トポロジーは応用できるか?

玉木 大

信州大学理学部数理・自然情報科学科

2011年10月1日

--- 日本数学会秋季総合分科会 市民講演会 ---

トポロジーとは何か?

トポロジーとは?

トポロジーとは?

- トポロジー ＝ 柔らかい幾何学？

トポロジーとは?

- トポロジー $=$ 柔らかい幾何学？

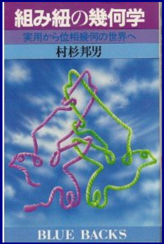
$\cong$

トポロジーとは?

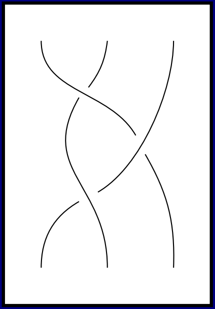
- トポロジー ＝ 柔らかい幾何学？

 $\cong$ 

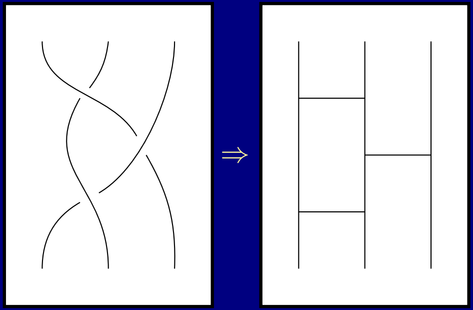
- 個人的には



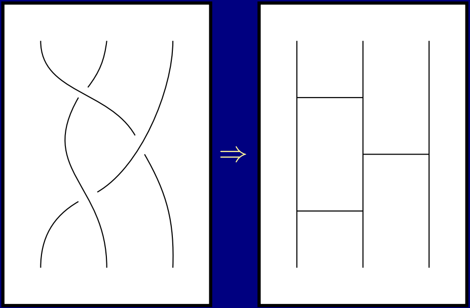
組み紐 (braid) とは?



組み紐 (braid) とは?

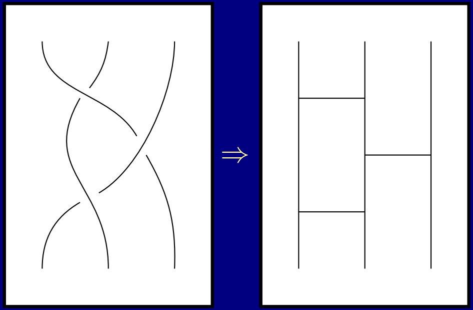


組み紐 (braid) とは?



- あみだくじの立体版。
- 様々な分野で, 捻れを表わすときに使われる。

組み紐 (braid) とは?

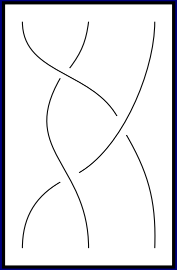


- あみだくじの立体版。
- 様々な分野で, 捻れを表わすときに使われる。
- あみだくじで少しぐらい横棒の位置を上下にずらしても結果は同じ

  ⇒ 連続的変形で移りあうものは同一視する。

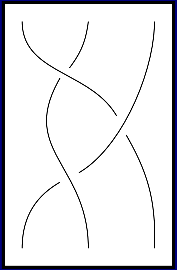
結び目と絡み目

- 組み紐を閉じると, 絡み目 (link) や結び目 (knot) ができる。

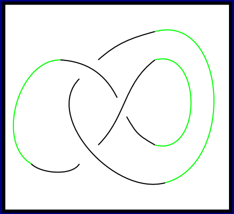


結び目と絡み目

- 組み紐を閉じると, 絡み目 (link) や結び目 (knot) ができる。

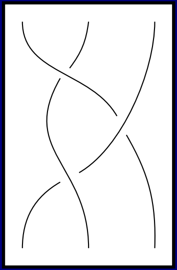


⇒

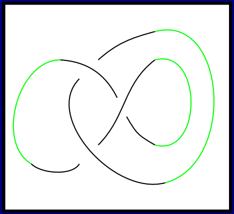


結び目と絡み目

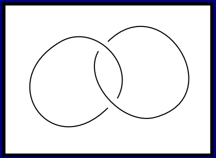
- 組み紐を閉じると, 絡み目 (link) や結び目 (knot) ができる。



$\Rightarrow$

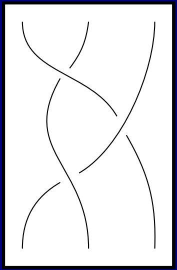


$\cong$

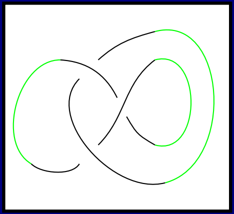


結び目と絡み目

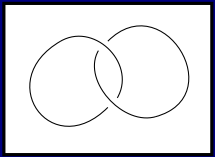
- 組み紐を閉じると, 絡み目 (link) や結び目 (knot) ができる。



