Brascamp–Liebの不等式の安定性

Neal Bez

埼玉大学

日本数学会2022年度年会
2022年3月29日

Plan

- **Brascamp–Liebの不等式**
- 多重線形掛谷不等式
- **Brascamp–Liebの不等式の安定性**

Brascamp–Liebの不等式

Brascamp–Liebの不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j(L_j(x))^{c_j}\,\mathrm{d}x \le C \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j \right)^{c_j}$$

$f_j \in L^1(\mathbb{R}^{n_j}),\ f_j \ge 0$

$L_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_j}$ 全射線形写像

$c_j \in [0,1]$

$(\mathbf{L}, \mathbf{c})$: Brascamp–Liebデータ $\mathbf{L} = (L_j)_{j=1}^m,\ \mathbf{c} = (c_j)_{j=1}^m$

$C \in [0,\infty]$: 定数

Brascamp–Liebの不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(L_j(x))^{c_j}\,\mathrm{d}x \le \mathrm{B}(\mathbf{L},\mathbf{c}) \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j \right)^{c_j}$$

$f_j \in L^1(\mathbb{R}^{n_j}),\ f_j \ge 0$

$L_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_j}$ 全射線形写像

$c_j \in [0,1]$

$(\mathbf{L},\mathbf{c})$: Brascamp–Liebデータ $\mathbf{L} = (L_j)_{j=1}^m,\ \mathbf{c} = (c_j)_{j=1}^m$

$\mathrm{B}(\mathbf{L},\mathbf{c}) \in [0,\infty]$: Brascamp–Lieb定数 最良定数

$$\mathrm{B}(\mathbf{L},\mathbf{c}) = \sup_{f_j \neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(L_j(x))^{c_j}\,\mathrm{d}x}{\prod_{j=1}^m (\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j)^{c_j}}$$

$\mathrm{B}(\mathbf{L},\mathbf{c}) < \infty \ \Rightarrow\ n = \sum_{j=1}^m c_j n_j$ $f_j \rightsquigarrow f_j(R\,\cdot)$

例 1

Hölderの不等式

$\sum_{j=1}^{m} c_j = 1$ であれば

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j(x)^{c_j}\,\mathrm{d}x \le \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_j \right)^{c_j}$$

例 2

Loomis–Whitneyの不等式 (Bull. Amer. Math. Soc. 1949)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} f_j(\Pi_j(x))^{\frac{1}{n-1}}\, \mathrm{d}x \le \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_j \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

ここで $\Pi_j(x) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$

$\ker \Pi_j = \mathrm{span}(e_j)$ "transversality"

$\ker \widetilde{\Pi}_j = \mathrm{span}(v_j)$ かつ $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n) = \mathbb{R}^n$ であれば

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} f_j(\widetilde{\Pi}_j(x))^{\frac{1}{n-1}}\, \mathrm{d}x \le C \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_j \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$\exists j$ s.t. $c_j \neq \frac{1}{n-1}$ のときは, $\mathrm{B}(\mathbf{\Pi}, \mathbf{c}) = \infty$

例 2

Loomis–Whitneyの不等式 (Bull. Amer. Math. Soc. 1949)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} f_j(\Pi_j(x))^{\frac{1}{n-1}}\, \mathrm{d}x \le \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_j \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

ここで $\Pi_j(x) = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$

$\ker \Pi_j = \mathrm{span}(e_j)$ "transversality"

証明：Hölderの不等式 ($n-1$ 回) □

Aside: $f_j = 1_{\Pi_j(\Omega)}$ のとき

$$\mathrm{vol}_n(\Omega) \le \mathrm{vol}_{n-1}(\Omega)^{\frac{n}{n-1}}$$

等周不等式 $$\mathrm{vol}_n(\Omega) \le B_n \mathrm{vol}_{n-1}(\Omega)^{\frac{n}{n-1}}$$ $(B_n < 1)$

BLの不等式の応用

- 幾何学的測度論
  - 掛谷予想
  - 多重線形掛谷不等式
- **Convex geometry**
  - Cube slicingの問題
  - Busemann–Pettyの問題
- 調和解析
  - フーリエ制限予想
  - デカップリング理論
- 数論
  - Vinogradov mean value conjecture
  - Lindelöf hypothesis
- 偏微分方程式論
  - Zakharov系の適切性

