非線形発展方程式の臨界正則性と特異極限

日本数学会 秋季総合分科会

小川卓克

東北大学・数理科学連携兼研究センター・大学院理学研究科

2019 年 9 月 18 日 金沢大学

共同研究者 (過去 5 年間)

- (今回の内容に関する共著者)
  - 永井 敏隆氏 (広島大・理・名誉教授)
  - 黒木場 正城氏 (室蘭工大・ひと文化系領域・領域長・教授)
  - 清水 扇丈氏 (京都大・人間環境・教授)
  - 小林 孝行氏 (大阪大・基礎工・教授)
  - 中川 和重氏 (福島大・共生シス理工・准教授)
  - 岩渕 司氏 (東北大・理・准教授)
  - 和久井 洋司氏 (Wroclow 大・PD, Poland)
- (そのほかの共同研究者)
  - 林 仲夫氏 (大阪大・理・教授)
  - 久保 英夫氏 (北海道大・理・教授)
  - パヴァル ナウムキン氏 (UNAM Morelia, Mexico)
  - 町原 秀二氏 (埼玉大・理・教授)
  - 眞崎 聡氏 (大阪大・基礎工・准教授)
  - 猪奥 倫左氏 (東北大・理・准教授)
  - 佐藤 龍一氏 (東北大・理・助教)
  - 池田 正弘氏 (理研・研究員)
  - 瓜屋 航太氏 (岡山理大・理・講師)
  - 千頭 昇氏 (大阪大・基礎工・学振 PD)
- (君島 敦氏, 山根由経氏, 瀬楽健斗氏, 木村悠紀氏, 松井竜也氏
  Md ラビウ・ハック氏, 佐藤拓也氏, 中里亮介氏, 勝呂剛志氏 (東北大・理・在学中))

$\mathbb{R}^n$ 上の Banach 空間 $X = X(\mathbb{R}^n)$ で以下の初期値問題を考える

$$\begin{cases} \partial_t u - \mathcal{L}u = F(u), & t > 0, \\ \qquad u(0) = u_0 \in X, & t = 0. \end{cases} \tag{AE}$$

- 臨界空間 . . . Fujita-Kato の原理
- 臨界指数 . . . Fujita 臨界指数・質量臨界指数
- 臨界正則性 . . . 最大正則性と特異極限

1. 非線形発展方程式

典型例:

$$\begin{cases} \partial_t u - \mathcal{L}u = F(u), & t > 0, \\ u(0) = u_0 \in X, & t = 0. \end{cases} \tag{AE}$$

- **非線形熱方程式**:

$$\partial_t u - \Delta u = u^p, \qquad u = u(t,x) > 0. \tag{NLH}$$

- **非線形** Schrödinger **方程式**:

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^{p-1} u, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{NLS}$$

- **非圧縮性** Navier-Stokes **方程式**:

$P_\sigma : X \to X_\sigma$; solenoidal projection

$$\partial_t u - \Delta u + P_\sigma (u \cdot \nabla) u = 0, \qquad \mathrm{div}\, u = 0. \tag{NS}$$

1. 非線形発展方程式 (スケール不変性)

非線形熱方程式: $p>1$

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = u^p, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & t=0,\ x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{NLH}$$

- **不変スケール変換**:

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \lambda>0, \quad (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n.$$

$u(t,x)$: (NLH) **を満たす** $\Longleftrightarrow$ $u_\lambda(t,x)$: (NLH) **を満たす**.

- **スケール不変空間**: Lebesgue-Bochner **空間** $L^\theta\left(\mathbb{R}_+;L^q(\mathbb{R}^n)\right)$

$$\|u\|_{L^\theta(\mathbb{R}_+;L^q(\mathbb{R}^n))} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} \|u(t,\cdot)\|_{L^q}^\theta dt\right)^{1/\theta}$$

$$\|u_\lambda\|_{L^\theta(\mathbb{R}_+;L^q(\mathbb{R}^n))} = \lambda^{\frac{2}{p-1}-\frac{2}{\theta}-\frac{n}{q}} \|u\|_{L^\theta(\mathbb{R}_+;L^q(\mathbb{R}^n))}$$

norm **が** λ **に依存しない** $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{2}{\theta}+\dfrac{n}{q} = \dfrac{2}{p-1}$

$$\theta=\infty \quad \Longrightarrow \quad q=\frac{n}{2}(p-1).$$

1. 非線形発展方程式 (Fujita-Kato の原理)

Fujita-Kato の原理

スケール不変な非線形偏微分方程式 (AE) を不変スケール空間で考えよ.

▶Kato-Fujita 1962 [Rendi Semi. Math. Padova], Fujita-Kato 1964 [ARMA]

小さい初期条件に対する時間大域解の存在 (時間大域的適切性)
vs
大きな初期条件に対する時間局所解の存在 (時間局所的適切性)

Fujita-Kato の原理: 臨界空間であれば上記双方が同時に得られる.

