滑らかな写像芽の間の幾何学的同値関係
ー Thom-Mather 理論へのオマージュー

泉屋　周一
Shyuichi IZUMIYA

北海道大学・名誉教授

於：東京工業大学・日本数学会年会・総合講演

高橋雅朋氏（室蘭工業大学）と寺本央氏（北大電子研）との共同研究に基づいています。

平成３１年３月１８日

§1　序（写像芽の間の幾何学的同値関係）

- （局所的）トム・マザー理論 (1950'–70'): 現代的 C^∞ 写像芽の特異点論
- 本講演では、断らない限り、写像芽などはすべて C^∞ 級であるとする。
- $\mathrm{Diff}\,(m) = \{\phi : (\mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, 0) \mid \phi$: 微分同相芽 $\}$
- 写像芽 $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$: $\mathcal{A}$ 同値 $\Leftrightarrow$
$$\exists \phi \times \psi \in \mathrm{Diff}\,(n) \times \mathrm{Diff}\,(p) \ s.t.\ \psi \circ f = g \circ \phi.$$
- 写像芽の $\mathcal{A}$ 同値：写像芽の間の微分位相幾何学的同値関係.
- トムの安定性問題: $\mathcal{A}$ 同値に関して構造安定な写像芽を研究せよ。
- マザー（大学院生時代）:トムの安定性問題の主要部分をほとんどすべて解いた。
- その過程でマザーは（補助的手段として？）$\mathcal{K}$ 同値と言う概念を導入した。
- f, g: $\mathcal{K}$ 同値 $\Leftrightarrow H(x, y) = (\phi(x), \Phi(x, y))$ という形で $\Phi(x, 0) = 0$ を満たす $H \in \mathrm{Diff}\,(n + p)$ が存在して $H(x, f(x)) = (\phi(x), g \circ \phi(x))$ が成り立つこと。

§1　序（写像芽の間の幾何学的同値関係）

• ここで、対応する切断芽 $s_f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$；$s_f(x) = (x, f(x))$ とすると ⇒ $H \circ s_f = s_g \circ \phi$ が成り立つ事である。

定理 (Mather)

$f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$: $\mathcal{K}$ 同値 ⇔ $\exists \phi \in \mathrm{Diff}\,(n)$、$\exists A : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow GL(p, \mathbb{R})$ s.t. $A(x)^t f(x) = {}^t g \circ \phi(x)$. ただし、$f(x) = (f_1(x), \ldots f_p(x))$、${}^t f(x)$; $f(x)$ の転置。

• この言い換えは、$\mathcal{K}$ 同値は（局所的）ベクトル束 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ の切断芽の間の自然な同値関係であることを意味している；$H(x, y) = (\phi(x), A(x)^t y)$

• 今後、マザーによるこの言い換えを $\mathcal{K}$ 同値と呼ぶ。

• マザーは $\mathcal{A}$ 同値を研究するための補助的手段として $\mathcal{K}$ 同値を導入したように思えるが、応用上は $\mathcal{K}$ 同値の方が多く用いられている。

• ここでは、値域の集合芽 $(\mathbb{R}^p, 0)$ や $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ 上に幾何構造がある場合に幾何構造に対応した形に $\mathcal{A}$ 同値や $\mathcal{K}$ 同値を一般化することを考える。

§1　序（写像芽の間の幾何学的同値関係）

- $GL(\mathbb{R}^p)$：線形変換群、 Σ: $\mathbb{R}^p$ の基底。
- $r_\Sigma : GL(\mathbb{R}^p) \cong GL(p, \mathbb{R})$：表現行列を対応させる同型
- $\rho : G \longrightarrow GL(\mathbb{R}^p)$: C^∞ 表現（G:リー群）；

$$\mathcal{K}[(\rho, G)](n, p) = \{H^\rho_a = (\phi, \Phi^\rho_a) \in \mathrm{Diff}(n+p) \mid a : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow G : \text{写像芽、} \\ \Phi^\rho_a : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0);\ \Phi^\rho_a(x, y) = \rho(a(x))(y)\text{、}\phi \in \mathrm{Diff}\,(n)\}$$

