日本数学会 2023 年度年会
中 央 大 学

総 合 講 演

多 面 体 と 単 項 式

日 比 孝 之

大 阪 大 学*

2023 年 3 月 16 日

凸多面体論

Convex Polytopes

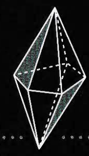
日比孝之 著

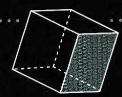
共立出版

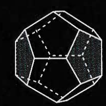
BLUE BACKS

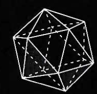
多角形と多面体

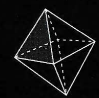
図形が織りなす不思議世界











Hibi Takayuki
日比孝之

すべての図形には
規則性が潜んでいる
オイラーが発見した**多面体定理**

$$v - e + f = 2$$

（頂点の数）（辺の数）（面の数）

多角形と多面体 図形が織りなす不思議世界 日比孝之

B2153
講談社

ISBN 978-4-06-521361-2
C0241 ¥1200E（0）

9784065213612

定価：本体1200円（税別）

1920241012008

三角形の貼り合わせでできる多角形と
多角形でできる多面体の奥深い世界

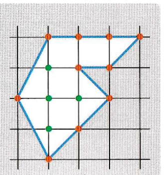
三角形や四角形、五角形で作られる多角形や多面体。
多角形を調べる基本の三角形分割の仕組みを理解し、
三角形の貼り合わせの概念を学びます。また、
正多角形からできる正多面体が、正四面体、正六面体、
正八面体、正十二面体、正二十面体の5種類しか存在しない
ことも数学的に証明します。オイラーの多面体定理や
ピックの公式を学び、さらに、凸多面体のトレンドの話題
である双対性と反射性の理論を紹介していきます。

格子点の数を数えるだけで面積がわかる!

ピックが発見した公式

格子多角形の**面積**

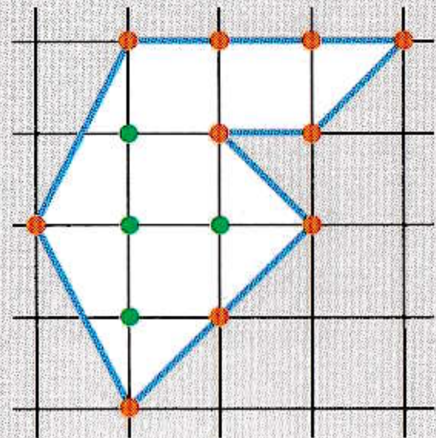
$$= \frac{1}{2} \times \boxed{\text{境界上の格子点の数}} + \boxed{\text{内部の格子点の数}} - 1$$



格子点の数を数えるだけで面積がわかる!

ピックが発見した公式

$$\boxed{\text{格子多角形の面積}} = \frac{1}{2} \times \boxed{\text{境界上の格子点の数}} + \boxed{\text{内部の格子点の数}} - 1$$



格子多角形

Melvin Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen–Macaulay rings generated by **monomials**, and **polytopes**, *Annals of Mathematics* **96** (1972), 318–337.

§１．格子点の数え上げ

§２．Castelnuovo多面体

§３．正規多面体

§1．格子点の数え上げ

Ehrhartの定理(1962)

回文定理(1990)

下限定理(1994)

- 点 $(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の**格子点**と呼ぶ。
- 次元 d の **凸多面体** $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ は、そのすべての頂点が格子点であるとき、**格子多面体**と呼ばれる。

● 次元dの格子多面体$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$の**ふくらまし**とは

$$n\mathcal{P} = \{n\alpha : \alpha \in \mathcal{P}\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

のことである。

$\boxed{\textbf{定義}}$ （数え上げ函数）

$$i(\mathcal{P}, n) = \#(n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d)$$

$$i^*(\mathcal{P}, n) = \#((n(\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P})) \cap \mathbb{Z}^d)$$