▶Lebesgue scale (可積分性の指数)

$$(\infty \geq \cdots q_2 > q_1 > q_0 = q_c > q_{-1} > q_{-2} \cdots \geq 1)$$

$$\underbrace{L^{q_2} \prec L^{q_1} \prec L^{q_0}}_{0<t<<1\ \text{で安定に解ける}\ =\ \text{「局所適切」}} = \overbrace{L^{q_c}}^{\text{臨界空間}} = \underbrace{L^{q_0} \prec L^{q_{-1}} \cdots \prec L^{q_{-2}}}_{|u|<<1\ \text{で安定に解ける}\ =\ \text{「大域適切」}}$$

$$\|u_\lambda\|_{L^\theta(\mathbb{R}_+;L^q(\mathbb{R}^n))} = \lambda^{\frac{2}{p-1}-\frac{2}{\theta}-\frac{n}{q}}\|u\|_{L^\theta(\mathbb{R}_+;L^q(\mathbb{R}^n))}$$

▶ Sobolev 空間:

$$H^s_q(\mathbb{R}^n) \quad \begin{cases} s: & \text{微分の階数} \\ q: & q \text{ 乗-可積分指数} \end{cases}$$

▶ Besov 空間:

$$\dot{B}^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n) \quad \begin{cases} s: & \text{微分の階数} \\ q: & q \text{ 乗-可積分指数} \\ \sigma: & \text{補間指数 (対数階数微分)} \end{cases}$$

$\{\phi_j\}_{j\in\mathcal{Z}}$:Littlewood-Paley の 2 進周波数単位分解: supp $\widehat{\phi}_j(\xi) \subset |\xi| \simeq 2^j,\, j \in \mathbb{Z}$

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{q,\sigma}} \equiv \left(\sum_{j\in\mathcal{Z}} \left(2^{js}\|\phi_j * f\|_q\right)^\sigma \right)^{1/\sigma} = \left\| \left\{ \|\phi_j * f\|_q \right\} \right\|_{\ell^\sigma_s}$$

1. 非線形発展方程式 (Littlewood-Paley 分解)

►$\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$:Littlewood-Paley の 2 進周波数単位分解: 概直交性 両隣の ϕ_ℓ $|\ell - j| \le 1$ 以外は直交する.

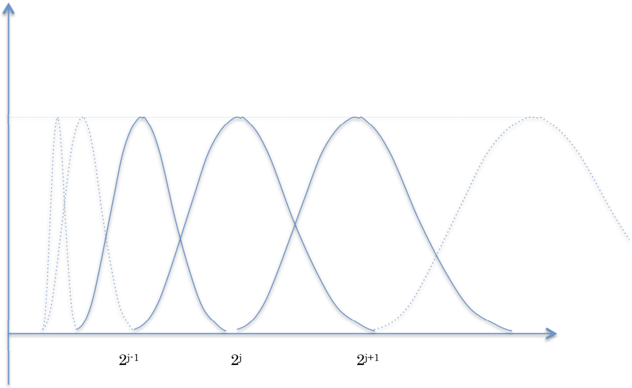

図 1:　Littlewood-Paley の 2 進周波数単位分解のグラフ

1. 非線形発展方程式 (Besov 空間)

▶ Besov 空間:$\dot{B}^s_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$

$\{\phi_j\}_{j\in\mathcal{Z}}$:Littlewood-Paley の 2 進周波数単位分解: supp $\widehat{\phi_j}(\xi) \subset B_{2^{j+1}}(0) \setminus \overline{B_{2^{j-1}}}(0)$

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,\sigma}} \equiv \left(\sum_{j\in\mathcal{Z}} 2^{j\sigma s}\|\phi_j * f\|_p^\sigma\right)^{1/\sigma} = \left\|\{\|\phi_j * f\|_p\}\right\|_{\ell^\sigma_s}$$

- **スケール不変空間**: $X = \dot{B}^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$: s-**階微分可能** Sobolev **空間**: Bochner-Besov **空間**:

$$L^\theta(\mathbb{R}_+; \dot{B}^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)), \qquad \|u\|_{L^\theta(\mathbb{R}_+;\dot{B}^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n))} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} \|u(t,\cdot)\|^\theta_{\dot{B}^0_{q,\sigma}} dt\right)^{1/\theta}$$

$$\frac{2}{\theta} + \frac{n}{q} = \frac{2}{p-1} + s$$

Cf. $X = \dot{H}^{s,q}(\mathbb{R}^n)$: s-**階微分可能** Sobolev **空間**: Bochner-Sobolev **空間**:

$$L^\theta(\mathbb{R}_+; \dot{H}^s_q(\mathbb{R}^n)), \qquad \|u\|_{L^\theta(\mathbb{R}_+\dot{H}^s_q(\mathbb{R}^n))} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} \|\nabla^s_x u(t,\cdot)\|^\theta_{L^q} dt\right)^{1/\theta}$$

$$\frac{2}{\theta} + \frac{n}{q} = \frac{2}{p-1} + s$$

2. 臨界指数

非線形熱方程式の初期値問題:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = u^p, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x)=u_0(x)\geq 0, & t=0,\ x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{NLH}$$

▶ Fujita **臨界指数**: (**正値解に対する**)

$$p_F = 1+\frac{2}{n}$$

○ $p > p_F \equiv 1+\frac{2}{n}$: **小さな初期値に対して時間大域解が存在する** (**時間大域的適切**)

○ $p \leq p_F$: **どのような小さな初期値に対しても正値解は有限時刻で爆発する** (**時間大域的非適切**).

$$p_F = 1+\frac{2}{n}$$: **非線形熱方程式の時間大域的可解性を切り分ける臨界指数**

▶Fujita 1966 [JMSJ], Hayakawa 1973 [PJA]

2. 臨界指数

▶ **非線形** Schrödinger **方程式**:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \dfrac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^{p-1}u, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x); \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, & t=0,\ x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \quad \text{(NLS)}$$

「保存則」により爆発の切り分け指数がより大きくなる.

