

# 1次元力学系と Cantor 集合

森 真

Oct. 1997

# 目次

<b>1</b>	<b>1 次元変換と P-F operator</b>	<b>3</b>
1.1	単純な例	3
1.2	記号の説明	5
1.3	Perron-Frobenius operator	6
1.4	固有値 1, 不変確率測度の存在	8
1.5	単位円上の固有値	10
1.6	単位円内の固有値	12
1.7	piecewise linear transformation	16
1.7.1	generating function	16
1.7.2	符号付き力学系	22
1.8	一般の場合への拡張	31
<b>2</b>	<b>Cantor 集合</b>	<b>32</b>
2.1	piecewise linear 変換から導かれる Cantor 集合	32
2.1.1	発見的議論	32
2.1.2	理論的考察	41
2.2	連分数展開から導かれる Cantor 集合	43
<b>3</b>	<b>関数解析の補足</b>	<b>49</b>
3.1	有界変動関数	49
3.2	nuclear operators	49
3.3	Banach 空間上の spectral decomposition	50
3.4	Mazur の定理, Kakutani-Yosida の定理	52
<b>4</b>	<b>エルゴード理論からの補足</b>	<b>53</b>
4.1	Spectral Theory	53
	参考文献	55

# 始めに

このノートは1996年夏に津田塾大学で行われたシンポジウムにおける講義をまとめたものです。1章の始めに Perron-Frobenius operator のスペクトルとエルゴード理論との関係について、容易に手にはいる summary がないと思われたので概要をまとめてみました。その後で、1次元力学系について、Perron-Frobenius operator の固有値を generating function と renewal equation を用いて解く方法について述べました。2章ではその理論を1次元の Cantor 集合上の力学系に適用してみました。また、3章、4章には、このノートで用いた関数解析とエルゴード理論について若干の補足をおきました。参考文献は、この分野を学びたい人の参考になるように、このノートの範囲よりも広くまとめてみましたが、著者の浅学のため落ちているものも多いと思います。最後に、このノートの原稿を丁寧に読んで適切なアドバイスをいただいた原祐子さんに感謝をこの場を借りて表したいと思います。

# 1 章

## 1 次元変換と P-F operator

### 1.1 単純な例

$F(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x \pmod{1}$  を考えよう。傾きは黄金数である。以下、記号の簡略化のため、この節では  $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  と表すことにする。この場合、区間  $[0, 1]$  は二つの区間  $[0, 1/\beta]$  と  $(1/\beta, 1]$  に分かれ、各区間上で  $F$  は単調増加である。  $A = \{0, 1\}$  をアルファベットと呼び、  $[0, 1]$  の分割を、  $\langle 0 \rangle = [0, 1/\beta]$ ,  $\langle 1 \rangle = (1/\beta, 1]$  とおく。このとき、任意の  $x \in [0, 1]$  の点の  $F$  による軌道  $\{x, F(x), F^2(x), \dots\}$  を考えよう。ここで

$$F^n(x) = \begin{cases} x & n = 0 \\ F^{n-1}(F(x)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

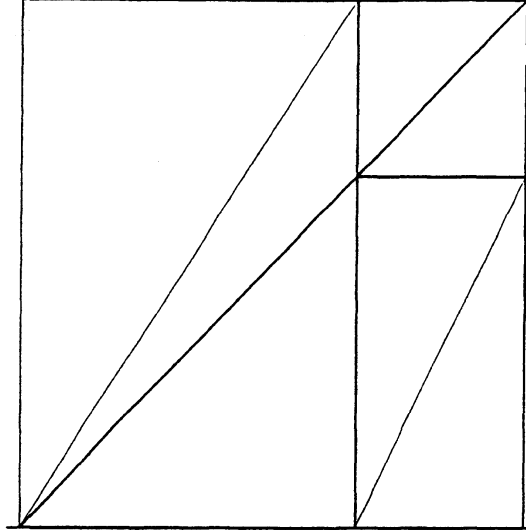
は、  $F$  の  $n$  回反復であって、  $F(x)$  の  $n$  乗ではない。この軌道の通る区間の記号を並べると、  $0$  と  $1$  の無限列ができる。こうして得られる点列全体の閉包  $\Sigma$  を考えれば、  $F(1) = 1/\beta$  に注意すれば、  $\Sigma$  は  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  の閉集合で、  $0$  の後には  $0$  と  $1$  両方が続き得るが、  $1$  の後には  $0$  のみしかこない点列全体と一致することは容易にわかるであろう。さらに、この  $\Sigma$  の元と  $[0, 1]$  の点とは、

$$x = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \dots$$

によって、可算個の点を除いて  $1$  対  $1$  に対応することも容易にわかるであろう。  $\Sigma$  上に左への shift  $\theta a_1 a_2 \dots = a_2 a_3 \dots$  を考えると、これは位相的な力学系となる。この shift が区間  $[0, 1]$  上の変換

$$F(x) = \frac{a_2}{\beta} + \frac{a_3}{\beta^2} + \dots \quad (x = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \dots)$$

に対応することを考慮にいれば、shift の性質を調べれば、  $[0, 1]$  上に  $F$  を考えた力学系の性質が導けることは想像に難くない。これは、線形代

図 1.1.  $F(x) = \beta x \pmod{1}$ 

数を用いると容易に定式化できる。まず、 $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。ここで、 $M$ の成分は通常の行列の表現とは異なり、 $(0,0)$ 成分、 $(0,1)$ 成分、 $(1,0)$ 成分  $M_{0,0} = M_{0,1} = M_{1,0} = 1$ で、 $(1,1)$ 成分  $M_{1,1} = 0$ を表していることに注意しよう。このとき

$$\Sigma = \{a_1 a_2 \cdots a_i \in \{0, 1\}, M_{a_i, a_{i+1}} = 1\}$$

と特徴付けられる。この  $M$ を structure matrix と呼ぶ。今、 $M$ はその成分が非負で、さらに irreducible かつ aperiodic であることに注意しよう。すなわち、ある  $k$ が存在して  $M^k$ のすべての成分が正とできる(今の場合は  $k = 2$ )。ここで、線形代数の Perron-Frobenius の定理を思い出せば、 $M$ の最大固有値は正の実数で、対応する固有ベクトルとして、すべての成分が正のものを選ぶことができることがわかる。実際、上の  $M$ の最大固有値は傾き  $\beta$ であって、その固有ベクトルとして第1成分に区間  $(0)$ の長さ  $1/\beta$ 、第2成分に区間  $(1)$ の長さ  $1/\beta^2$ を用いて、 $u = \begin{pmatrix} 1/\beta \\ 1/\beta^2 \end{pmatrix}$ と選ぶことができる。同様に左固有ベクトルも考えると、 $M$ は対称行列なので、 $v = (1/\beta, 1/\beta^2)$ である。 $\Sigma$ 上に Markov 測度を、 $u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ 、 $v = (v_0, v_1)$

と表して

$$\pi_i = \frac{u_i v_i}{\sum_j u_j v_j} \quad \text{初期確率}$$

$$p_{i,j} = \frac{M_{i,j} u_j}{\beta u_i} \quad \text{推移確率}$$

とおくと、これは $\Sigma$ 上に shift 不変な確率測度を導く。今の場合、具体的には

$$\pi_0 = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \quad \pi_1 = \frac{1}{1+\beta^2}$$

$$p_{0,0} = \frac{1}{\beta} \quad p_{0,1} = \frac{1}{\beta^2} \quad p_{1,0} = 1 \quad p_{1,1} = 0$$

を得る。これは、 $[0, 1]$  上に

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{4+2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} & x \in (0) \\ \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} & x \in (1) \end{cases}$$

を密度関数とする Lebesgue 測度に絶対連続な不変確率測度に対応する。

## 1.2 記号の説明

この節で、これから用いる記号などをまとめておこう。アルファベット  $A$  とは、有限集合で以下では  $\{a, b, \dots\}$  とか  $\{0, 1, \dots\}$  などを目的に応じて使い分ける。 $\Sigma$  は記号の無限列全体  $A^{\mathbb{N}}$  の閉部分集合で、左 shift  $\theta$  について不変 ( $\theta^{-1}\Sigma \cap \Sigma$ ) であるものを表す。記号の有限列  $w = a_1 \cdots a_n$  ( $a_i \in A$ ) を word と呼び、 $|w| = n$  で word の長さを表す。後で定義する word に対応する区間の長さ (Lebesgue 測度) とは異なることを注意しておく。 $\alpha = a_1 a_2 \cdots$  と  $w = a_1 a_2 \cdots a_n$  について

$$\alpha[i] = w[i] = a_i \quad (i \geq 1)$$

$$\alpha[i, j] = w[i, j] = a_i \cdots a_j \quad (1 \leq i \leq j)$$

$$\theta\alpha = a_2 a_3 \cdots$$

$$\theta w = a_2 \cdots a_n$$

と定める。いうまでもないが word については、 $1 \leq i, j \leq n$  とする。 $\Sigma$  上に通常の筒集合から導かれる  $\sigma$ -algebra と shift  $\theta$  を考えたものを (位相的) 記号力学系という。

区間  $[0, 1]$  上の変換を  $F$  とする。このとき、アルファベット  $A$  と、それに対応して  $[0, 1]$  の区間による分割  $\{(a)\}_{a \in A}$  が存在して、 $F$  は各  $(a)$  上で単調なとき、 $F$  を piecewise monotone であるという。更に、任意の  $a \in A$

について、端点を除いて  $F(\langle a \rangle)$  が  $\cup_i \langle b_i \rangle$  ( $b_i \in A$ ) と  $\langle a \rangle$  の像が分割の元の和で表されるとき、 $F$  を Markov, また各  $\langle a \rangle$  上で  $F'$  が定数であるとき、piecewise linear であるという。各  $\langle a \rangle$  上で、 $F$  の  $\langle a \rangle$  への制限がその閉包にまで、 $C^r$  関数として拡張できるとき、piecewise  $C^r$  という。

$x \in [0, 1]$  について、 $x$  の展開  $a_1^x a_2^x \dots$  を、 $F^n(x) \in \langle a_{n+1}^x \rangle$  ( $n \geq 0$ ) で定義する。  $\Sigma$  を  $x \in [0, 1]$  の展開全体の閉包とすることで、 $[0, 1]$  上の変換  $F$  に伴う力学系と  $\Sigma$  上の記号力学系とを結び付けることができる。実際、 $x$  の展開が  $\alpha = a_1^x a_2^x \dots$  なら、 $F(x)$  の展開は  $\theta\alpha = a_2^x a_3^x \dots$  である。ここで、 $[0, 1]$  上には区間から生成される通常の  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$  を考える。両側無限列  $A^{\mathbb{Z}}$  の元  $\dots a_{-1} a_0 a_1 \dots$  で任意の  $i$  について、 $a_i a_{i+1} \dots \in \Sigma$  をみたくすもの全体を  $\Sigma$  の natural extension と呼ぶ。

word  $w = a_1 \dots a_n$  に対して、 $w$  に対応する区間を

$$\langle w \rangle = \bigcap_{i=1}^n F^{-i+1} \langle a_i \rangle$$

で定義する。  $\langle w \rangle \neq \emptyset$  のときに、 $w$  は admissible であると呼び、admissible な word 全体を  $\mathcal{W}$  で表す。empty word  $\epsilon$  は、 $\langle \epsilon \rangle = [0, 1]$  とおいて、 $\epsilon \in \mathcal{W}$  とみなす。admissible な word  $w$  の符号  $\text{sgn } w$  は、 $F^{|w|}$  が  $\langle w \rangle$  上で単調増加なら  $+$ 、減少なら  $-$  と定める。また点  $x \in [0, 1]$  について、 $wx$  で  $y \in \langle a_1 \rangle$ ,  $F(y) \in \langle a_2 \rangle$ ,  $\dots$ ,  $F^{n-1}(y) \in \langle a_n \rangle$  かつ  $F^n(y) = x$  となる点  $y$  (もしあれば) を表すことにする。更に、 $F$  が piecewise linear ならば、 $F|_{\langle a \rangle} = F^a$  は  $\mathbb{R}$  上の 1 to 1, onto な変換とみなせるので、 $F^w = F^{a_n} \dots F^{a_1}$  ( $w = a_1 \dots a_n$ ) も同様に考えることができ、逆写像を定義できる。このときには、 $wx = (F^w)^{-1}x$  として、必ず定義できる。この  $wx$  が  $\langle w \rangle$  に属するとき、 $wx$  が『存在する』と呼ぶことにする。

ついでに、 $\|\cdot\|$  で  $L^1$  ノルム、 $\|\cdot\|_\infty$  で  $L^\infty$  ノルム、 $v(\cdot)$  で全変動を表す (全変動については 3.1 節を参照)。

