n = 4$

$$\langle x^1 x^2 x^3 x^4 \rangle = \langle x^1 x^2 \rangle \langle x^3 x^4 \rangle + \langle x^1 x^3 \rangle \langle x^2 x^4 \rangle + \langle x^1 x^4 \rangle \langle x^2 x^3 \rangle$$



- $n = 6$



相関関数の母関数

- $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ 補助的な変数 = 外力
- 相関関数の母関数 (確率分布の Frounier/Laplace 変換)

$$Z(\xi) := \langle \exp(\xi, \mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{Z_0} \int_{\mathbb{R}^N} dx \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) + (\xi, \mathbf{x})\right\}$$

調和振動子 外力

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N \langle x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_n} \rangle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_n}$$

相関関数 $\iff \xi$ に関する Taylor 展開の係数

- 任意の相関関数は $Z(\xi)$ から求められる ($\partial_{\xi_k} := \partial/\partial \xi_k$).

$$\langle x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_n} \rangle = \partial_{\xi_{i_1}} \partial_{\xi_{i_2}} \dots \partial_{\xi_{i_n}} Z(\xi) \Big|_{\xi=0}$$

- Fourier 変換のもとで、「掛け算」と「微分」の役割は入れ替わる

摂動展開

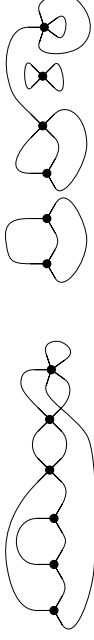
- 相互作用を含む理論を「自由場のまわりで」 Taylor 展開すること
- $S(\phi) = S(\phi_0) + \frac{a}{2}(\phi - \phi_0)^2 - V(\phi)$ $V(\phi) = \sum_{k \geq 3} \frac{\lambda_k}{k!} (\phi - \phi_0)^k$
- $\phi = \underbrace{\phi_0}_{\text{古典解}} + \underbrace{\sqrt{\hbar} \varphi}_{\text{ゆらぎ}}$ と分解し、ゆらぎ φ については積分
- 分配関数 Z_λ を結合定数 λ に関するべき級数展開で表示

$$\begin{aligned} Z_\lambda &= e^{-\frac{1}{\hbar} S(\phi_0)} \int d\varphi \exp\left\{-\frac{a}{2}\varphi^2 + \sum_{k \geq 3} \frac{\lambda_k}{k!} \hbar^{(k-2)/2} \varphi^k\right\} \\ &= Z_0 \left(\exp\left\{ \sum_{k \geq 3} \frac{\lambda_k}{k!} \hbar^{(k-2)/2} \varphi^k \right\} \right) \\ &= \sum_{n_3, n_4, \dots} \frac{1}{n_3!} \left(\frac{\lambda_3}{3!}\right)^{n_3} \frac{1}{n_4!} \left(\frac{\lambda_4}{4!}\right)^{n_4} \dots \hbar^{\frac{1}{2} \sum_{k \geq 3} n_k (k-2)} \cdot \langle (\varphi^3)^{n_3} (\varphi^4)^{n_4} \dots \rangle \end{aligned}$$

74/99

Feynman 図形

- $\langle \dots \rangle$: 自由場における相関関数 \Leftarrow Wick 定理で計算できる。
- 相互作用 \iff グラフの頂点, 伝搬関数 \iff グラフの辺
- Wick の定理 \iff 相関関数は、頂点と辺を、あらゆる方法で結んだ寄与の和で表される。
- Feynman 図形 (diagram) \Leftarrow (素粒子の世界線と解釈)



- 相関関数の摂動展開は、Feynman 図形ごとの重みの総和

$$Z_\lambda = Z_0 \sum_{\Gamma} W(\Gamma)$$

75/99

変形量子化

- 対応原理の数学的な表現
- Bayen-Flato-Fronsdal-Lichnerowicz-Sternheimer “Deformation theory and quantization” I, II 1977-78
- Poisson 括弧 $\{-, -\}$ を交換子の leading term として再現できるか？