多重線形掛谷不等式

各 $j = 1, \ldots, n$ に対し

$$f_j := \sum_{k=1}^{N_j} 1_{B(y_{j,k},\delta)} \qquad (B(y_{j,k},\delta) : \delta\text{-ball})$$

と定めてLoomis–Whitneyの不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} f_j(\Pi_j(x))^{\frac{1}{n-1}} \, \mathrm{d}x \le \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_j \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

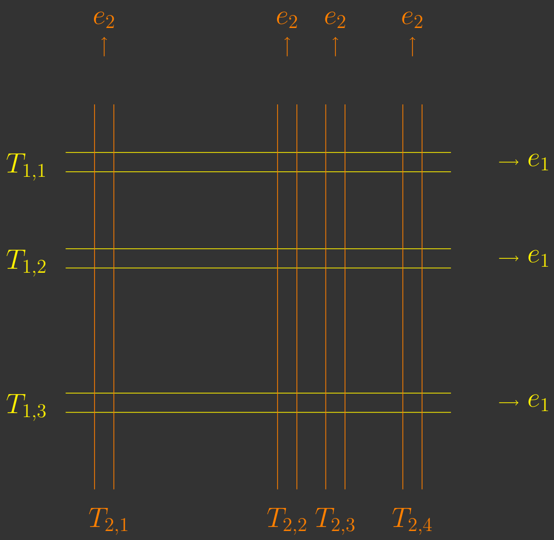
を適用すると

多重線形掛谷不等式 (parallel tubes)

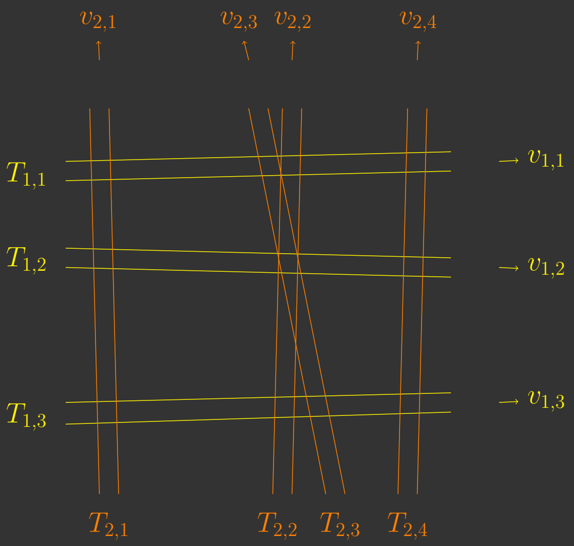
$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N_j} 1_{T_{j,k}}(x) \right)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{d}x \le C\delta^n \prod_{j=1}^{n} N_j^{\frac{1}{n-1}}$$

$T_{j,k} = \Pi_j^{-1}(B(y_{j,k},\delta))$: δ-tube, 方向 e_j

Transversal families of parallel tubes



Perturbed version?



$T_{j,k}$: δ-tube, 方向 $v(T_{j,k})$, $|v(T_{j,k}) - e_j| \le c \ll 1$

定理 (Guth, Acta Math. 2010)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{N_j} 1_{T_{j,k}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \le C\delta^n \prod_{j=1}^n N_j^{\frac{1}{n-1}}$$

証明 : Algebraic topology

定理 (Bennett–Carbery–Tao, Acta Math. 2006)

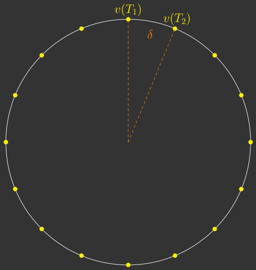
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon < \infty$ s.t.

$$\int_{[-1,1]^n} \prod_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{N_j} 1_{T_{j,k}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \le C_\varepsilon \delta^{n-\varepsilon} \prod_{j=1}^n N_j^{\frac{1}{n-1}}$$

証明 : Heat-flow (B-C-T); Induction-on-scales (Guth, 2015)

