

# Japanese Theorem とカタラン数

大島利雄

城西大学 数理・データサイエンスセンター

<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima>

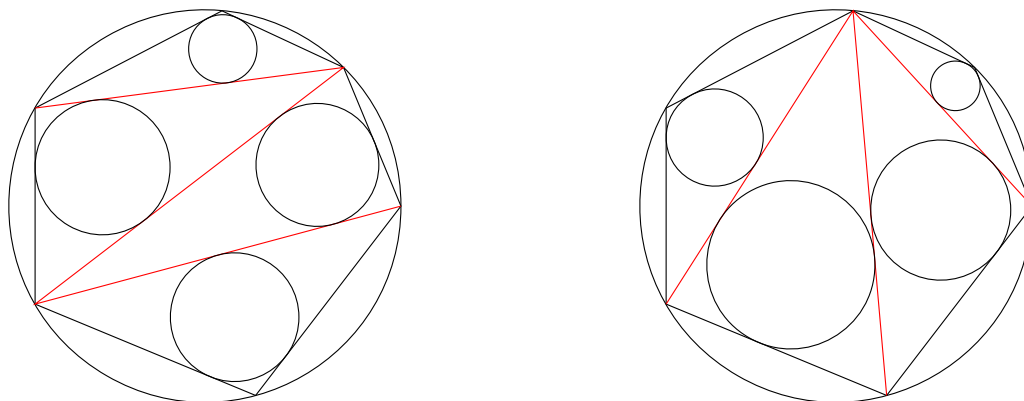
日本数学会年会 市民講演会

中央大学

2023 年 3 月 18 日

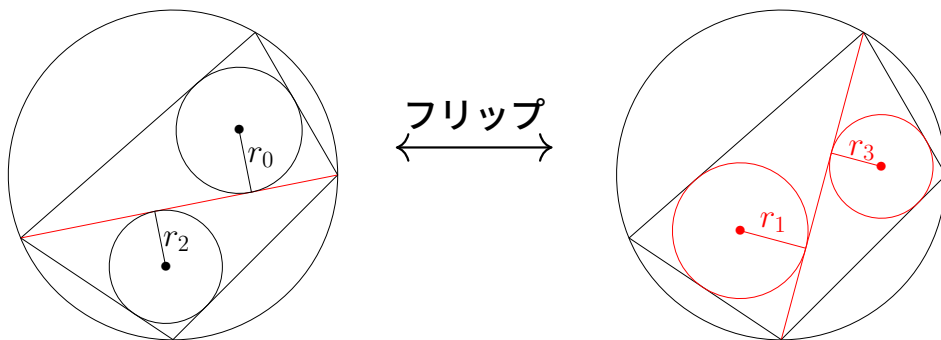
# § Japanese Theorem

**定理.** 円に内接する多角形を描く．頂点を結ぶ交差のない対角線を適当に用いて多角形を三角形に分割したとき，そのすべての内接円の半径の和は分割の仕方によらない



**定理** [丸山良寛 (算額, 1800)]. 円に内接する四角形の場合に正しい

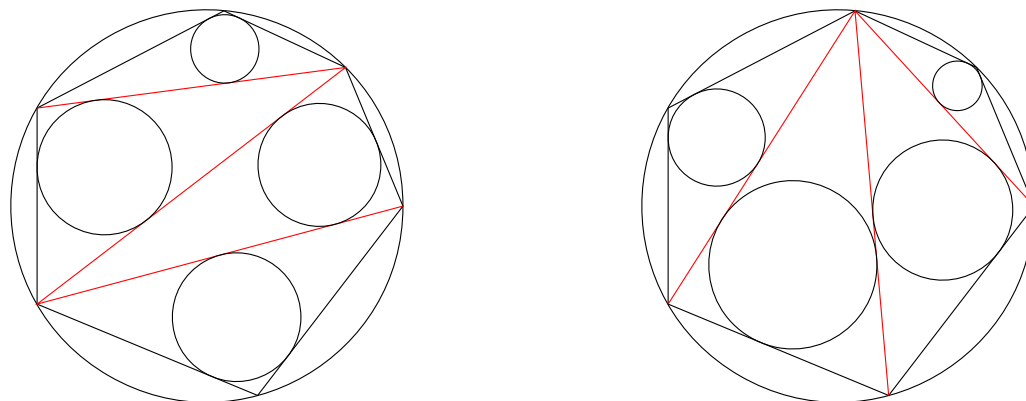
鶴岡山王社 (東北地方) に奉納



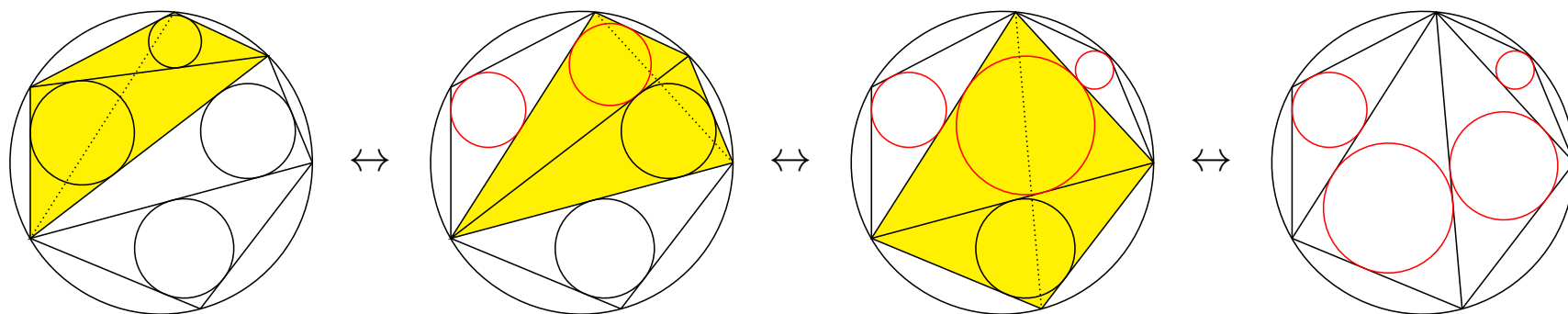
$$r_0 + r_2 = r_1 + r_3$$

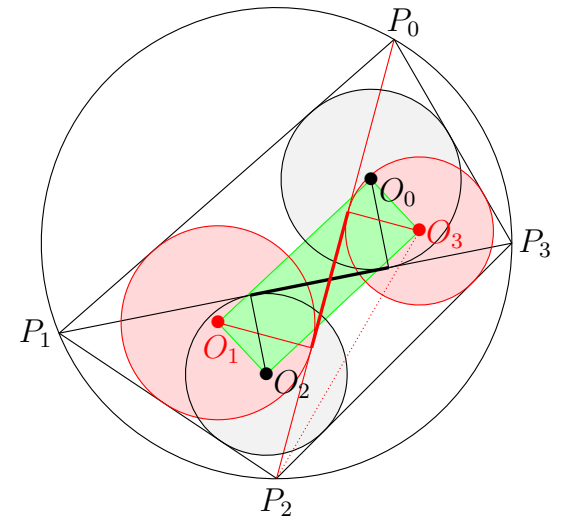