- $G \subset GL(\mathbb{R}^p)$：線形リー群 $\Rightarrow$ f, g: $\mathcal{A}[G]$ 同値：定義は、述べない。
- $\mathcal{A}[SO(3)]$: 特異点を持つ曲面の微分幾何学（佐治、梅原、山田等）
- f, g: $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値 $\Leftrightarrow \exists(\phi, \Phi^\rho_a) \in \mathcal{K}[(\rho, G)](n, p)$ s.t. $\rho(a(x))(f(x)) = g \circ \phi(x)$
- $G = GL(\mathbb{R}^p)$ の場合は、それぞれ $\mathcal{A}$ 同値と $\mathcal{K}$ 同値である。
- 局所特異点論では、同値関係に対応する無限小代数構造が基本的役割を担う。

§2　トム・マザー理論の基礎；無限小代数構造

- $\mathcal{E}_n = \{h : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$: 関数芽 $\}$: 局所環, $\mathfrak{M}_n = \{h \in \mathcal{E}_n \mid h(0) = 0\}$
- $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$:写像芽 $\Rightarrow f^* : \mathcal{E}_p \longrightarrow \mathcal{E}_n;\ f^*(h) = h \circ f$
- $\theta(f)$: f に沿ったベクトル場芽全体；$\mathcal{E}_n$ 加群 $\cong \mathcal{E}_n \times \cdots \times \mathcal{E}_n$
- f を含む $\mathcal{A}$ 同値類の（形式的）接空間: $T\mathcal{A}(f) = tf(\mathfrak{M}_n\theta(n)) + \omega f(\mathfrak{M}_p\theta(p))$
- $tf(\mathfrak{M}_n\theta(n))$：$\mathcal{E}_n$ 加群、$\omega f(\mathfrak{M}_p\theta(p))$：$f^*$ を通して $\mathcal{E}_p$ 加群
- $\mathcal{K}$ 同値類の（形式的）接空間: $T\mathcal{K}(f) = tf(\mathfrak{M}_n\theta(n)) + f^*(\mathfrak{M}_p)\theta(f)$
- $T\mathcal{A}(f)$ は（$\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_p$）混合加群であるが、$T\mathcal{K}(f)$ は $\mathcal{E}_n$ 加群である。

§3 $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値の無限小代数構造

- 今後 $\mathcal{K}[(\rho, G)]$ 同値を考える。
- $\mathcal{C}[(\rho, G)](n, p) = \{(1_{\mathbb{R}^n}, \Phi^\rho_a) \mid a : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow G$: 写像芽 $\} \subset \mathrm{Diff}(n+p)$
- $\mathcal{K}[(\rho, G)](n, p) = \mathrm{Diff}\,(n) \rtimes \mathcal{C}[(\rho, G)](n, p)$: 半直積
- $\mathfrak{g} = T_eG$; G のリー環 $\Rightarrow \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) = \{\zeta \mid \zeta : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathfrak{g}$; 写像芽 $\}$;$\mathcal{E}_n$ 加群
- $d\rho_e : \mathfrak{g} \longrightarrow L(\mathbb{R}^p) = T_{1_{\mathbb{R}^p}} GL(\mathbb{R}^p) \Rightarrow$

$$\overline{d\rho_e \circ \zeta} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^p;\ \overline{d\rho_e \circ \zeta}(x, y) = (d\rho_e \circ \zeta)(x)(y)$$

- $\theta(\mathcal{C}[(\rho, G)]) = \left\{ \overline{d\rho_e \circ \zeta} \;\middle|\; \zeta \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n) \right\} \subset \theta(\pi_p) \cong \mathcal{E}_{n+p} \times \cdots \times \mathcal{E}_{n+p}$
- $\theta(\mathcal{C}[(\rho, G)])$ は群 $\mathcal{C}[(\rho, G)](n, p)$ の (形式的) リー環、有限生成 $\mathcal{E}_n$ 加群。
- f に対して、$T\mathcal{C}[(\rho, G)](f) = \{\overline{d\rho_e \circ \zeta} \circ s_f \mid \zeta \in \mathfrak{g}(\mathcal{E}_n)\} \subset \theta(f)$: 有限生成 $\mathcal{E}_n$ 加群
- $\mathcal{K}(\rho, G)$ 同値類の接空間: $T\mathcal{K}[(\rho, G)](f) = tf(\mathfrak{M}_n\theta(n)) + T\mathcal{C}[(\rho, G)](f)$