○ $p = 1 + \frac{2}{n}$: $t \to \pm\infty$ **での解の散乱・非散乱切り分け臨界** (Barabu-Ozawa **臨界指数**).

▶Barabu 1984 [JMP], Ozawa 1991 [CMP], Hayashi-Naumukin 1997 [Ameri. JM]

○ Fujita **指数に対応する指数** $\Longrightarrow p = 1 + \frac{4}{n}$ (**質量臨界** (L^2 **臨界**)).

▶Glassey 1977 [JMP], M. Tsutsumi 1983 [unpublished]

▶Weinstein 1983 [CMP], Nawa 1999 [CPAM]

▶ Sobolev **臨界指数**

$$p_S = 1 + \frac{4}{n-2} = \frac{n+2}{n-2}:$$

○ $p < p_S \equiv 1 + \frac{4}{n-2}$: **時間局所的に可解** (Sobolev **劣臨界**)

○ $p \geq p_S$: **変分法** (**埋め込みのコンパクト性**) **の成立限界** (Sobolev **優臨界**)

2. 臨界空間と臨界指数

- 非線形熱方程式 (NLH)・非線形 Schrödinger 方程式 (NLS) の局所適切性の限界:
- 簡単のため $p=2$ とする.
  - 非線形熱方程式 :
$$\partial_t u - \Delta u = u^2. \tag{NLH}$$
  - 非線形 Schrödinger 方程式:
$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = u^2. \tag{NLS}$$

$$L^\theta\big(\mathbb{R}_+; H^{s,q}(\mathbb{R}^n)\big), \qquad \|u\|_{L^\theta(\mathbb{R}_+;H^{s,q}(\mathbb{R}^n))} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} \|u(t,\cdot)\|_{H^{s,q}}^\theta dt\right)^{1/\theta}$$
$$\frac{2}{\theta} + \frac{n}{q} = \frac{2}{p-1} + s = 2 + s$$

$(\theta, q) = (\infty, 2)$ での解が時間局所安定となるクラス:$H^{s,q}(\mathbb{R}^n)$
臨界可微分性は $p=2$ より
$$s_c = -2 + \frac{n}{2}$$

空間次元	時間局所適切となる微分指数	対応する臨界指数
$n=1$	$s \ge -1 > s_c = -3/2$	
$n=2$	$s > s_c = -1$	Fujita 臨界
$n=3$	$s > -\frac{1}{2}$ “臨界は未解決”	
$n=4$	$s \ge 0$	Sobolev 臨界

▶Weissler 1981 [IUMJ],Y. Tsutsumi 1987 [FE], Keel-Tao 1997 [DMJ]

▶Bejenaru-Tao 2006 [JFA], Kishimoto 2008 [CPAA], Iwabuchi-Ogawa, 2015 [TAMS], Morinet-Tayachi 2015 [JFA]

1. 非線形発展方程式 (圧縮性 NS 方程式の局所可解限界)

圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (等温):

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}\,(\rho u) = 0, & t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ \rho\partial_t u + \rho(u\cdot\nabla)u + \nabla P(\rho) = \mu\Delta u + (\mu+\lambda)\nabla \mathrm{div}\, u, & \\ \quad P(\rho) = \rho^\gamma, & \mu>0, \quad 2\mu+\lambda>0, \\ \quad \rho(0,x) = 1+\rho_0(x), \quad u(0,x) = u_0(x), & \end{cases}$$

解が初期値から時間局所連続的に安定に得られる超函数のクラス ($\theta=\infty$): $\dot{B}^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n) \equiv B^s_q$

$$\underbrace{\mathcal{S} \subset B^\infty_q \subset B^s_q \subset B^{n-1}_q}_{\text{安定に解ける} \,=\, \text{「適切」}} \subset \overbrace{B^{-1+\frac{n}{q}}_{q,\sigma} \subset \dot{B}^{-1}_{\infty,\sigma}}^{\text{臨界空間}} \underbrace{\subset B^{-2}_q \subset B^{-3}_q \cdots \subset B^{-\infty}_q \subset \mathcal{S}'}_{\text{安定に解けない} \,=\, \text{「非適切」}}$$

$q<2n$	“ 適切”
$q=2n$	“?”
$q>2n$	“ 非適切”

▶Cannone, Planchon, Amann, Bourgain-Pavlovic 2007 [JFA], Yoneda 2015 [JFA], Wang 2017 [AdvM]

▶Danchin, Chang-Miao-Zheng 2016 [IMIbAmeri], Iwabuchi-Ogawa, 2018 [preprint]

3. 移流拡散方程式

$\alpha \geq 1$, $\kappa = \pm 1$

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha + \kappa \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta \psi = u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & t = 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{dDD}$$

物理スケールが大きく異なる物理モデルから出現する

- **半導体動作モデル** u: **キャリヤ密度**, ψ: **電界ポテンシャル**, $\alpha = 1$, $\kappa = -1$
  ▶ Mock 1975 [ARMA]
- **走化性粘菌モデル** u: **粘菌の密度**, ψ: **化学誘引物質の濃度**, $\alpha \geq 1$, $\kappa = 1$
  ▶ Patlac 1958 [ARMA], Keller-Segel 1975 [JMB]
- **重力下天体の平均場**: u: **天体の密度**, ψ: **重力ポテンシャル**, $\alpha \geq 1$, $\kappa = 1$
  ▶ Chandrasekher 1958 [J Astro Phys]

○ **コロイドの挙動** (Smoluchowski-Poisson **方程式**)