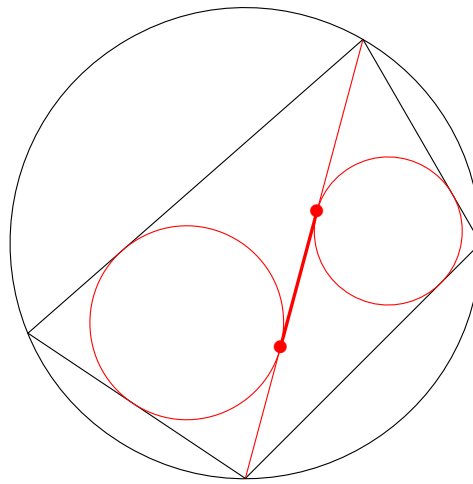
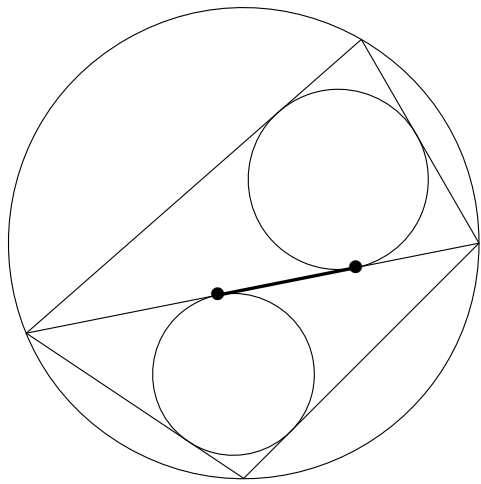
## § Japanese Theorem

**定理.** 円に内接する多角形を描く．頂点を結ぶ交差のない対角線を適当に用いて多角形を三角形に分割したとき，そのすべての内接円の半径の和は分割の仕方によらない



**定理** [丸山良寛 (算額, 1800)]. 円に内接する四角形の場合に正しい

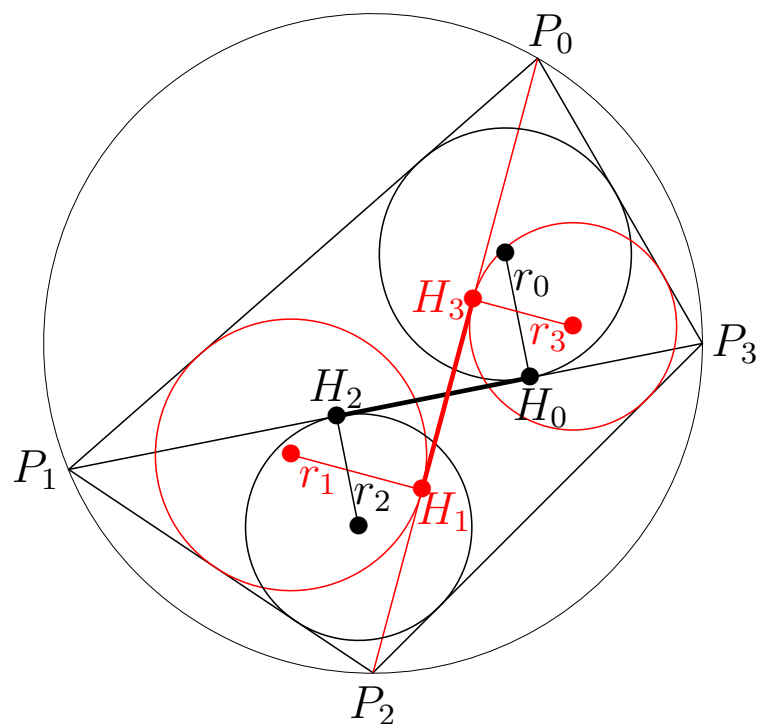
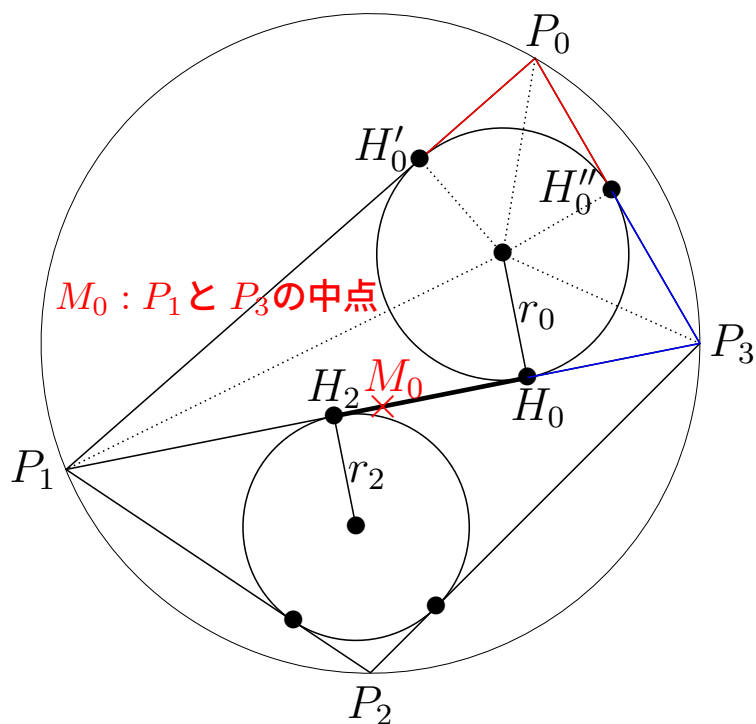




**種々の証明**： 解説は上垣渉 (2002, 以下の 1~5), 大島 (2022)

1. 対角線上の接点間の距離が等しいことを用いる
2. カルノーの定理 (三角形の外心から各辺に下ろした垂線の長さ  
と, 外接円と内接円の半径の間の関係式) を使う
3. 内接円の中心は長方形の頂点となる (+ チャップルの定理など)
4. 内接円の半径の差を使う
5. 三角関数の等式 (和公式など) を用いる
6. Thébault の定理を用いる (← 拡張版トレミーの定理)
7. 複素平面で考える