定理 (3.1)

$T\mathcal{K}[(\rho, G)](f)$ は有限生成 $\mathcal{E}_n$ 加群である。

- トム・マザー理論やそれ以降に開発された写像芽の特異点論の手法が使える。

- $H < G$: 部分リー群。$\rho|_H : H \longrightarrow GL(\mathbb{R}^p)$：制限表現
- $\mathcal{K}[(\rho|_H, H)]$ 同値が定義可能。

- $V \subset \mathbb{R}^p$: 部分ベクトル空間; ρ-不変 $\Leftrightarrow \forall a \in G;\ \rho(a)(V) \subset V \Rightarrow$
- $\rho_V : G \longrightarrow GL(V); \forall a \in G; \rho_V(a) = \rho(a)|_V : V \longrightarrow V$ と定義する。
- $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (V, 0)$ の間に $\mathcal{K}[(\rho_V, G)]$ 同値が定義可能。

- $V \subset \mathbb{R}^p$: ρ-不変でない $\Rightarrow G_V = \{a \in G \mid \rho(a)(V) \subset V\}$

命題 (4.1)

G_V は G の閉部分リー群となり、表現 $\rho_V = \rho|_{G_V} : G_V \longrightarrow GL(V)$ が定義可能である。

- $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (V, 0)$ の間の $\mathcal{K}[(\rho_V, G_V)]$ 同値を考えることが出来る。

- Arnol'd (1971) : $f, g : (\mathbb{K}^n, 0) \longrightarrow (M_m(\mathbb{K}), O)$: $\mathcal{GL}(m, \mathbb{K})$ 同値 $\Leftrightarrow \exists \phi \in \mathrm{Diff}(n)$, $A : (\mathbb{K}^n, 0) \longrightarrow GL(m, \mathbb{K})$ s.t. $f \circ \phi(x) = A(x)g(x)A(x)^{-1}$.
- 動機: 行列族のジョルダン標準形、常微分方程式の分岐の研究に応用
- $\rho : GL(m, \mathbb{K}) \longrightarrow GL(M_m(\mathbb{K}))$; $\rho(A)(X) = AXA^{-1}$: 随伴表現
- Fact: f, g : $\mathcal{GL}(m, \mathbb{K})$ 同値 $\Leftrightarrow \mathcal{K}[(\rho, GL(m, \mathbb{K}))]$ 同値

- Bruce (2003) : $f, g : (\mathbb{K}^n, 0) \longrightarrow (Sym(m, \mathbb{K}), O)$: $\mathcal{G}$ 同値 $\Leftrightarrow \exists \phi \in \mathrm{Diff}(n)$, $A : (\mathbb{K}^n, 0) \longrightarrow GL(m, \mathbb{K})$ s.t. $f \circ \phi(x) = A(x)g(x){}^tA(x)$.
- 動機: $m = 2$: ２次微分方程式：$a(x, y)dx^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dy^2 = 0$ の係数行列：

$$X(x, y) = \begin{pmatrix} a(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & c(x, y) \end{pmatrix} \in Sym(2, \mathbb{R})$$

の判別集合：$\det X(x, y) = a(x, y)c(x, y) - b(x, y)^2 = 0$ の形状の分類
- $\rho : GL(m, \mathbb{K}) \longrightarrow GL(Sym(m, \mathbb{K}))$; $\rho(A)(X) = AX{}^tA$: 表現
- Fact: f, g : $\mathcal{G}$ 同値 $\Leftrightarrow \mathcal{K}[(\rho, GL(m, \mathbb{K}))]$ 同値
- $\rho|_{SL(m,\mathbb{K})} : SL(m, \mathbb{K}) \longrightarrow GL(Sym(m, \mathbb{K}))$ を考えると $\det X = c$ も保存される。

- (Belitskii, Bruce-Tari, Ebeling, Gusein-Zade, Kerner, Ruas, etc)

$f, g : (\mathbb{K}^n, 0) \longrightarrow M_{m\times q}(\mathbb{K})$: $\mathcal{GL}(m, \mathbb{K}) \times \mathcal{GL}(q, \mathbb{K})$ 同値 $\Leftrightarrow \exists \phi \in \mathrm{Diff}(n)$、
$\exists (A, B) : (\mathbb{K}^n, 0) \longrightarrow GL(m, \mathbb{K}) \times GL(q, \mathbb{K})$、s.t. $f \circ \phi(x) = A(x)g(x)B(x)^{-1}$.