但し、$\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}$は$\mathcal{P}$の**内部**である。

例 xyz空間の格子四面体$\mathcal{Q}_m$の頂点を

$$(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,m)$$

とする。但し、$m \geq 1$は整数である*。

$$i(\mathcal{Q}_m, n) = \frac{m}{6}n^3 + n^2 + \frac{12-m}{6}n + 1$$

$$i^*(\mathcal{Q}_m, n) = \frac{m}{6}n^3 - n^2 + \frac{12-m}{6}n - 1$$

* 一般に、$i(\mathcal{Q}_m, q)$の係数は負になることもある。$\delta(\mathcal{Q}_m) = (1,0,m-1,0)$

定理(Ehrhart (1962))

次元 d の格子多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の数え上げ函数

$$i(\mathcal{P}, n) = \#(n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d)$$

は n に関する次数 d の多項式である。

- その定数項は1である。
- 更に、**エルハート相互法則**

$$i^*(\mathcal{P}, n) = (-1)^d i(\mathcal{P}, -n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

が成立する*。■

多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ の n^d 係数は $\mathcal{P}$ の体積 $V(\mathcal{P})$ である。

* $i(\mathcal{P}, -q)$ は、数え上げの解釈はせず、単に、$i(\mathcal{P}, q)$ の n を $-q$ に置き換えたものである。

多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ を $\mathcal{P}$ の**エルハート多項式**と呼ぶ。

系（ピックの公式の一般化）

体積 $V(\mathcal{P})$ は

$$i(\mathcal{P}, 1),\ i(\mathcal{P}, 2),\ \ldots,\ i(\mathcal{P}, d-1)$$

$$i^*(\mathcal{P}, 1), i^*(\mathcal{P}, 2), \ldots, i^*(\mathcal{P}, d-1)$$

から決定する。

数列 $(1, i(\mathcal{P},1), i(\mathcal{P},2), \ldots)$ の**母函数**を

$$(1-\lambda)^{d+1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} i(\mathcal{P},n)\lambda^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\lambda^n$$

とすると、$\delta_n = 0, \forall n > d$ である。数列

$$\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$$

を、$\mathcal{P}$ の **δ列** と呼ぶ。すると*

$$\delta_0 = 1,\ \ \delta_1 = i(\mathcal{P},1)-(d+1),\ \ \delta_d = i^*(\mathcal{P},1)$$

$$V(\mathcal{P}) = \frac{1}{d!}(\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_d)$$

* 相互法則から $\delta_d = i^*(\mathcal{P},1)$ が従う。なお、$i(\mathcal{P},n)$ の n^d 係数は $V(\mathcal{P})$ の右辺である。

- Betke–McMullen (1985), Stanley (1982)

$$\delta_i \geq 0 \quad (0 \leq i \leq d)$$

$\boxed{\textbf{対称}\,\delta\,\textbf{列}}$　次元 d の格子多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の δ 列

$$\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$$

が **対称**であるとは

$$\delta_i = \delta_{d-i}, \quad 0 \leq i \leq d,$$

なるときにいう。

対称ならば、$\delta_d = i^*(\mathcal{P}, 1) = \delta_0 = 1$ となるから、$\mathcal{P}$ の内部に属する格子点は唯一つである。それゆえ、対称 δ 列を考えるときは、$\mathcal{P}$ を整数ベクトルで平行移動し、原点が $\mathcal{P}$ の内部に属すると仮定する。

定理(回文定理(1990))[*]

次元 d の格子多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ が 原点を内部に含むとき、$\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$ が対称となるための必要十分条件は、$\mathcal{P}$ の**双対多面体**

$$\mathcal{P}^\vee = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq 1,\ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^d$$

が 格子多面体となることである[†]。

* *Discrete Math.* **83**

† $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の通常の内積である。

定義 (Victor Batyrev (1994))