1. 頂点  $P_0, P_1, P_2, P_3$ , 内接円  $O_0, O_1, O_2, O_3$ , 半径  $r_0, r_1, r_2, r_3$



$$P_0H'_0 = P_0H''_0 \text{ など } \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} P_0P_1 - P_3P_0 &= P_0H'_0 + P_1H'_0 - (P_0H''_0 + P_3H''_0) \\ &= P_1H_0 - P_3H_0 = \pm 2M_0H_0 \text{ など } \Rightarrow \end{aligned}$$

$$P_0P_1 - P_3P_0 + P_2P_3 - P_1P_2 = P_1H_0 - P_3H_0 + P_3H_2 - P_1H_2 = \pm 2(H_0H_2)$$

$$P_0P_1 - P_1P_2 + P_2P_3 - P_3P_0 = P_0H_1 - P_2H_1 + P_2H_3 - P_0H_3 = \pm 2(H_1H_3)$$

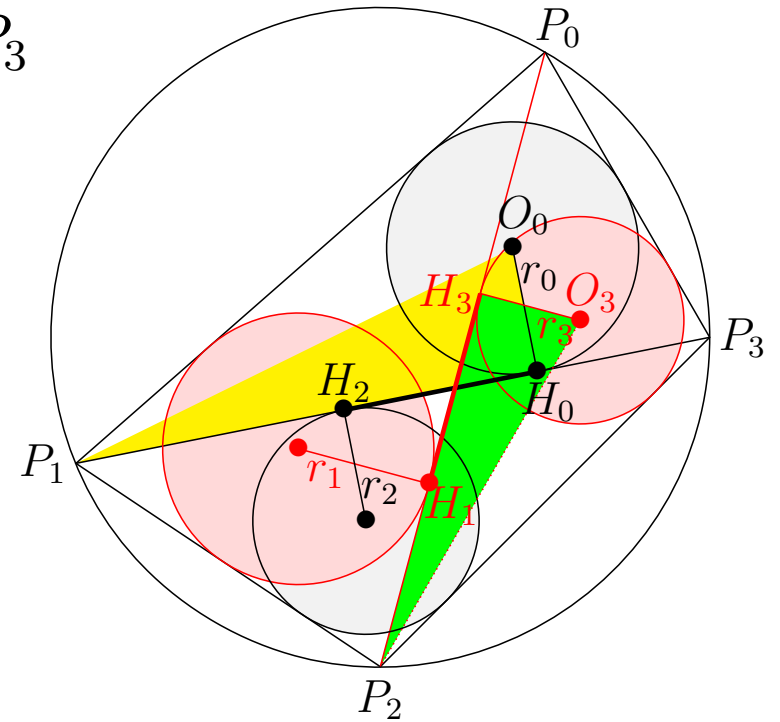
$$H_0H_2 = H_1H_3$$

$$\begin{aligned}\angle O_0P_1H_0 &= \frac{1}{2}\angle P_0P_1P_3 = \frac{1}{2}\angle P_0P_2P_3 \\ &= \angle O_3P_2H_3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \triangle O_0P_1H_0 \sim \triangle O_3P_2H_3$$

$$\Rightarrow \frac{r_0}{r_3} = \frac{O_0H_0}{O_3H_3} = \frac{P_1H_0}{P_2H_3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_0P_2H_3 = r_3P_1H_0 \\ r_1P_3H_0 = r_0P_2H_1 \\ r_2P_0H_1 = r_1P_3H_2 \\ r_3P_1H_2 = r_2P_0H_3 \end{cases}$$

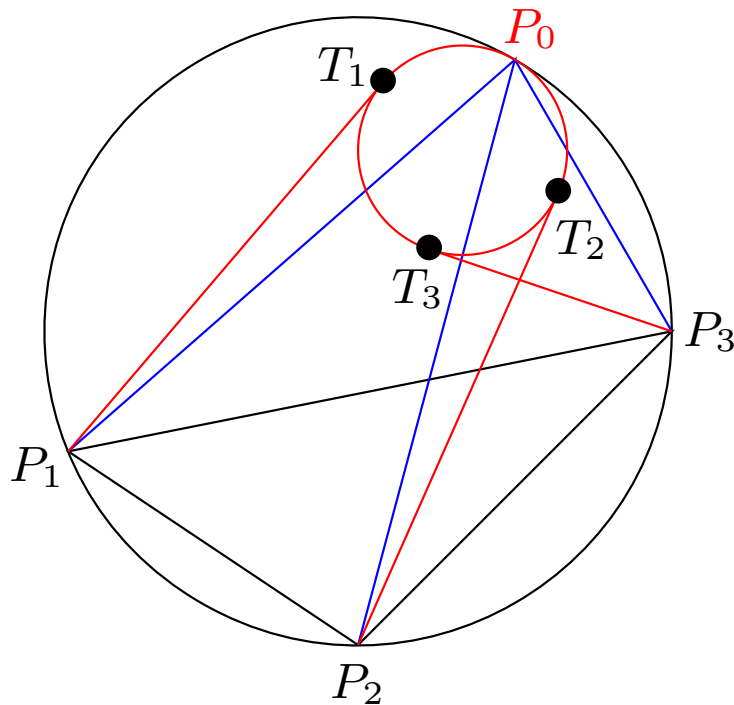
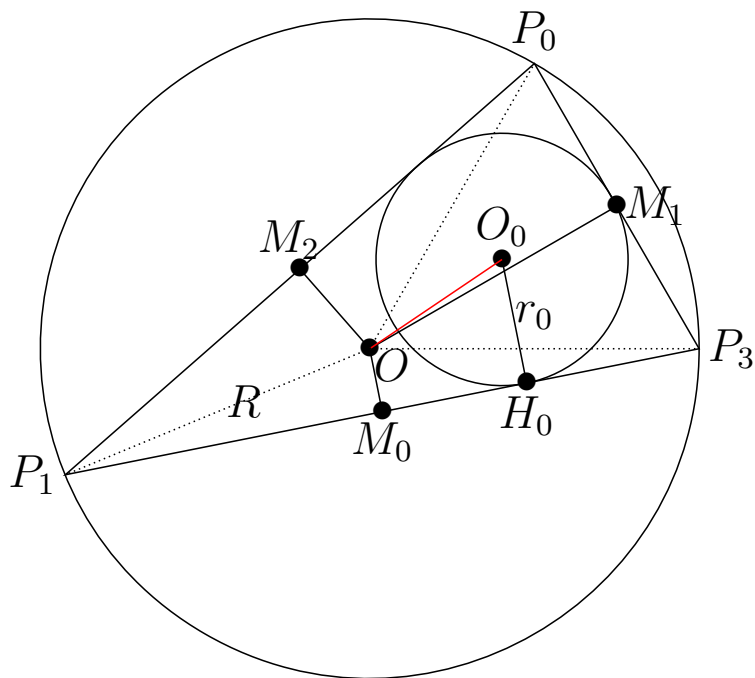


$$r_0(P_2H_3 - P_2H_1) + r_2(P_0H_1 - P_0H_3)$$

$$= r_1(P_3H_2 - P_3H_0) + r_3(P_1H_0 - P_1H_2),$$

$$\Rightarrow (r_0 + r_2)H_1H_3 = (r_1 + r_3)H_0H_2 \Rightarrow r_0 + r_2 = r_1 + r_3$$