⇒



≅

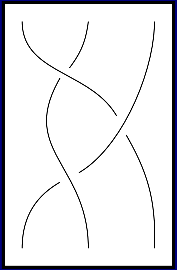


- 連続的変形で解けるかどうかを調べる。

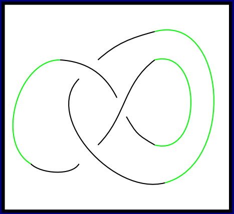
  ⇒ 結び目理論

結び目と絡み目

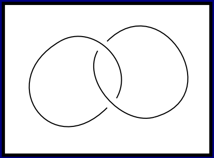
- 組み紐を閉じると, 絡み目 (link) や結び目 (knot) ができる。



$\Rightarrow$



$\cong$



- 連続的変形で解けるかどうかを調べる。

  $\Rightarrow$ 結び目理論

- トポロジーの入門書では, 結び目が題材として使われることが多い。

柔らかい幾何学

- トポロジーのアイデアをまとめて書いたのはポアンカレ (Poincaré) が最初。

柔らかい幾何学

- トポロジーのアイデアをまとめて書いたのはポアンカレ (Poincaré) が最初。
- ポアンカレは, 多様体を調べたかった。
  - Analysis Situs (122ページ, 1895年)
  - 不完全さを指摘される ⇒ 5つの補足

    59ページ (1899年), 32ページ (1900年), 22ページ (1902年), 46ページ (1902年), 66ページ (1904年)

柔らかい幾何学

- トポロジーのアイデアをまとめて書いたのはポアンカレ (Poincaré) が最初。
- ポアンカレは, 多様体を調べたかった。
  - Analysis Situs (122ページ, 1895年)
  - 不完全さを指摘される $\Rightarrow$ 5つの補足

    59ページ (1899年), 32ページ (1900年), 22ページ (1902年), 46ページ (1902年), 66ページ (1904年)
  - 様々な新しいアイデア

    $\Rightarrow$ ホモロジー

    $\Rightarrow$ 基本群

    $\Rightarrow$ 単体的複体

    $\Rightarrow$ $\cdots$

柔らかい幾何学

- トポロジーのアイデアをまとめて書いたのはポアンカレ (Poincaré) が最初。
- ポアンカレは, 多様体を調べたかった。
  - Analysis Situs (122ページ, 1895年)
  - 不完全さを指摘される $\Rightarrow$ 5つの補足

    59ページ (1899年), 32ページ (1900年), 22ページ (1902年), 46ページ (1902年), 66ページ (1904年)
  - 様々な新しいアイデア

    $\Rightarrow$ ホモロジー

    $\Rightarrow$ 基本群

    $\Rightarrow$ 単体的複体

    $\Rightarrow$ $\cdots$
- トポロジーの三つの要素 (個人的な意見)
  1. 連続的変形を扱う
  2. 不変量を駆使する
  3. グローバルな視点

連続的変形: 同相, アイソトピー

- つぶしたりすることなく曲げるだけで変形する
  - コーヒーカップとドーナツは同相

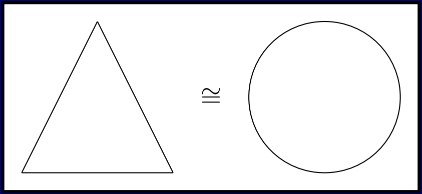
$\cong$

連続的変形: 同相, アイソトピー

- つぶしたりすることなく曲げるだけで変形する
  - コーヒーカップとドーナツは同相

$\cong$

  - 三角形と円は同相

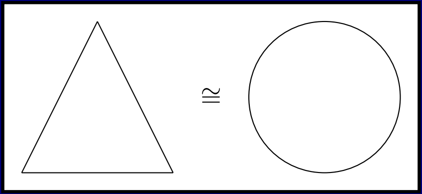


連続的変形: 同相, アイソトピー

- つぶしたりすることなく曲げるだけで変形する
  - コーヒーカップとドーナツは同相

$\cong$

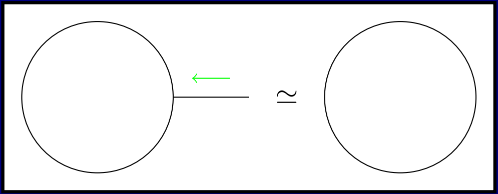
  - 三角形と円は同相



- 変形の手順がアイソトピー。

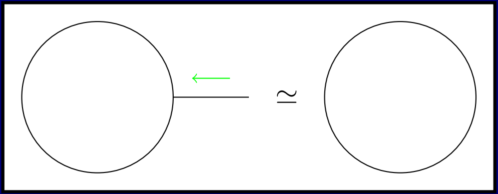
連続的変形: ホモトピー同値, ホモトピー

- つぶしてもよい変形 (ホモトピー同値)

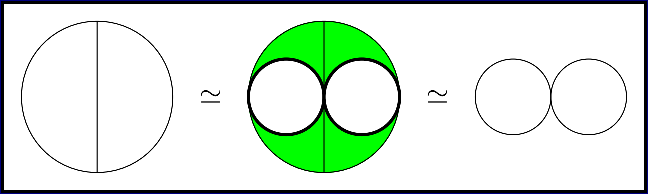


連続的変形: ホモトピー同値, ホモトピー

- つぶしてもよい変形 (ホモトピー同値)