次元 d の格子多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ が

● 原点を内部に含み、

● 双対多面体 $\mathcal{P}^\vee$ が格子多面体

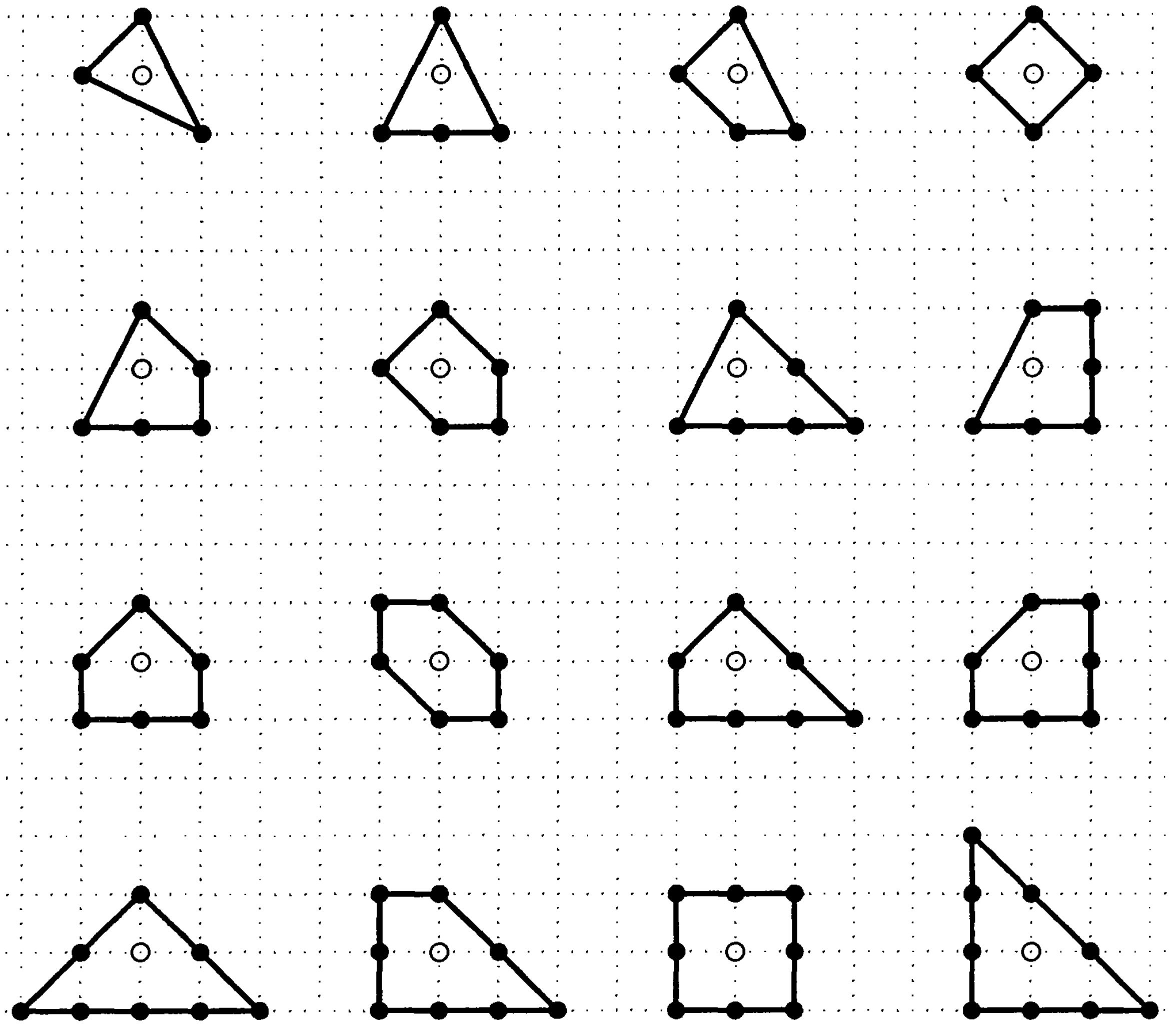
のとき**反射的多面体**と呼ばれる。

例 次元 d の格子多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ が

● 原点を内部に含み、

● 頂点を列ベクトルとする行列が完全単模

ならば、$\mathcal{P}$ は反射的多面体である。



予想(1992)

