

特異点および時空内の零平均曲率曲面の幾何学 Part I

梅原雅顕・山田光太郎

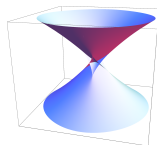
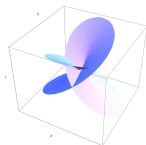
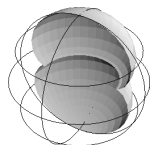
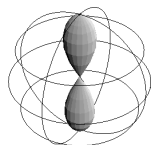
東京工業大学

2020/09/23

2020 年度日本数学会秋季総合分科会

特異点をもつ曲面

- 3次元双曲空間の平坦曲面（特異点が自然に現れる）
- 3次元時空の極大曲面（特異点が自然に現れる）



曲面の研究にあたっては「特異点」を避けて通ることはできない。

曲面に現れる特異点：カスプ辺

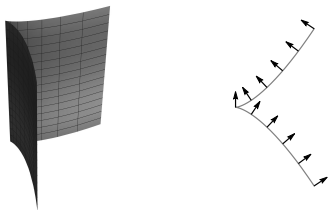
曲面： $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ (C^∞ -写像)

特異点： $df(p)$ が単射でない点

カスプ辺：特異点 $p (f(p))$ の近傍での定義域・値域の座標変換により

$$f(u, v) := (u^2, u^3, v)$$

と書ける特異点 (波面)

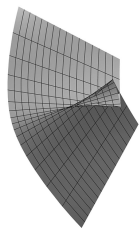


フロントル： \exists 単位法線ベクトル $\nu: U \rightarrow S^2 \subset \mathbf{R}^3$ (C^∞)

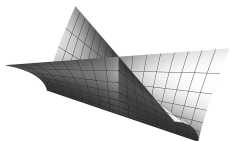
波面：フロントル かつ $(f, \nu): M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \times S^2$ がはめ込み

判定条件：國分-Rossman-佐治-UY (2005) [28]

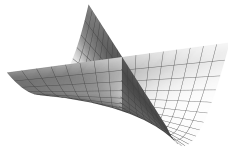
曲面に現れる特異点



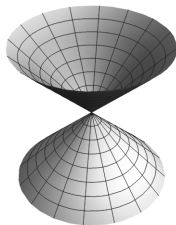
燕の尾
(波面)



カスプ状交叉帽子
(フロントル)



交叉帽子



錐的特異点
(波面)

判定条件

- カスプ辺・燕の尾：國分-Rossman-佐治-UY (2005) [28]
- カスプ状交叉帽子：藤森-佐治-UY (2008) [14]
- 交叉帽子：H. Whitney (1944)

波面のガウス・ボンネの定理

- M^2 : コンパクト・向き付けられた C^∞ -多様体 ; (u, v) : 正の座標
- $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$: 波面 ; $\nu: M^2 \rightarrow S^2 \subset \mathbf{R}^3$: 単位法線 (フロントル)
- 特異点はカスプ辺と燕の尾 .
- $dA_f = |\det(f_u, f_v, \nu)| du \wedge dv$ (面積要素) ,
 $d\hat{A}_f = \det(f_u, f_v, \nu) du \wedge dv$ (符号付き面積要素)
- K_f : ガウス曲率 ; κ_s : カスプ辺の特異曲率
- S_\pm : 正負の燕の尾の個数

Theorem (佐治-UY (2009) [29])

$$\int K_f dA_f = 2\pi\chi(M^2) - 2 \int_{\Sigma} \kappa_s ds$$
$$\int K_f d\hat{A}_f = 2\pi(\chi(M_+) - \chi(M_-))$$
$$+ S_+ - S_-.$$

Theorem (佐治-UY (2012) [31])

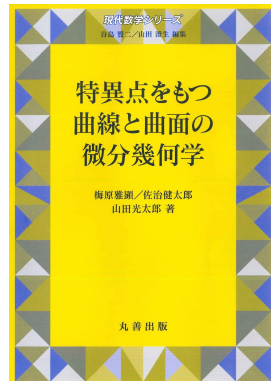
$$\int K_\nu dA_\nu = \int K_f d\hat{A} = \dots$$
$$\int K_\nu d\hat{A}_\nu = \int |K_f| dA = \dots$$