### 1.3 Perron–Frobenius operator

piecewise linear Markov な変換については、 $A \times A$  structure matrix によって、 $A^{\mathbb{N}}$  内の記号力学系として表せることは明らかであろう。また 1.1 節の議論は structure matrix が irreducible aperiodic な piecewise linear Markov な変換  $F$  の場合にも適用できて、structure matrix の最大固有値に対応する左右の固有ベクトルから不変確率測度を構成できる。これからの議論はその一般化とみなすこともできる。

単位区間  $[0, 1]$  上の変換  $F$  を考える。  $F$  は attractive orbit をもってい

ないとする。このとき Lebesgue 測度に絶対連続な不変確率測度を具体的に求め、そのエルゴード的性質を調べるには、次の Perron-Frobenius operator  $P: L^1 \rightarrow L^1$  は強力な武器となる。  $f \in L^1$  について

$$\int Pf(x)g(x) dx = \int f(x)g(F(x)) dx \quad (g \in L^\infty)$$

と定義する。これは積分の変数変換を行えば、

$$Pf(x) = \sum_{y:F(y)=x} f(y)|F'(y)|^{-1}$$

を意味する。Perron-Frobenius operator  $P: L^1 \rightarrow L^1$  の基本的な性質として次のものがある。

- (1) contracting,  $\|Pf\| \leq \|f\|$ .
- (2) positive,  $f \geq 0 \Rightarrow Pf \geq 0$
- (3) 保測,  $\int Pf(x) dx = \int f(x) dx$
- (4)  $P\rho = \rho$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\int \rho dx = 1$  ならば  $\rho$  は不変測度の密度関数になる。
- (5)  $P_n$  を  $F^n$  に対応する Perron-Frobenius operator とすれば  $P_n = P^n$  をみたく。

証明. (1) は

$$\begin{aligned} \|Pf\| &= \int |Pf(x)| dx \\ &\leq \int \sum_{y:F(y)=x} |f(y)||F'(y)|^{-1} dx \\ &= \int |f(y)| dy = \|f\| \end{aligned}$$

で得られる。(2) は明らか。(3) は積分変数の変換であって、

$$\int Pf(x) dx = \int \sum_{y:F(y)=x} f(y)|F'(y)|^{-1} dx$$

より、ここで  $y$  を新たに  $x$  と置き直せば  $|F'(y)|^{-1}$  が Jacobian になっている。(4) は  $g \in L^\infty$  について、

$$\int g(x)\rho(x) dx = \int g(x)P\rho(x) dx = \int g(F(x))\rho(x) dx$$



より明らか. (5) は

$$P^n f(x) = \sum_{y: F^n(y)=x} f(y) |(F^n)'(y)|^{-1}$$

を示せばよいが, これも明らか.

以下では, とくに断らない限り Perron-Frobenius operator  $P$  はその定義域を有界変動関数全体  $BV$  に制限することにする. 有界変動関数全体  $BV$  上のノルムなどについては, 3.1節を参照されたい. 制限をする理由は 1.6節で述べることにする.

**定義 1.1**  $\xi > 0$  をみたととき,  $F$  を expanding と呼ぶ. ここで

$$\xi = \liminf_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,inf}_{x \in I} \frac{1}{n} \log |F^{n'}(x)|$$

である.  $\xi$  を lower Lyapunov exponent と呼ぶ. ここで

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in I} f(x) = \inf \{ a : \text{集合 } \{x: f(x) < a\} \text{ の Lebesgue 測度が正} \}$$

である. expanding の定義には幾つかあるが, この定義はそのなかでも条件の厳しいものの 1 つである. 例えば  $\operatorname{ess\,inf}$  と  $\liminf$  の順序を取り替えて

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in I} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |F^{n'}(x)| > 0$$

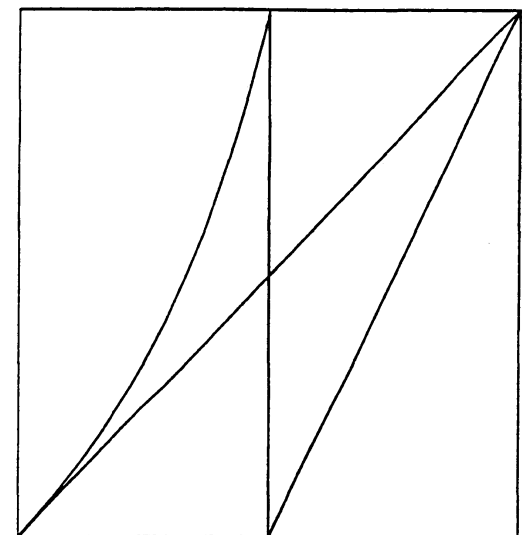
の場合に expanding と定義すれば, カオスで有名 ([28]) な quadratic map  $F(x) = ax(1-x)$  でも Lebesgue 測度に絶対連続な不変測度をもつ場合でも expanding になりえるが, 我々の定義では quadratic map は  $F'(1/2) = 0$  なので,  $\xi = 0$  になってしまい, すべての場合に expanding ではない. 以下の議論ではこの制限を緩めることは困難であり, 開きなおれば, このことが quadratic map の研究がいかに困難であることを示しているように思われる ([15]).

## 1.4 固有値 1, 不変確率測度の存在

以下, 不変測度とは Lebesgue 測度に絶対連続なもののみを考える.

**定理 1.1 (Lasota-Yorke[24])**  $F$  が piecewise  $C^2$  かつ expanding ならば不変確率測度  $\mu$  が存在し, それは有界変動関数である.

図 1.2. Thaler の例



そのほかに, Z. Kowalski[21], S. Wong[55], M. Rychlik[45], G. Keller[18] などによって, expanding かつ piecewise  $C^{1+\varepsilon}$  ( $\varepsilon > 0$ ) もしくは類似の条件のもとで不変確率測度が存在することが示されている.

反対に M. Thaler([51],[52]) によって,  $|F'| = 1$  をみたす点がたった 1 つ存在するとき不変確率測度の存在しない例が与えられている. 具体的には

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

である. この例では  $F'(0) = 1$  かつすべての  $x > 0$  について  $F'(x) > 1$  をみたす. この例では, その全体の測度が無限大になってしまう  $\sigma$ -finite 不変測度は存在する.

この piecewise linear 版については, Y. Takahashi[48], [49], [50], M. Mori[35] などでも研究されている.

もう 1 つの例は P. Gora and B. Schmitt[8] に expanding で piecewise  $C^1$  だが, 不変測度が存在しない例が与えられている. この例は Cantor 集合の構成と似ていて興味深いものである.

前にも述べたように, expanding の定義は緩めることができるかもしれないが, expanding かつ piecewise  $C^{1+\varepsilon}$  ( $\varepsilon > 0$ ) もしくは  $C^1$  プラス何らかの条件が必要であることは本質的であると思われる.

Lasota-Yorke の定理は, 証明の outline だけ示すことにする. 基本的には  $\rho$  を不変確率測度  $\mu$  の密度関数とすると,  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f \rightarrow \rho \in BV$  を示すことである. このとき  $f \in BV$  について  $v(f) \leq \alpha \|f\| + \beta v(f)$  をみたすような  $\alpha > 0$ ,  $0 < \beta < 1$  が存在することを示す. ここで  $v(f)$  は  $f$  の全変動である. これは, Ionescu Tulcea and Marinescu の定理 3.1 の (iii)([11]) の条件と似ていることに注意する. このとき,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} v(P^n f) \leq \alpha(1 - \beta)^{-1} \|f\|$$

が成立するので,  $\{P^n f\}$  は  $L^1$  で relatively compact, したがって Mazur の定理 3.2 より  $\{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f\}$  も relatively compact になる.  $BV$  は  $L^1$  で dense であることにも注意して, これで Kakutani-Yosida の定理 3.3 を  $\{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f\}$  に用いれば極限の存在と  $BV$  に属することが示せるというわけである. なお, ここで用いた定理については 3 章に述べてある.

## 1.5 単位円上の固有値

まず始めに  $f$  が  $P$  の固有値  $e^{i\phi}$  の固有関数とすると,  $|f|$  は  $P$  の固有値 1 の固有関数であることに注意する. なぜなら

$$\begin{aligned} |f| &= |e^{i\phi} f| = |Pf| \leq P|f| \\ \int |f| dx &= \int P|f| dx \end{aligned}$$

このことを見ると単位円上では,  $Uf(x) = f(F(x))$  で定義される unitary operator と関係があることがわかるであろう (4.1 節を参照せよ). unitary operator は不変確率測度  $\mu$  をもった力学系  $(I, B, \mu, F)$  の上で考えるので, それに合わせて Perron-Frobenius operator も  $\mu$  をもとに考えてみる. ここまで,  $\sigma$ -algebra  $B$  は明示して来なかったが, 問題はなかったであろう. この節以外では, 意識する必要はないので用いない.

$\mu$  の密度関数を  $\rho$  とおく.  $P_\mu$  を

$$\int P_\mu f(x) g(x) d\mu = \int f(x) g(F(x)) d\mu$$

で定義する. 明らかに  $\rho(x) P_\mu f(x) = P(\rho f)(x)$  が成り立つ. unitary operator  $Uf(x) = f(F(x))$  ( $f \in L^1$ ) との関係調べよう.

$$(1) P(Ug \cdot f) = g \cdot Pf \text{ a.e.}$$

$$\begin{aligned} \int P(Ug \cdot f)(x) h(x) dx &= \int Ug(x) f(x) h(F(x)) dx \\ &= \int f(x) g \cdot h(F(x)) dx = \int Pf(x) g \cdot h(x) dx \end{aligned}$$

$$(2) P_\mu Uf = f \quad \text{a.e. } \mu$$

$$\begin{aligned} \int P_\mu Uf(x)g(x) d\mu &= \int Uf(x)g(F(x)) d\mu \\ &= \int f \cdot g(F(x)) d\mu = \int f(x)g(x) d\mu \end{aligned}$$

$$(3) U^n P_\mu^n f = E_\mu[f|\mathcal{B}_n], (\mathcal{B}_n = F^{-n}\mathcal{B}). \quad \text{ここで, } E_\mu[f|\mathcal{B}_n] \text{ は条件付き平均である.}$$

$A \in \mathcal{B}_n$  について

$$\begin{aligned} \int_A U^n P_\mu^n f(x) d\mu &= \int_A P_\mu^n f(F^n(x)) d\mu \\ &= \int f(F^n(x)) 1_A(F^n(x)) d\mu = \int f(x) 1_A(x) d\mu \\ &= \int_A E_\mu[f|\mathcal{B}_n] d\mu \end{aligned}$$

が成り立つ. 一方

$$\begin{aligned} \{x: U^n P_\mu^n f(x) > a\} &= \{x: P_\mu^n f(F^n(x)) > a\} \\ &= \{x: \sum_{y: F^n(y)=F^n(x)} f(y)|F^{n'}(y)|^{-1} > a\} \\ &= F^{-n}\{x: \sum_{y: F^n(y)=x} f(y)|F^{n'}(y)|^{-1} > a\} \in \mathcal{B}_n \end{aligned}$$

ゆえに  $U^n P_\mu^n f$  は  $\mathcal{B}_n$  可測.  $L_\mu^2$  で考えると,  $U^n P_\mu^n$  は  $F^n L_\mu^2$  への projection である.

(4) 次の3条件は同値である.

- (a)  $Uf = e^{i\phi} f$
- (b)  $P_\mu f = e^{-i\phi} f$
- (c)  $P(f\rho) = e^{-i\phi} f\rho$

証明. (b),(c) の同値は定義から従う. (a) が成り立つならば  $f = P_\mu Uf = e^{i\phi} P_\mu f$  より (b) が従う. 逆に (b) ならば, Doob の定理によつて

$$e^{-in\phi} U^n f = U^n P_\mu^n f = E[f|\mathcal{B}_n] \rightarrow \exists \bar{f}$$

より,  $U\bar{f} = e^{i\phi} \bar{f}$  (両辺にもう1つ  $U$  をかける) が成立する. さらに

$$\int |\bar{f} - f| d\mu = \int |\bar{f} - e^{-in\phi} U^n f| d\mu \rightarrow 0$$

より  $\bar{f} = f$  が成り立つ.

(5)  $\mu$ が maximal(すべての不変確率測度は $\mu$ に絶対連続)ならば, 単位円上  $P_\mu$ の固有値と  $P$ の固有値は一致する.

$f$ が  $P_\mu$ の固有値  $e^{-i\phi}$ の固有関数ならば,  $f\rho$ が  $P$ の固有関数になる. 一方  $f$ が  $P$ の固有値  $e^{-i\phi}$ の固有関数なら,  $|f|$ は  $P$ の固有値 1 の固有関数なので,  $|f(x)| dx$ は不変測度,  $\mu$ は maximalであることを仮定したから,  $\{|f| = 0\} \subset \{\rho = 0\}$ である. ゆえに  $f\rho^{-1}$ は定義できる.