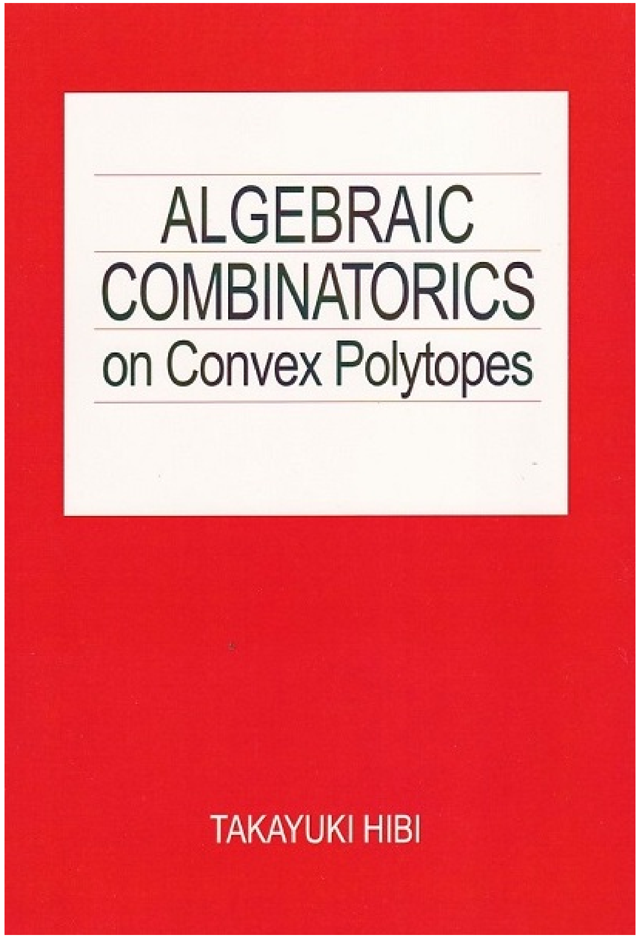
次元 d の反射的多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の

$$\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$$

はunimodalである。すなわち

$$\delta_0 \leq \delta_1 \leq \cdots \leq \delta_{[d/2]}$$

である。



定理(下限定理(1994))[*]

次元 d の格子多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の内部に格子点が属する（すなわち、$\delta_d = i^*(\mathcal{P}, 1) > 0$）ならば、$\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$ は、不等式

$$\delta_1 \leq \delta_i \qquad 2 \leq i \leq d-1$$

を満たす。

* *Advances Math.* **105**

体積の下限　次元 d の格子多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の境界に属する格子点の個数を $b(\mathcal{P})$ とし、内部に属する格子点の個数を $c(\mathcal{P}) > 0$ とすると、δ 列の下限定理から、$\mathcal{P}$ の体積 $V(\mathcal{P})$ の下限が導かれる。

$$
\begin{aligned}
V(\mathcal{P}) &= (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{d-1} + \delta_d)/d! \\
&\geq (1 + (d-1)\,\delta_1 + \delta_d)/d! \\
&= (1 + (d-1)\,(i(\mathcal{P},1) - (d+1)\,) + i^*(\mathcal{P},1))/d! \\
&= (1+(d-1)\,((b(\mathcal{P})+c(\mathcal{P}))-(d+1))+c(\mathcal{P}))/d! \\
&= ((d-1)\,b(\mathcal{P}) + d\,c(\mathcal{P})) - d^2 + 2)/d!
\end{aligned}
$$