- 相関関数の摂動展開は、Feynman 図形ごとの重みの総和

$$Z_\lambda = Z_0 \sum_{\Gamma} W(\Gamma)$$

75/99

正準量子化の問題点 (再掲)

問題点

- 演算子の積については順序の不定性が残る。
- 対応原理は \hbar 展開の初項しか決めてくれない。
- 量子化後にエルミート演算子同士の積は必ずしもエルミート演算子にはならない。
- ちっとも “canonical” な量子化の手続きでない！
- むしろ場当たりにさえ見える。

76/99

変形量子化

- 対応原理の数学的な表現
- Bayen-Flato-Fronsdal-Lichnerowicz-Sternheimer “Deformation theory and quantization” I, II 1977-78
- Poisson 括弧 $\{-, -\}$ を交換子の leading term として再現できるか？

変形量子化問題

Poisson 代数 $(C^\infty(M), \cdot, \{-, -\})$ が与えられたとき、 \hbar を形式的パラメータとする非可換結合的代数 $(C^\infty(M)[[\hbar]], \star_\hbar)$ が存在して

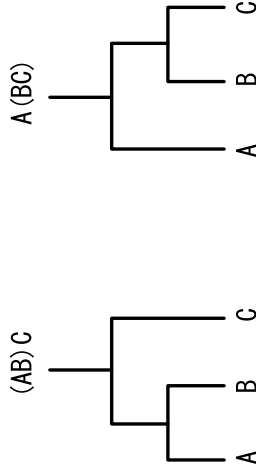
$$\{f, g\} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{f \star_\hbar g - g \star_\hbar f}{\hbar} \quad (f, g \in C^\infty(M) \subset C^\infty(M)[[\hbar]])$$

が成り立つか？ また、そのような結合的代数は一意的に定まるか？

77/99

結合法則

$$(AB)C = A(BC)$$



結合法則

- 結合法則をみたすような演算を作るのは、実は自明ではない。
- 例えば「足して2で割る平均操作」は結合法則を満たさない。



$$\frac{A+B+C}{2} = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{2}C \quad \frac{A+\frac{B+C}{2}}{2} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C$$

Moyal 積

Darboux の定理

Symplectic 多様体 (相空間など) には、Poisson 括弧が、正準交換関係をみたす座標系 (正準座標) $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$ が、局所的には常に存在する。

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0$$

定理 (Moyal, Weyl, Husimi, ...)

次で定義される \star 積は結合法則をみたす

$$(f \star g)(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y) + \frac{\hbar}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q^j} \right) + \dots$$

$$(f \star g)(x, y) = f(x, y) \exp \left(\frac{\hbar}{2} \sum_{j=1}^n \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x_j}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_i}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y_i}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_j}} \right) \right) g(x, y)$$

変形量子化の存在問題

- \star 積の表示は (正準) 座標に強く依存している。
- 変形量子化は非線形な座標変換 (一般共変性) と両立するか?

Symplectic 多様体の場合

肯定的に解決!

- M. De Wilde and P. Lecomte, "Existence of star-products and of formal deformations of Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds" Lett. Math. Phys., 7 (1983), 487-496.
- H. Omori, Y. Maeda, and A. Yoshioka, "Weyl manifolds and deformation quantization" Adv. Math, 85 (1991), 224-255.
- B. Fedosov, "Deformation quantization and index theory" In: Mathematical Physics, Akademie Verlag, 1996.

• 解析力学は symplectic 多様体に限らず、一般の Poisson 多様体上で定式化できる。

• では一般の Poisson 多様体でも、変形量子化は存在するか?

Kontsevich の定理

定理 (Kontsevich)

α を \mathbb{R}^D の領域で定義された Poisson 構造とする。このときある具体的に表される universal な変式

$$f \star_{\hbar} g = f \cdot g + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n B_n(f, g)$$

が存在し、この \star 積は結合法則を満たす。また、異なる座標で求めた \star 積は、もとの \star 積とゲージ同値である。

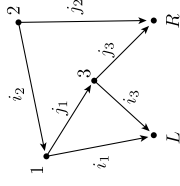
任意の Poisson 多様体に対し、その変形量子化が同型を除いて一意に存在する。