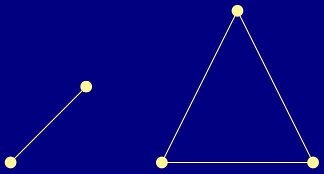
- 拡大してもよい。



- 変形の手順がホモトピー。

不変量：オイラー (Euler) 標数

- 単体的複体とは, 頂点, 辺, 面 (三角形), . . ., を組合せてできているもの。



- 単体的複体 K に対し, K の n 次元面の数を K_n で表わすとき

$$\chi(K) = K_0 - K_1 + K_2 - \cdots + (-1)^n K_n + \cdots$$

を K のオイラー標数という。

不変量: オイラー (Euler) 標数

- 線分 I のオイラー標数は 1

$$\chi(I) = 2 - 1 = 1$$

- 三角形 Δ^2 のオイラー標数も 1

$$\chi(\Delta^2) = 3 - 3 + 1 = 1$$

- 三角形の縁だけ $\partial\Delta^2$ ならオイラー標数は 0

$$\chi(\partial\Delta^2) = 3 - 3 = 0$$

- 単体的複体 K と L がホモトピー同値なら $\chi(K) = \chi(L)$
- $\chi(L) \neq \chi(L) \Rightarrow K$ と L は連続的変形で移りあえない。
- このような性質を持つものを不変量という。

不変量：ホモロジー

- 単体的複体 K に対し, アーベル群の列

$$H_0(K), H_1(K), H_2(K), \ldots$$

が作られる。$H_n(K)$ を K の n 次ホモロジー群という。

不変量：ホモロジー

- 単体的複体 K に対し, アーベル群の列

$$H_0(K), H_1(K), H_2(K), \ldots$$

が作られる。$H_n(K)$ を K の n 次ホモロジー群という。
- $H_n(K)$ に含まれる $\mathbb{Z}$ の直和成分の数を $b_n(K)$ とすると

$$\chi(K) = b_0 - b_1 + b_2 - \cdots + (-1)^n b_n + \cdots$$

- b_n を K の n 次ベッチ (Betti) 数という。
- ホモロジーはオイラー標数やベッチ数より精密な不変量。(categorification)
- K と L がホモトピー同値 $\Rightarrow H_n(K) \cong H_n(L)$

グローバルな視点

- ホモロジーは, 単体的複体や多様体のような幾何学的対象に対し アーベル群を対応させる「関数」のようなもの。

$$H_n : \text{幾何学的対象} \longrightarrow \text{アーベル群}$$

- 各種「幾何学的対象」やアーベル群全体は圏という構造を持つ。
- ホモロジーは, 二つの圏の間の関手というものになっている。

グローバルな視点

- ホモロジーは, 単体的複体や多様体のような幾何学的対象に対し アーベル群を対応させる「関数」のようなもの。

$$H_n : \text{幾何学的対象} \longrightarrow \text{アーベル群}$$

- 各種「幾何学的対象」やアーベル群全体は圏という構造を持つ。
- ホモロジーは, 二つの圏の間の関手というものになっている。
  - ⇒ アイレンバーグ (Eilenberg) と スティーンロッド (Steenrod) によるホモロジーの公理化
  - ⇒ アイレンバーグと マクレイン (Mac Lane) による圏と関手の理論
  - ⇒ 大域的な視点

トポロジーは何に使えるのか?

トポロジーは何に使えるのか?

- 適当に曲げたりつぶしたりできるのは, 数学としていい加減すぎる!

トポロジーは何に使えるのか?

- 適当に曲げたりつぶしたりできるのは, 数学としていい加減すぎる!

  $\Rightarrow$ キチンと計算して答えを出したい。

トポロジーは何に使えるのか?

- 適当に曲げたりつぶしたりできるのは, 数学としていい加減すぎる!
  - $\Rightarrow$ キチンと計算して答えを出したい。
- トポロジーで使う不変量は大雑把すぎる!

トポロジーは何に使えるのか?

- 適当に曲げたりつぶしたりできるのは, 数学としていい加減すぎる!
  - ⇒ キチンと計算して答えを出したい。
- トポロジーで使う不変量は大雑把すぎる!
  - ⇒ 三角形と円と一点が「同じ」では何も区別できないのと同じ。

トポロジーは何に使えるのか?

- 適当に曲げたりつぶしたりできるのは, 数学としていい加減すぎる!
  - ⇒ キチンと計算して答えを出したい。
- トポロジーで使う不変量は大雑把すぎる!
  - ⇒ 三角形と円と一点が「同じ」では何も区別できないのと同じ。
- 単体的複体全体やアベール群全体を考えるなど雲をつかむようで, 到底実生活には使えなさそう!

トポロジーは何に使えるのか?