§２．Castelnuovo多面体

$\boxed{\text{代数幾何の背景}}$　複素射影多様体 X とその上の豊富な直線束 L との対 (X, L) を**偏極多様体**と呼ぶ▼代数曲線の分類に使われる種数にはCastelnuovoの上限と呼ばれるものが存在する▼その高次元版として、1990年、藤田隆夫は、偏極多様体 (X, L) の**断面種数** $g(X, L)$ の上限を与えた▼断面種数 $g(X, L)$ がその上限に一致する多様体は **Castelnuovo 多様体**と呼ばれ偏極多様体の著名な類である。

藤田隆夫の不等式 (1990)　次元 d の複素射影多様体 X の上の豊富な直線束 L は $h^0(L) \geq d+2$ を満たすとし、条件 (i) L は basepoint free　(ii) $|L|$ が定義する射はその像に双有理、を仮定する。すると、

$$g(X,L) \leq m\,\Delta(X,L) - \frac{m(m-1)}{2}(L^d - \Delta(X,L) - 1)$$

が成立する*。但し、

$$m = [(L^d - 1)/L^d - \Delta(X,L) - 1)]$$

$$\Delta(X,L) = L^d + d - h^0(L)$$

である。

*　偏極多様体 (X,L) は、$h^0(L) \geq d+2$, (i), (ii), $g(X,L) = \cdots$ のとき、...

格子多面体 $\mathcal{P}$ から自然に扇を作る操作がある▼その扇の射影トーリック多様体 X 上の豊富な直線束 $L_{\mathcal{P}}$ を作ることができる▼射影トーリック多様体と豊富な直線束の組 $(X, L_{\mathcal{P}})$ が **偏極トーリック多様体** である▼偏極トーリック多様体と格子多面体は１対１に対応する。

次元 d の格子多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ から偏極トーリック多様体 $(X, L_{\mathcal{P}})$ を作る。藤田隆夫の不等式を

$$\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$$

で解釈すると、$\delta_1 > 0$,

$$\mathbb{Z}((\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d) \times \{1\}) = \mathbb{Z}^{d+1} \qquad (\#)^*$$

ならば

$$\sum_{i=2}^{d} (i-1)\delta_i \leq m \sum_{i=2}^{d} \delta_i - \frac{m(m-1)}{2}\delta_1 \qquad (1)$$

となる。但し、$m = \left[\left(\sum_{i=1}^{d} \delta_i \right) / \delta_1 \right]$ である。

* Hofscheier–Katthän–Nill

定理 (川口 良 (2021))

$\delta_d > 0$ とする*。次の条件は同値である。

(i) $(X, L_{\mathcal{P}})$ はCastelnuovo多様体†

(ii) 不等式 (1) の等号が成立

(iii) δ 列の下限定理の等号が成立‡

(iv)§ $$V(\mathcal{P}) = \frac{(d-1)\,b(\mathcal{P}) + d\,c(\mathcal{P}) - d^2 + 2}{d!}$$

* $h^0(L_{\mathcal{P}} + K_X) \geq 1$

† すなわち、(#) を満たし、不等式 (1) の等号が成立

‡ $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_{d-1}$

§ $\mathcal{P}$ の境界に属する格子点の個数を $b(\mathcal{P})$ とし、内部に属する格子点の個数を $c(\mathcal{P})$ とすると

定義 次元 d の格子多面体 $\mathcal{P}$ が内部に格子点を持ち、その δ 列が $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_{d-1}$ を満たすとき、$\mathcal{P}$ を**Castelnuovo多面体**と呼ぶ。