波面のガウス・ボンネの定理

- 波面 f の 2 つのガウス・ボンネの公式
- 単位法線ベクトル場 ν をフロントアルとみなして得られる 2 つのガウス・ボンネの公式

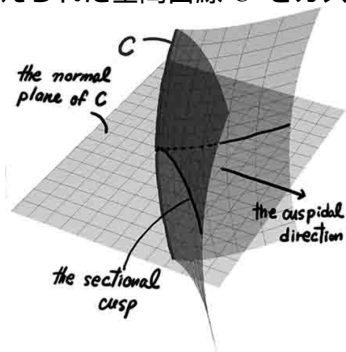
合わせて 4 通りの公式が得られる。

- 応用：佐治-UY (2012) [31]
- 詳細：
梅原-佐治-山田
「特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学」
(2017, 丸善) [33]



カスプ辺の異性体

与えられた空間曲線 C をカスプ辺にもつ波面を考える .



- $\gamma(t)$: C の径数表示
- $\kappa(t)$: γ の曲率 (仮定 : $\kappa > 0$)
- $v(t)$: “cuspidal direction” 方向の単位ベクトル
- $\theta(t)$: $v(t)$ が γ の主法線と成す角 .

$$\text{特異曲率} = \kappa_s = \kappa \cos \theta$$

- ジェネリック : $|\kappa_s(t)| < \kappa(t)$
- 許容的 : $\max |\kappa_s(t)| < \min \kappa(t)$

(注 : ジェネリック \Rightarrow 局所的には許容的)

異性体

Definition

カusp辺の像を共有する波面 f_1, f_2 に対して f_2 が f_1 の異性体であるとは、次を満たすこと：

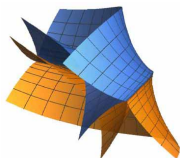
- 共通の第一基本形式をもつ；
- f_1 と f_2 の像は一致しない

Theorem (本田-直川-佐治-UY (2020) [19] ; 直川-UY (2016))

実解析的でジェネリックなカusp辺 f は特異曲率が同一の異性体をもつ。

証明のポイント：

- Janet-Cartan の方法 (cf. 2次元リーマン多様体の等長実現問題)
- Cauchy-Kovalevski の定理を用いる．初期値のとり方が2通り．



この異性体を f の双対とよび \check{f} と書く。

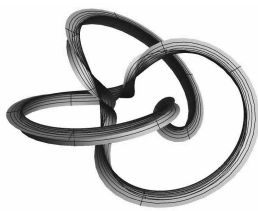
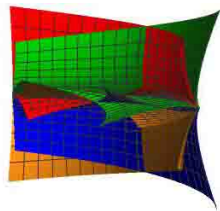
カスプ辺の異性体の個数

特異曲線 γ が有界閉区間で定義されているとき：

- 実解析的かつ許容的 ($\max |\kappa_s(t)| < \min \kappa(t)$) なカスプ辺はさらに2つ異性体をもつ可能性がある (本田-直川-佐治-UY (2020) [19]) .

特異曲線 γ が単純閉曲線であるとき

- 実解析的かつ許容的 ($\max |\kappa_s(t)| < \min \kappa(t)$) なカスプ辺は**無限個**の異性体をもつ可能性がある (本田-直川-佐治-UY (2020) [20])



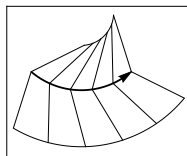
紙の曲線折り (カस्प邊の異性体との類似)

Γ : 平面曲線 弧長 a 曲率 $\mu \neq 0$

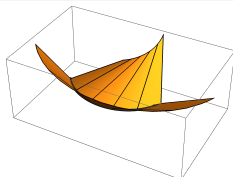
C : 空間曲線 弧長 a 曲率 $\kappa > 0$; $|\mu| < \kappa$

Question

紙を Γ に沿って折り, 折り目が C となるような折り方は何通りか?