$\kappa < 0$ **反発型** (repulsive case, deforcusing)
$\kappa > 0$ **誘引型** (atractive case, forcusing)

3. 移流拡散方程式

$\alpha \geq 1$, $\kappa = \pm 1$

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha + \kappa \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta \psi = u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & t = 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{dDD}$$

Fujita **指数: 解の爆発と時間大域性を切り分ける指数**:

$$\alpha_F \equiv 2 - \frac{2}{n}$$

Theorem

- ○ $\alpha > \alpha_F$ **ならば解 (超函数の意味での弱解) は時間大域的に存在**
- ○ $\alpha \leq \alpha_F$ **ならばある設定で正値解は有限時刻で爆発.**
- ○ **特に** $\alpha_S \leq \alpha \leq \alpha_F$ **ならば初期値の大きさで大域解の存在非存在の切り分けが可能**

$$\alpha_S \equiv 2 - \frac{4}{n+2} = \frac{2n}{n+2} \ :\ \text{Sobolev 臨界指数}$$

▶Sugiyama JDE [2006], Kimijima-Nakagawa-Og CVPDE [2013]

- Toland 双対性　**(大塚 浩史氏 (金沢大 理工域) による)**

○ Fujita 型 (NLH) Energy 汎函数:

$$E[u] = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

○ **移流拡散方程式**　$(-\Delta\psi = u)$

$$\begin{aligned} H[u] &= \frac{1}{\alpha-1}\|u\|_\alpha^\alpha - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u\psi dx \\ &= \frac{1}{\alpha-1}\|u\|_\alpha^\alpha - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left||\nabla|^{-1}u\right|^2 dx \end{aligned}$$

表 2: (NLH) と (DD) に対する Toland 双対性

問題/臨界性	変分指数	Sobolev 臨界	質量臨界	Fujita 臨界
NLH	$p+1$	$p+1=2+\frac{4}{n-2}$	$(p+1=2+\frac{2}{n-2})$	$p+1=2+\frac{2}{n}$
NLS	$p+1$	$p+1=2+\frac{4}{n-2}$	$p+1=2+\frac{4}{n}$	$p+1=2+\frac{2}{n}$
移流拡散 (DD)	α	$\alpha=2-\frac{4}{n+2}$	$\alpha=2-\frac{2}{n}$	$\alpha=2-\frac{2}{n}$
2 次元移流拡散	α	$\alpha=1$	$\alpha=1$	$\alpha=1$

▶Toland 1979 [ARMA], Suzuki 2005 [book]

多重臨界性

(dDD) では $n=2, \kappa=1, \alpha=1$ が多重臨界となる.

- **時間局所適切性の限界:**

単極型

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u - \nabla\cdot(u\nabla\psi) = 0, \\ \qquad - \Delta\psi = u, \end{cases} \tag{m-DD}$$

双極型

$$\begin{cases} \partial_t n - \Delta n - \nabla\cdot(n\nabla\psi) = 0, \\ \partial_t p - \Delta p + \nabla\cdot(p\nabla\psi) = 0, \\ \qquad - \Delta\psi = n - p. \end{cases} \tag{b-DD}$$

局所適切性の限界:圧縮性・非圧縮性 Navier-Stokes **方程式の安定に解が得られる** (**超函数の**) **クラス**:
$\dot{B}^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n) \equiv B^s_q$

$$\underbrace{\mathcal{S}\subset B^{2n}_q \subset B^s_q \subset B^{n-2}_q}_{\text{安定に解ける}\ =\ \text{「適切」}} \subset \overbrace{B^{-2+\frac{n}{q}}_{q,\sigma} \subset \dot{B}^{-2}_{\infty,\sigma}}^{\text{臨界空間}} \subset \underbrace{B^{-3}_q \subset B^{-4}_q \cdots \subset B^{-\infty}_q \subset \mathcal{S}'}_{\text{安定に解けない}\ =\ \text{「非適切」}}$$

$q < 2n$	“ **適切**”
$q > 2n$	“ **非適切**”

表 1:Navier-Stokes **方程式と移流拡散方程式 局所適切性臨界**

問題	**非圧縮性** (NS)	**等温圧縮性** (NS)	**単極型** (DD)	**双極型** (DD)
適切	$1 \le q < \infty$	$1 \le q < 2n$	$1 \le q < \infty$	$1 \le q < 2n$
非適切	$q = \infty$	$2n < q \le \infty$	$q = \infty,\ \sigma > 2$	$2n < q \le \infty$

4. 特異極限

$\kappa = \pm 1$

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \kappa \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad - \Delta \psi = u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & t = 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{dDD}$$

物理スケールが大きく異なる物理モデルから出現する

- **半導体動作モデル 原理方程式** u: **キャリヤ密度**, ψ: **電界ポテンシャル**, $\alpha \geq 1, \kappa = -1$
  Maxwell-disipative-Schrödinger **方程式** $\Rightarrow$ **量子移流拡散方程式**
- **走化性粘菌モデル 原理方程式** u: **粘菌の密度**, ψ: **化学誘引物質の濃度**, $\alpha = 1, \kappa = 1$
  (Patlak-) Keller-Segel **方程式** $\Rightarrow$ Jäger-Luckhaus-Nagai **モデル**
- **重力下天体の平均場: 原理方程式** u: **天体の密度**, ψ: **重力ポテンシャル**, $\alpha \geq 1, \kappa = 1$
  Einstein **方程式** $\Rightarrow$ **圧縮性** Navier-Stokes-Poisson **方程式**