- 動機: 行列式的特異点; $M^r_{m\times q} = \{A \in M_{m\times q}(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rank}\, A < r\}$、 $(r \leq \min(m, q))$
- 写像芽 $f : (\mathbb{K}^n, 0) \longrightarrow M_{m\times q}(\mathbb{K})$ に対して、
$X^r_f = f^{-1}(M^r_{m\times q})$ を (m, q, r) 型の行列式的集合と呼ぶ。
- $(1, q, 1)$ 型の行列式的集合や $(m, 1, 1)$ 型の行列式的集合は f の零点集合 $V(f) = f^{-1}(0)$ となり、行列式的特異点論は解析的集合や代数的集合の特異点論の一般化とみなせる。
- 表現 $\rho : GL(m, \mathbb{K}) \times GL(q, \mathbb{K}) \longrightarrow GL(M_{m\times q}(\mathbb{K}))$; $\rho(A, B) = L_{(A,B)}$
ただし、$L_{(A,B)} : M_{m\times q}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{m\times q}(\mathbb{K})$; $L_{(A,B)}(X) = AXB^{-1}$.
- Fact: f, g : $\mathcal{GL}(m, \mathbb{K}) \times \mathcal{GL}(q, \mathbb{K})$ 同値 $\Leftrightarrow \mathcal{K}[(\rho, GL(m, \mathbb{K}) \times GL(q, \mathbb{K}))]$ 同値

§6 トレースが零のエルミート行列

- G. A. Hagedorn, Mem. AMS 111, (1994): 分子の伝播を量子力学におけるエネルギーバンド交差の観点から記述
- シュレディンガー方程式：$i\varepsilon^2 \dfrac{d\psi}{dt} = \left(-\dfrac{\varepsilon^4}{2}\Delta_x + H(x)\right)\psi$
- ボルン・オッペンハイマー近似: 分子の運動では、原子核と電子の運動のスピードの差が大きいため、$H(x)$ の部分で近似できる（WKB 解析）
- $H(x)$：原子核の位置 $x \in \mathbb{R}^n$ に依存するトレース零のエルミート行列、固有値関数がエネルギーを表す。
- 固有値が２つである場合を想定; その２つの固有値を $E_{\mathcal{A}}(x) \geq E_{\mathcal{B}}(x)$
- $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid E_{\mathcal{A}}(x) = E_{\mathcal{B}}(x)\}$: 交差集合

定理 (Hagedorn)

ジェネリックには Γ は多様体となり、その余次元は、$1, 2, 3, 5$ の４つの場合しかない. さらに、これらの場合が、１１種類に分類される。

- 余次元１：７種類（詳しい WKB 解析が行われている）。残された場合は、余次元２（タイプ I)、余次元３（タイプ B とタイプ K)、余次元 5（タイプ J)。

§6 トレースが零のエルミート行列；一般的性質

- $\mathrm{Herm}_0(m) = \{X \in M_m(\mathbb{C}) \mid X^* = X, \mathrm{Trace}\, X = 0\}$: $\mathbb{R}$ ベクトル空間
- $X, Y \in \mathrm{Herm}_0(m)$, $(X, Y) = \mathrm{Trace}\, XY^*$: 正定値内積
- $SU(m)$: 特殊ユニタリ群、$p = m^2 - 1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Herm}_0(m)$
- $Ad : SU(m) \longrightarrow \mathrm{Iso}^+(\mathrm{Herm}_0(m)) \subset GL(\mathbb{R}^p)$; $Ad(A)(X) = AXA^*$: 随伴表現
- $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathrm{Herm}_0(m), O)$: $\mathcal{K}[(Ad, SU(m))]$ 同値 $\Leftrightarrow \exists \phi \in \mathrm{Diff}(n)$,
$\exists A : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow SU(m)$ s.t. $f \circ \phi(x) = A(x)g(x)A^*(x)$.
- $E(f)_i : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$: f の固有関数芽（微分可能とは限らない）