例 次元 d の格子単体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の頂点を

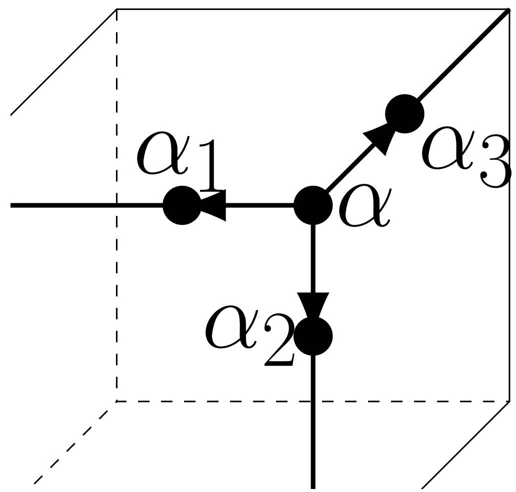
$$(0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1,0)$$
$$(cd,\ldots,cd,cd+1)$$

とする。但し、$c > 0$ は整数である。

すると、$\delta(\mathcal{P}) = (1,c,\ldots,c)$ であるから $\mathcal{P}$ はCastelnuovo多面体である。

非特異格子多面体

- 次元 $d = 3$ の非特異Castelnuovo多面体は反射的多面体である*。



- 次元 $d = 4, 5$ の非特異反射的Castelnuovo多面体は存在しない†。
- 次元 $d \geq 4$ の $(\pm 1, \ldots, \pm 1) \in \mathbb{R}^d$ を頂点とする立方体はCastelnuovo多面体ではない。

* 川口良（2015）

† J. D. Pulido Castelblanco の修士論文（2020）

§ 3．正規多面体

定義　次元 d の格子多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ が **正規**[*] とは

$$n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d = \underbrace{\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d + \cdots + \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d}_{n} \quad \forall n \geq 1$$

となるときをいう。

例　xyz 空間の格子四面体 $\mathcal{Q}$ の頂点を

$$(0,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$$

とすると、$(1,1,1) \in 2\mathcal{Q}$ と

$$(1,1,1) \neq (1,1,0) + (1,0,1)$$

などから、$\mathcal{Q}$ は正規ではない。

[*] **整分割性を持つ**

単項式　次元 d の格子多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ に属する格子点を $\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(q)}$ とする。

$$T = \mathbb{Q}[t_1^{\pm}, \ldots, t_d^{\pm}, s]$$

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d \rightsquigarrow \mathbf{t}^{\mathbf{a}} s = t_1^{a_1} \cdots t_d^{a_d} s$$

$$\mathbb{Q}[\mathcal{P}] = \mathbb{Q}[\mathbf{t}^{\mathbf{a}^{(1)}} s, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}^{(q)}} s] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\mathbb{Q}[\mathcal{P}])_n$$

を $\mathcal{P}$ の**トーリック環**と呼ぶ。

- $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\mathcal{P}])_n = i(\mathcal{P}, n)$, $\forall n \geq 1$, となるには $\mathcal{P}$ が正規であることが必要十分である。

すると、$\mathcal{P}$ が正規ならば

$\mathbb{Q}[\mathcal{P}] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\mathbb{Q}[\mathcal{P}])_n$ の**ヒルベルト級数**は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}[\mathcal{P}])_n \lambda^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} i(\mathcal{P}, n)\lambda^n$$

$$= \frac{\delta_0 + \delta_1\lambda + \cdots + \delta_d \lambda^d}{(1-\lambda)^{d+1}}$$

である。しかも、$\mathcal{P}$ が正規ならば

$\mathbb{Q}[\mathcal{P}]$ は **Cohen–Macaulay 環**である*。

* **Hochster の定理（1972 年）**

すなわち、

$$\mathbb{Q}[\mathcal{P}]/(\theta_1,\ldots,\theta_{d+1}) = \bigoplus_{n=0}^{d} R_n$$

$$\sum_{n=0}^{d} (\dim_{\mathbb{Q}} R_n)\,\lambda^n = \delta_0 + \delta_1\lambda + \cdots + \delta_d\,\lambda^d$$

となる **次数 1 の斉次多項式 $\theta_1,\ldots,\theta_{d+1}$ が存在** する。

すると、

$$0 \le \delta_n \le \binom{\delta_1 + n - 1}{\delta_1 - 1}, \quad n = 0, 1, \ldots, d$$