▶Jüngel-Li-Matsumura 2006 [JDE], Nishibata-Suzuki 2008 [ARMA]

▶Raczynski 2009 [AA], Biler-Brandolese 2009 [Studia M]

▶Feileisl-Laurencot 2007 [JMPP], Kobayashi-Ogawa 2013 [IUMJ]

4. 特異極限

特異極限問題: $\alpha = 1$, $n \geq 2$, $\tau > 0$, $\lambda = 0$;

$$\begin{cases} \partial_t u_\tau - \Delta u_\tau + \nabla \cdot (u_\tau \nabla \psi_\tau) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \dfrac{1}{\tau}\partial_t \psi_\tau - \Delta \psi_\tau = u_\tau, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad u_\tau(0,x) = u_0(x), \quad \psi_\tau(0,x) = \psi_0(x), & t = 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{KS}$$

緩和時間パラメーター $\tau \to \infty$ **のとき** (KS) **の解** (u_τ, ψ_τ) **は以下の問題の解** (u, ψ) **に近づくか?**

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \kappa \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta \psi = u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = u_0(x), & t = 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$n = 2$ **のとき** $\alpha = 1$ **は** Fujira **臨界・質量臨界かつ**, Sobolev **臨界**

Theorem

$n = 2$ **とする**

- **正値解は** $\|u_0\|_1 \leq 8\pi$ **で時間大域解の存在**
- $\|u_0\|_1 > 8\pi$, $\log|x| u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ **で有限時刻爆発**

▶Nagai 1995 [AMSA], Bilar 1995 [Cor M], Nagai-Senba-Yoshida 1997 [FE]

▶Kurokiba-Ogawa 2003 [DIE], Nagai-Ogawa 2016 [FE], Naito-Senba

▶Mizoguchi 2013 [CVPDE],Winkler 2013 [JMAP]

4. 特異極限

$$\begin{cases} \partial_t u_\tau - \Delta u_\tau + \nabla \cdot (u_\tau \nabla \psi_\tau) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \dfrac{1}{\tau}\partial_t \psi_\tau - \Delta \psi_\tau = u_\tau, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad u_\tau(0,x) = u_0(x), \quad \psi_\tau(0,x) = \psi_0(x), & t = 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

- Raczynski: [Asympt Anal 2009] $n = 2$, $\lambda = 0$, **擬測度の空間**:

$$\mathcal{PM}^\alpha = \left\{ f \in S' ; \sup_\xi |\xi|^\alpha |\widehat{f(t,x)}| \le C \right\}$$

- Biler-Brandolese: [Studia Math 2009] $n = 2$, $\lambda = 0$,

$$\chi = \left\{ f \in S' ; \sup_{t,x} (t + |x|^2)^\alpha |u(t,x)| \le C \right\}$$

Lorentz **空間**: $L^{q,\infty}(\mathbb{R}^2) \times L^{r,\infty}(\mathbb{R}^2)$.

(Fujita-Kato **原理**)$\Longrightarrow$

臨界空間での強収束性 $\oplus$ **大きな初期値の場合の時間局所収束**

4. 特異極限

問題

特異極限に Fujita-Kato の原理を適用したい

Fujita 臨界, Sobolev 臨界などの臨界指数は元の問題にも備わるのか?

不変スケール:$\lambda > 0$,

$$\begin{cases} u_\lambda(t,x) = \lambda^2 u(\lambda^2 t, \lambda x), \\ \psi_\lambda(t,x) = \psi(\lambda^2 t, \lambda x). \end{cases} \tag{S}$$

$$\begin{cases} u \in L^\theta\big(\mathbb{R}_+; L^q(\mathbb{R}^n)\big), & \dfrac{2}{\theta} + \dfrac{n}{q} = 2, \\ \psi \in L^\sigma\big(\mathbb{R}_+; L^r(\mathbb{R}^n)\big), & \dfrac{2}{\sigma} + \dfrac{n}{r} = 0 \quad (\Longleftarrow \text{指数の自由度がない!}). \end{cases}$$

収束のための空間 (スケール臨界空間)

Definition(許容指数)

$$\begin{cases} u \in L^\theta\big(\mathbb{R}_+; L^q(\mathbb{R}^n)\big), & \dfrac{2}{\theta} + \dfrac{n}{q} = 2, \quad \dfrac{n}{2} < q < 2 < \theta < \infty, \\ \nabla\psi \in L^\theta\big(\mathbb{R}_+; L^r(\mathbb{R}^n)\big), & \dfrac{2}{\theta} + \dfrac{n}{r} = 1, \quad n < r < \theta < \infty. \end{cases}$$

Theorem

(θ, q), (θ, r): **許容指数**, $I = (0, T)$ with $T \le \infty$. $(u_0, \psi_0) \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \times \dot{W}^{1,n}(\mathbb{R}^n)$. ($n = 2$ **のときはさらに** $\lambda > 0$, $u_0 \in \dot{B}^0_{1,4}(\mathbb{R}^n)$ **を仮定する**). (u_τ, ψ_τ): Keller-Segel **方程式の一意解**: ($T = \infty$ **のときはデータの小ささも仮定する**).