[4]と[5]を見ると, 単位円上に固有値が1のみで, 固有値1が simple ならば, 定理 4.3により,  $F$ は weakly mixing であることがわかる. したがって

**定理 1.2 (Bowen[4])**  $F$ を  $[0, 1]$ 上の expanding, piecewise  $C^2$ 変換とする. $\mu$ を Lebesgue 測度に絶対連続な不変測度とし, 力学系  $([0, 1], \mu, F)$ が weakly mixing ならば, その natural extension は Bernoulli である.

によって, その natural extension は, Bernoulli であることがわかる.

**定理 1.3** 単位円上の  $P$ の固有値は  $2\pi \times$ 有理数かつ固有関数は有界変動である.

より詳しく述べると, ある  $N$ と  $L_1, \dots, L_N$ が存在して

$$(1) F(L_i) = L_{i+1} \quad (L_{N+1} = L_1)$$

$$(2) (L_i, F^N, \mu_i) \text{ は mixing, ただし } \mu_i = \mu|_{L_i} \times N$$

となる ([54],[41]).

$E(\phi)$ を  $L^1$ での固有値  $e^{i\phi}$ の固有空間とする. 固有値全体は単位円上で群になる. このことを用いれば, ある  $p$ が存在して,

$$\{0 \leq \phi < 2\pi: E(\phi) \neq \emptyset\} = \{2n\pi/p: 0 \leq n \leq p-1\}$$

であることがわかる. さらに,  $BV$ が  $L^1$ で dense なこと, およびある部分列  $\{n_i\}$ が存在して,  $e^{i\phi n_i} \rightarrow 1$ より, 固有値1のときと同様に  $P^{n_i} f$ は relatively compact かつ  $\limsup v(P^{n_i} f) \leq \frac{\alpha}{1-\beta} \|f\|$ がでて, 固有関数が有界変動であることが従う.

## 1.6 単位円内の固有値

この節では  $P$ を  $L^1$ 上の operator または  $BV$ 上の operator とみて, その性質を調べる. まず Perron-Frobenius operator  $P$ を  $L^1$ で考えてみる.

**定理 1.4 (Keller[20])**  $P$ を  $L^1$ 上の operator とみると, 任意の  $\lambda$  ( $|\lambda| < 1$ ) は  $P$ の無限重の固有値である.

証明.  $Q_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k U^k (I - UP_\mu)$  とおく.  $Q_\lambda : L^1(\mu) \rightarrow L^1(\mu)$

$$\begin{aligned} P_\mu Q_\lambda &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k P_\mu U^k (I - UP_\mu) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} U^{k-1} (I - UP_\mu) + P_\mu (I - UP_\mu) \\ &= \lambda Q_\lambda \quad (P_\mu U = I) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} Q_\lambda^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k U^k (I - UP_\mu) Q_\lambda \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k U^k Q_\lambda - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k U^{k+1} \lambda Q_\lambda \\ &= Q_\lambda \end{aligned}$$

$Q_\lambda f = f$ ならば,  $P_\mu f = P_\mu Q_\lambda f = \lambda Q_\lambda f = \lambda f$ である. したがって,  $Q_\lambda$ は固有値  $\lambda$ への  $L^1$ での projection である.  $Q_\lambda \neq 0$ を示せばよい.

$$Q_\lambda^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k U^k (I - UP_\mu)$$

とおく.

**補題 1.1 ( $f$ の構成)**  $\exists f \in BV$  s.t.  $Q_\lambda^{(n)} f \neq Q_\lambda^{(n+1)} f$ ,  $\|Q_\lambda^{(n)} f\|_\infty < \infty$ . さらに  $\exists \delta > 0$   $\rho(x) < \delta$ ならば,  $f(x) = 0$ である.

証明.  $\cap_{n=0}^{\infty} U^n L_\mu^2 \subset BV$ は有限次元 ( $U$ の不変関数全体) ( $UP_\mu$ は  $UL_\mu^2$ への projection) である. この部分はエルゴード性を意味する. ゆえに  $UL_\mu^2 \neq L_\mu^2$ かつ  $BV$ は  $L_\mu^2$ で dense より, ある  $g \in BV$ が存在して,  $UP_\mu g \neq g$ をみます.

ある  $\{J_k\}$ が存在して, 各  $J_k$ は  $\rho|_{J_k} \geq \frac{1}{k}$ をみます区間の有限和で  $\mu(J_k) \rightarrow 1$ をみます. ここで  $f_k = g 1_{F^{-1}J_k}$ とおくと,  $f_k \in BV$ , 十分大きな  $k$ について,  $\rho(x) < \frac{1}{k}$ ならば  $UP_\mu f_k \neq f_k$ ,  $f_k(x) = 0$ をみます.  $f$ として十分大きな  $k$ の  $f_k$ を選ぶと,  $Q_\lambda^{(n)} f = Q_\lambda^{(n+1)} f$ ならば,  $\lambda^n U^n (I - UP_\mu) f = 0$ すなわち  $(I - UP_\mu) f \in \text{Ker}(U^n)$ となり, 仮定より  $UP_\mu f \neq f$ であり,  $U$ は onto であるから矛盾である. さらに

$$\|Q_\lambda^{(n)} f\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} U^k (I - UP_\mu) f \right\|_\infty < \infty$$

は明らかであるので証明が終わる.

**補題 1.2**  $|\lambda| < 1$  とする. ある  $f \in L^\infty$  が存在して  $f$  は固有値  $\lambda$  の固有関数である.

証明.  $n$  を  $|\lambda|^n < \frac{1}{2}$  となるように選ぶ.  $f$  は上の補題のものとする.

$$\begin{aligned} Q_\lambda f &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k U^k (I - UP_\mu) f \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n+j+k} U^{n+j+k} (I - UP_\mu) f \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{nj} U^{nj} Q_\lambda^{(n)} f \end{aligned}$$

ここで上の  $j \geq 1$  の部分は

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{nj} U^{nj} Q_\lambda^{(n)} f \right\|_\infty &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (|\lambda|^n)^j \|Q_\lambda^{(n)} f\|_\infty \\ &< \|Q_\lambda^{(n)} f\|_\infty \end{aligned}$$

をみます. ゆえに

$$\begin{aligned} \|Q_\lambda f\|_\infty &< 2 \|Q_\lambda^{(n)} f\|_\infty < \infty \\ \|Q_\lambda f\|_\infty &\geq \|Q_\lambda^{(n)} f\|_\infty - \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{nj} U^{nj} Q_\lambda^{(n)} f \right\|_\infty \\ &> 0 \end{aligned}$$

これで  $Q_\lambda \neq 0$  が示せた.  $P_\mu Q_\lambda f = \lambda Q_\lambda f$  より  $Q_\lambda f$  が  $P_\mu$  の固有関数である.

これで,  $P$  を  $BV$  に制限する理由は明らかになったと思うが,  $P$  を  $BV$  に制限しても期待する程やさしいものではないことがつぎの補題よりわかる.

**補題 1.3**  $|\lambda| < e^{-h(F)}$  ならば,  $Q_\lambda f \in BV$  である. ここで  $h(F)$  は  $F$  の topological entropy

$$h(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\text{長さ } n \text{ の word の個数})$$

である.

証明.  $P_\mu: BV \rightarrow BV$ であるから,  $v(f - UP_\mu f) < \infty$ . ゆえにラフに言えば

$$\begin{aligned} v(Q_\lambda f) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k v(U^k(f - UP_\mu f)) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k v(f - UP_\mu f) \times \text{長さ } k \text{ の word の個数} \end{aligned}$$

この補題によって  $P$  を  $BV$  に制限 (これを, 特に断らない限り  $P$  と書くことにした) しても, 内部がべったりと固有値であるような円が存在することがわかったので, compact でないことが証明された. しかし, つぎの定理がある.

**定理 1.5 (Rychlik[44])**  $P$  を  $BV$  に制限すると, その essential spectrum radius は  $e^{-\xi}$  に等しい.

すなわち, 任意の  $r > e^{-\xi}$  について,  $|\lambda| > r$  をみたす spectrum は有限個しか無く, すべて有限次元の固有空間をもつ固有値である. 詳しくは 3.3 節を参照されたい.

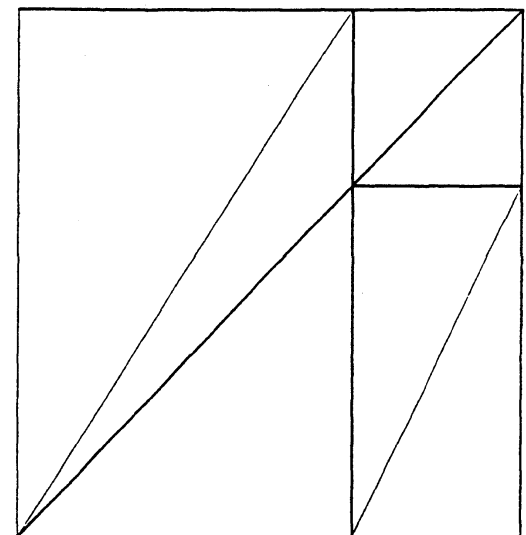
以上により残念ながら, Perron-Frobenius operator は compact でないので, もちろん nuclear (3.2 節参照) でない. したがって, Fredholm determinant を定義することはできないが Ruelle-Artin-Mazur の zeta 関数

$$\zeta(z) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{p: F^n(p)=p} |F^{n'}(p)|^{-1} \right\}$$

を考えると, この  $1/\zeta(z)$  は本質的に Fredholm determinant とみなせることを後で証明する. つまり, zeta 関数の特異点 ( $1/\zeta(z)$  の 0 点) が  $P$  の固有値の逆数になることを示す. しかし, expanding な写像についても上の右辺は収束半径が 1 なので, Perron-Frobenius operator  $P$  の固有値を求めるには, これが半径 1 の円の外側にまで meromorphic に拡張できることを示さねばならない. ところで, 定理 1.4 により,  $P$  を  $L^1$  上で考えると, 単位円内はすべて固有値である. 逆数を考えると, zeta 関数がこの Fredholm determinant の逆数だとすると, meromorphic に拡張できるはずがない. 実は zeta 関数は  $BV$  に制限した  $P$  の Fredholm determinant の逆数になることがわかる. この場合には, 補題 1.3 を考えると, meromorphic な拡張は topological entropy の逆数の半径をもつ円にまでしか意味を持たないことが想像できるであろう.



図 1.3.



## 1.7 piecewise linear transformation

この節では、前節の最後に述べた一般的な結果のイメージを作るために piecewise linear transformation のあるクラスを考えてみよう ([32],[33] 参照).

### 1.7.1 generating function

やさしい例から始めよう.

$$F(x) = \begin{cases} x/\eta_a & 0 \leq x < \eta_a \\ (x - \eta_a)/\eta_b & \eta_a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

かつ  $1 - \eta_a = \eta_a \eta_b$  とする. つまり  $\lim_{x \uparrow 1} F(x) = \eta_a$  をみたす. アルファベットを  $\mathcal{A} = \{a, b\}$ , 対応する区間を  $\langle a \rangle = [0, \eta_a)$ ,  $\langle b \rangle = [\eta_a, 1]$  とおく.  $\beta$  が黄金数のときの  $\beta$ -変換  $F(x) = \beta x \pmod{1}$  は, このもっとも単純な例である.