命題 (6.1)

f, g : $\mathcal{K}[(Ad, SU(m))]$ 同値 $\Rightarrow \exists \phi \in \mathrm{Diff}\,(n)$; $E(f)_i \circ \phi = E(g)_i$ $(i = 1, \ldots, m)$。

- $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots \sigma_p\}$: 正規直交基底 $\Rightarrow \exists \phi_\Sigma : \mathrm{Herm}_0(m) \cong \mathbb{E}^p$: 等長写像
- $r_\Sigma : \mathrm{Iso}^+(\mathrm{Herm}_0(m)) \cong SO(p)$: Σ に関する表現行列。
- $\rho_\Sigma : SU(m) \longrightarrow SO(p)$; $\rho_\Sigma(A) = r_\Sigma \circ Ad(A)$: Σ に依存した表現
- $SU(m)$:連結 $\Rightarrow \rho_\Sigma(SU(m)) \subset SO(p) \subset GL(p, \mathbb{R})$: リー部分群

命題 (6.2)

$f, g : \mathcal{K}[(Ad, SU(m))]$ 同値 $\Leftrightarrow \phi_\Sigma \circ f, \phi_\Sigma \circ g : \mathcal{K}[\rho_\Sigma(SU(m))]$ 同値

§6 トレースが零のエルミート行列；タイプ B と K (m=2)

- $\forall H \in \mathbf{Herm}_0(2) \Rightarrow \exists h_i \in \mathbb{R}, (i = 1, 2, 3)$, s.t. $H = \begin{pmatrix} h_3 & h_1 - ih_2 \\ h_1 + ih_2 & -h_3 \end{pmatrix}$.
- $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}(X, Y) = \frac{1}{2}\mathrm{Trace}XY^*$: $\mathbf{Herm}_0(2)$ 上の正定値内積
- $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: パウリ行列.
- $\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow \Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$: 正規直交基底
- $\rho_\Sigma(SU(2)) = SO(3)$ (i.e. $Spin(3) \cong SU(2)$).
- $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{Herm}_0(2), O)$; $f(x) = \begin{pmatrix} f_3(x) & f_1(x) - if_2(x) \\ f_1(x) + if_2(x) & -f_3(x) \end{pmatrix}$.
- $\phi_\Sigma \circ f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$.
- $E_f^\pm(x) = \pm\sqrt{f_1^2(x) + f_2^2(x) + f_3^2(x)}$: f の固有値関数 f (エネルギー関数).
- $E_f^+(0) = E_f^-(0)$: 原点はエネルギーレベル交差点.

定理 (6.3)

$f, g : \mathcal{K}[(Ad, SU(2))]$ 同値 $\Leftrightarrow \phi_\Sigma \circ f, \phi_\Sigma \circ g : \mathcal{K}[SO(3)]$ 同値

§6 トレースが零のエルミート行列；タイプ B と K (m=2)

• [TKITK] H. Teramoto, K. Kondo, S. Izumiya, M. Toda and T. Komatsuzaki, Classification of Hamiltonians in neighborhoods of band crossings in terms of the theory of singularities, J. Math. Phys. 58 (2017); doi:10.1063/1.49901662

定理 (6.4)

$f : (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathrm{Herm}_0(2), O)$: $\mathcal{K}[(Ad, SU(2))]$-cod $(f) \leq 7$ なる写像芽。この時、$\phi_\Sigma \circ f : (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ は以下の写像芽に $\mathcal{K}[SO(3)]$ 同値である:

$\phi_\Sigma \circ f$	ranges	cod
(x_1, x_2, x_3)		0
(x_1, x_2, x_3^ℓ)	$\ell = 2, \ldots, 8$	$\ell - 1$
$(x_1, x_2^2, x_3^2 + r x_2^2)$	$r \in [0, \infty)$	5
$(x_1, x_2 x_3, \frac{r}{2}(x_2^2 - x_3^2))$	$r \in (0, 1)$	5
$(x_1, x_2^2 + x_3^2, r(x_2^3 + x_3^3))$	$r \in (0, \infty)$	7
$(x_1, x_1 x_2, r(x_2^3 + x_3^3))$	$r \in (0, \infty)$	7
$(x_1, x_2 x_3 + \frac{r}{2} x_2 (x_2^2 - x_3^2), \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2)(1 + r x_3))$	$r \in (0, \infty)$	7