1. **(極限方程式)**

   (u, ψ) **は極限方程式である移流拡散方程式の解**

2. (**特異極限**) Let $\theta = \sigma$,

$$\lim_{\tau \to \infty} \Big(\|u_\tau - u\|_{L^\theta(I;L^q)} + \|\nabla \psi_\tau - \nabla \psi\|_{L^\theta(I;L^r)} \Big) = 0.$$

3. **(初期層)** For any $t_0 > 0$,

$$\sup_{t \in I_{t_0}} \|u_\tau(t) - u(t)\|_{L^{\frac{n}{2}}} + \sup_{t \in I_{t_0}} \|\nabla \psi_\tau(t) - \nabla \psi(t)\|_{L^n} \to 0. \qquad \tau \to \infty,$$

▶Kurokiba-Ogawa (2019) [JEE]

臨界空間として admissbile **を選んだ** merit:

$\Longrightarrow$

大きな初期条件に対しても時間局所的に収束を示すことができる. $n = 2$ **では** L^1 **での強収束性もわかる**

▶Kurokiba-Ogawa (2019) [preprint]

証明の鍵となる道具:
放物型方程式の最大正則性: $L^\theta(I;X)$ $(1 \le \theta < \infty)$, X: Banach **空間**, $I = (0,T)$, $(T \le \infty)$

$$\begin{cases} \partial_t v - \mathcal{L}v = f, & t \in I,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad v(0,x) = v_0(x), & \qquad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

最大正則性:

$$\|\partial_t v\|_{L^\theta(I;X)} + \|\mathcal{L}v\|_{L^\theta(I;X)} \le C\Big(\|v_0\|_{(X,D(\mathcal{L}))_{1-1/\theta,\theta}} + \|f\|_{L^\theta(I;X)}\Big) \qquad \text{(MR)}$$

i) $1 < \theta < \infty$, X: UMD (unconditional martingale differences) **のとき**

最大正則性成立 (MR) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{L}$: $\mathcal{R}$-boundedness

▶Weis 2000 [MA]

ii) X: UMD $\Longrightarrow$ X:**回帰的** (super-reflexive) ▶Ruvio de Francia 1986, Amann 2000 [book]

iii) X: non-reflexive $\Longrightarrow$ X: non-UMD

iv) $X = L^1$, L^∞, $\mathcal{H}^1$, BMO **のときは**??

v) $\theta = 1$ (time-end-point case) $X = L^p$ **ですら** (MR) **は破綻する**.

5. 臨界最大正則性

端点最大正則性

- (空間端点のクラス)

1) $\theta = 2$, $X = \mathcal{H}^1$:ハーディー空間 (斉次評価) ▶Ogawa-Shimizu 2008 [JFA]
2) $1 < \theta \le \infty$, $X = \dot{B}^0_{p,\sigma}$: $p, \sigma = 1, \infty$ など非回帰的な場合を含む場合 ▶Ogawa-Shimizu 2010 [Math Z]
3) $\theta = 2$, $X = BMO(\mathbb{R}^n)$: 有界平均振動の場合 ▶Ogawa-Shimizu 2019 [preprint]

Theorem (端点 L^1-最大正則性)

:

$$\|\partial_t v\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^0_{p,1})} + \|\nabla^2 v\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^0_{p,1})} \le C\Big(\|v_0\|_{\dot{B}^0_{p,1}} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^0_{p,1})}\Big),$$

▶Ogawa-Shimizu 2016 [Math Ann]

- (時間端点 L^1 の場合)

1) $\theta = 1$, $X = \mathcal{FM} \subsetneq BUC(\mathbb{R}^n)$: FourierRadon 測度: Giga-Saal. ▶Giga-Saal 2011 [DCDS]
2) $\theta = 1$, $\dot{B}^0_{p,1}$: 斉次 Besov 空間 $1 < p < \infty$: Danchin ▶Danchin 2007 [AIF]
3) $\theta = 1$, $M_{p,1}$: モデュレーション空:, Iwabuchi
4) $\theta = 1$, $\dot{B}^0_{p,1}$ $1 \le p \le \infty$: 変数係数, 非回帰空間を含む, 評価の必要十分性: Ogawa-Shimizu

a) 函数空間の包含関係は

$$\mathcal{FM}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \dot{B}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^n) \qquad M_{p,1}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \dot{B}^0_{p,1}(\mathbb{R}^n)$$

b) 時間空間を Lorentz 空間に広げることで初期値の条件は緩和されるが $X = L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ では熱半群が C_0-半群にならない. ▶Kozono-Shimizu 2018 [JMAA], 2019 [JFA]

5. 臨界最大正則性

端点最大正則性の効果:

$$\left\|\nabla^2 v\right\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^0_{p,1})} \le C\|v_0\|_{\dot{B}^0_{p,1}}. \qquad \text{(ep-MR)}$$

熱半群に対する解析半群の評価: 任意の $1 \le p \le \infty$ **に対して**

$$\|\Delta e^{t\Delta}u_0\|_p \le Ct^{-1}\|u_0\|_p \qquad \text{(ASG)}$$

したがって $t \in \mathbb{R}_+$ **で両辺を積分すると**

$$\int_0^\infty \|\Delta e^{t\Delta}u_0\|_p dt \le C\left(\int_0^\infty t^{-1}dt\right)\|u_0\|_p = \infty$$

となり解析半群の評価 (ASG) **からは端点評価** (ep-MR) **は従わない**. **実際** $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ **とすると**

$$\dot{B}^0_{p,1}(\mathbb{R}^n) \subset H^0_p(\mathbb{R}^n) \equiv L^p(\mathbb{R}^n)$$