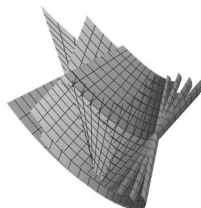
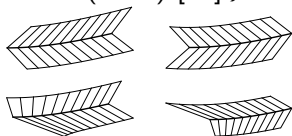


Γ



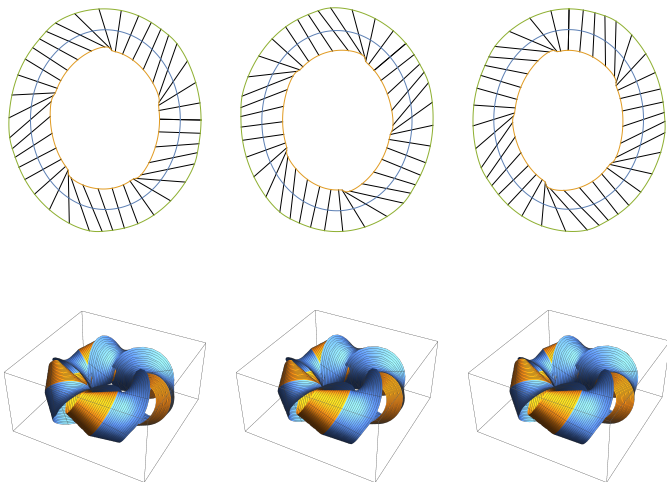
C

一般に 4 つ (本田-直川-佐治-UY (2020) [21])



閉曲線折り

無限個存在する (本田-直川-佐治-UY (2020) [22])



第2部, 極大曲面の幾何学.

梅原雅顕・山田光太郎

極大曲面とは?

$(\mathbf{R}_1^3; x, y, t)$: 符号数 $(+ + -)$ の Lorentz-Minkowski 時空,
 U を \mathbf{R}^2 の領域とし,

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}_1^3$$

を「はめ込み」(immersion) とせよ.

ds_f^2 を第一基本形式とするとき $p \in U$ の属性を以下で定義する:

p が空間的 space-like (時間的 time-like)

$\iff ds_f^2$ が点 p で Riemann (Lorentz) 計量を定める.

$p \in U$ が光的 (light-like) $\iff ds_f^2$ が点 p で退化する.

とする. 本講演では原則として

極大曲面 := 空間的かつ平均曲率が零の「はめ込み」

とする.

極大面の定義

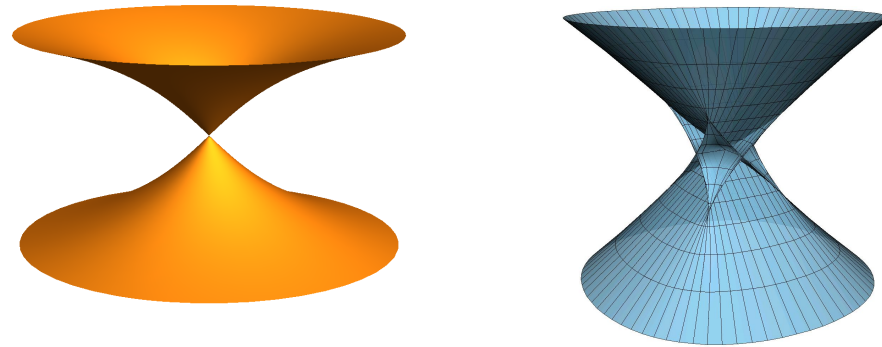


図 1. 遠方で埋め込みとなる極大面 (左は 極大カテナイド, 右は Kim-Yang 曲面 [24]).

M^2 を Riemann 面とし, C^∞ -写像 $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ が

- M^2 の開かつ稠密な部分集合 W が存在し, 制限写像 $f|_W$ は空間的な**零平均曲率**共形はめ込みを定め, また f の特異点で $df(p)$ は零にならない,

という性質をもつとき **極大面** (maxface) とよぶ (梅原-山田 [35]).