- 適当に曲げたりつぶしたりできるのは, 数学としていい加減すぎる!
  - ⇒ キチンと計算して答えを出したい。
- トポロジーで使う不変量は大雑把すぎる!
  - ⇒ 三角形と円と一点が「同じ」では何も区別できないのと同じ。
- 単体的複体全体やアベール群全体を考えるなど雲をつかむようで, 到底実生活には使えなさそう!
  - ⇒ 確かにその通り。

トポロジーは何に使えるのか?

- 適当に曲げたりつぶしたりできるのは, 数学としていい加減すぎる!
  $\Rightarrow$ キチンと計算して答えを出したい。
- トポロジーで使う不変量は大雑把すぎる!
  $\Rightarrow$ 三角形と円と一点が「同じ」では何も区別できないのと同じ。
- 単体的複体全体やアベール群全体を考えるなど雲をつかむようで, 到底実生活には使えなさそう!
  $\Rightarrow$ 確かにその通り。

- 今日の予定
  1. トポロジーと他の分野との関係 (簡単に)
  2. トポロジーと (広い意味の) 工学
  3. まとめ

他の分野との関連

実は結構色んな分野と関係がある

- 理論物理学
  - ゲージ理論 (gauge theory)

- 1980年代から
- 4次元多様体のトポロジー
- どちらかというと物理学のトポロジー (幾何学) への応用

実は結構色んな分野と関係がある

- 理論物理学
  - ゲージ理論 (gauge theory)

- 1980年代から
- 4次元多様体のトポロジー
- どちらかというと物理学のトポロジー (幾何学) への応用

  - 弦理論 (string theory)

- 1980年代後半〜
- ジョーンズ (Jones) 多項式
- Dブレーン (D-brane) と K理論
- ラングランズ (Langlands) プログラム
- $\cdots$

実は結構色んな分野と関係がある

- 理論物理学
  - ゲージ理論 (gauge theory)

    - 1980年代から
    - 4次元多様体のトポロジー
    - どちらかというと物理学のトポロジー (幾何学) への応用
  - 弦理論 (string theory)

    - 1980年代後半〜
    - ジョーンズ (Jones) 多項式
    - Dブレーン (D-brane) と K理論
    - ラングランズ (Langlands) プログラム
    - . . .
- Wittenの登場以来, 理論物理学との関係は, トポロジー以外の数学の分野 (代数幾何学, 数論, . . .) でも顕著。

生物学や化学

- 理論物理学は抽象的で数学にかなり近い

生物学や化学

- 理論物理学は抽象的で数学にかなり近い

  $\Rightarrow$ 他には?

生物学や化学

- 理論物理学は抽象的で数学にかなり近い
  - ⇒ 他には?
- DNAや高分子は, 3次元空間内の図形とみなせる。

(Sumners, AMS Notices, 1995)

生物学や化学

- 理論物理学は抽象的で数学にかなり近い
  - ⇒ 他には?
- DNAや高分子は, 3次元空間内の図形とみなせる。

(Sumners, AMS Notices, 1995)

- DNAのトポロジカルな性質 (ねじれや絡み) がどのような生物学的な性質と関係しているかを調べる DNAトポロジーという分野もある。
- 1980年代から。(Sumnersら)
- 高分子についても同様。

生物学や化学

- 理論物理学は抽象的で数学にかなり近い
  $\Rightarrow$ 他には?
- DNAや高分子は, 3次元空間内の図形とみなせる。

(Sumners, AMS Notices, 1995)

  - DNAのトポロジカルな性質 (ねじれや絡み) がどのような生物学的な性質と関係しているかを調べる DNAトポロジーという分野もある。
  - 1980年代から。(Sumnersら)
  - 高分子についても同様。
- これらは,「柔らかい幾何学」というイメージに近い応用

他には?

21世紀になってから，工学や情報科学でトポロジーの道具や考え方が使われることが増えてきた。

他には?

21世紀になってから，工学や情報科学でトポロジーの道具や考え方が使われることが増えてきた。

- ロボティクス

他には?

21世紀になってから, 工学や情報科学でトポロジーの道具や考え方が使われることが増えてきた。

- ロボティクス

  工場の中のロボットの動きを計画する (robot motion planning)。

他には?

21世紀になってから, 工学や情報科学でトポロジーの道具や考え方が使われることが増えてきた。

- ロボティクス

  工場の中のロボットの動きを計画する (robot motion planning)。

- 画像認識

他には?

21世紀になってから，工学や情報科学でトポロジーの道具や考え方が使われることが増えてきた。

- ロボティクス

  工場の中のロボットの動きを計画する (robot motion planning)。

- 画像認識

  ホモロジーを用いて図形の形を調べる。

他には?

21世紀になってから, 工学や情報科学でトポロジーの道具や考え方が使われることが増えてきた。

- ロボティクス

  工場の中のロボットの動きを計画する (robot motion planning)。

- 画像認識

  ホモロジーを用いて図形の形を調べる。

- センサーネットワーク

他には?

21世紀になってから, 工学や情報科学でトポロジーの道具や考え方が使われることが増えてきた。

- ロボティクス

  工場の中のロボットの動きを計画する (robot motion planning)。

- 画像認識

  ホモロジーを用いて図形の形を調べる。

- センサーネットワーク

  多数のセンサーで必要な情報を取り出すには?