Kontsevich "Deformation Quantization of Poisson Manifolds" Letters in Mathematical Physics 66 (2003) 157-216

82/99

Kontsevich の定理

- $n = 1, 2, 3, \dots$ (\hbar のべき)
- $\Gamma = (V_r, E_r)$ グラフ $V_r =$ 頂点, $E_r =$ 辺
 - 頂点 $V_r = \{1, 2, 3, \dots, n\} \cup \{L, R\}$ (計 $n+2$ 個)
 - 各頂点 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ からは i 以外の頂点に向かう) 2本の有向辺 i_{k, j_k} が出ている。
- G_n : 上の条件を満たすグラフ全体の集合。 $|G_n| = (n(n+1))^n$ 。
- $U \subset \mathbb{R}^D$: ある領域
- $\alpha = \alpha^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial}{\partial x_i}$: Poisson bi-vector
- 各グラフ $\Gamma \in G_n$ に対し以下を定義する
 - 1 $B_{\Gamma, \alpha} : C^{\infty}(U) \otimes C^{\infty}(U) \rightarrow C^{\infty}(U)$ bi-differential operator
 - 2 $w_{\Gamma} \in \mathbb{R}$



83/99

Kontsevich の定理

定理 (Kontsevich)

α を \mathbb{R}^D の領域で定義された Poisson 構造とする。このときある具体的に表される universal な変式

$$f \star_{\hbar} g = f \cdot g + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n B_n(f, g)$$

が存在し、この \star 積は結合法則を満たす。また、異なる座標で求めた \star 積は、もとの \star 積とゲージ同値である。

任意の Poisson 多様体に対し、その変形量子化が同型を除いて一意に存在する。

Kontsevich "Deformation Quantization of Poisson Manifolds" Letters in Mathematical Physics 66 (2003) 157-216

82/99

Kontsevich の定理

定理 (Kontsevich)

α を \mathbb{R}^D の領域で定義された Poisson 構造とする。このときある具体的に表される universal な変式

$$f \star_{\hbar} g = f \cdot g + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n B_n(f, g)$$

が存在し、この \star 積は結合法則を満たす。また、異なる座標で求めた \star 積は、もとの \star 積とゲージ同値である。

任意の Poisson 多様体に対し、その変形量子化が同型を除いて一意に存在する。

Kontsevich "Deformation Quantization of Poisson Manifolds" Letters in Mathematical Physics 66 (2003) 157-216

82/99

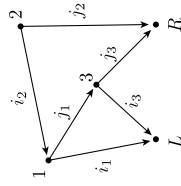
Kontsevich の定理

bidifferential operator

$$B_{\Gamma, \alpha}(f, g) = \sum_{L \in \Gamma \rightarrow \{1, \dots, D\}} \left[\prod_{k=1}^n \left(\prod_{e \in E_r} \frac{\partial}{\partial x^i(e)} \right) \alpha^{i(k)}(j_k) \right] \cdot \left(\prod_{e \in E_r} \frac{\partial}{\partial x^i(e)} \right) f \cdot \left(\prod_{e \rightarrow R} \frac{\partial}{\partial x^j(e)} \right) g$$

右図の Γ の場合 ((\dots) を単に \dots と略記)

$$B_{\Gamma, \alpha}(f, g) = \sum_{\substack{1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq D \\ 1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq D}} \alpha^{i_2 i_3} \cdot (\partial_{i_2} \alpha^{i_1 i_3}) \cdot (\partial_{j_1} \alpha^{j_2 j_3}) \cdot (\partial_{i_1} \partial_{j_3} f) \cdot (\partial_{j_2} \partial_{i_3} g)$$