以上は、吉田為幸 (1819–1892) の『壁算法附録解』にある証明



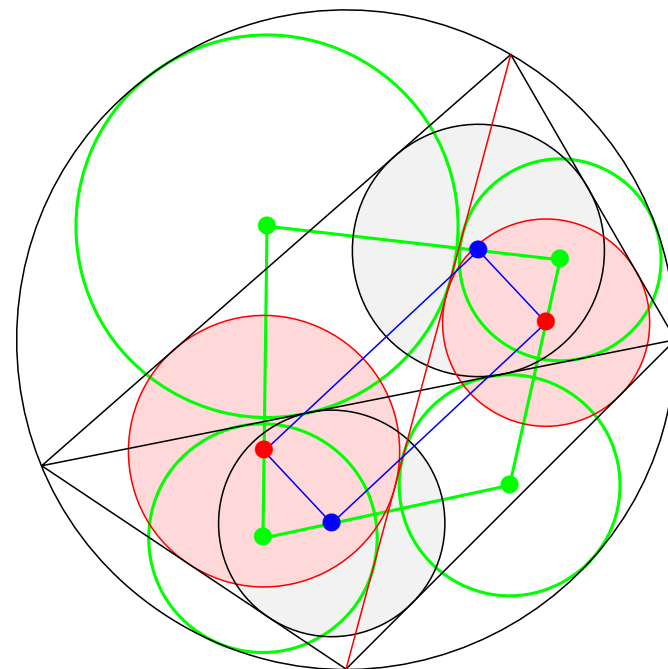
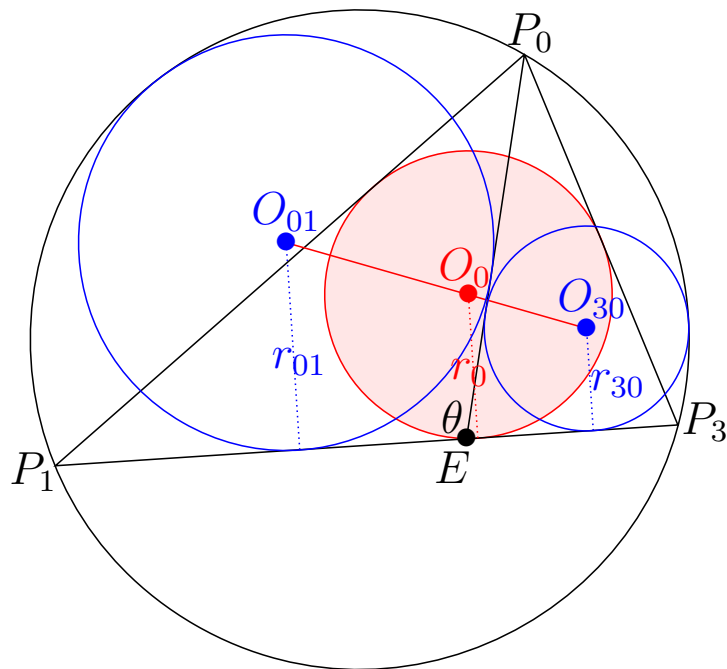
$O$  : 外接円の中心,  $R$  : 外接円の半径 ( $= OP_1$ ),  $h_i := OM_i$

チャップルの定理 :  $OO_0^2 = R^2 - 2Rr_0$

カルノーの定理 :  $R+r_0 = \begin{cases} h_0 + h_1 + h_2 - 2h_i & (\overline{OM_i} \text{が三角形外}) \\ h_0 + h_1 + h_2 & (O \text{が三角形内}) \end{cases}$

トレミーの定理 :  $P_0P_1 \cdot P_2P_3 + P_1P_2 \cdot P_3P_0 = P_0P_2 \cdot P_1P_3$

拡張版トレミーの定理 :  $T_1P_1 \cdot P_2P_3 + P_1P_2 \cdot P_3T_3 = T_2P_2 \cdot P_1P_3$



Sawayama–Thébault の定理 :  $O_0$  は線分  $O_{01}O_{30}$  上にあって

$$r_0 = r_{01} \cos^2 \frac{\theta}{2} + r_{30} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

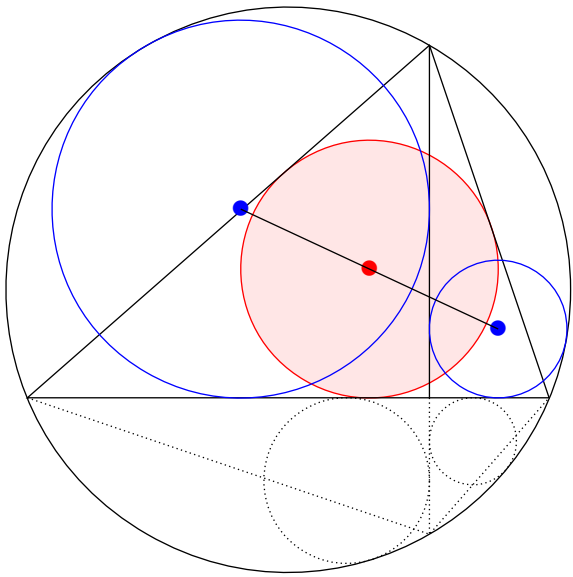
Thébault 1938 : 上式が間違っていた

Streefkerk 1973 (オランダ語) , Veldkamp 1989, Taylor 1983 (24 ページの証明)

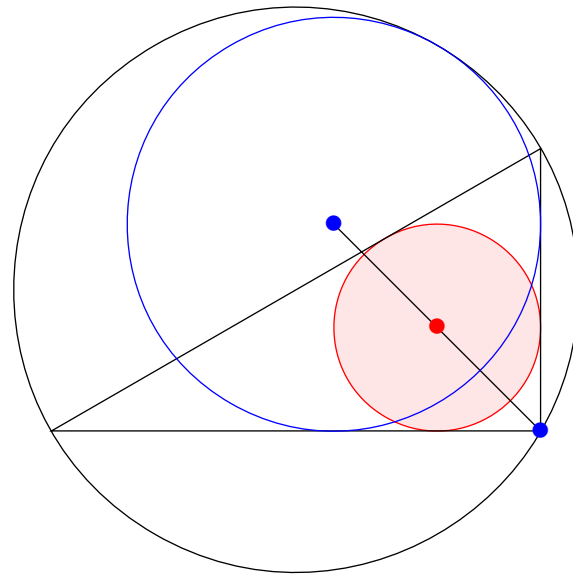
Sawayama 2005, Shail 2001, Ayme 2003, Čelin 2011, Doai– 2016 etc.