なので一般に

$$\int_0^\infty \|\Delta e^{t\Delta}u_0\|_p dt \ge C\|u_0\|_{\dot{B}^0_{p,1}} = \infty.$$

5. 臨界最大正則性

熱方程式の初期値問題:

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = f, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ v(0,x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Theorem (一般化最大正則性)

$1 \le \nu \le \sigma \le \theta \le \infty$, $1 \le p \le \infty$, $I = (0,T) \subset \mathbb{R}_+$ ($I = \mathbb{R}_+$ **も可**) **とする**.

$$\|\partial_t v\|_{L^\theta(I;\dot{B}^0_{p,\sigma})} + \|\nabla^2 v\|_{L^\theta(I;\dot{B}^0_{p,\sigma})} \le C\Big(\|v_0\|_{\dot{B}^{2-\frac{2}{\theta}}_{p,\theta}} + \|f\|_{L^\nu(I;\dot{B}^{\frac{2}{\nu}-\frac{2}{\theta}}_{p,\sigma})}\Big),$$

ただし $\nabla^2 = \partial_{x_i}\partial_{x_j}$.

- **利点 1: 指数** θ, p **は 端点指数** $1, \infty$ **を許す**.
- **利点 2:** ν **と** σ **に自由度がある**.
- **利点 3: 空間の可微分性を譲って, 時間方向の可積分性を稼ぐ.** $\Longrightarrow$ **半線形問題で使いやすい!**

►$\{\phi_j\}_{j\in\mathcal{Z}}$:Littlewood-Paley と 熱核 $\Delta e^{t\Delta}$:

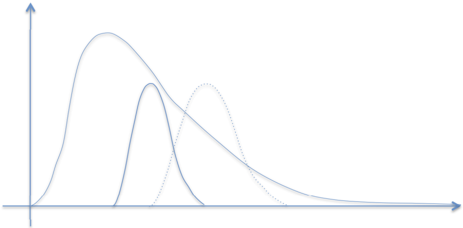

図 2: 熱核の微分と L-P 分解の概直交性 1

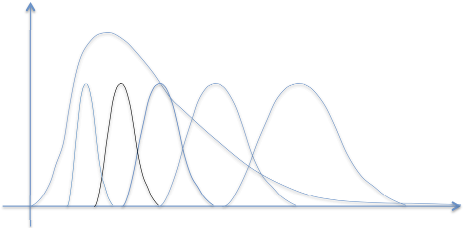

図 3: 熱核の微分と L-P 分解の概直交性 2

6 特異極限の証明の概略

⟨ 特異極限に戻る ⟩: 解が構成できるとしてそれらの差を考える:

$$\begin{cases} u_\tau(t) - u(t) = \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot\Big(\big(u_\tau(s)-u(s)\big)\nabla\psi_\tau(s)\Big)ds \\ \qquad\qquad\qquad\quad + \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot\Big(u(s)\big(\nabla\psi_\tau(s)-\nabla\psi(s)\big)\Big)ds, \quad t\in I, \end{cases}$$

ここで $q \le 2 \le \theta$, $\theta = \sigma$ として

$$\dot{B}^{-1+\frac{2}{\theta}}_{q,\theta}(\mathbb{R}^n) \supset \dot{F}^{-1+\frac{2}{\theta}}_{q,\theta}(\mathbb{R}^n) \supset \dot{F}^{-1+\frac{2}{\theta}}_{q,2}(\mathbb{R}^n) \simeq \dot{W}^{-1+\frac{2}{\theta},q}(\mathbb{R}^n) \supset L^{\frac{qr}{q+r}}(\mathbb{R}^n),$$

(θ, q) を許容指数 $\frac{2}{\theta} + \frac{n}{q} = 2$ と選ぶと最大正則性評価から

$$\begin{aligned} &\|u_\tau(t) - u(t)\|_{L^\theta(I;L^q)} \\ &\quad \le C\|(u_\tau(t)-u(t))\nabla\psi_\tau\|_{L^{\frac{\theta\sigma}{\theta+\sigma}}(I;\dot{B}^{-1+\frac{2}{\theta}}_{q,\theta})} + C\Big\|u(t)\nabla(\psi_\tau(t)-\psi(t))\Big\|_{L^{\frac{\theta\sigma}{\theta+\sigma}}(I;\dot{B}^{-1+\frac{2}{\theta}}_{q,\theta})} \\ &\quad \le CM\Big(\|u_\tau(t)-u(t)\|_{L^\theta(I;L^q)} + \Big\|\nabla\psi_\tau - \nabla\psi(t)\Big\|_{L^\theta(I;L^r)}\Big). \end{aligned}$$

6 特異極限の証明の概略

$$
\begin{cases}
\psi_\tau(t) - \psi(t) = e^{\tau t(\Delta-\lambda)}\psi_0 + \displaystyle\int_0^{\tau t} e^{s(\Delta-\lambda)}\big(u_\tau(t-\tau^{-1}s) - u(t-\tau^{-1}s)\big)ds \\
\qquad\qquad + \displaystyle\int_0^{\tau t} e^{s(\Delta-\lambda)}\big(u(t-\tau^{-1}s) - u(t)\big)ds - \displaystyle\int_{\tau t}^{\infty} e^{s(\Delta-\lambda)}u(t)ds, \quad t \in I.
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla\psi_\tau(t) - \nabla\psi(t)\|_{L^\theta(I;L^r)} \\
&= \|\nabla e^{\tau t(\Delta-\lambda)}\psi_0\|_{L^\theta(I;L^r)} \\
&\quad + \left\|\int_0^{\tau t} \nabla e^{s(\Delta-\lambda)}\big(u_\tau(t-\tau^{-1}s) - u(t-\tau^{-1}s)\big)ds\right\|_{L^\theta(I;L^r)} \\
&\quad + \left\|\int_0^{\tau t} \nabla e^{s(\Delta-\lambda)}\big(u_\infty(t-\tau^{-1}s) - u(t)\big)ds\right\|_{L^\theta(I;L^r)} \\
&\quad + \left\|\int_{\tau t}^{\infty} \nabla e^{s(\Delta-\lambda)}u(t)ds\right\|_{L^\theta(I;L^r)} \\
&\equiv I_0 + I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}
$$