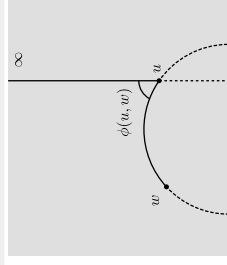


Kontsevich の定理

グラフの重み w_{Γ}

- $w_{\Gamma} = \frac{1}{n!(2\pi)^n} \int_{\text{Conf}_n(\mathbb{R}^D)} \prod_{k=1}^n (\alpha \phi^{i(k)}(j_k) \wedge d\phi^{j(k)})$
- $\text{Conf}_n(\mathbb{R}^D) = \{(u_1, \dots, u_n) \mid \text{Im } u_i > 0, u_i \neq u_j (i \neq j)\}$ n 点配置空間
- 有向辺 $e = (i \rightarrow j) \in E_r$ に対し、

$$\phi(e) = \phi(u_j, u_i), \quad \phi(u, w) = \frac{1}{2i} \log \frac{(w-u)(\bar{w}-u)}{(\bar{w}-u)(w-u)}$$

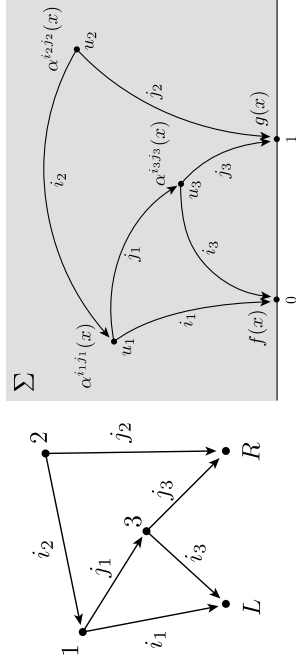


85/99

84/99

$$B_{\Gamma, \alpha}(f, g) = \sum_{\substack{1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq D \\ 1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq D}} \alpha^{i_1 j_1}(x) \frac{\partial \alpha^{i_2 j_2}(x)}{\partial x^{i_2}} \frac{\partial \alpha^{i_3 j_3}(x)}{\partial x^{i_3}} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^{j_3}}$$

$$w_{\Gamma} = \frac{1}{3!(2\pi)^6} \int_{\text{Conf}_3(\mathbb{R}^3)} d\phi(u_1, 0) \wedge d\phi(u_1, u_3) \wedge d\phi(u_2, u_1) \wedge d\phi(u_2, 1) \wedge d\phi(u_3, 0) \wedge d\phi(u_3, 1)$$



Kontsevich の定理

定理 (Kontsevich)

α を \mathbb{R}^D の領域で定義された Poisson 構造とする。このとき \star 積を

$$f \star g = f \cdot g + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \sum_{\Gamma \in G_n} w_{\Gamma} B_{\Gamma, \alpha}(f, g)$$

で定めると、 \star は結合法則

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$$

を満たす。また、異なる座標で求めた \star 積は、もとの \star 積とゲージ同値である。

任意の Poisson 多様体に対し、その変形量子化が同型を除いて一意に存在する。

Kontsevich の定理

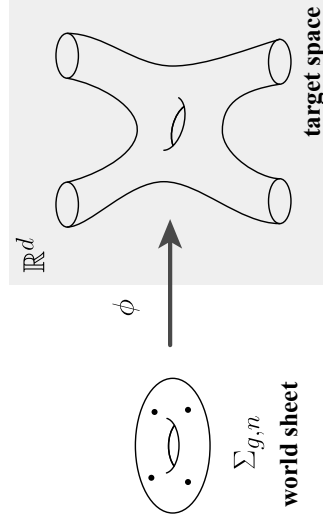
- 証明には変形のモジュライ空間の理論を、ホモトピー代数によって拡張したものをを用いて "Formality Theorem" を証明し、その系として前の定理を得た。

- \star 積の展開公式の意味は何か？

- そもそも、このような複雑な公式をどのようにして見つけたのか？
- Kontsevich さん、何か隠していませんか？

- 背後には弦理論 (Riemann 面上の場の理論) がある！

Riemann 面上の場の理論としての弦理論

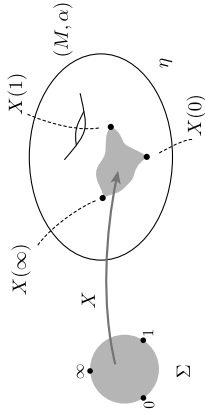


という写像全体を「場」とする Riemann 面上の場の理論。作用汎関数

$$S[\phi] \propto \text{Area}[\phi(\Sigma_{g,n})] \quad (\text{南部} \cdot \text{後藤}, \text{Polyakov})$$