ともあれ,  $g \in L^\infty$  について, generating function

$$s_g^{(a)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int 1_a(x) g(F^n(x)) dx$$

$$s_g^{(b)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int 1_b(x) g(F^n(x)) dx$$

$$s_g(z) = \begin{pmatrix} s_g^{(a)}(z) \\ s_g^{(b)}(z) \end{pmatrix}$$

を定義する. ここで  $1_a$  などは  $\langle a \rangle$  の定義関数を表す. さらに行列

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} z\eta_a & z\eta_a \\ z\eta_b & 0 \end{pmatrix}$$

とおく. Perron-Frobenius operator を用いると, 例えば

$$s_g^{(a)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int P^n 1_a(x) g(x) dx$$

は形式的に表せば,

$$s_g^{(a)}(z) = \int [(I - zP)^{-1} 1_a](x) g(x) dx$$

である. したがって,  $P$  の固有値は  $s_g^{(a)}(z)$  などの特異点の逆数になっていることが想像される. このことをきちんと調べてみよう.

$$\begin{aligned} P1_a(x) &= \sum_{y:F(y)=x} 1_a(y) |F'(y)|^{-1} \\ &= \eta_a \\ P1_b(x) &= \begin{cases} \eta_b & \text{if } x \in \langle a \rangle \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

に注意すると,  $\sum_{n=0}^{\infty}$  を  $n=0$  のところと  $\sum_{n=1}^{\infty}$  にわけて  $F(\langle a \rangle) = [0, 1]$  を用いると

$$\begin{aligned} s_g^{(a)}(z) &= \int 1_a(x) g(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int 1_a(x) g(F^n(x)) dx \\ &= \int 1_a(x) g(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int P1_a(x) g(F^{n-1}(x)) dx \\ &= \int_{\langle a \rangle} g(x) dx + \eta_a \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int g(F^{n-1}(x)) dx \\ &= \int_{\langle a \rangle} g(x) dx + z\eta_a \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int g(F^n(x)) dx \\ &= \int_{\langle a \rangle} g(x) dx + z\eta_a (s_g^{(a)}(z) + s_g^{(b)}(z)) \end{aligned}$$

同様に,  $F(\langle b \rangle) = \langle a \rangle$  を用いると

$$s_g^{(b)}(z) = \int 1_b(x) g(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int 1_b(x) g(F^n(x)) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{(b)} g(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int P1_b(x)g(F^{n-1}(x)) dx \\
&= \int_{(b)} g(x) dx + \eta_b \sum_{n=1}^{\infty} z^n \eta_b \int_{(a)} g(F^{n-1}(x)) dx \\
&= \int_{(b)} g(x) dx + z\eta_b s_g^{(a)}(z)
\end{aligned}$$

となることから

$$s_g(z) = \left( \begin{array}{c} \int_{(a)} g(x) dx \\ \int_{(b)} g(x) dx \end{array} \right) + \Phi(z)s_g(z)$$

を得る。つまり

$$s_g(z) = (I - \Phi(z))^{-1} \left( \begin{array}{c} \int_{(a)} g(x) dx \\ \int_{(b)} g(x) dx \end{array} \right)$$

が成り立つ。この構成は renew(再生) できない  $n = 0$  を切り離し、残りを renew した形であるので、これを Markov 過程の言葉を借りて renewal equation と呼ぶ。  $(I - \Phi(z))^{-1}$  を求め、  $1 - \eta_a - \eta_a \eta_b = 0$  を用いて、これを解けば

$$s_g(z) = \frac{1}{(1-z)(1-(\eta_a-1)z)} \begin{pmatrix} 1 & z\eta_a \\ z\frac{1-\eta_a}{\eta_a} & 1-z\eta_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{(a)} g(x) dx \\ \int_{(b)} g(x) dx \end{pmatrix}$$

を得る。さらに

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-\eta_a)\eta_a} & x \in (a) \\ \frac{1}{2-\eta_a} & x \in (b) \end{cases}$$

と定義すると、

$$\begin{aligned}
s_g^{(a)}(z) &= \frac{\int_{(a)} g dx + z\eta_a \int_{(b)} g dx}{(1-z)(1-(\eta_a-1)z)} \\
&= \frac{\eta_a \int g(x)\rho(x) dx}{1-z} + \frac{(1-\eta_a) \int_{(a)} g dx - \eta_a \int_{(b)} g dx}{(1-(\eta_a-1)z)(2-\eta_a)}
\end{aligned}$$

および

$$s_g^{(b)}(z) = \frac{(1-\eta_a) \int g(x)\rho(x) dx}{1-z} + \frac{-\frac{1-\eta_a}{\eta_a} \int_{(a)} g dx + (2-\eta_a) \int_{(b)} g dx}{(1-(\eta_a-1)z)(2-\eta_a)}$$

を得る。このことから、  $z = 1$  と  $\eta_a - 1$  が  $P$  の固有値らしいということが想像できる。固有値 1 は 1 位の特異点だから、きっと  $P$  の固有値 1 も simple で、その他に単位円上には固有値はなさそうだから、 weakly mixing な力学系が構成できるであろう。

$\int \rho(x) dx = 1$  に注意して,  $\mu$  で密度関数  $\rho$  の確率測度を表す. このとき, 明らかに  $\mu$  は不変確率測度になる.

さらに,  $s_g(z)$  の定義に戻って,  $z^n$  の係数を比較すれば

$$\begin{aligned}\int 1_a(x)g(F^n(x)) dx &= \eta_a \int g d\mu + C_a(\eta_a - 1)^n \\ \int 1_b(x)g(F^n(x)) dx &= (1 - \eta_a) \int g d\mu + C_b(\eta_a - 1)^n\end{aligned}$$

を得る. ここで

$$\begin{aligned}C_a &= \frac{(1 - \eta_a) \int_{(a)} g dx - \eta_a \int_{(b)} g dx}{2 - \eta_a} \\ C_b &= \frac{-\frac{1 - \eta_a}{\eta_a} \int_{(a)} g dx + (2 - \eta_a) \int_{(b)} g dx}{2 - \eta_a}\end{aligned}$$

である. 例えば  $\int 1_a(x)g(F^n(x)) dx$  は  $n \rightarrow \infty$  で  $\eta_a \int g d\mu$  に収束し, その速度は  $(\eta_a - 1)^n$  の指数的であることがわかる. さらに,  $(\eta_a - 1)$  は負だから, 振動しながら極限に近づくことがわかる. ここで,  $(a)$  の Lebesgue 測度は  $\eta_a$ ,  $(b)$  の Lebesgue 測度は  $1 - \eta_a$  に注意しよう. 一般に word  $w = a_1 \cdots a_m$  については

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int 1_w(x)g(F^n(x)) dx \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} z^n \int 1_w(x)g(F^n(x)) dx + \sum_{n=m}^{\infty} z^n \int 1_w(x)g(F^n(x)) dx \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} z^n \int 1_w(x)g(F^n(x)) dx \\ &\quad + \begin{cases} z^m \eta_{a_1} \cdots \eta_{a_m} (s_g^{(a)}(z) + s_g^{(b)}(z)) & \text{if } a_m = a \\ z^m \eta_{a_1} \cdots \eta_{a_m} s_g^{(a)}(z) & \text{if } a_m = b \end{cases}\end{aligned}$$

を得る.

$$\begin{aligned}\chi_g^w(z) &= \sum_{n=0}^{m-1} z^n \int 1_w(x)g(F^n(x)) dx \\ \Phi^w(z) &= \begin{cases} (z^m \eta_{a_1} \cdots \eta_{a_m}, z^m \eta_{a_1} \cdots \eta_{a_m}) & \text{if } a_m = a \\ (z^m \eta_{a_1} \cdots \eta_{a_m}, 0) & \text{if } a_m = b \end{cases}\end{aligned}$$

とおいて, 一般に  $f = \sum_w C_w 1_w$  と表すと, 形式的に

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int f(x)g(F^n(x)) dx &= \sum_w C_w \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int 1_w(x)g(F^n(x)) dx \\ &= \sum_w C_w \chi_g^w(z) + \sum_w C_w \Phi^w(z) s_g(z)\end{aligned}$$

を得る. ここで  $f \in BV$  ならば, 任意の  $0 < r < 1$  について

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{|w|=n} |C_w| < \infty$$

をみたす分解を作ることができることに注意しよう. このことから, 任意の  $\varepsilon > 0$  について

$$\begin{aligned} Lebes(w) &\leq C e^{-(\xi-\varepsilon)n} \\ \eta_w = \eta_{a_1} \cdots \eta_{a_n} &\leq C e^{-(\xi-\varepsilon)n} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで  $Lebes J$  で集合  $J$  の Lebesgue 測度を表した. 以上より,

$$\begin{aligned} \left| \sum_w C_w \chi_g^w(z) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|w|=n} |C_w| \chi_g^w(z) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|w|=n} \sum_{m=0}^{n-1} |z|^m \|g\| C e^{-(\xi-\varepsilon)n} \\ \left| \sum_w \Phi^w(z) \text{ の各要素} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|w|=n} |C_w| |z|^n C e^{-(\xi-\varepsilon)n} \end{aligned}$$

である. したがって  $|z| < e^\varepsilon$  で  $\sum_w C_w \chi_g^w(z)$  および  $\sum_w \Phi^w(z)$  の各要素は解析的であることがわかる. 一方  $s_g(z)$  は  $z = 1$  と  $z = 1/(\eta_a - 1)$  に特異点をもつ. したがって  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int f(x) g(F^n(x)) dx$  は  $|z| \geq 1$  に meromorphic に拡張できて,  $|z| < e^\varepsilon$  でこの2つの特異点のみ (もし,  $1 - \eta_a > e^{-\varepsilon}$  ならば) を持つことがわかった.

前と同様に  $z^n$  の係数を比較することで

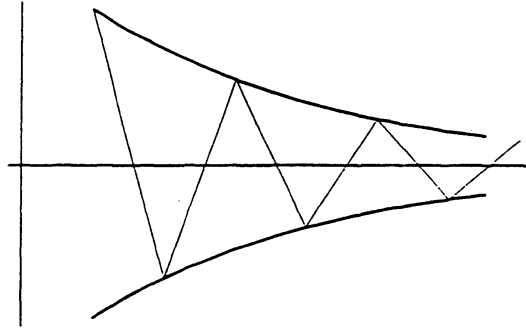
$$\begin{aligned} \int f(x) g(F^n(x)) dx &\rightarrow \begin{cases} \sum_w C_w \eta_{a_1} \cdots \eta_{a_m} \int g d\mu & a_m = a \\ \sum_w C_w \eta_{a_1} \cdots \eta_{a_m} \eta_a \int g d\mu & a_m = b \end{cases} \\ &= \int f dx \int g d\mu \end{aligned}$$

を得て, 収束のオーダーは  $(\eta_a - 1)$  または  $e^{-\varepsilon}$  の絶対値の大きい方であることがわかった. そこで  $\mu$  について可積分な  $f$  を考えると,  $f \cdot \rho \in L^1$  より

$$\begin{aligned} \int f(x) g(F^n(x)) d\mu &= \int f \cdot \rho(x) g(F^n(x)) dx \\ &\rightarrow \int f \cdot \rho dx \int g d\mu = \int f d\mu \int g d\mu \end{aligned}$$

が出て, 力学系が mixing であることが示せた. 収束のオーダーも考慮に入れると,  $f \in BV$  ならば, 次の図のように収束していくことがわかる.

図 1.4. decay

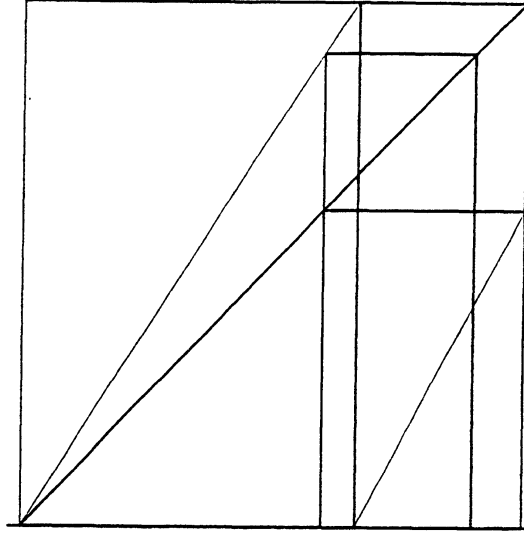


この収束のオーダー，この場合には  $(\eta_a - 1)$  は，decay rate of correlation と呼ばれる。

$\Phi(z)$  は，この力学系の structure matrix  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  に重みをつけたものであることに注意しよう。トレース  $\text{tr } M = 1$  だが，これは  $(a, a)$  成分に，つまり，不動点  $0$  に対応している。 $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  なので，トレースは  $3$  である。これはずっと  $a$  にいる不動点と  $a$  から  $b$  にいって戻る  $2$  周期点  $a \rightarrow b \rightarrow a$  が  $M^2$  の  $(a, a)$  成分に， $b \rightarrow a \rightarrow b$  となる  $2$  周期点が  $(b, b)$  成分に現れたわけである。このように，structure matrix のトレースは，周期軌道の数を表していることがわかる。同様に， $\Phi^n(z)$  のトレースは周期  $n$  の周期軌道に対応するので，これを用いると，Ruelle–Artin–Mazur の zeta 関数について

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{F^n(p)=p} |F'^n(p)^{-1}| \right] \\ &= \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{tr } \Phi^n(z) \right] \\ &= \exp[-\text{tr} \log(I - \Phi(z))] \\ &= (\det(I - \Phi(z)))^{-1} \end{aligned}$$

を導いた。このことは zeta 関数の特異点の逆数が Perron–Frobenius operator  $P$  の固有値であることを示していて，zeta 関数の逆数が nuclear 作用素における Fredholm determinant の役割を果たすことを示している。このことから  $\Phi(z)$  を Fredholm matrix,  $\det(I - \Phi(z))$  を Fredholm determinant と呼ぶことにする。

図 1.5.  $\beta$ -transformation

### 1.7.2 符号付き力学系

前の節の方法は  $F$  が一般の Markov の場合にも拡張可能である。これをもっと一般化しよう。再び、つぎの例で考えることにする。

例 1.1 (generalized)  $\beta$ -expansion. ( $1 < \eta_a + \eta_b \leq 2$ )

$$\begin{aligned} A &= \{a, b\}, \\ \langle a \rangle &= [0, \eta_a), \quad \langle b \rangle = [\eta_a, 1], \\ F(x) &= \begin{cases} \eta_a x & x \in \langle a \rangle \\ \eta_b(x - \eta_a) & x \in \langle b \rangle \end{cases} \end{aligned}$$