Gueron 2002 (一般化トレミー  $\Rightarrow$  Thébault) , Reyes 2002 ( $\Rightarrow$  Japanese Theorem)

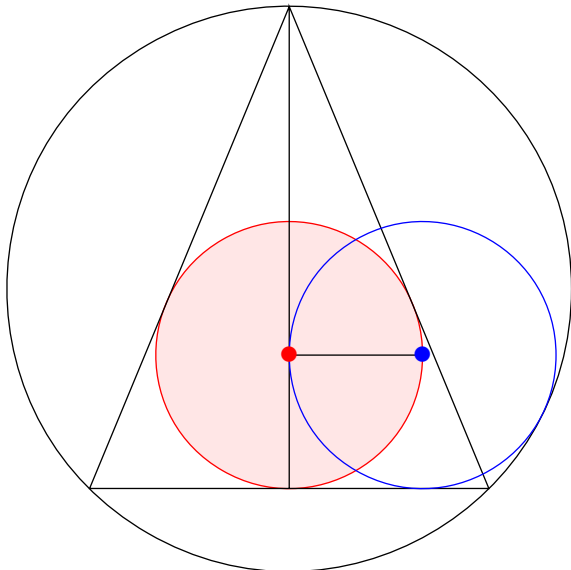




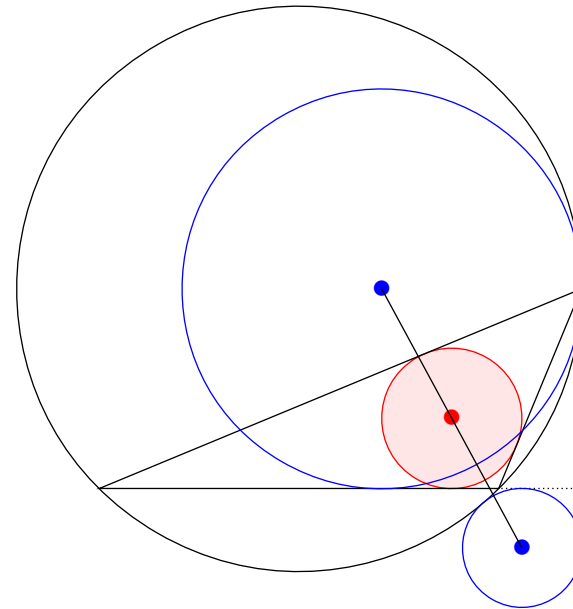
福島県田村大元神社 (1901) 2 枚目 5 問目



大船渡市根城八幡宮 (1941)



福島県田村大元神社 (1901) 1 枚目 7 問目



# 複素数平面

三辺の長さが  $a, b, c$  の三角形の面積を  $S$ , 内接円の半径を  $r$  とする

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)} \quad (\text{Heron の公式})$$
$$= \frac{1}{2} (a+b+c)r$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{a+b+c}}$$

円に内接する四角形の頂点 :  $P_j = z_j^2 \quad (j = 0, 1, 2, 3)$

$$|z_j| = 1, \quad 0 \leq \text{Arg } z_0 < \text{Arg } z_1 < \text{Arg } z_2 < \text{Arg } z_3 < \pi$$

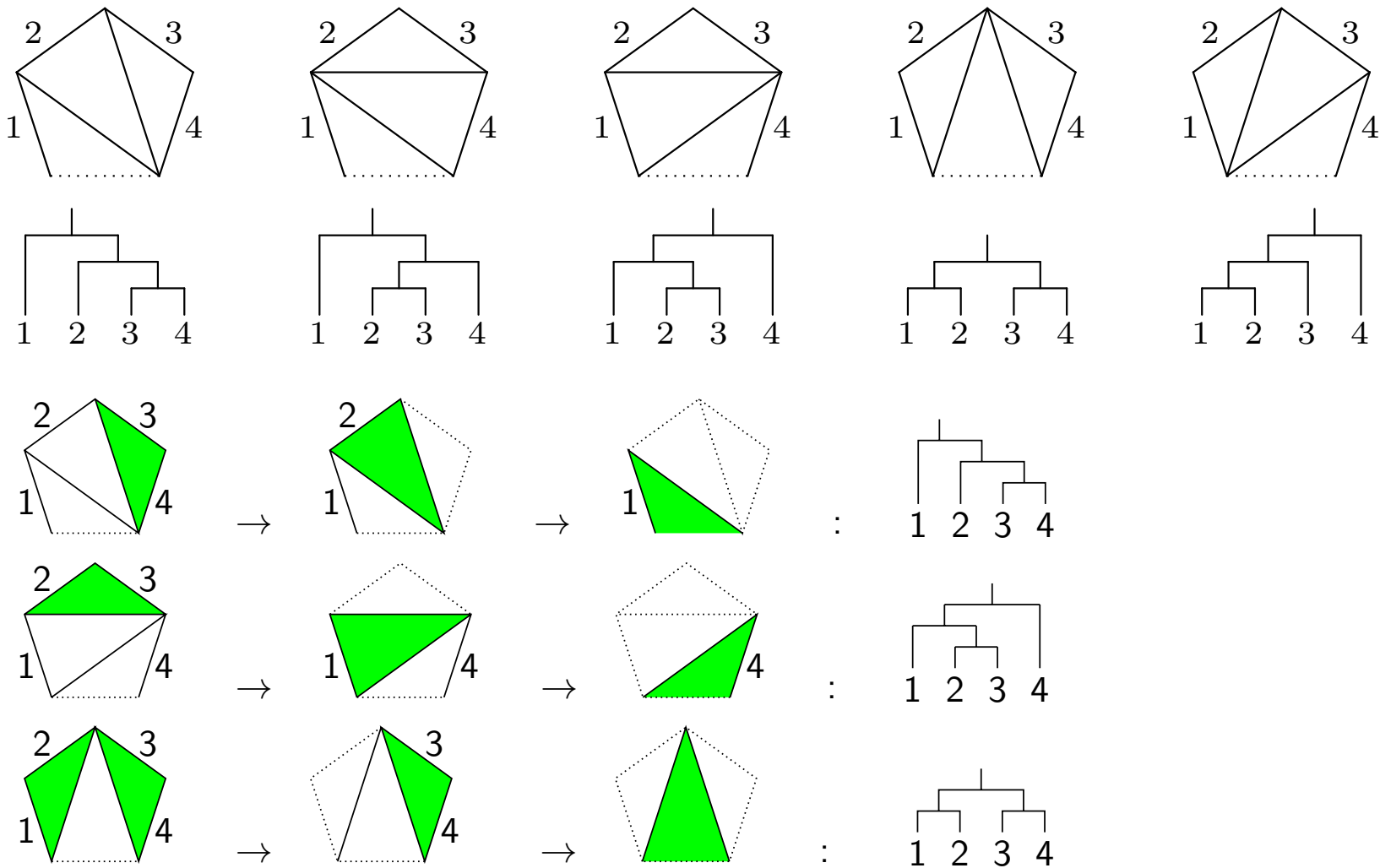
$$P_i P_j = |z_i^2 - z_j^2| = \sqrt{(z_i^2 - z_j^2) \left( \frac{1}{z_i^2} - \frac{1}{z_j^2} \right)} = \frac{z_i^2 - z_j^2}{\sqrt{-1} z_i z_j} \quad (0 \leq i < j \leq 3)$$