Poisson σ -模型

- (M, α) Poisson 多様体
 $x = (x^1, \dots, x^D) : M$ の座標, $\alpha = \alpha^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} : \text{Poisson bivector}$
- $\Sigma = D^2$ $u = (u^1, u^2) : D$ の座標
- $X : \Sigma \rightarrow M$
- $\eta : M$ 上の 1-form の X による引き戻し: $\eta \in \Gamma(\Sigma, X^*(T^*M) \otimes T^*D)$
 境界条件: $u \in \partial D$ において $\eta(u)$ は ∂D の接ベクトルに対し 0 となる

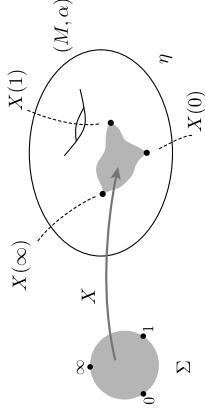


Poisson σ -模型

- 作用汎関数

$$S[X, \eta] = \int_{\Sigma} \eta(u) \wedge dX^i(u) + \frac{1}{2} \alpha^{ij}(X(u)) \eta_i(u) \wedge \eta_j(u)$$
- $O = O[X, \eta]$ の期待値

$$\langle O \rangle = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}\eta O[X, \eta] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[X, \eta] \right\}$$



Poisson σ -模型

特に $x \in M, f, g \in C^\infty(M)$ に対し、

$$O[X, \eta] = f(X(1))g(X(0))\delta(X(\infty) - x)$$

とおくと、

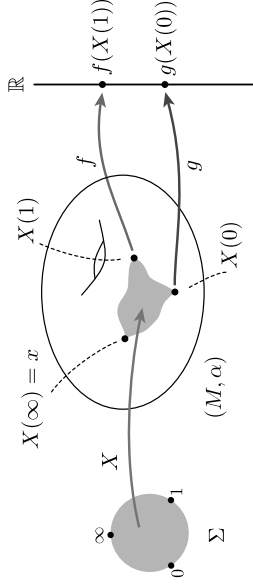
$$(f \star g)(x) = \int_{X(\infty)=x} \mathcal{D}X \mathcal{D}\eta f(X(1))g(X(0)) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[X, \eta] \right\}$$

が成り立つ。

Cattaneo-Felder "A Path Integral Approach to the Kontsevich Quantization Formula", Comm. Math. Phys. 212 (2000) 591-611

Poisson σ -模型

$$(f \star g)(x) = \int_{X(\infty)=x} \mathcal{D}X \mathcal{D}\eta f(X(1))g(X(0)) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[X, \eta] \right\}$$



Symplectic 多様体の場合

- Poisson 形式 $\alpha = \alpha^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ が非退化
 - $\alpha^{ij}(x)$ の逆行列 $\omega_{ij}(x)$ が存在
 - $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ は symplectic form, (M, ω) は symplectic 多様体
- $S[X, \eta]$ は η について非退化 2 次形式 (自由場) $\Rightarrow \int \mathcal{D}\eta$ を実行可能

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \int \mathcal{D}X \mathcal{D}\eta O[X] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma} \eta_i \wedge dx^i + \frac{1}{2} \alpha^{ij}(X) \eta_i \wedge \eta_j \right\} \\ &= \int \mathcal{D}X O[X] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma} \frac{1}{2} \omega_{ij}(X) dx^i \wedge dx^j \right\} \\ &= \int \mathcal{D}X O[X] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma} dp_i \wedge dq^i \right\} \\ &= \int \mathcal{D}X O[X] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\mathbb{R}} p_i dq^i \right\} \quad (\because \text{Stokes' thm}) \end{aligned}$$

$x = (q^1, \dots, q^p, p_1, \dots, p_D)$ Darboux 座標 : $\omega = dp_i \wedge dq^i$