- (1) 重要な例 (小林治の論文 [26,27], 今出水-加藤の論文 [23] の例など) は, すべて極大面となる.
- (2) 上図の 2 つの例は, 遠方で自己交叉のない極大面を与える.
- (3) 極大面は, ある「正則はめ込み」 $F : \tilde{M}^2 \rightarrow \mathbf{C}^3$ の実部で書ける.
- (4) 極大面はフロントルで, カスプ辺, ツバメの尾, カスプ状交叉帽子がジェネリックな特異点となる. (藤森-佐治-梅原-山田 [14]) (cf. 上の二つの例)

特異点の双対性

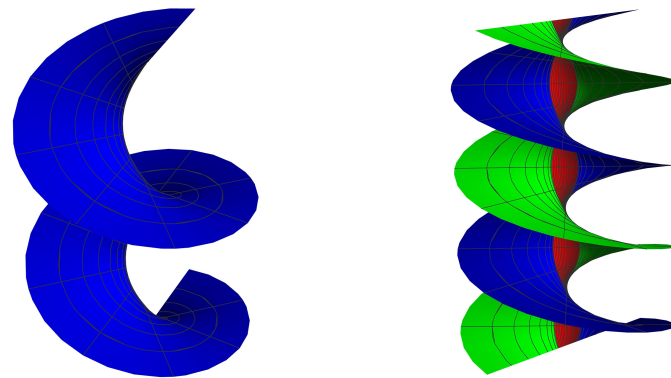
極大面 f は、正則はめ込み F の実部であるが、虚部 $f^* := \text{Im}(F)$ を共役極大面という。 f と f^* は、特異点を共有し、以下の双対性をもつ。

- (i) f のカスプ辺は f^* のカスプ辺に対応 (梅原-山田 [35]).
- (ii) f のツバメの尾 (カスプ状交叉帽子) は f^* のカスプ状交叉帽子 (ツバメの尾) に対応 (藤森-佐治-梅原-山田 [14]).
- (iii) f の錐的特異点 (折り目特異点) は f^* の折り目特異点 (錐的特異点) に対応 (藤森-Kim-Koh-Rossman-Shin-梅原-山田-Yang [12]).

写像 $\mathbf{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u, v^2, 0) \in \mathbf{R}^3$ に定義域と値域の座標変換で一致させることができる写像芽を折り目 (特異点) とよぶ。

Fact 1 (Gu 1986 [16], 文献 [12] も参照). 極大面の折り目特異点集合を越えて極大面は、時間的な零平均曲率曲面への実解析的延長を有する。

(折り目特異点は拡張後の曲面の光的な正則点となる.)



折り目特異点をなす曲線上の2点を結ぶ線分の midpoint の軌跡が時間的延長となる。

折り目特異点による極大(曲)面の解析的延長の例

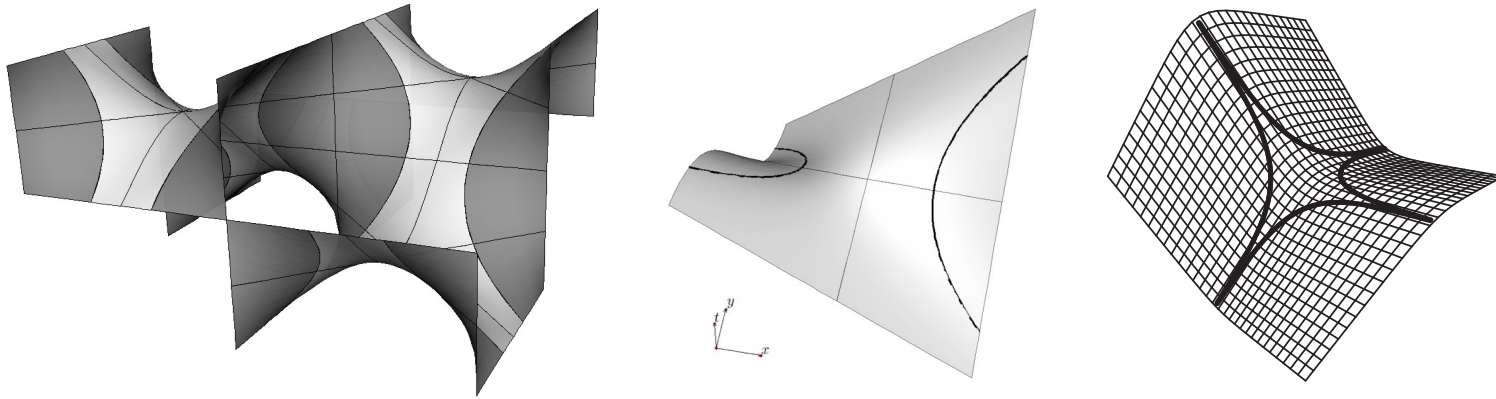


図 2. Schwarz D型の3重周期的な極大曲面 (左) 小林氏の entire graph (中央と右).