$s_g^{(a)}(z)$  は前と同じだが、図 1.5 のような場合には  $F(\langle b \rangle) \subset \langle a \rangle$  なので、 $J_1 = F(\langle b \rangle)$  とおき、さらに  $F(J_1) \supset \langle a \rangle$  なので、 $J_2 = F(J_1) \cap \langle b \rangle$  とおくと

$$\begin{aligned} s_g^{(b)}(z) &= \int 1_{\langle b \rangle}(x)g(x) dx + \eta_b z s_g^{J_1}(z) \\ &= \int 1_{\langle b \rangle}(x)g(x) dx + \eta_b z \left( \int 1_{J_1}(x)g(x) dx + \eta_a (s_g^{(a)}(z) + s_g^{J_2}(z)) \right) \end{aligned}$$

を得る。以下同様に、

$$J_n = \begin{cases} F(J_{n-1}) & \text{if } F(J_{n-1}) \subset \langle a \rangle \\ F(J_{n-1}) \cap \langle b \rangle & \text{if } F(J_{n-1}) \supset \langle a \rangle \end{cases}$$

とおき,

$$\phi(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } F(J_{n-1}) \subset \langle a \rangle \\ \prod_{k=1}^n \eta_{a_k^1} & \text{if } F(J_{n-1}) \supset \langle a \rangle \end{cases}$$

とおけば,

$$s_g^{(b)}(z) = \chi_g^b(z) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \phi(n) s_g^{(a)}(z)$$

を得る. ここで  $a_1^1 a_2^1 \cdots$  は 1 の展開, すなわち,  $\lim_{x \uparrow 1} F^n(x) \in \langle a_{n+1}^1 \rangle$  をみたす  $A$  の列とする. このとき

$$\chi_g^b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \prod_{k=1}^n \eta_{a_k^1} \int_{J_n} g dx$$

である. ただし  $J_0 = \langle b \rangle$  である.  $\chi_g^b(z)$  と  $\Phi(z)_{b,a}$  は  $|z| < e^\epsilon$  で解析的であることを注意しよう. 前と同様に

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} z\eta_a & z\eta_a \\ \sum_{n=1}^{\infty} z^n \phi(n) & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$s_g(z) = (I - \Phi(z))^{-1} \chi_g(z)$$

という renewal equation が得られる. ここで  $\chi_g(z) = \begin{pmatrix} \int_a g dx \\ \chi_g^b(z) \end{pmatrix}$  である. これを用いれば力学系が mixing なこと, さらに

$$\lim_{z \uparrow 1} (1-z)(I - \Phi(z))^{-1} \begin{pmatrix} \int_{\langle a \rangle} g dx \\ \chi_g^b(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_a \int g d\mu \\ (1-\eta_a) \int g d\mu \end{pmatrix}$$

であることを見れば Lebesgue 測度に絶対連続な不変確率測度の密度関数を計算することが可能である. 当然だが, ある  $n$  について,  $F^n(1)$  が 0,  $\eta_a$ , 1 のどれかに等しくなるような Markov 型のときには, 上のように無限回 renewal を繰り返さずに途中で打ちきって,  $\Phi(z)$  の各成分が多項式になるようにとれる. この場合には, 不変確率測度の密度関数は,  $\eta_a, F(1), \dots, F^{n-1}(1)$  で不連続な階段関数になることは明らかであろう. さらに

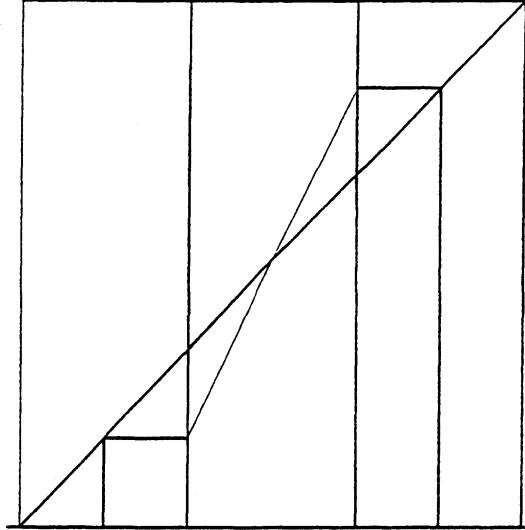
$$\zeta(z) = \frac{1}{\det(I - \Phi(z))}$$

をみたすことも同様に証明できるが, これにはあまり本質的ではない少し込み入った議論が必要であるので省略する.

$\beta$ 変換や unimodal linear 変換のように 1 つの端点を除いては Markov 型である場合には上のように, renewal equation が構成できる. もちろん,



図 1.6. general piecewise linear transformation



unimodal linear 変換のように傾きが負の場合には注意が必要ではある。しかし、一般の場合には図 1.6 のように、区間  $(a)$  の renewal equation を作ろうと思うと 2 つの区間  $J_1$  と  $J_2$  が現れ、それを renewal するとそれぞれに 2 つ、合計 4 つの区間が出現して、となってどんどん区間が増えていってしまい、これでは上のように意味のある（係数の収束半径が 1 を越えるような）renewal equation を作ることは不可能であることが想像に難くない。そこで  $(a)$  の両端点をそれぞれ  $a^-$  と  $a^+$  で表すことにしよう。図では  $a^+$  と  $b^-$  は、同じ点だが、 $(a)$  に属すると見るか、 $(b)$  に属すると見るかによって異なる点と見なすことにする。  $a^-$  と  $a^+$  を記号の無限列  $a_1^- a_2^- \dots$  and  $a_1^+ a_2^+ \dots$  と同一視する。ここで

$$\lim_{x \downarrow a^-} F^n(x) \in \langle a_n^- \rangle,$$

$$\lim_{x \uparrow a^+} F^n(x) \in \langle a_n^+ \rangle$$

つまり、各  $a^+$  または  $a^-$  に  $(a)$  内の点から収束するときの、展開の極限である。  $s_g^{(a)}(z)$  の renewal equation がうまく構成できなかったのは、  $a^-$  と  $a^+$  の 2 つの端点を同時に追おうとしたからなので、

$$s_g^{(a)}(z) = s_g^{a^+}(z) + s_g^{a^-}(z)$$

と  $s_g^{\alpha^\sigma}(z)$  が  $\alpha^\sigma$  ( $\sigma = +, -$ ) のみによるように分解できればよい。これには

$$\delta[L] = \begin{cases} 1 & \text{if } L \text{ is true} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とにおいて  $x_0, x_1$  ( $x_0 < x_1$ ) について

$$\{\delta[x > x_0] - 1/2\} + \{\delta[x < x_1] - 1/2\} = 1_{(x_0, x_1)}(x) \quad (1.1)$$

という当たり前の式が決め手になる。こうして前と同様に

$$s_g(z) = \left( s_g^{\alpha^\sigma}(z) \right)_{\alpha \in \mathcal{A}, \sigma \in \{+, -\}}$$

とにおいて、通常の記号力学系を用いた場合に比べて次元が倍になるが、renewal equation を

$$s_g(z) = (I - \Phi(z))^{-1} \chi_g(z)$$

のように作ろうというわけである。これさえできれば、不変確率測度の密度関数や、力学系が mixing であることや、decay rate of correlation や、zeta 関数などが  $\Phi(z)$  の性質からまったく前と同様に導けるはずである。

一般に点  $x \in [0, 1]$  の展開  $\alpha = a_1 a_2 \dots$  にも符号を付けて考えよう。  $\alpha^+$  は、 $x$  に左から近づく  $y$  の展開の極限というわけである。それぞれを記号の符号付きの無限列と見たり、 $[0, 1]$  上の点と見たり適当に使分けらることにするが、混乱はないであろう。このようにして得られる符号付きの無限列の力学系を符号付き記号力学系と呼ぶ ([33] 参照)。  $\varepsilon(\alpha^+) = +$ ,  $\varepsilon(\alpha^-) = -$  とにおいて、符号付き無限列  $\tilde{\alpha}$  について

$$s_g^{\tilde{\alpha}}(z) = \int dx g(x) \sum_{w \in W} z^{|w|} |F^{w'}(wx)|^{-1} \\ \times \{\delta[w x <_{\varepsilon(\tilde{\alpha})} \tilde{\alpha}] - 1/2\} \delta[w[1] = \tilde{\alpha}[1], (\theta w)x \text{ exists}]$$

$$\chi_g(\tilde{\alpha}) = \int dx g(x) \{\delta[x <_{\varepsilon(\tilde{\alpha})} \tilde{\alpha}] - 1/2\},$$

$$\chi_g^{\tilde{\alpha}}(z) = \begin{cases} \chi_g(\tilde{\alpha}) & \{\theta \tilde{\alpha}\} \in \tilde{\mathcal{A}}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n F^{n'}(\tilde{\alpha})^{-1} \chi_g(\theta^n \tilde{\alpha}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\phi(\tilde{\alpha}, \tilde{v}) = \varepsilon(\tilde{\alpha}) \{\delta[\tilde{v} \leq \theta \tilde{\alpha}] - 1/2\}$$

$$\Phi(z)_{\tilde{u}, \tilde{v}} = \begin{cases} z \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) & \{\theta \tilde{u}\} \in \tilde{\mathcal{A}} \\ \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} F^{n'}(\tilde{u})^{-1} \phi(\theta^n \tilde{u}, \tilde{v}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと, renewal equation が作れる. ここで

$$x <_{\sigma} y = \begin{cases} x < y & \text{if } \sigma = + \\ x > y & \text{if } \sigma = - \end{cases}$$

を表す. まず, 2点 (または, 記号の無限列)  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$  で, その展開の1番目が一致している, つまり同じ記号に対応する区間に属しているとして,

$$\begin{aligned} s_g^{\alpha-}(z) + s_g^{\beta+}(z) &= s_g^{(\alpha, \beta)}(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int 1_{(\alpha, \beta)}(x) g(F^n(x)) dx \end{aligned} \quad (1.2)$$

をみたすことを示そう. 式 (1.1) に注意して

$$\begin{aligned} s_g^{\alpha-}(z) + s_g^{\beta+}(z) &= \int dx g(x) \sum_{w \in W} z^{|w|} |F^{w'}(wx)|^{-1} \\ &\quad \times 1_{(\alpha, \beta)}(wx) \delta[w[1] = \bar{\alpha}[1], (\theta w)x \text{ exists}] \end{aligned} \quad (1.3)$$

を得る.  $wx \in (\alpha, \beta)$  でなければ, 被積分関数は0だが, その場合には  $w[1] = \alpha[1] = \beta[1]$  かつ  $(\theta w)x$  は存在しなければならないので, 上の式 (1.3) は,

$$s_g^{\alpha-}(z) + s_g^{\beta+}(z) = \int dx g(x) \sum_{w \in W} z^{|w|} |F^{w'}(wx)|^{-1} 1_{(\alpha, \beta)}(wx)$$

となる. ここで  $wx$  を新たに  $x$  ととって, 積分の変数変換を行えば, Jacobian は  $|F^{w'}(wx)|^{-1}$  になるので, 式 (1.2) を得る.

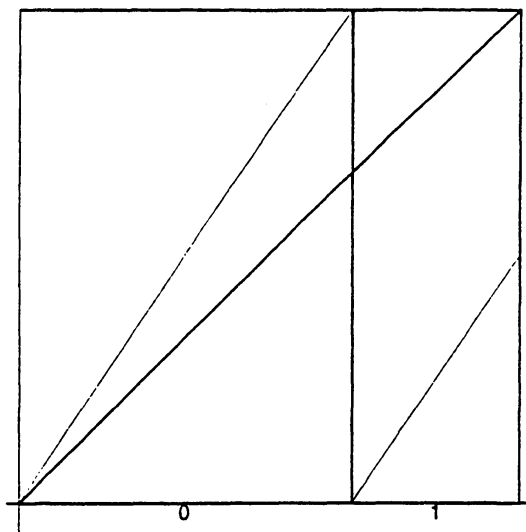
例で renewal equation の作り方を説明しよう.