他には?

21世紀になってから, 工学や情報科学でトポロジーの道具や考え方が使われることが増えてきた。

- ロボティクス

  工場の中のロボットの動きを計画する (robot motion planning)。

- 画像認識

  ホモロジーを用いて図形の形を調べる。

- センサーネットワーク

  多数のセンサーで必要な情報を取り出すには?

- 並列処理やデータベースの理論

他には?

21世紀になってから, 工学や情報科学でトポロジーの道具や考え方が使われることが増えてきた。

- ロボティクス

  工場の中のロボットの動きを計画する (robot motion planning)。
- 画像認識

  ホモロジーを用いて図形の形を調べる。
- センサーネットワーク

  多数のセンサーで必要な情報を取り出すには?
- 並列処理やデータベースの理論

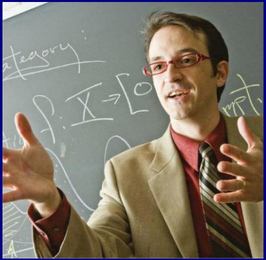
  モデル圏の構造。
- . . .

トポロジーと工学や情報科学

ロバート グライスト (Robert Ghrist)

- ロボティクス (robotics)
- センサーネットワーク (sensor networks)
- 流体力学
- . . .

ロバート グライスト (Robert Ghrist)



- ロボティクス (robotics)
- センサーネットワーク (sensor networks)
- 流体力学
- . . .

「トポロジーが使える道具だということを
工学の人達に宣伝している。」
(2007年 シンガポール国立大学にて)

Ghristだけではない

- Michael Farber
  - ロボティクス
- Edelsbrunner, Zomorodian, Carlsson, ...
  - 持続性ホモロジー (persistent homology)
- Edelsbrunner, Mischaikow, ...
  - 計算トポロジー (computational topology)
- Gaucher, Bubenik, ...
  - 並列処理の理論 (concurrency)
- ...

Ghristだけではない

- Michael Farber
  - ロボティクス
- Edelsbrunner, Zomorodian, Carlsson, ...
  - 持続性ホモロジー (persistent homology)
- Edelsbrunner, Mischaikow, ...
  - 計算トポロジー (computational topology)
- Gaucher, Bubenik, ...
  - 並列処理の理論 (concurrency)
- ...

21世紀に入り, 応用トポロジー (applied topology) という分野ができた。 (急速に発展している。)

ロボティクス (robotics)

問題: 工場の中で特定の通路の上を動く複数のロボットを制御するには?

ロボティクス (robotics)

問題: 工場の中で特定の通路の上を動く複数のロボットを制御するには?

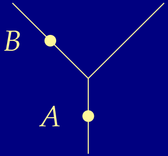
- 直線上の2台のロボットを入れ替えることはできない。

ロボティクス (robotics)

問題: 工場の中で特定の通路の上を動く複数のロボットを制御するには?

- 直線上の2台のロボットを入れ替えることはできない。

- Υ字型の通路上の2台なら入れ替えられる。

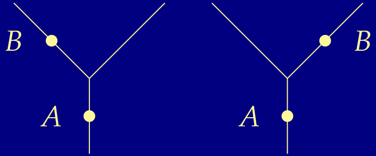


ロボティクス (robotics)

問題: 工場の中で特定の通路の上を動く複数のロボットを制御するには?

- 直線上の2台のロボットを入れ替えることはできない。

- Υ字型の通路上の2台なら入れ替えられる。

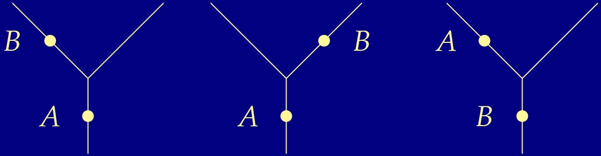


ロボティクス (robotics)

> 問題: 工場の中で特定の通路の上を動く複数のロボットを制御するには?

- 直線上の2台のロボットを入れ替えることはできない。

- Υ字型の通路上の2台なら入れ替えられる。



ロボティクス (robotics)

より複雑な通路上により多くのロボットが配置されているときは どのようにえればよいだろうか?

ロボティクス (robotics)

より複雑な通路上により多くのロボットが配置されているときは どのように考えればよいだろうか?

- グラフG上のn個のロボットの配置を $G^n = \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n}$の点$(x_1, \ldots, x_n)$ と考える。
- ロボットが互いにぶつからない $\Rightarrow x_1, \ldots, x_n$が全て異なる。

$$\mathrm{Conf}_n(G) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in G^n \mid x_i \neq x_j \ (i \neq j)\}$$

- n個のロボットが同時に互いにぶつらからいように動く
  $\Rightarrow$ $\mathrm{Conf}_n(G)$内の道

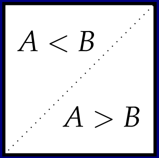
グラフの配置空間のトポロジー

- $\mathrm{Conf}_n(G)$をGのn点配置空間 (configuration space) という。
- $\mathrm{Conf}_n(G)$の「トポロジー的な大きさ」 $\Rightarrow$ ロボットの動きの自由度