掛谷予想

$T_1, \dots, T_N$: δ-tube, 長さ 1
方向 $v(T_1), \dots, v(T_N)$: 幅 δ の $\mathbb{S}^{n-1}$ 上の格子点　　$(N \sim \delta^{-(n-1)})$



掛谷予想 (maximal version)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon < \infty$ s.t. $$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{N} 1_{T_j} \right)^{\frac{n}{n-1}} \le C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon}$$

掛谷予想

掛谷予想 (set version)

任意の掛谷集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ は $\dim(K) = n$ をみたす

$K \subset \mathbb{R}^n$ 掛谷集合 : あらゆる方向の長さ 1 の線分を含むもの

数論: Vinogradov mean value conjecture

$s, \ell, N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\left.\begin{array}{ll} m_1^j + \cdots + m_s^j = n_1^j + \cdots + n_s^j & (j = 1, \ldots, \ell) \\ m_k, n_k \in \{1, \ldots, N\} & (k = 1, \ldots, s) \end{array}\right\} \text{(V)}$$

$$J_{s,\ell}(N) := \#\{(m_1, \ldots, m_s, n_1, \ldots, n_s) : \text{(V) が成立}\}$$

予想 (Vinogradov, 1930s)

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, C_\varepsilon < \infty$ s.t. $\quad J_{s,\ell}(N) \le C_\varepsilon N^\varepsilon (N^s + N^{2s-\frac{1}{2}\ell(\ell+1)})$

N^s : $m_k = n_k \quad (\forall\, k)$

$N^{2s-\frac{1}{2}\ell(\ell+1)}$: $\mathbb{P}(m_1^j + \cdots + m_s^j = n_1^j + \cdots + n_s^j \text{ が成立}) \sim N^{-j}$

応用 : リーマンゼータ関数の零点を持たない領域
ウェアリングの問題

定理 (Wooley, Adv. Math. 2015 ($\ell = 3$), Bourgain–Demeter–Guth, Ann. of Math. 2016 ($\ell \geq 4$))

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, C_\varepsilon < \infty$ s.t. $\quad J_{s,\ell}(N) \leq C_\varepsilon N^\varepsilon \left(N^s + N^{2s - \frac{1}{2}\ell(\ell+1)}\right)$

B–D–G の証明：多重線形掛谷不等式が重要な役割を果たす

多重線形掛谷不等式 (tubes)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N_j} 1_{T_{j,k}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \leq C\delta^n \prod_{j=1}^{n} N_j^{\frac{1}{n-1}}$$

$T_{j,k}$: δ-tube, 方向 $v(T_{j,k})$, $\quad |v(T_{j,k}) - e_j| \leq c \ll 1$

多重線形掛谷不等式 (Brascamp–Lieb-type)

$\mathrm{B}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) < \infty$ とする $L_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_j}$

$V_{j,k}$: $n - n_j$ dimensional affine subspace

$$\mathrm{dist}(V_{j,k}, \ker L_j) \le c \ll 1$$

$S_{j,k} : V_{j,k}$ の δ-近傍

定理 (Bennett–B.–Flock–Lee, Amer. J. Math. 2018)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon < \infty$ s.t.

$$\int_{[-1,1]^n} \prod_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{N_j} 1_{S_{j,k}} \right)^{c_j} \le C_\varepsilon \delta^{n-\varepsilon} \prod_{j=1}^m N_j^{c_j}$$

証明 : Induction-on-scales (à la Guth) +
Brascamp–Liebの不等式の安定性

Brascamp–Liebの不等式の安定性

Brascamp–Liebの不等式の安定性

Brascamp–Lieb定数

$$\mathrm{B}(\mathbf{L},\mathbf{c}) = \sup_{\substack{f_j \geq 0 \\ 0<\int f_j<\infty}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(L_j(x))^{c_j}\,\mathrm{d}x}{\prod_{j=1}^m (\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j)^{c_j}}$$

有限性の安定性

$$\mathrm{B}(\mathbf{L}_*,\mathbf{c}) < \infty,\ \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \|\mathbf{L}_* - \mathbf{L}\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B}(\mathbf{L},\mathbf{c}) < \infty$$

定理 (Bennett–Carbery–Christ–Tao, Geom. Funct. Anal. 2008)