- Schwarz D型の極大曲面は、折り目特異点のみをもち、その解析的延長は3重周期的な埋め込みである (藤森-Rossmann-梅原-山田 [13], 上図左).
- 小林治氏 [26] による平均曲率が零の entire graph の2つの例 (上図右)

$$t(x, y) := x \tanh 2y, \quad t(x, y) := \log(\cosh x / \cosh y).$$

は空間的部分を含む零平均曲率 entire graph を与える.

但し entire graph = \mathbf{R}^2 上の関数のグラフ.

- この2つの例を含む entire graph に拡張される極大曲面族 (小林曲面) が藤森-國分-川上-Rossmann-梅原-山田 [9] で構成されている.
(これは、極小曲面では起きないことである.)

極小曲面の Bernstein の定理とその時空版

Bernstein の定理 (1914) 関数 $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ のグラフが \mathbf{R}_0^3 の極小曲面を定めるならば φ は1次関数である。

- これは、関数 $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ($n \leq 7$) の \mathbf{R}_0^{n+1} におけるグラフが極小ならば1次関数になる、という形で拡張されている。

De Giorgi $n = 3$ (1965), Almgren $n = 5$ (1966), Simons $n = 6, 7$ (1968).

- $n \geq 8$ では反例あり, Bombieri-De Giorgi-Giusti 1969.

Calabi [6] (1968) 関数 $\psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ のグラフが \mathbf{R}_1^3 において空間的極大曲面を定めるならば ψ は1次関数である。

- Calabi [6] は、 \mathbf{R}_1^{n+1} ($n = 3, 4$) の超曲面にまで拡張し、Cheng-Yau [7] は、すべての \mathbf{R}_1^{n+1} の超曲面にまで拡張した。
- 上記の主張で「空間的」という仮定は重要である。

極小曲面と極大曲面の流体力学的双対性

D を \mathbf{R}^2 の単連結な領域, C^∞ -関数 $\varphi : D \rightarrow \mathbf{R}$ のグラフが, \mathbf{R}_0^3 の極小曲面を定めていたとせよ. つまり $(1 + \varphi_y^2)\varphi_{xx} - 2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y + (1 + \varphi_x^2)\varphi_{yy} = 0$ とすると,

$$\begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}} \begin{pmatrix} -\varphi_y \\ \varphi_x \end{pmatrix}$$

で定まる関数 $\psi : D \rightarrow \mathbf{R}$ は $\psi_x^2 + \psi_y^2 < 1$ を満たし, そのグラフは \mathbf{R}_1^3 の空間的極大曲面を定める. 逆に C^∞ -関数 $\psi : D \rightarrow \mathbf{R}$ のグラフが, \mathbf{R}_1^3 の空間的極大曲面を定めていたとせよ. つまり

$$(1 - \psi_y^2)\psi_{xx} + 2\psi_{xy}\psi_x\psi_y + (1 - \psi_x^2)\psi_{yy} = 0$$

とすると (以後, これを零平均曲率曲面の定義に用いる)

$$\begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \psi_x^2 - \psi_y^2}} \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix}$$

で定まる関数 $\varphi : D \rightarrow \mathbf{R}$ のグラフは \mathbf{R}_0^3 の極小曲面を定める.

- この事実は Bers の流体力学の本 [5] に implicit に書かれている. φ は2次元流体 (Chaplygin gas flow) の速度ポテンシャル, ψ は同じ流体の流れの関数に対応する ([3,12] に解説あり).
- Calabi も, この事実を知っており, $n = 2$ の場合には, 極小曲面の Bernstein の定理から, 極大曲面の Bernstein 型の定理を導いている.