**例 1.2**  $\beta$ -expansion.

$$F(x) = x/\eta \pmod{1}$$

を考えよう. 図 1.2 のように左側を区間  $\langle 0 \rangle$ , 右側を区間  $\langle 1 \rangle$  と表そう. 簡単のため, 傾き  $1/\eta$  は一定とする. とくに  $1 > \eta \geq 1/2$  について考えるが, 一般の  $\eta < 1/2$  の場合や, 傾きが区間毎に変わる場合への拡張はすぐにできる. renewal equation を作るために追いかける必要のある点は  $0^-, 0^+, 1^-, 1^+$  の4つだが  $1^+$  を除いては, その像が端点になるので単純である. 例として  $0^-$ , つまり点0を考えよう. word に関する和を empty word とそれ以外に分け, empty word 以外は  $\theta w$  を  $w$  と置き換える.

$$s_g^{0-}(z) = \int dx g(x) \sum_{w \in W} z^{|w|} |F^{w'}(wx)|^{-1}$$

図 1.7.  $\beta$ -transformation

$$\begin{aligned}
& \times \{\delta[w x < 0^-] - 1/2\} \delta[w[1] = 0^-[1], (\theta w)x \text{ exists}] \\
= & \int dx g(x) \{\delta[x > 0^-] - 1/2\} \\
& + \int dx g(x) \sum_{w \in W, W \neq \epsilon} z^{|w|} |F^{w'}(wx)|^{-1} \\
& \times \{\delta[w x > 0^-] - 1/2\} \delta[w[1] = 0, (\theta w)x \text{ exists}] \\
= & 1/2 \int g dx + (z\eta/2) \int dx g(x) \sum_{w \in W} z^{|w|} |F^{w'}(wx)|^{-1} \\
= & \chi_g^{0^-}(z) + (z\eta/2)(s_g^{0^-}(z) + s_g^{0^+}(z) + s_g^{1^-}(z) + s_g^{1^+}(z))
\end{aligned}$$

となる。  $\theta 0^- = 0^-$  に注意しよう。次に  $1^+$  を考えよう。

$$\begin{aligned}
s_g^{1^+}(z) &= \int dx g(x) \{\delta[x < 1^+] - 1/2\} \\
& + \int dx g(x) \sum_{w \in W, W \neq \epsilon} z^{|w|} |F^{w'}(wx)|^{-1} \\
& \times \{\delta[w x < 1^+] - 1/2\} \delta[w[1] = 1, (\theta w)x \text{ exists}] \\
= & 1/2 \int g dx + (z\eta) \int dx g(x) \sum_{w \in W} z^{|w|} |F^{w'}(wx)|^{-1} \\
& \times \{\delta[w x < \theta(1^+)] - 1/2\} \delta[w x \text{ exists}] \tag{1.4}
\end{aligned}$$

となる。ここで、例えば $\theta(1^+)$ が区間 $\langle 0 \rangle$ に属すれば、 $w[1] = 1$ をみたす点は $\{\delta[w\mathbf{x} < \theta(1^+)] - 1/2\} = -1/2$ で、 $s_g^{F(1)^-}(z) = -s_g^{F(1)^+}(z)$ であることに注意すると、

$$(1.4) = \frac{1}{2} \int g dx + \frac{z\eta}{2} (s_g^{0^-}(z) - s_g^{0^+}(z) - s_g^{1^-}(z) - s_g^{1^+}(z)) + (z\eta) s_g^{F(1)^+}(z)$$

となる。次に $s_g^{F(1)^+}(z)$ を展開して、これを続けると renewal equation が得られる。具体的には

$$\Phi(z/\eta) = \begin{matrix} & 0^- & 0^+ & 1^- & 1^+ \\ \begin{matrix} 0^- \\ 0^+ \\ 1^- \\ 1^+ \end{matrix} & \begin{pmatrix} z/2 & z/2 & z/2 & z/2 \\ z/2 & z/2 & z/2 & z/2 \\ z/2 & z/2 & z/2 & z/2 \\ z/(2(1-z)) & a(z) & a(z) & -z/(2(1-z)) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{1^+[n+1] - 1/2\} z^n$$

となる。このとき

$$\det(I - \Phi(z/\eta)) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 1^+[n] z^n$$

さらに、不変確率測度の密度関数は

$$\rho(x) = C^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n \delta[x < 1^+[n+1, \infty)]$$

となる。

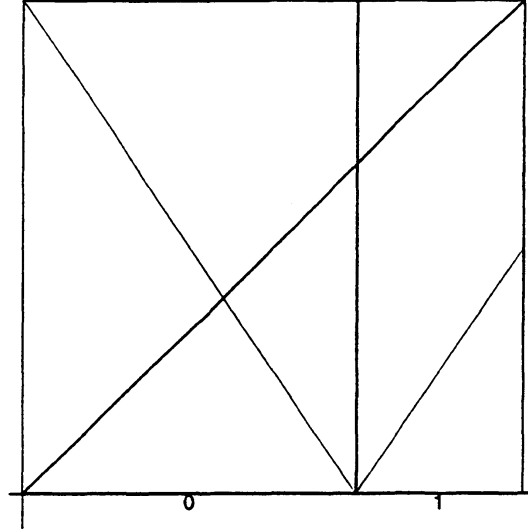
**例 1.3 unimodal linear transformation.**  $\beta$ -expansion と同じようにするために、0と1をひっくり返して図 1.8のような変換を考える。傾きの絶対値が等しい場合を考えよう。

$$F(x) = \begin{cases} -x/\eta + 1 & 0 \leq x < \eta \\ x/\eta - 1 & \eta \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ここで $1 > \eta \geq 1/2$ をみたす。注意しなければいけないのは、例えば、 $F(1) \in \langle 0 \rangle$ とすると、区間 $[0, F(1)]$ の像は $[F^2(1), 1]$ と順序がひっくり返ることである。そこに注意さえすれば、 $\beta$ -expansion と同様に renewal equation が作れる。

$$\Phi(z/\eta) = \begin{pmatrix} z/2 & z/2 & z/2 & z/2 \\ z/2 & z/2 & z/2 & z/2 \\ z/2 & z/2 & z/2 & z/2 \\ b(z) & c(z) & c(z) & -b(z) \end{pmatrix}$$

図 1.8. さかさまの unimodal linear transformation



ここで

$$b(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\delta[\text{sgn } 1^+[1, n-1] = +] - 1/2\} z^n,$$

$$c(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\delta[\text{sgn } 1^+[1, n-1] = + \text{ and } 1^+[n] = 1] \\ + \delta[\text{sgn } 1^+[1, n-1] = - \text{ and } 1^+[n] = 0] - \frac{1}{2}\} z^n$$

である (sgn の定義については, 1.2節を参照せよ). このとき

$$\det(I - \Phi(z/\eta)) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \text{sgn } 1^+[1, n-1] z^n$$

不変確率測度の密度関数は

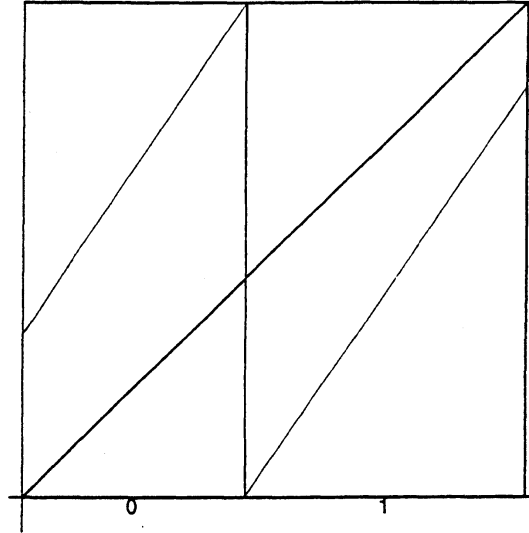
$$\rho(x) = \frac{1}{C} \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n \delta[x < 1^+[n+1, \infty)] \text{sgn } 1^+[1, n]$$

となる.

例 1.4 Linear mod. 1 transformation. この場合には, 点 0 と 1, つまり  $0^-$  と  $1^+$  の 2 つを追いかけねばならない.

$$F(x) = x/\eta + r \pmod{1}$$

図 1.9. linear mod.1 transformation



ここで  $0 < r < 1$  である。このとき  $1 > \eta \geq 1/2$  について

$$\Phi(z/\eta) = \begin{pmatrix} z/(2(1-z)) & d(z) & d(z) & z/(2(1-z)) \\ z/2 & z/2 & z/2 & z/2 \\ z/2 & z/2 & z/2 & z/2 \\ z/(2(1-z)) & e(z) & e(z) & z/(2(1-z)) \end{pmatrix}$$

$$d(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma[0^-[n+1] = 0]z^n,$$

$$e(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma[1^+[n+1] = 1]z^n$$

$$\det(I - \Phi(z/\eta)) = \frac{1}{(1-z)} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1^+[n] - 0^-[n])z^n \right\}$$

である。不変確率測度の密度関数は

$$\rho(x) = \frac{1}{C} \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n \{ \delta[x < 1^+[n+1, \infty)] - \delta[x < 0^-[n+1, \infty)] \}$$

で与えられる。

## 1.8 一般の場合への拡張

上の議論を piecewise  $C^2$  な  $F$  に適用するには, word の端点を直線で結ぶ近似では, その記号力学系を変えてしまうこともある. この近似は  $L^1$  での Perron–Frobenius operator の近似にはなっているが  $BV$  での近似になっていない. こういう理由で一般の piecewise  $C^2$  変換についてはさらにアイデアが必要である. そこで, 区間上の力学系を考察しているという視点を捨てて, 記号力学系の上に potential 関数を考えるという統計力学的視点にたとう. 区間  $[0, 1]$  上の変換  $F$  に対応する記号力学系を  $\Sigma$  で表す.  $x \in [0, 1]$  の展開  $a_1^x a_2^x \dots \in \Sigma$  について, その potential を  $\log |F'(x)|$  と考えれば, piecewise  $C^2$  変換  $F$  については, この potential は無限個の  $a_n$  に依存することになるが, これを有限座標のみによる potential  $\log |F'_N(x)|$  で近似することが可能である ([34] 参照). この  $F_N$  に対応する区間上の力学系は構成できるとは限らないが, piecewise linear 変換に関する今までの理論を適用することは可能である. このことを用いれば, 一般の piecewise  $C^2$  変換に対応する Fredholm matrix は無限次元行列で与えられ, さらに zeta 関数は, その行列式 (Fredholm determinant) の逆数として, より正確に言えば,  $F_N$  に対応する有限次元の Fredholm matrix の行列式の逆数の極限として求められることがわかる. この  $F_N$  を formal piecewise linear 変換と呼ぶことにしよう. 具体的には,  $(a_1^x \dots a_N^x)$  の両端点を  $b_N, c_N$  とすると,  $F'_N(x)$  または記号力学形の上で  $F'_N(a_1^x a_2^x \dots)$  は, 容易に想像がつくように平均傾き  $\frac{F(c_N) - F(b_N)}{c_N - b_N}$  で与えればよい. これ以上の議論は技術的なことであると思うので割愛する. 同様の議論が全く別の方法で Hofbauer and Keller[10], そして Milnor and Thurston[30] の方法を拡張して, Baladi and Ruelle[2] などによって行われている.



## 2 章

# Cantor 集合

### 2.1 piecewise linear 変換から導かれる Cantor 集合

#### 2.1.1 発見的議論

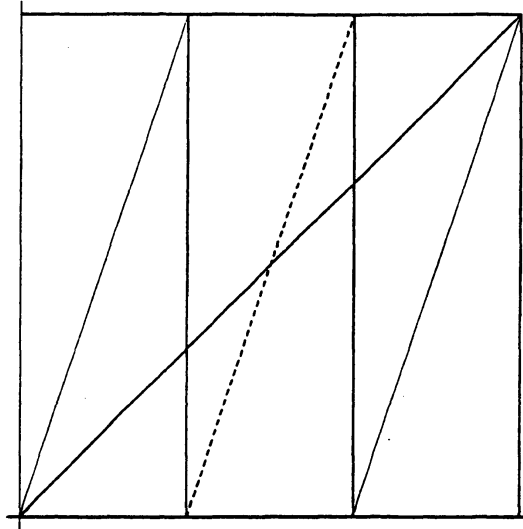
普通の Cantor 集合は  $F(x) = 3x \pmod{1}$  の中央の  $[1/3, 2/3]$  の  $F$  の反復による逆像を除くことで得られる。すなわち,  $[0, 1]$  から, はじめに区間  $[1/3, 2/3]$  を除き, つぎにその区間の  $F$  による逆像を除き, 続けて更にその逆像を取り除きと繰り返すことで得られる。一般に, 区間から区間への expanding な piecewise monotone な写像において, その単調な区間の一部を考え, その逆像を次々に取り除くことで, さまざまな Cantor 集合が得られる。これらを写像  $F$  によって得られる Cantor 集合と呼ぶことにする。通常は, 本質的には同じであるが, 上の議論とは異なり  $F$  の逆写像たち (縮小写像になる) の不変集合として Cantor 集合をとらえる場合が多いようである。