$r(z_i, z_j, z_k)$  :  $z_i^2, z_j^2, z_k^2$  を 3 頂点とする三角形の内接円の半径

$$r(z_0, z_1, z_2) = \frac{(z_2 + z_0)(z_1 - z_0)(z_2 - z_1)}{-2z_0 z_1 z_2}$$

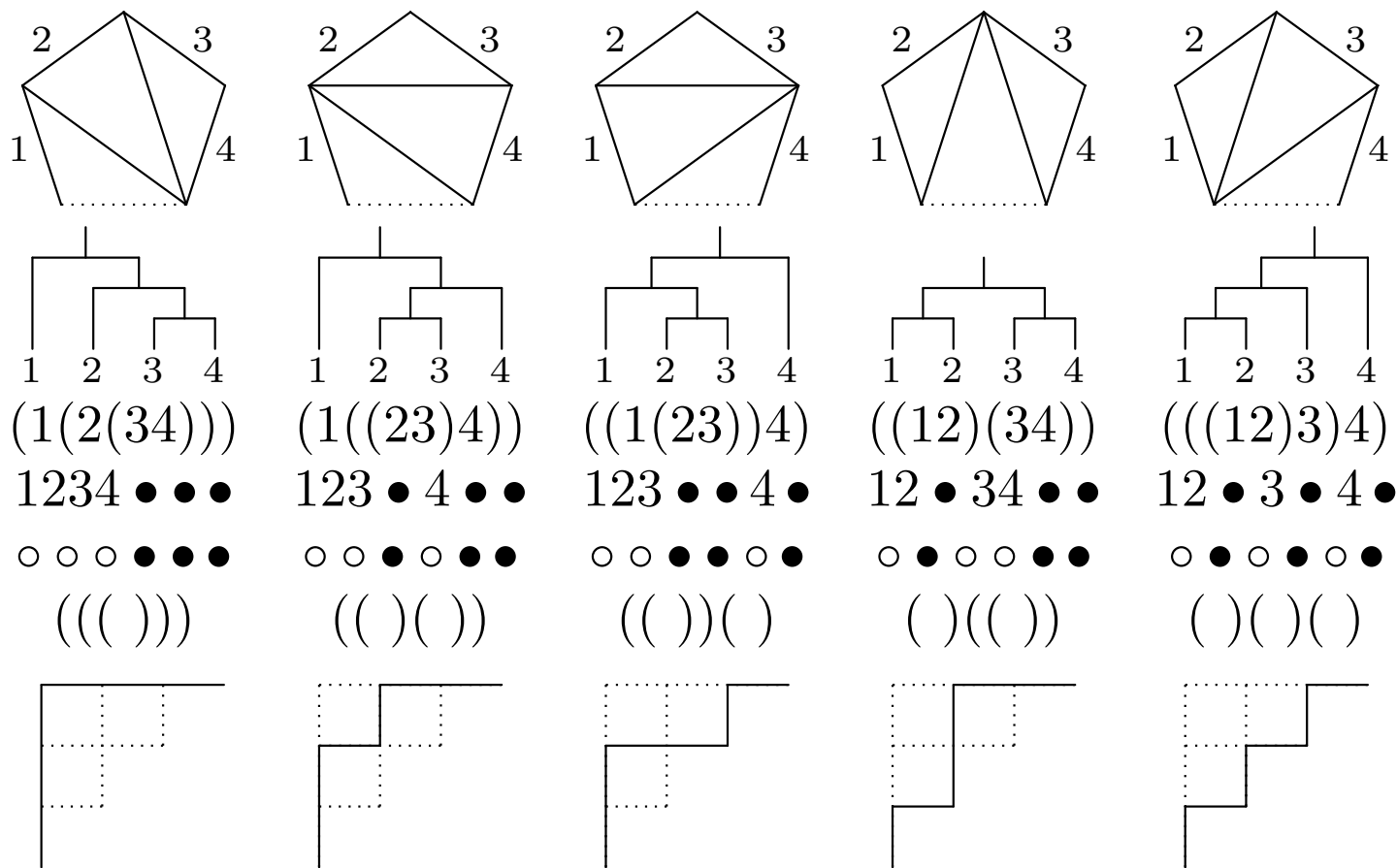
$$r(z_0, z_1, z_3) - r(z_0, z_1, z_2) = \frac{(z_1 - z_0)(z_3 - z_2)(z_0 z_1 + z_2 z_3)}{-2z_0 z_1 z_2 z_3}$$
$$= r(z_0, z_2, z_3) - r(z_1, z_2, z_3)$$

# § 凸多角形の三角形分割とトーナメント戦



$C_n$  カタラン数 :  $n + 2$  角形の三角形分割の種類 ( $n = 3 \Rightarrow C_3 = 5$ )  
 $n + 1$  チームのトーナメント表の種類

# § 凸 $n+2$ 多角形の三角形分割とカタラン数 ( $n=3$ )



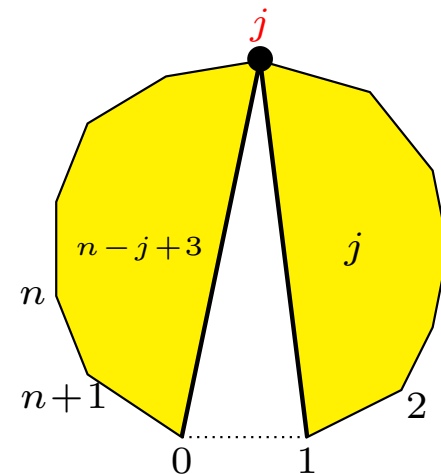
- $n+1$  チームのトーナメント戦
- $n+1$  個の行列の積  $A_1 \cdots A_n$  の計算順序
- $n$  組の括弧の組み合わせ
- $(0, -n)$  から  $(n, 0)$  への制限付き格子経路

$n+2$  角形の頂点 :  $\{0, 1, \dots, n+1\}$  (反時計回り)

$j$  : 線分  $0, 1$  (← 最小番号) を辺とする三角形の頂点

$\Rightarrow \{1, \dots, j\}$  と  $\{0, j, \dots, n+1\}$  を頂点とする  
 $j$  角形と  $(n-j+3)$  角形の三角形分割で分類

$\Rightarrow C_{j-2} \times C_{n-j+1}$  通り ( $2 \leq j \leq n+1$ )

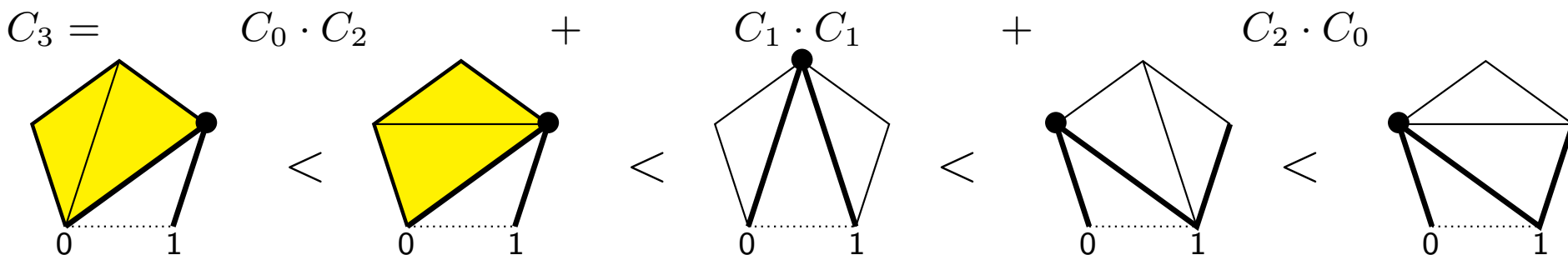


$$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \dots + C_{n-1} \cdot C_0 \quad (C_0 = 1)$$