光的点に関する Klyachin の定理

光的点の近傍で、零平均曲率曲面は必ずグラフで表される。

$\psi : D \rightarrow \mathbf{R}$ が零平均曲率のグラフを与えるとき

$$B := 1 - (\psi_x)^2 - (\psi_y)^2$$

が零となる点が**光的点**に対応するが

$$\nabla B := (B_x, B_y)$$

が零になるときを**退化**するという。また、そうでないとき**非退化**である、という。

(Fact) 極大面の折り目特異点は、解析的な拡張の後、非退化な光的点を与える。逆に、非退化な特異点があると、それは空間的極大曲面の折り目特異点からの解析的拡張とみなせる。

Klyachin (2003) は、以下の定理を示した。

(\mathbf{R}_1^3 の零平均曲率曲面の直線定理, Klyachin [25])

\mathbf{R}_1^3 に、はめ込まれた零平均曲率曲面が、退化した光的点をもつと、曲面は、その点の像を通る光的直線の一部を含む。

退化する光的点を許容する例

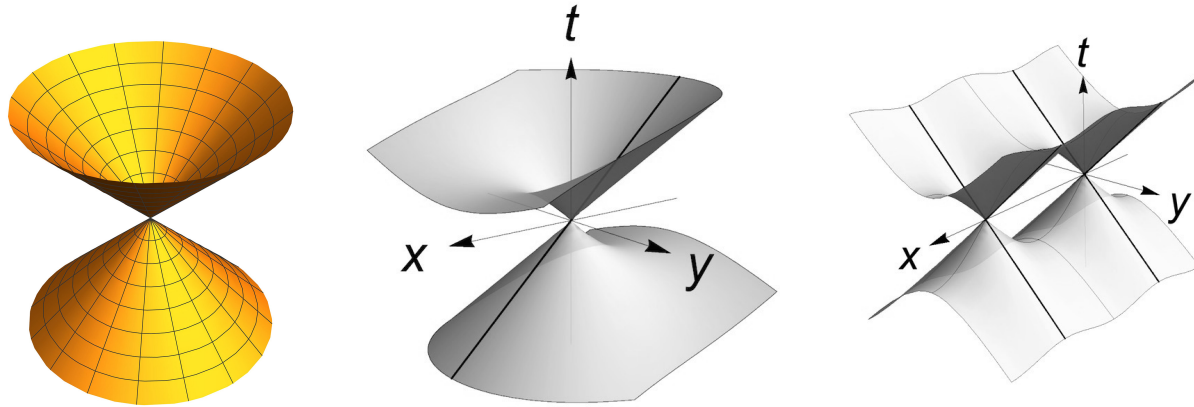


図 3. 左から光錐，放物的カテナイドと双曲的カテナイド.