となる*。

* δ 列の 上限定理

$\boxed{1}$ 正規反射的多面体

予想(1992) の反例は、2005年、Mustaţă と Payne が構成した*。彼らは、δ_i を完備 Gorenstein トーリック多様体の或るベッチ数と解釈することから、次元 $2m$ の反射的多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{2m}$ で

$$\delta(\mathcal{P}) = (1, m, m+2, m, m+2, \ldots, m+2, m, 1)$$

となるものを、任意の整数 $m > 0$ で構成した。

● Mustaţă と Payne の反例は正規ではない。

* 予想 (1992) を Mustaţă と Payne に示唆したのは William Fulton である。

2022年10月、Adiprasito, Papadakis, Petrotou と Steinmeyer は、**予想(1992)** は、$\mathcal{P}$ が正規ならば肯定的である、とアナウンスした。もっと強く、

次元 d の正規格子多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の δ 列の後半部分は単調減少である。すなわち、

$$\delta_{[d/2]} \geq \delta_{[d/2]+1} \geq \cdots \geq \delta_d$$

である([arXiv:2210.10734])。

$\boxed{2}$ ポリマトロイド (Jack Edmonds (1970))

次元 d の格子多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d_{\geq 0}$ が条件

(i) $\alpha \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$, $\beta \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$, $\beta \leq \alpha$ ならば $\beta \in \mathcal{P}$

(ii) $\alpha, \beta \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$, $|\alpha| < |\beta|$ ならば

$$\alpha_i < \beta_i, \ \alpha + \mathbf{e}^{(i)} \in \mathcal{P} \text{ となる } i \text{ が存在}$$

を満たすとき、**ポリマトロイド**と呼ばれる。

但し、$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ は α の modulus

$\mathbf{e}^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}^{(2)} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots$

$\boxed{\text{例}}$（Veronese型ポリマトロイド）

整数 $s_1, \ldots, s_d$ と n で

$$1 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_d \leq n < s_1 + \cdots + s_d$$

を満たすものを固定すると、次元 d の格子多面体

$$\mathcal{P}^{(n)}_{s_1,\ldots,s_d} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_{\geq 0} : x_i \leq s_i, \forall i, \ \ |\mathbf{x}| \leq n \right\}$$

はポリマトロイドである。

定理(Edmonds) ポリマトロイドは正規である。

(可換環論)

ポリマトロイド $\mathcal{P}$ のトーリック環 $\mathbb{Q}[\mathcal{P}]$ は正規環

$\mathbf{0},\ \mathbf{e}^{(1)}, \ldots, \mathbf{e}^{(d)} \in \mathcal{P}$ $\qquad$ $s,\ t_1 s,\ \ldots, t_d s \in \mathbb{Q}[\mathcal{P}]$

$$\mathbb{Q}[\mathcal{P}]_s = \mathbb{Q}[s,\ s^{-1}, t_1, \ldots, t_d]$$

$\mathbb{Q}[\mathcal{P}]$ の因子類群 $\simeq \mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$

定理([HHMQ, arXiv:2302.12475])

整数 $r > 0$ と $g > 0$ が与えられたとき、

ポリマトロイドで、そのトーリック環の

因子類群が $\mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$ となるものが存在する。

歴史的潮流

- オイラーの多面体定理(1752)
- ピックの公式(1899)

	Macaulayの論文(1927)
1960年代	Grünbaum, “Convex Polytopes” (1967)
	Ehrhartの仕事(1955–1968)
	Buchbergerの学位論文(1965)
1970年代	Hochsterの論文(1972)
	面の数え上げ理論の全盛期
1980年代	可換代数と組合せ論の誕生
1990年代	単項式イデアルの発展
	グレブナー基底の浸透
	格子点の数え上げ理論の黎明期