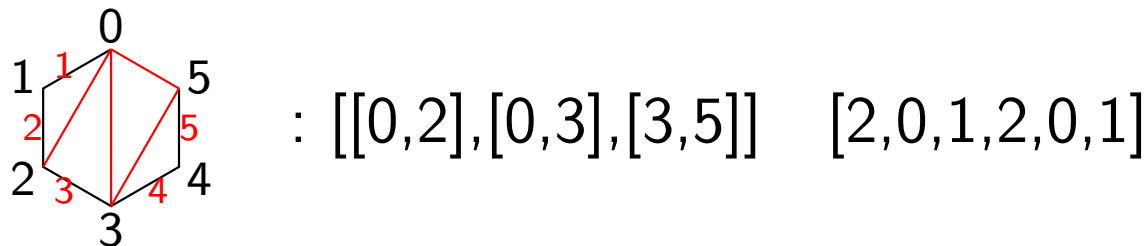
$n$  角形の三角形分割  $C_{n-2}$  個は、整列順序集合になる (辞書式順序)

•  $n+2$  角形の三角形分割は、 $0$  と  $1$  の間に頂点を入れて、 $(n+3)$  角形の三角形分割の最初の部分に埋め込める ( $n$  依らない番号)

三角形分割 :  $m$  番目を  $n$  角形の三角形分割で実現 ( $1 \leq m \leq C_{n-2}$ )

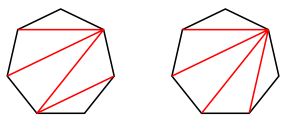
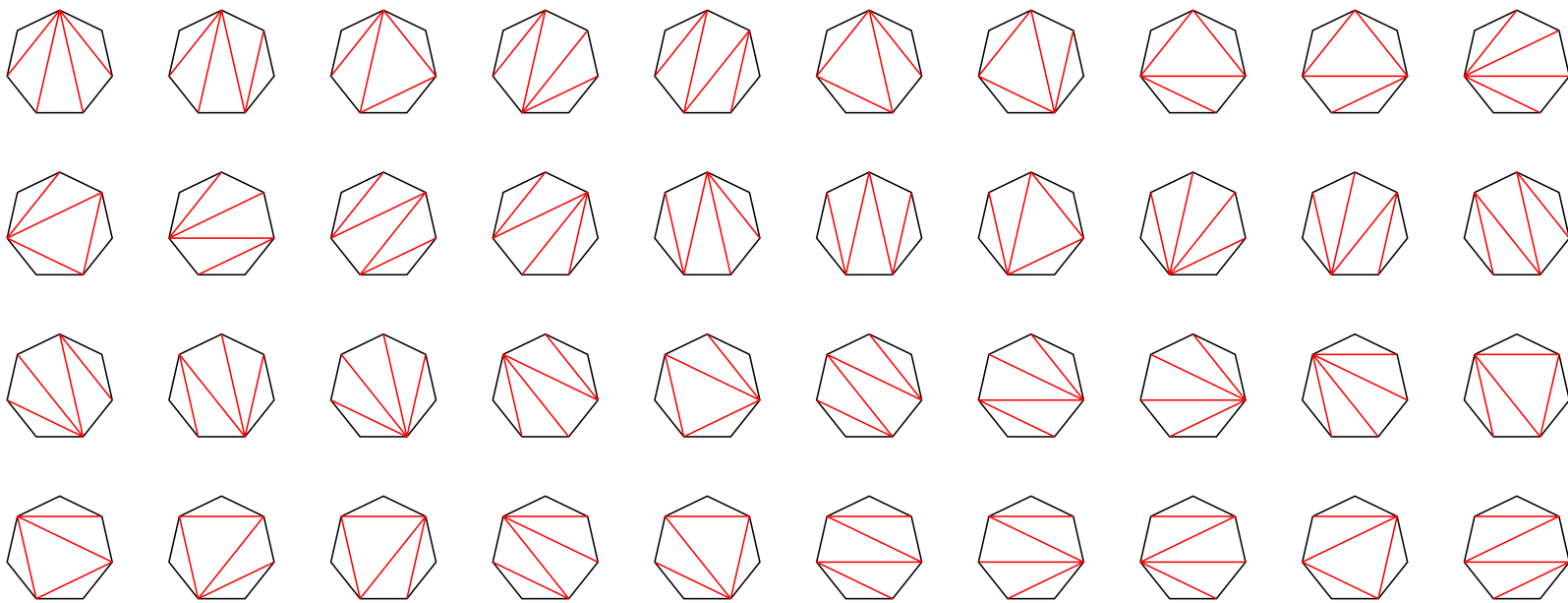


- 対角線を頂点  $\{0, \dots, n-1\}$  の 2 元の組で表し, それの  $n-3$  組のリスト (表記は, 最小のものにとる) .

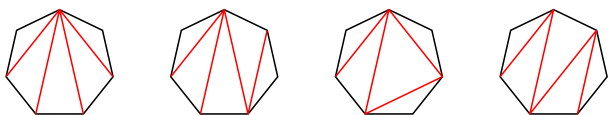


- 各頂点を通る対角線の本数を並べたリスト
- トーナメント表 :  $((((**)*)(**)) ((12)3)(45))$
- $m = n-2$  次の許容 01 列 :  $m$  個の 0 と 1 を並べた列で, 先頭から見て 0 の個数が 1 を下回らないもの : 01010011 ○●○○●○○●●