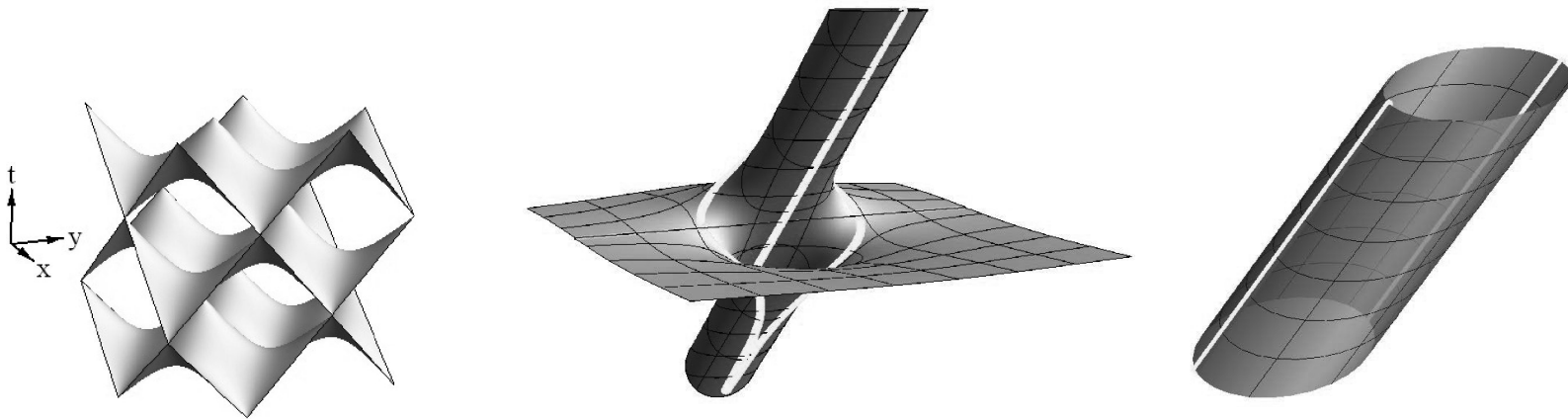


図 4. Scherk 曲面型極大曲面と，赤嶺氏 [1] の混合型と時間的な例

- 橋本・加藤 [17] の bi-complex number を用いた具体例の構成.

直線定理の一般化

(M_1^{n+1}, g) : $(n+1)$ 次元 Lorentz 多様体, $U^n; (\mathbf{R}^n, u_1, \dots, u_n)$ の領域.
 $f: U^n \rightarrow M_1^{n+1}$ を「はめ込み」とし,
その第一基本形式とその係数行列の行列式を以下で表す.

$$ds_f^2 = \sum_{j,k=1}^n s_{j,k} du_j du_k, \quad B := \det \begin{pmatrix} s_{1,1} & \cdots & s_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & \cdots & s_{n,n} \end{pmatrix}.$$

$p \in U^n$ が**退化した光的点** $\Leftrightarrow B_p = 0$ and $(\nabla B)_p = 0$.

光的点の近傍 U^n で f に沿う特別なベクトル場 $\tilde{\nu}$ が一意に存在する. D を M_1^{n+1} の Levi-Civita 接続とし,

$$A := \sum_{j,k=1}^n \tilde{s}^{j,k} \tilde{h}_{j,k}, \quad \tilde{h}_{j,k} := g(D_{\partial/\partial u_j} df(\partial/\partial u_k), \tilde{\nu}),$$

とおく, 但し $(\tilde{s}^{j,k})_{j,k=1,\dots,n}$ は $(s_{j,k})_{j,k=1,\dots,n}$ の余因子行列とする.

零平均曲率超曲面 $\Leftrightarrow A = 0$, 光的超曲面 $\Leftrightarrow B = 0$.

定理 (梅原-山田 [36, 37]) $f : U^n \rightarrow M_1^{n+1}$ を C^3 -級の零平均曲率はめ込みとし $p \in U^n$ を退化した光的点とすると, f の像は, $f(p)$ を通る光的測地線分を含む.

- $n = 2$ かつ $M_1^3 := \mathbf{R}_1^3$ の場合が Klyachin の定理だが証明は全く別.
- 定理の仮定を満たす超曲面は沢山存在する.
- 光的な超曲面 ($B \equiv 0$) は零平均曲率 ($A \equiv 0$) なので定理の仮定を満たす.
- C^2 -級で成り立つかは不明. 実解析的なら平均曲率一定でも OK.

Calabi, Cheng-Yau の Bernstein 型の定理の拡張として以下のことが示せる.

(定理, 赤嶺-本田-梅原-山田 [1]) C^3 級の関数 $\psi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ のグラフが \mathbf{R}_1^{n+1} において時間的な点を持たない零平均曲率超曲面を定めるならば ψ は 1 次関数である.

- $n = 2$ のときは, 極小曲面と極大曲面の流体力学的双対性を用いて別証明ができる (赤嶺-梅原-山田 [3]).

退化した光的点をもつと, entire graph であることから光的直線全体を含む. 定理は, 以下の補題に帰着する.

補題 (R. Bartnik). $\bar{\Omega}$ を \mathbf{R}^n における凸開領域の閉包とし, 直線 l は $\bar{\Omega}$ の部分集合とする. いま $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$ は C^1 -級の関数で $\bar{\Omega}$ の各点は, 時間的でないとせよ. もしも ψ のグラフが, \mathbf{R}_1^3 の光的直線を含むならば グラフ全体が光的な超平面に含まれる.

最後に

ほとんどの研究は、山田-梅原だけでなく、多くの方々との共同研究です。これまで、研究を継続し、さらに研究を深めることができたのは、共同研究者と会って、自分だけでは思いつかない着眼点や目標を見いだすことができたおかげと感謝しています。