ここで、r は $\mathcal{K}[SO(3)]$ 同値に関するモジュライパラメータ。

§6 トレースが零のエルミート行列；タイプ J (m=4)

- $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & 0 & f_2(x)+if_3(x) & f_4(x)+if_5(x) \\ 0 & f_1(x) & -f_4(x)+if_5(x) & f_2(x)-if_3(x) \\ f_2(x)-if_3(x) & -f_4(x)-if_5(x) & -f_1(x) & 0 \\ f_4(x)-if_5(x) & f_2(x)+if_3(x) & 0 & -f_1(x) \end{pmatrix}$
- $\exists H_J(4) \subset \mathrm{Herm}_0(4)$: $f(x) \in H_J(4)$ となる５次元部分空間
- $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}\mathrm{Trace} XY^*$: 正定値内積
- $\overline{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \overline{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \overline{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_3 \\ -i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \overline{\sigma}_4 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \overline{\sigma}_5 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\Sigma = \{\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3, \overline{\sigma}_4, \overline{\sigma}_5\}$ は $H_J(4)$ の正規直交基底
- $H_J(4)$ は $Ad : SU(4) \longrightarrow \mathrm{Herm}_0(4)$ で不変でない。
- $SU(4)_J = SU(4)_{H_J(4)} \subset SU(4)$、$Ad_J = Ad|_{SU(4)_J} : SU(4)_J \longrightarrow \mathrm{Iso}^+(H_J(4))$

命題 (6.5)

$r_\Sigma \circ Ad_J : SU(4)_J \longrightarrow SO(5)$ は２重被覆写像である（i.e. $SU(4)_J \cong Spin(5)$）。

定理 (6.6)

$f, g : \mathcal{K}[(Ad_J, SU(4)_J)]$ 同値 $\Leftrightarrow$ $\phi_\Sigma \circ f, \phi_\Sigma \circ g : \mathcal{K}[SO(5)]$ 同値

§6 トレースが零の（実）エルミート行列＝対称行列；タイプI (m=2)

- $\mathrm{Herm}_0(2) \supset \mathrm{Sym}_0(2) = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid X = {}^tX,\ \mathrm{Trace}\, X = 0\}$.
- $\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Trace}\, XY$: $\mathrm{Sym}_0(2)$ 上の正定値内積
- $Ad : SO(2) \longrightarrow \mathrm{Iso}^+(\mathrm{Sym}_0(2)) \subset GL(\mathrm{Sym}_0(2))$；$Ad(A)(X) = AX{}^tA$。
- $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \sigma_i, \sigma_j\rangle = \delta_{ij}. \Rightarrow \Sigma = \{\sigma_1, \sigma_3\}$: 正規直交基底
- $\rho_\Sigma : SO(2) \longrightarrow GL(2, \mathbb{R}) \Rightarrow \rho_\Sigma(SO(2)) = SO(2)$. (i.e. $Spin(2) = SO(2)$).
- $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathrm{Sym}_0(2), O)$; $f(x) = \begin{pmatrix} f_2(x) & f_1(x) \\ f_1(x) & -f_2(x) \end{pmatrix}$

命題 (6.7)

$f, g : \mathcal{K}[(Ad, SO(2))]$ 同値 $\Leftrightarrow \phi_\Sigma \circ f, \phi_\Sigma \circ g : \mathcal{K}[SO(2)]$ 同値。

定理 (6.8)

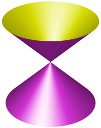
$f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathrm{Sym}_0(2), O)$ $(n \geq 2)$: $\mathcal{K}[(Ad, SO(2))]$-cod $(f) \leq 6$. この時、$\phi_\Sigma \circ f$ は以下の写像芽に $\mathcal{K}[SO(2)]$ 同値である:

$\phi_\Sigma \circ f$	ranges	cod
(x_1, x_2)		0
$(x_1, x_2^\ell \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$	$\ell = 2, \ldots, 7$	$\ell - 1$
$(x_1, x_2^2 x_3 \pm x_3^3 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$	$n \geq 3$	4
$(x_1, x_2^2 x_3 + x_3^4 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$	$n \geq 3$	5
$(x_1^2, x_2^2 + r x_1^2)$	$n = 2,\ r \in [0, \infty)$	5
$(x_1 x_2, \frac{r}{2}(x_1^2 - x_2^2))$	$n = 2,\ r \in (0, 1)$	5
$(x_1, x_2^2 x_3 \pm x_3^5 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$	$n \geq 3$	6
$(x_1, x_2^3 \pm x_3^4 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$	$n \geq 3$	6

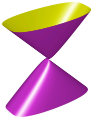
ここで、 r は $\mathcal{K}[SO(2)]$ 同値に関するモジュライパラメータである。

§6 トレースが零の（実）エルミート行列＝対称行列；タイプ I (m=2)

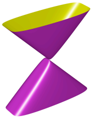
- $n = 2$, エネルギー関数芽: $E_{\pm}(x_1, x_2) = \pm\sqrt{f_1(x_1, x_2)^2 + f_2(x_1, x_2)^2}$
- $\mathcal{K}[Ad(SO(2))]$-cod $(f) \leq 5$ の場合の $E_{\pm}(x_1, x_2)$ のグラフの図：



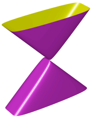
$\mathcal{K}[SO(2)]$-cod 0
rank 2



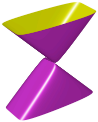
$\mathcal{K}[SO(2)]$-cod 1
rank 1



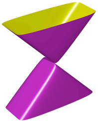
$\mathcal{K}[SO(2)]$-cod 2
rank 1



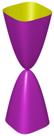
$\mathcal{K}[SO(2)]$-cod 3
rank 1



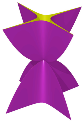
$\mathcal{K}[SO(2)]$-cod 4
rank 1



$\mathcal{K}[SO(2)]$-cod 5
rank 1



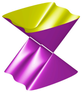
$\mathcal{K}[SO(2)]$-cod 5
rank 0



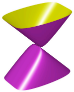
$\mathcal{K}[SO(2)]$-cod 5
rank 0

- 最初の図： $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & -x_2 \end{pmatrix}$ ；デイラック錐 (質量ゼロのフェルミオン).

- $(x_1, x_2^3 + u + vx_2)$：(x_1, x_2^3) の $\mathcal{K}[SO(2)]$ 普遍変形
- $E_\pm(x_1, x_2) = \pm\sqrt{x_1^2 + (x_2^3 + u + vx_2)^2}$：エネルギー関数芽の分岐



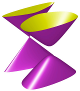
$(u, v) = (0, -1.7)$



$(0, 0)$

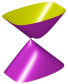
$(0, +1.7)$

$(-1.2, -1.7)$



$(+1.2, -1.7)$

$(-0.3, +0.2)$



$(+0.3, +0.2)$

§7 今後の課題と展望

- **分岐理論**：$f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ の P-$\mathcal{K}[(\rho,G)]$ 同値の理論の構成。$(\mathbb{R}^r,0)$ を与えられたパラメータとして分離する同値関係の研究。
- **同変理論**：結晶などのように対称性を持つ場合の理論。一般論の構成は同変特異点論を適用すれば出来そうだが、具体例が重要。
- **定義域の幾何構造**：$\mathcal{A}[G';G](n,p)=\mathrm{Diff}[G'](n)\times\mathrm{Diff}[G](p)$, $\mathcal{K}[G';(\rho,G)](n,p)=\mathrm{Diff}[G'](n)\rtimes C[(\rho,G)](n,p)$ の研究。定義域の微分同相の代わりに位相同型やリプシッツ位相同型などに弱めた理論。
- **大域的性質**：多重写像芽の分類理論、新たな位相不変量の発見
- **その他**：エルミート行列では、$Spin(2),Spin(3),Spin(5)$ が現れたが、その他の場合 $Spin(4)$, $Spin(6)$ などの古典群で実現される場合に興味深い例はあるか？デイラックの４次 γ 行列は $\mathcal{K}[SO(1,3)]$ 同値に関係しているように見えるが、一般に $\mathcal{K}[SO(1,q)]$ 同値の興味深い例があるか？ゲルマン行列など場の量子論に現れる群の表現に対応する同値は興味深い応用を持つか？

Thank you very much
for your attention!