興味があるのは, このような Cantor 集合の測度が 0 になる場合である。その場合, Cantor 集合の大きさは Hausdorff 次元で測る。Hausdorff 次元の定義から始めよう。  $C \subset [0, 1]$  を考えよう。  $C$  を長さ  $\delta > 0$  以下の高々可算個の区間で覆う被覆  $\{I_i\}$  ( $\cup_i I_i \supset C$ ) を  $\delta$ -被覆と呼んで,  $\alpha > 0$  について

$$l_\alpha(C, \delta) = \inf \sum_i |I_i|^\alpha$$

とおく。ここで  $|I_i|$  は区間  $I_i$  の長さを,  $\inf$  は  $\delta$ -被覆全体についてとるも

図 2.1. mid 3 Cantor 集合をつくる写像



のとする。  $\delta \downarrow 0$  のとき,  $l_\alpha(C, \delta)$  は単調減少だから,

$$l_\alpha(C) = \lim_{\delta \rightarrow 0} l_\alpha(C, \delta)$$

は存在する。また, 明らかに  $l_\alpha(C)$  は  $\alpha$  について単調に減少である。

**補題 2.1**  $\alpha > 0$  で  $l_\alpha(C) < \infty$  とする。このとき, 任意の  $\alpha' > \alpha$  について,  $l_{\alpha'}(C) = 0$  である。

**証明.**  $\{I_i\}$  を  $\sum_i |I_i|^\alpha < l_\alpha(C) + 1$  を満足する  $\delta$ -被覆とする。このとき,

$$l_{\alpha'}(C) \leq \sum_i |I_i|^{\alpha'} \leq \delta^{\alpha' - \alpha} \sum_i |I_i|^\alpha \leq \delta^{\alpha' - \alpha} (l_\alpha(C) + 1)$$

をみたま。ここで  $\delta \downarrow 0$  ととれば,  $l_{\alpha'}(C) = 0$  が示される。

この補題から, ある  $\alpha_0 \geq 0$  が存在して,  $\alpha > \alpha_0$  では  $l_\alpha(C) = 0$ , また  $\alpha < \alpha_0$  では  $l_\alpha(C) = \infty$  であることがわかる。この  $\alpha_0$  を  $C$  の Hausdorff 次元と呼ぶ。  $C \subset [0, 1]$  と  $\alpha > 0$  を固定して,  $D \subset C$  について  $l_\alpha(D)$  を考えると,  $l_\alpha$  は  $C$  上の外測度になっていることに注意しよう。したがって,  $0 < l_{\alpha_0}(C) < \infty$  ならば,  $l_{\alpha_0}$  は  $C$  上に  $\sigma$ -algebra を構成して, 測度になる。この測度を Hausdorff 測度と呼び,  $\nu$  で表そう。もちろん,  $l_{\alpha_0}(C)$  が 0 だったり  $\infty$  のときには Hausdorff 測度は無意味なものになる。  $C$  が写

像  $F$  によって得られた Cantor 集合ならば,  $F$  は  $\mathbb{C}$  上の変換と見なせるので, Hausdorff 測度に絶対連続な不変確率測度を見つけて, そのエルゴード性を調べるというのはおもしろいテーマであることはわかるであろう.

$F(x) = 3x \pmod{1}$  によって得られる Cantor 集合について, その Hausdorff 次元を考えてみよう. ラフな議論をすると, 長さ  $\delta = (1/3)^n$  の区間で覆うには  $2^n$  個必要だから,

$$I_\alpha(\mathbb{C}, (1/3)^n) = 2^n (1/3)^{n\alpha} = \exp[n(\log 2 - \alpha \log 3)]$$

をみたすはずである. したがって, この値が 0 にも  $\infty$  にもならない臨界値は  $\alpha = \log 2 / \log 3$  であるはずで, これが Cantor 集合の Hausdorff 次元になるはずである. 答えはまさにその通りだが, 定義によると任意の覆い方について  $\inf$  を取らなければならないわけだから, 今の議論では Hausdorff 次元  $\alpha_0 \leq \log 2 / \log 3$  のみが言えたことになる.

一般的な piecewise linear Markov transformation について考えてみよう. まず, ラフな議論をしよう.

例 2.1 Bernoulli cases.

$$F(x) = \begin{cases} x/\eta_a & x \in [0, \eta_a) \\ (x - \eta_a)/\eta_b & x \in [\eta_a, \eta_a + \eta_b) \\ (x - \eta_a - \eta_b)/\eta_c & x \in [\eta_a + \eta_b, 1] \end{cases}$$

ここで  $0 < \eta_a, \eta_b, \eta_c < 1$  かつ  $\eta_a + \eta_b + \eta_c = 1$  を考えてみよう. アルファベットは  $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$  とし,

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= [0, \eta_a) \\ \langle b \rangle &= [\eta_a, \eta_a + \eta_b) \\ \langle c \rangle &= [\eta_a + \eta_b, 1] \end{aligned}$$

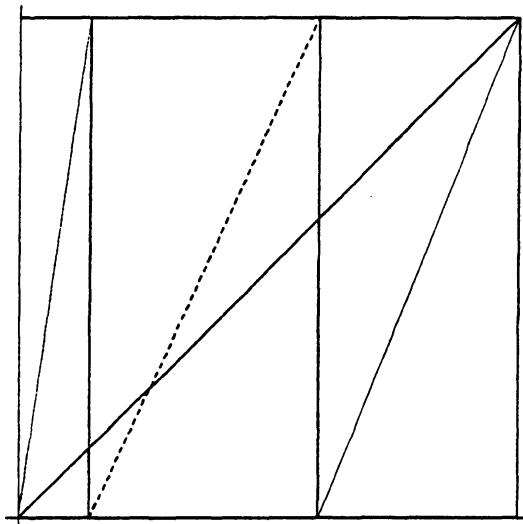
とおく. Cantor 集合は

$$C = \{x \in [0, 1] : a_i^x \in \{a, c\} \text{ for all } i\}$$

つまり,  $a, c \in \mathcal{A}$  のみを展開にもつ点全体とする. ここで  $a_1^x a_2^x \dots$  は  $x$  の  $F$  による展開を表す.  $\eta_a = \eta_b = \eta_c = 1/3$  のときが普通の Cantor 集合である.  $0 \leq \alpha \leq 1$  について

$$\Phi_\alpha(z) = \begin{matrix} & a & c \\ \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} z\eta_a^\alpha & z\eta_a^\alpha \\ z\eta_c^\alpha & z\eta_c^\alpha \end{pmatrix} \end{matrix}$$

図 2.2. Bernoulli case



を $\alpha$ -Fredholm matrix と呼ぼう. これは  $a$  と  $c$  だけ考えたときの  $F$  の Fredholm matrix の各成分を $\alpha$ 乗したものである.

ラフな議論をするので長さの等しい単語に対応する区間で  $C$  を覆ってみよう. 第一近似は区間  $\langle a \rangle$  と  $\langle c \rangle$  による被覆である. これは  $\eta_a^\alpha + \eta_c^\alpha = (1, 1) \begin{pmatrix} \eta_a^\alpha \\ \eta_c^\alpha \end{pmatrix}$  と表せる. 第 2 近似は  $\langle aa \rangle, \langle ac \rangle, \langle ca \rangle, \langle cc \rangle$  による被覆なので

$$(\eta_a \eta_a)^\alpha + (\eta_a \eta_c)^\alpha + (\eta_c \eta_a)^\alpha + (\eta_c \eta_c)^\alpha = (1, 1) \Phi_\alpha(1) \begin{pmatrix} \eta_a^\alpha \\ \eta_c^\alpha \end{pmatrix}$$

と表せる. 一般に, 第  $n$  近似は長さ  $n$  の単語全体による被覆なので

$$(1, 1) \Phi_\alpha(1)^{n-1} \begin{pmatrix} \eta_a^\alpha \\ \eta_c^\alpha \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

を得る. このことから,  $\Phi_\alpha(1)$  のすべての固有値の絶対値が 1 以下なら, 式 (2.1) は収束し, 1 つでも固有値の絶対値が 1 より大きいなら発散する. したがって, Hausdorff 次元は  $\det(I - \Phi_\alpha(1)) = 0$  をみたす最大の  $\alpha$  ということになるはずである. これは  $\eta_a^\alpha + \eta_c^\alpha = 1$  なので, 一意的な解  $\alpha_0$  をもつことがわかる ( $0 < \alpha_0 < 1$ ). 前にも注意したが, 今の場合, 長さの等しい word でしか覆っていないので, 正確には Hausdorff 次元は  $\alpha_0$  以下であることを示したにすぎない.

$\eta_a^{\alpha_0} + \eta_c^{\alpha_0} = 1$  だから, 単語  $w = a_1 \cdots a_n$  ( $a_i \in \mathcal{A}_1$ ) について, その Hausdorff 測度は

$$\nu(\langle w \rangle) = \eta_{a_1}^{\alpha_0} \cdots \eta_{a_n}^{\alpha_0}$$

であろう. この場合,  $\nu(C) = 1$  になることが予想される.

generating function

$$\begin{aligned} s_g^J(z) &= s_g^J(z, \alpha_0; F) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int 1_J(x) g(F^n(x)) d\nu \end{aligned}$$

を考えよう. そして

$$\begin{aligned} s_g(z) &= \begin{pmatrix} s_g^{(a)}(z) \\ s_g^{(c)}(z) \end{pmatrix} \\ \chi_g &= \chi_g(F) = \begin{pmatrix} \int_{(a)} g(x) d\nu \\ \int_{(c)} g(x) d\nu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおいて, renewal equation を作ると,

$$s_g(z) = \chi_g + \Phi_{\alpha_0}(z) s_g(z)$$

となるのは前と同じである. したがって,

$$\begin{aligned} s_g(z) &= (I - \Phi_{\alpha_0}(z))^{-1} \chi_g \\ &= \frac{1}{1-z} \begin{pmatrix} 1 - z\eta_c^{\alpha_0} & z\eta_a^{\alpha_0} \\ z\eta_c^{\alpha_0} & 1 - z\eta_a^{\alpha_0} \end{pmatrix} \chi_g \end{aligned}$$

より,  $\langle a \rangle$  について

$$s_g^{(a)}(z) = \int_{(a)} g(x) d\nu + \frac{z}{1-z} \nu(\langle a \rangle) \int g d\nu$$

が成り立ち,  $n \geq 1$  について

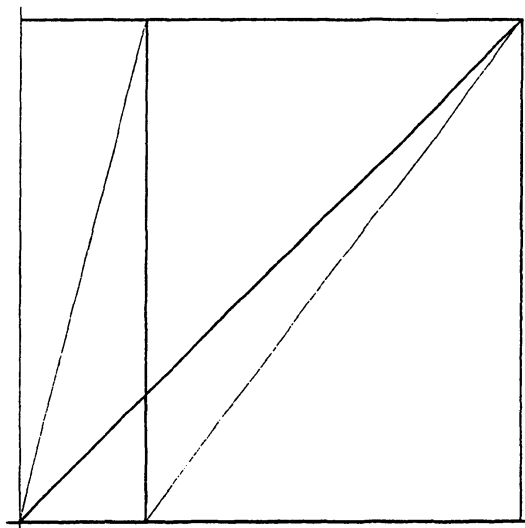
$$\int 1_{\langle a \rangle}(x) g(F^n(x)) d\nu = \nu(\langle a \rangle) \int g d\nu$$

を得る.  $\langle c \rangle$  についても同様の式が得られることは明らかである. 以上から, この例の場合には, Hausdorff 測度が不変確率測度で, Cantor 集合上の力学系は Bernoulli であることがわかる.

この Cantor 集合上の力学系と同型なもう 1 つの変換  $G: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$G(x) = \begin{cases} x/\eta_a^{\alpha_0} & x \in [0, \eta_a^{\alpha_0}) \\ (x - \eta_a^{\alpha_0})/\eta_c^{\alpha_0} & x \in [\eta_a^{\alpha_0}, 1] \end{cases}$$

図 2.3.



を構成しておこう.  $A(G) = \{a, c\}$ ,  $\langle a \rangle = [0, \eta_a^{\alpha_0}]$ ,  $\langle c \rangle = [\eta_c^{\alpha_0}, 1]$  とおく.  $\Phi_{\alpha_0}(1)$  の固有値 1 の固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} \eta_a^{\alpha_0} \\ \eta_c^{\alpha_0} \end{pmatrix}$  だから,  $\langle a \rangle$  と  $\langle c \rangle$  の長さは固有ベクトルに対応して選んだことに注意しておこう. このとき generating function を

$$s_g^{(a)}(z; G) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int 1_{\langle a \rangle}(x) g(G^n(x)) dx$$

として,

$$s_g(z; G) = \begin{pmatrix} s_g^{(a)}(z; G) \\ s_g^{(c)}(z; G) \end{pmatrix}$$

とおけば,

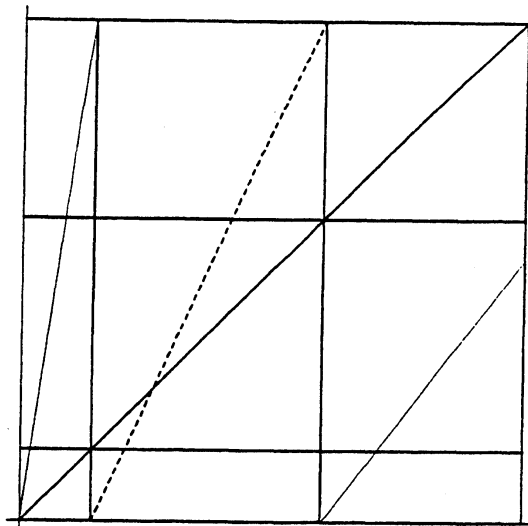
$$\chi_g(G) = \begin{pmatrix} \int_{\langle a \rangle} g(x) dx \\ \int_{\langle c \rangle} g(x) dx \end{pmatrix}$$

と定義することで, renewal equation

$$s_g(z; G) = (I - \Phi_{\alpha_0}(z))^{-1} \chi_g(G)$$

を得る. この  $G$  に関する Fredholm matrix が  $F$  の  $\alpha$ -Fredholm matrix に等しくなっている. この場合, Lebesgue 測度が不変確率測度になることは明らかである. そしてこの 2 つの力学系が同型なことは記号力学系が等しいことから明らかである.