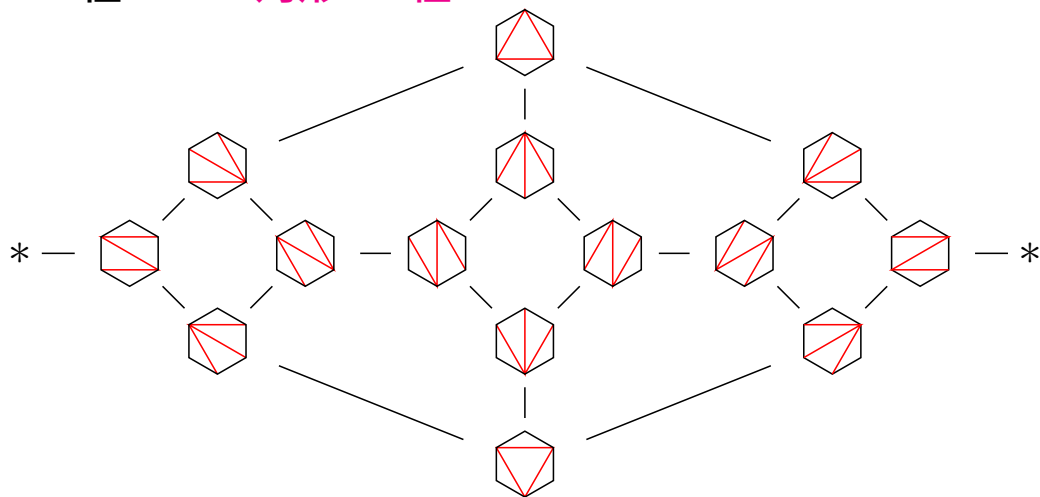
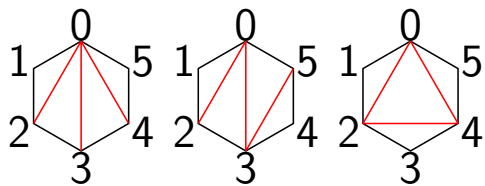
1. 上の表記の相互変換
2.  $n$  角形の  $k$  番目の三角形分割を得る
3. 操作 : 回転, 裏返し, フリップ, 拡大, 縮小
4. (回転や裏返しなどで移る分割を同一視した) 三角形分割の表
5. 多角形の三角形分割を含む表の (見やすい) TikZ のソース



: 7 角形 42 個 (北の頂点を 0 として小さい順)  
 北西の頂点を除いた最初 14 個が 6 角形の場合



: 4 種 → 10 角形 82 種



$$u(x) := C_0 + C_1x + \dots + C_nx^n + \dots \quad (\text{カタラン数の母関数})$$

$$\begin{aligned} u^2 &= (C_0 + C_1x + \dots + C_nx^n + \dots)(C_0 + C_1x + \dots + C_nx^n + \dots) \\ &= C_0C_0 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + \dots + (C_0C_n + \dots + C_nC_0)x^n + \dots \\ &= C_1 + C_2x + \dots + C_{n+1}x^n + \dots \end{aligned}$$

$$u - xu^2 = C_0 = 1 \Rightarrow xu^2 - u + 1 = 0 \Rightarrow u(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

$${}_aC_k := \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$\begin{aligned} (1 - 4x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}C_1(-4x) + \dots + \frac{1}{2}C_{n+1}(-4x)^{n+1} + \dots \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}(-4x) + \dots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!}(-4x)^{n+1} + \dots \\ &= 1 - \dots - \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{(n+1)!} 2^{n+1} x^{n+1} - \dots \\ &= 1 - \dots - \frac{2(2n)!}{(n+1)!n!} x^{n+1} - \dots \end{aligned}$$

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)n!} = \frac{2n C_n}{n+1}$$

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{(2n)(2n-1)}{(n+1)n} = \frac{4n-2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$C_n$	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786



# § ランダムウォーク

原点を出発し，数直線上を 1 秒ごとに正または負方向に 1 動く

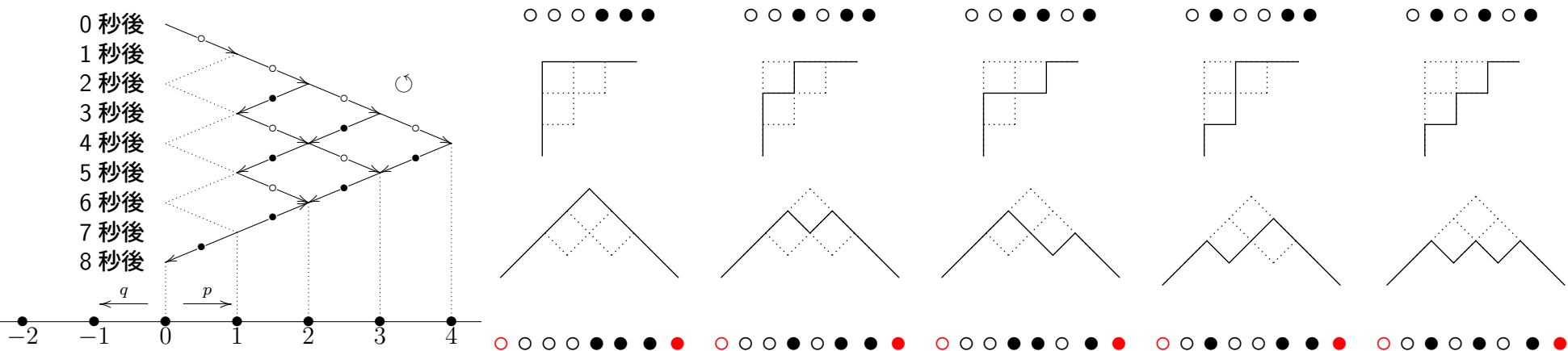
2 秒後の位置（正:○, 負:●）：○○, ○●, ●○, ●● の 4 通り

位置は 2, 0, 0, -2 (○● ⇒ 位置の変化は  $0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{-1} 0$ )

4 通りのうちの 2 通りは原点に戻る (50%)

8 秒後に初めて原点に戻ってくるには？

最初に正方向に動いた場合：



全  $2^8 = 256$  通り中の  $2 \times C_3 = 10$  通り (約 4%)

$2n$  秒後に初めて原点に戻ってくるのは， $2^{2n}$  通り中  $2 \times C_{n-1}$  通り

毎秒、正方向に確率  $p$ 、負方向に確率  $q$  で動くとする ( $p + q = 1$ )  
 $p = 1$  ならば出発点に戻ってくる確率は 0 であるが、 $p = q = \frac{1}{2}$  ならば最も原点に戻ってきやすいであろう。その確率は？

$2n$  秒後に初めて戻ってくる確率： $2C_{n-1}p^n q^n$

$2N$  秒後までに戻ってくる確率は

$$P(N) = \sum_{n=1}^N 2C_{n-1}(pq)^n$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(N) = \sum_{n=1}^{\infty} 2C_{n-1}(pq)^n = 2pq \sum_{m=0}^{\infty} C_m (pq)^m$$

$$= 2pq \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq}}{2pq} = 1 - \sqrt{(p+q)^2 - 4pq} = 1 - |p - q|$$

直線上のランダムウォークで出発点への回帰が起こる確率

$p \setminus 2N$	2	4	6	8	10	20	100	1000	10000	$\infty$
$\frac{1}{2}$	0.5	0.625	0.687	0.726	0.753	0.823	0.920	0.974	0.992	1
$\frac{1}{3}$	0.444	0.543	0.587	0.611	0.626	0.655	0.666	0.666	0.666	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{4}$	0.375	0.445	0.471	0.484	0.490	0.498	0.499	0.499	0.499	0.5

# ご清聴ありがとうございました!

- <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima>  
教材 : Japanese Theorem, 正多角形の三角形分割のフリップ  
os\_muldif.rr
- 「個数を数える」 数学書房, 2019
- 和算の館