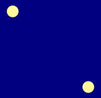
グラフの配置空間のトポロジー

- $\mathrm{Conf}_n(G)$をGのn点配置空間 (configuration space) という。
- $\mathrm{Conf}_n(G)$の「トポロジー的な大きさ」 $\Rightarrow$ ロボットの動きの自由度
- Gが線分Iで $n=2$のとき,

$\mathrm{Conf}_2(I) =$

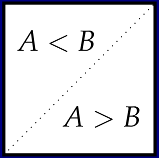


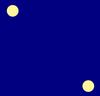
$\simeq$



グラフの配置空間のトポロジー

- $\mathrm{Conf}_n(G)$をGのn点配置空間 (configuration space) という。
- $\mathrm{Conf}_n(G)$の「トポロジー的な大きさ」 $\Rightarrow$ ロボットの動きの自由度
- Gが線分Iで $n = 2$のとき,

$\mathrm{Conf}_2(I) =$ 

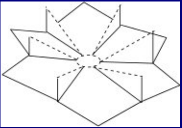
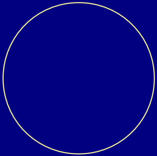
$\simeq$ 

- 線分上の2台のロボットの自由度は0次元。配置空間は連結でない。

  $\Rightarrow$ ロボットを入れ替えることはできない。

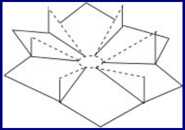
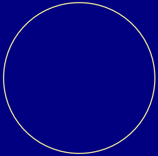
グラフの配置空間のトポロジー

- G が Y 字型のグラフ Y で $n = 2$ のとき

$\mathrm{Conf}_2(Y) =$  $\simeq$ 

グラフの配置空間のトポロジー

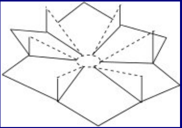
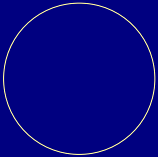
- G が Υ 字型のグラフ Υ で $n = 2$ のとき

$\mathrm{Conf}_2(\Upsilon) =$  $\simeq$ 

- Υ字型のグラフ上の2台のロボットの自由度は1次元, かつ配置空 間は連結。
  - $\Rightarrow$ 2台のロボットを入れ替えることができる。

グラフの配置空間のトポロジー

- G が Y 字型のグラフ Y で $n = 2$ のとき

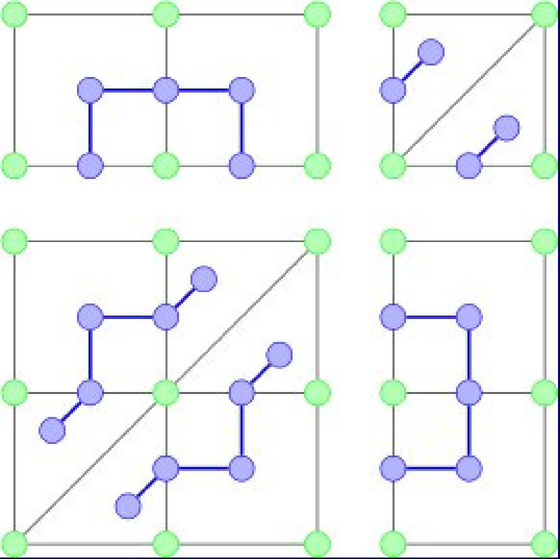
$\mathrm{Conf}_2(Y) =$  $\simeq$ 

- Y字型のグラフ上の2台のロボットの自由度は1次元, かつ配置空 間は連結。

  $\Rightarrow$ 2台のロボットを入れ替えることができる。

- より複雑なグラフ (領域) 上により 多くのロボットが配置されている場合には?

グラフの配置空間のモデル



グラフの配置空間のトポロジー

- Abrams によるグラフの配置空間のモデル (2000年)。
- 古瀬 (2010年度修士論文) によるグラフの2点の配置空間のモデル。
- 古瀬のモデルを改良すると Abramsのモデルよりよいモデルが得られる。

グラフの配置空間のトポロジー

- Abrams によるグラフの配置空間のモデル (2000年)。
- 古瀬 (2010年度修士論文) によるグラフの2点の配置空間のモデル。
- 古瀬のモデルを改良すると Abramsのモデルよりよいモデルが得られる。

Theorem (Ghrist 1999年, T)

グラフ G の本質的な頂点の数がv個の場合, Conf$_n(G)$は v次元以下につぶすことができる。

Persistent Homology

- トポロジーのアイデアや道具は「本質的な情報」を取り出すのが得意。

Persistent Homology

- トポロジーのアイデアや道具は「本質的な情報」を取り出すのが得意。

> トポロジーの道具を使って, より精密な情報を取り出せるか?

Persistent Homology

- トポロジーのアイデアや道具は「本質的な情報」を取り出すのが得意。

> トポロジーの道具を使って, より精密な情報を取り出せるか?

- ホモロジーでは三角形と円が区別できない。

Persistent Homology

- トポロジーのアイデアや道具は「本質的な情報」を取り出すのが得意。

> トポロジーの道具を使って, より精密な情報を取り出せるか?