For the third term: By the Sobolev inequality,

$$\begin{aligned} I_2 =& \Big\| \int_0^{\tau t} \nabla e^{s(\Delta-\lambda)} \Big(u\big(t - \frac{s}{\tau}\big) - u(t) \Big) ds \Big\|_{L^\theta(I;L^r)} \\ \le& S_b \Big\| \int_0^{\tau t} \Delta e^{s(\Delta-\lambda)} \Big(u\big(t - \frac{s}{\tau}\big) - u(t) \Big) ds \Big\|_{L^\theta(I;L^{\frac{nr}{n+r}})} \\ \le& C S_b \Big\| u\big(t - \frac{t}{\tau}\big) - u(t) \Big\|_{L^\theta(I;L^{\frac{nr}{n+r}})}. \end{aligned}$$

ここで $(\theta, \frac{nr}{n+r})$: **は許容指数の条件を満たす臨界指数である**: $\frac{2}{\theta} + n \cdot \frac{n+r}{nr} = \frac{2}{\theta} + \frac{n}{r} + 1 = 2$. **したがって** Lebesgue **の優収束定理から**

$$I_2 \le C S_b \Big\| u\big(t - \frac{t}{\tau}\big) - u(t) \Big\|_{L^\sigma(I;L^{\frac{nr}{n+r}})} < \varepsilon.$$

を得る. 以上により

$$\|u_\tau(t) - u(t)\|_{L^\theta(I;L^q)} + \|\nabla\psi_\tau(t) - \nabla\psi(t)\|_{L^\theta(I;L^r)} \to 0 \qquad (\tau \to \infty).$$

6. 他の特異極限は?

$\alpha \geq 1$, $\kappa = \pm 1$

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha + \kappa \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad - \Delta \psi = u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & t = 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{dDD}$$

物理スケールが大きく異なる物理モデルから出現する

- **半導体動作モデル** u:**キャリヤ密度**, ψ: **電界ポテンシャル**, $\alpha \geq 1$, $\kappa = -1$
  原理方程式 Maxwell-disipative-Schrödinger **方程式** $\Rightarrow$ **量子移流拡散方程式**
- **重力下天体の平均場**: u:**天体の密度**, ψ: **重力ポテンシャル**, $\alpha \geq 1$, $\kappa = 1$
  原理方程式 Einstein **方程式** $\Rightarrow$ **圧縮性** Navier-Stokes-Poisson **方程式**

▶On going project

ご清聴ありがとうございました

- 堤 誉志雄氏 (京大・理), 倉田和浩氏 (都立大・理), 小澤 徹氏 (早稲田大・理工), 小薗英雄氏 (早稲田大・理工), ヘルマン・ゾーア氏 (Univ. Parderborn, Germany), 鈴木 貴氏 (大阪大・MMDS) マリア・ションベック氏 (UCSC, USA), シューバ・ラジョパディー氏, グスタフォ・ポンセ氏 (UCSB, USA), ダニエラ・ベキラノフ氏, 加藤圭一氏 (東京理科大・理), 谷内 靖氏 (信州大・理), エレナ・カイキナ氏, パヴェル・ナウムキン氏 (共に UNAM Molaria, Mexico), 永井敏隆氏 (広島大・理), 黒木場正城氏 (室蘭工大・工) , 横田智巳氏 (東京理科大・理), 清水扇丈氏 (京大・人間環境) , 三沢正史氏 (熊本大・理), 高橋 太氏 (大阪市立大・理), 石井克幸氏 (神戸大・海事), 石渡通徳氏 (阪大・基礎工), 竹田 寛志氏 (福岡工業大・工), 山本征法氏 (新潟大・工), 松本敏隆氏 (静岡大・理), 水野将司氏 (日大・理工), 小林孝行氏 (阪大・基礎工), 中川和重氏 (福島大・共生シス), 瓜屋航太氏 (岡山理科大・理), 林 仲夫氏 (阪大・理), 岩渕 司氏 (東北大・理), 和久井洋司氏 (Broclow 大・Poland), 眞崎 聡氏 (阪大・基礎工), 町原秀二氏 (埼玉大・理), 池田正弘氏 (理研), 千頭 昇 (阪大・基工・学振), 久保英夫氏 (北大・理), 猪奥倫左氏 (東北大・理), 佐藤龍一氏 (東北大・理)
- 後藤 陽子氏, 細野孝史氏 (久留米大付設高), 君島 敦氏, 山根由経氏 (宮城県教), 瀬楽健斗氏 (りそな銀行), 木村悠紀氏 (YahooJapan), 松井 竜也氏 (アルパイン),
- ラビウ・ハック氏, 佐藤拓也氏, 中里 亮介氏, 勝呂剛志氏 (東北大・理・在学中) .