94/99

Poisson σ -模型

古典解 $(X, \eta) = (x, 0)$ のまわりで摂動展開

$$X = x + \xi$$

$$\begin{aligned} (f \star g)(x) &= \int_{X^{(\infty)}=x} \mathcal{D}X \mathcal{D}\eta f(X(1))g(X(0)) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[X, \eta] \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\xi^{(\infty)}=0} \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\eta f(x + \xi(1))g(x + \xi(0)) \\ &\quad \times \left[\int_{\Sigma} \frac{1}{2} \alpha^{ij}(x + \xi) \eta_i \wedge \eta_j \right]^n \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma} \eta_i \wedge dx^i \right\} \end{aligned}$$

95/99

Symplectic 多様体の場合

- Poisson 形式 $\alpha = \alpha^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ が非退化
 - $\alpha^{ij}(x)$ の逆行列 $\omega_{ij}(x)$ が存在
 - $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ は symplectic form, (M, ω) は symplectic 多様体
- $S[X, \eta]$ は η について非退化 2 次形式 (自由場) $\Rightarrow \int \mathcal{D}\eta$ を実行可能

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \int \mathcal{D}X \mathcal{D}\eta O[X] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma} \eta_i \wedge dx^i + \frac{1}{2} \alpha^{ij}(X) \eta_i \wedge \eta_j \right\} \\ &= \int \mathcal{D}X O[X] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma} \frac{1}{2} \omega_{ij}(X) dx^i \wedge dx^j \right\} \\ &= \int \mathcal{D}X O[X] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma} dp_i \wedge dq^i \right\} \\ &= \int \mathcal{D}X O[X] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\mathbb{R}} p_i dq^i \right\} \quad (\because \text{Stokes' thm}) \end{aligned}$$

$x = (q^1, \dots, q^p, p_1, \dots, p_D)$ Darboux 座標 : $\omega = dp_i \wedge dq^i$

94/99

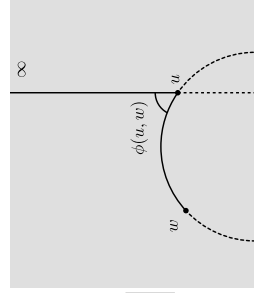
Poisson σ -模型

propagator, Green 関数

$$\begin{aligned} \langle \xi^k(w) \eta_l(u) \rangle &= \int_{\xi^{(\infty)}=0} \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\eta \xi^k(w) \eta_l(u) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma} \eta_i \wedge dx^i \right\} \\ &= \frac{\sqrt{-1} \hbar}{2\pi} \delta_l^k \phi(u, w) \end{aligned}$$

$$\phi(u, w) = \frac{1}{2i} \log \frac{(w-u)(\bar{w}-u)}{(\bar{w}-\bar{u})(w-\bar{u})}$$

Kontsevich の公式は、Poisson σ -模型の相関関数の摂動展開そのもの！

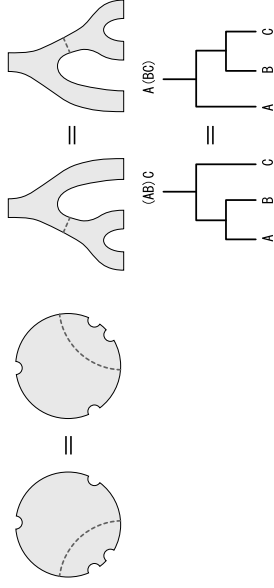


96/99

弦理論の双対性 \Rightarrow 結合法則

弦の双対性

- 2 次元上の場の量子論 (弦理論) の相関関数は、面の切り分け方によらずに確定すべきである。
- リーマン面のモジュラライに関する積分として表される

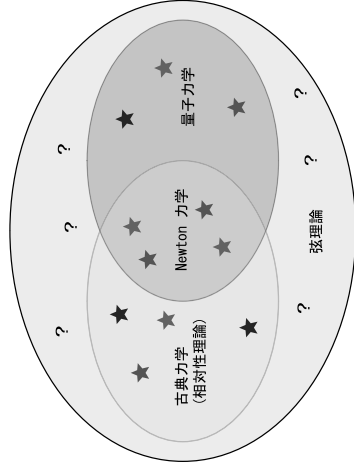


97/99

古典・量子・弦

解析力学 + 変形量子化 (結合法則) + 一般共変性

⇒ 弦理論



ご静聴ありがとうございました。