- ホモロジーでは三角形と円が区別できない。
- 正三角形と直角三角形は当然区別できない。

Persistent Homology

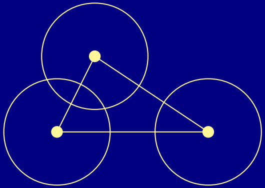
- トポロジーのアイデアや道具は「本質的な情報」を取り出すのが得意。

トポロジーの道具を使って, より精密な情報を取り出せるか?

- ホモロジーでは三角形と円が区別できない。
- 正三角形と直角三角形は当然区別できない。
- 持続性ホモロジー (persistent homology) なら区別できる!!

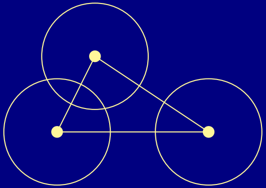
Persistent Homologyのアイデア

1. $\varepsilon > 0$を決める。
2. 三角形の各頂点を中心とした半径εの円板を描く。



Persistent Homologyのアイデア

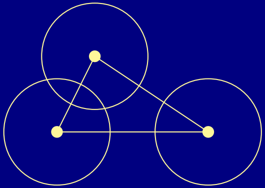
1. $\varepsilon > 0$を決める。
2. 三角形の各頂点を中心とした半径εの円板を描く。



3. 二つの頂点を中心とした円板が交わったとき, その二つの頂点を線分で結ぶ。
4. 三つの頂点を中心とした円板が交わったとき, その三つを頂点とする 三角形を塗りつぶす。

Persistent Homologyのアイデア

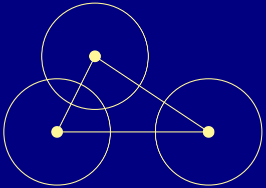
1. $\varepsilon > 0$を決める。
2. 三角形の各頂点を中心とした半径εの円板を描く。



3. 二つの頂点を中心とした円板が交わったとき, その二つの頂点を線分で結ぶ。
4. 三つの頂点を中心とした円板が交わったとき, その三つを頂点とする 三角形を塗りつぶす。
5. できた図形のホモロジーを求める。

Persistent Homologyのアイデア

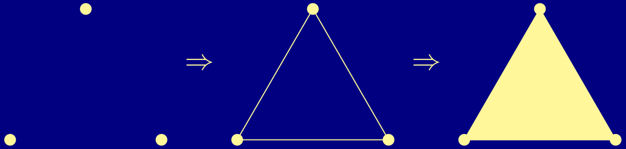
1. $\varepsilon > 0$を決める。
2. 三角形の各頂点を中心とした半径εの円板を描く。



3. 二つの頂点を中心とした円板が交わったとき, その二つの頂点を線分で結ぶ。
4. 三つの頂点を中心とした円板が交わったとき, その三つを頂点とする 三角形を塗りつぶす。
5. できた図形のホモロジーを求める。
6. εを動かしてホモロジーの変化をみる。

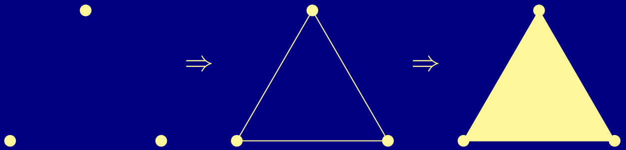
正三角形のとき

- 図形の変化は



正三角形のとき

- 図形の変化は

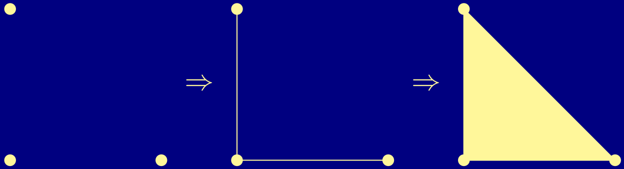


- ホモロジーの変化は

ε	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
H_0	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
H_1	0	$\mathbb{Z}$	0

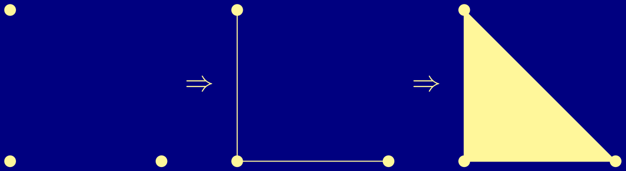
直角二等辺三角形のとき

- 図形の変化は



直角二等辺三角形のとき

- 図形の変化は

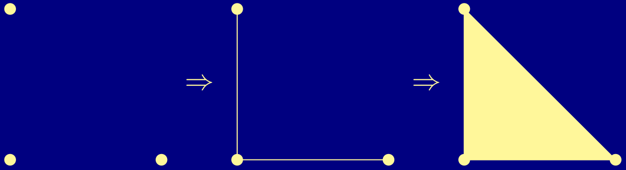


- ホモロジーの変化は

ε	$\to$	$\to$	$\to$
H_0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
H_1	0	0	0