$\mathrm{B}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad$ (i) かつ (ii)

(i) $n = \sum_{j=1}^{m} c_j n_j$ (scaling)

(ii) $\dim(V) \leq \sum_{j=1}^{m} c_j \dim(L_j(V))$ for all $V \leq \mathbb{R}^n$ (dimension)

定理 (Bennett–B.–Flock–Lee, Amer. J. Math. 2018)

$\mathbf{L} \mapsto \mathrm{B}(\mathbf{L}, \mathbf{c})$ は局所有界

系 (B-B-F-L)：多重線形掛谷不等式 (Brascamp–Lieb-type)

定理 (Bennett–B.–Cowling–Flock, Bull. Lond. Math. Soc. 2018)

$$\mathbf{L} \mapsto \mathrm{B}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) \text{ は連続}$$

定理 (Lieb, Invent. Math. 1990)

$$\mathrm{B}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) = \sup_{A_j > 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_{A_j}(L_j(x))^{c_j}\, \mathrm{d}x}{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} g_{A_j}\right)^{c_j}}$$

$$g_A(x) = \exp(-\langle Ax, x\rangle)$$

非線形の摂動は...?

非線形Brascamp–Lieb予想

$\mathrm{B}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) < \infty$ とし
$B_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_j}$ は $\mathrm{d}B_j(0) = L_j$ となる沈め込みとする (C^2級)

予想

ある近傍 $U \ni 0$, 定数 $C < \infty$ が存在し

$$\int_U \prod_{j=1}^m f_j(B_j(x))^{c_j}\,\mathrm{d}x \le C \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j \right)^{c_j}$$

非線形Loomis–Whitneyの不等式

- Bennett–Carbery–Wright, Math. Res. Lett. 2005
  - 3次元の多重線形フーリエ制限予想 (B-C-W)
  - 2次元cubic NLS (Faou–Germain–Hani, J. Amer. Math. Soc. 2016)
- Bejenaru–Herr–Tataru, Rev. Mat. Iberoamericana 2010
  - 2次元のZakharov系 (Bejenaru–Herr–Holmer–Tataru, Nonlinearity 2009)
  - 2次元のKlein-Gordon-Zakharov系 (Kinoshita, Discrete Contin. Dyn. Syst. 2018)
  - Quadratic derivative NLS (Hirayama–Kinoshita, Nonlinear Anal. 2019)
- Bennett–B., J. Funct. Anal. 2010
  - 3次元のZakharov系 (Bejenaru–Herr, J. Funct. Anal. 2011)
- Koch–Steinerberger, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 2015
  - 2次元の periodic Zakharov–Kuznetsov (Kinoshita–Schippa, J. Funct. Anal. 2021)
- Carbery–Hänninen–Valdimarsson, J. Eur. Math. Soc. (to appear)

非線形Brascamp–Lieb予想の解決

$\mathrm{B}(\mathbf{L}, \mathbf{c}) < \infty$ とし
$B_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_j}$ は $\mathrm{d}B_j(0) = L_j$ となる沈め込みとする (C^2級)

定理 (Bennett–B.–Buschenhenke–Cowling–Flock, Duke Math. 2020)

ある近傍 $U \ni 0$, 定数 $C < \infty$ が存在し

$$\int_U \prod_{j=1}^m f_j(B_j(x))^{c_j}\, \mathrm{d}x \le C \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j \right)^{c_j}$$

ご静聴ありがとうございました

非線形Brascamp–Lieb予想の解決

$\mathrm{B}(\mathbf{L},\mathbf{c})<\infty$ とし
$\mathrm{d}B_j(0)=L_j$ なる沈め込み $B_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n_j}$ とする

定理 (Bennett–B.–Buschenhenke–Cowling–Flock, Duke Math. 2020)

任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある近傍 $U\ni 0$ が存在し

$$\int_U \prod_{j=1}^m f_j(B_j(x))^{c_j}\,\mathrm{d}x \le (1+\varepsilon)\mathrm{B}(\mathbf{L},\mathbf{c})\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j\right)^{c_j}$$

証明：Induction-on-scales (ガウス関数のバージョン) +
Liebの定理 (定量的なバージョン) □