直角二等辺三角形のとき

- 図形の変化は



- ホモロジーの変化は

ε	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
H_0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
H_1	0	0	0

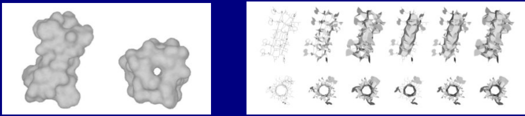
- Persistent homologyは, 三角形の辺の長さとは無関係に「形」を読み取ることができる。

Persistent Homologyのアイデア

1. 調べたいデータからεに依存する単体的複体を作る:
   - Čech複体
   - Vietoris-Rips複体
   - $\cdots$
2. εを変化させたときのホモロジーの変化を調べる。
3. 単体的複体のホモロジーはコンピュータで計算させることができる。

Persistent Homologyのアイデア

1. 調べたいデータからεに依存する単体的複体を作る:
   - Čech複体
   - Vietoris-Rips複体
   - $\cdots$
2. εを変化させたときのホモロジーの変化を調べる。
3. 単体的複体のホモロジーはコンピュータで計算させることができる。



グラミシジンAの構造
(Edelsbrunner, Letscher, Zomorodian, Discrete and Computational Geometry, 2002年)

センサーネットワーク (sensor networks)

問題: 平面上に複数のセンサーが配置されているとき, その配置がどの程度有効かを評価せよ。特に, 領域全体がカバーされているかどうかを判定せよ。

センサーネットワーク (sensor networks)

問題: 平面上に複数のセンサーが配置されているとき, その配置がどの程度有効かを評価せよ。特に, 領域全体がカバーされているかどうかを判定せよ。

- それぞれのセンサーがカバーする円を描いてみる。
- センサーがとても多いときには, 手作業で確認するのは大変。

  $\Rightarrow$ センサー達が自動的に判定してほしい。
- センサー達の得たデータ

  $\Rightarrow$ 単体的複体を作る (Vietoris-Rips複体など)

  $\Rightarrow$ 様々なトポロジーの道具を使って調べる
  - オイラー標数に関する積分 (SchapiraとViro 1970年代)
  - 層のコホモロジー

まとめ

トポロジーは「使える」ものなのか?

トポロジーは「使える」ものなのか?

- 数学の他の分野で既に (陰に陽に) 使われている:
  - ホモロジー代数学の基礎として。
    - 代数幾何学や表現論
    - 高次の圏論 (Jacob Lurieなど)
  - 数論や関数解析学でも。
    - K理論
    - $\mathbb{F}_1$
  - 組み合せ論の問題にトポロジーを用いる。
    - グラフの彩色問題
    - 組み合せ論的代数的トポロジー (combinatorial algebraic topology) という分野ができている。
- 統計物理のモデルを調べるのにも使われている。
- . . .

トポロジーは「使える」ものなのか?

- Poincaréがホモロジーを考えてから100年以上が経つ
  $\Rightarrow$ トポロジーは「枯れた道具」
- 「トポロジー $=$ 柔らかい幾何学」という見方は限定しすぎている。

トポロジーは「使える」ものなのか?

- Poincaréがホモロジーを考えてから100年以上が経つ
  $\Rightarrow$ トポロジーは「枯れた道具」
- 「トポロジー $=$ 柔らかい幾何学」という見方は限定しすぎている。
- 「トポロジー」と限定するのは古い視点!!

トポロジーは「使える」ものなのか?

- Poincaréがホモロジーを考えてから100年以上が経つ
  $\Rightarrow$ トポロジーは「枯れた道具」
- 「トポロジー $=$ 柔らかい幾何学」という見方は限定しすぎている。
- 「トポロジー」と限定するのは古い視点!!

「全ての数学は 変形理論 (deformation theory) である。
(I.M. Gel′fand)」
(KontsevichとSoibelmanの本のIntroduction)

トポロジーは「使える」ものなのか?

- Poincaréがホモロジーを考えてから100年以上が経つ
  $\Rightarrow$ トポロジーは「枯れた道具」
- 「トポロジー $=$ 柔らかい幾何学」という見方は限定しすぎている。
- 「トポロジー」と限定するのは古い視点!!

  「全ての数学は 変形理論 (deformation theory) である。
  (I.M. Gel′fand)」
  (KontsevichとSoibelmanの本のIntroduction)
- 数理物理学や数理生物学以外にも 工学や計算機科学など様々な分野に 面白い数学の題材がころがっている。

トポロジーは「使える」ものなのか?

- Poincaréがホモロジーを考えてから100年以上が経つ
  $\Rightarrow$ トポロジーは「枯れた道具」
- 「トポロジー $=$ 柔らかい幾何学」という見方は限定しすぎている。
- 「トポロジー」と限定するのは古い視点!!

  「全ての数学は 変形理論 (deformation theory) である。
  (I.M. Gel′fand)」
  (KontsevichとSoibelmanの本のIntroduction)
- 数理物理学や数理生物学以外にも 工学や計算機科学など様々な分野に 面白い数学の題材がころがっている。
  $\Rightarrow$ 新しい数学

トポロジーとハサミは使いよう