図 2.4. Markov case



普通の Cantor 集合の場合には  $\eta_a = \eta_b = \eta_c = 1/3$  で,  $\Phi_\alpha(z) = \frac{z}{3^\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  だから, Hausdorff 次元は  $2(1/3)^{\alpha_0} = 1$  をみたし,  $\alpha_0 = \log 2 / \log 3$  を得る. さらに,  $G(x) = 2x \pmod{1}$  である.

例 2.2 piecewise linear Markov cases. 上の例と同じように

$$F(x) = \begin{cases} x/\eta_a & x \in [0, \eta_a), \\ (x - \eta_a)/\eta_b & x \in [\eta_a, \eta_a + \eta_b) \\ (x - \eta_a - \eta_b)/\eta_c & x \in [\eta_a + \eta_b, 1] \end{cases}$$

を考えるが,  $0 < \eta_a, \eta_b, \eta_c < 1$  かつ

$$\eta_a < (1 - \eta_a - \eta_b)/\eta_c < \eta_a + \eta_b$$

とする. 記号は前の例と同じものを用いる. 前の例と異なる点は  $\langle c \rangle$  の像は  $\langle a \rangle$  を含むが,  $\langle c \rangle$  とは交わらないことである.  $\lambda_a = \eta_a, \lambda_c = 1 - \eta_a - \eta_b$  とおく, これらは  $\langle a \rangle$  と  $\langle c \rangle$  のそれぞれの長さである. この場合,  $\alpha$ -Fredholm matrix を

$$\Phi_\alpha(z) = \begin{matrix} & a & c \\ a & \begin{pmatrix} z\eta_a^\alpha & z\eta_a^\alpha \\ z\eta_c^\alpha & 0 \end{pmatrix} \\ c & \end{matrix}$$

とおけば、長さ  $n$  による被覆は

$$(1,1)\Phi_\alpha(1)^{n-1} \begin{pmatrix} \lambda_a^\alpha \\ \lambda_c^\alpha \end{pmatrix}$$

であることは前の例と同じである。したがって、Cantor 集合  $C$  の Hausdorff 次元は  $\det(I - \Phi_\alpha(1)) = 0$  の解になるはずである。したがって、

$$\eta_a^{\alpha_0} + (\eta_a \eta_c)^{\alpha_0} = 1$$

を  $\alpha_0$  はみたす。  $\lambda_a = \eta_a^{\alpha_0}$  と  $\lambda_c = (\eta_a \eta_c)^{\alpha_0} = 1 - \eta_a^{\alpha_0}$  とおくと、  $\Phi_{\alpha_0}(1)$  の固有値 1 の固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_c \end{pmatrix}$  になり、もう 1 つの固有値は  $(\eta_a^{\alpha_0} - 1)$  で、その固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} \eta_a^{\alpha_0} \\ -1 \end{pmatrix}$  である。

$$\begin{pmatrix} \lambda_a^{\alpha_0} \\ \lambda_c^{\alpha_0} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_c \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \eta_a^{\alpha_0} \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表すと、

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ (1 - \eta_a - \eta_c)^{\alpha_0} &= C_1(1 - \eta_a)^{\alpha_0} - C_2 \end{aligned}$$

をみたさなければならないので、

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(1 - \eta_a - \eta_c)^{\alpha_0} + 1}{(1 - \eta_a)^{\alpha_0} + 1} \\ C_2 &= \frac{(1 - \eta - a)^{\alpha_0} - (1 - \eta - a - \eta_c)^{\alpha_0}}{(1 - \eta_a)^{\alpha_0} + 1} \end{aligned}$$

を得る。このことは  $0 < C_1 < 1$  を表している。

単語  $w = a_1 \cdots a_n$ , ( $a_i \in \{a, c\}$ ) について、Hausdorff 測度は

$$\begin{aligned} \nu(\langle w \rangle) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \eta_{a_1}^{\alpha_0} \cdots \eta_{a_{n-1}}^{\alpha_0} v(a_n) \Phi_{\alpha_0}(1)^m \begin{pmatrix} \lambda_a^{\alpha_0} \\ \lambda_c^{\alpha_0} \end{pmatrix} \\ &= C_1 \eta_{a_1}^{\alpha_0} \cdots \eta_{a_{n-1}}^{\alpha_0} \lambda_{a_n} \end{aligned} \quad (2.2)$$

となる。ここで  $v(a) = (1, 0)$ ,  $v(c) = (0, 1)$  である。したがって、  $0 < \nu(C) = C_1 < 1$  をみたすであろう。generating function は

$$\begin{aligned} s_g(z) &= (I - \Phi_{\alpha_0}(z))^{-1} \chi_g \\ &= \frac{1}{1 - \eta_a^{\alpha_0} z - (\eta_a \eta_c)^{\alpha_0} z^2} \begin{pmatrix} 1 & z \eta_a^{\alpha_0} \\ z \eta_c^{\alpha_0} & 1 - z \eta_a^{\alpha_0} \end{pmatrix} \chi_g \end{aligned}$$



だから,

$$\begin{aligned}
 s_g(z) &= \frac{1}{(1-z)(1-(1-\eta_a^{\alpha_0})z)} \\
 &\quad \times \left( \int_{\langle a \rangle} g \, d\nu + \eta_a^{\alpha_0} z \int_{\langle c \rangle} g \, d\nu \right. \\
 &\quad \left. + \eta_c^{\alpha_0} z \int_{\langle a \rangle} g \, d\nu + (1-\eta_a^{\alpha_0} z) \int_{\langle c \rangle} g \, d\nu \right) \\
 &= \frac{1}{1-z} \left[ \frac{1}{(2-\eta_a^{\alpha_0})\eta_a^{\alpha_0}} \int_{\langle a \rangle} g \, d\nu + \frac{1}{2-\eta_c^{\alpha_0}} \int_{\langle c \rangle} g \, d\nu \right] \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} \eta_a^{\alpha_0} + \text{small order} \\ 1 - \eta_a^{\alpha_0} + \text{small order} \end{pmatrix} \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

を得る.

$$\frac{d\mu}{d\nu}(x) = \begin{cases} \frac{1}{C_1(2-\eta_a^{\alpha_0})\eta_a^{\alpha_0}} & x \in \langle a \rangle \\ \frac{1}{C_1(2-\eta_c^{\alpha_0})} & x \in \langle c \rangle \end{cases}$$

とおくと, 式(2.2)により,  $\langle w \rangle \subset \langle a \rangle$

$$\begin{aligned}
 \mu(F^{-1}(\langle w \rangle)) &= \mu(\langle aw \rangle) + \mu(\langle cw \rangle) \\
 &= \frac{1}{C_1} \left[ \frac{1}{(2-\eta_a^{\alpha_0})\eta_a^{\alpha_0}} \nu(\langle aw \rangle) + \frac{1}{2-\eta_c^{\alpha_0}} \nu(\langle cw \rangle) \right] \\
 &= \frac{1}{C_1} \left[ \left( \frac{1}{(2-\eta_a^{\alpha_0})\eta_a^{\alpha_0}} \eta_a^{\alpha_0} + \frac{1}{2-\eta_c^{\alpha_0}} \eta_c^{\alpha_0} \right) \nu(\langle w \rangle) \right] \\
 &= \mu(\langle w \rangle)
 \end{aligned}$$

を得る.  $\langle w \rangle \subset \langle c \rangle$  についても

$$\begin{aligned}
 \mu(F^{-1}(\langle w \rangle)) &= \mu(\langle aw \rangle) \\
 &= \frac{1}{C_1} \frac{1}{(2-\eta_a^{\alpha_0})\eta_a^{\alpha_0}} \nu(\langle aw \rangle) \\
 &= \frac{1}{C_1} \frac{1}{(2-\eta_a^{\alpha_0})} \nu(\langle w \rangle) \\
 &= \mu(\langle w \rangle)
 \end{aligned}$$

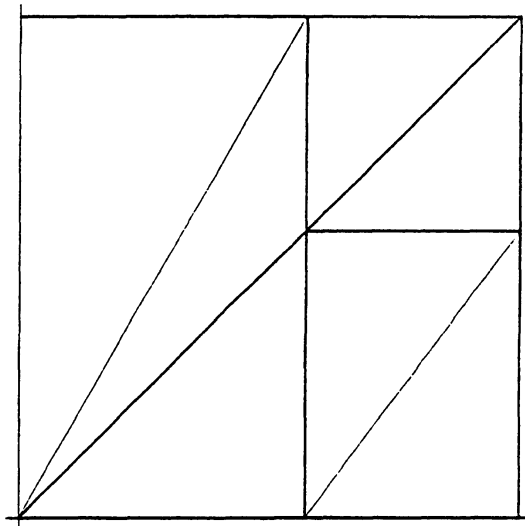
を得る. さらに

$$\begin{aligned}
 \mu(\langle a \rangle) + \mu(\langle c \rangle) &= \frac{1}{(2-\eta_a^{\alpha_0})\eta_a^{\alpha_0}} \eta_a^{\alpha_0} + \frac{1}{2-\eta_c^{\alpha_0}} (1-\eta_a^{\alpha_0}) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

を得るので,  $\mu$ が $\nu$ に絶対連続な不変確率測度であることがわかった. 式(2.3)により,

$$\int 1_{\langle a \rangle}(x) g(F^n(x)) \, d\nu - \nu(\langle a \rangle) \int g \, d\mu \sim (1-\eta_a^{\alpha_0})^n$$

図 2.5.



と指数的に収束することもわかる。もちろん同様の式は  $c$  についても成り立つ。したがって、力学系が **mixing** であることが示せた。また、ある自然なクラスの間数については **decay rate of correlation** が  $1 - \eta_a^{\alpha_0}$  に等しいことも示唆している。

また  $G: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  を構成しよう。symbol  $a$  と  $c$  に対応する区間  $\langle a \rangle$  と  $\langle c \rangle$  の長さを  $\Phi_{\alpha_0}(1)$  の固有値 1 の固有ベクトルに対応させて、それぞれ  $\lambda_a = \eta_a^{\alpha_0}$  および  $\lambda_c = 1 - \eta_a^{\alpha_0}$  ととる。傾きはそれぞれ  $\eta_a^{-\alpha_0}$ ,  $\eta_c^{-\alpha_0}$  と取るわけだが、最初の Bernoulli の例と異なって、 $G(1) = \eta_a^{\alpha_0}$  になることに注意しよう。この場合にも、generating function は

$$s_g(z; G) = (I - \Phi_{\alpha_0}(z))^{-1} \chi_g(G)$$

をみます。これから得られる Lebesgue 測度に絶対連続な不変確率測度は Markov になることは明らかであろう。

### 2.1.2 理論的考察

では、今までの議論をきちんと証明してみよう ([17] 参照)。Markov でない場合にも、符号つき記号力学系を用いれば拡張できるのだが、細かい議論が必要になるので省略する。以下、 $F: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  は piecewise linear Markov 型の変換で、その alphabet を  $\mathcal{A}$  とする。つまり、 $\cup_{a \in \mathcal{A}} \langle a \rangle = [0, 1]$ ,

$a \neq b$  について  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \emptyset$ , かつ  $F(\langle a \rangle) \cap \langle b \rangle \neq \emptyset$  ならば,  $\overline{F(\langle a \rangle)} \supset \langle b \rangle$  とする. ここで,  $\overline{\phantom{x}}$  は集合  $J$  の閉包を表す.  $\langle a \rangle$  上の  $F$  の傾きの絶対値を  $\eta_a^{-1}$ , 傾きが正なら  $\text{sgn } a = +$ , 負なら  $\text{sgn } a = -1$  などと表すのは前の通りである. この alphabet  $\mathcal{A}$  のうち一部を取り去って, それを通らない列全体で Cantor 集合を作る. すなわち,  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$  を考え,

$$C = \{x \in [0, 1]: a_i^x \in \mathcal{A}_1 \text{ for all } i\}$$

とおく.  $\mathcal{A}_1$  上で,  $F$  は irreducible を仮定する. すなわち, 任意の  $a \in \mathcal{A}_1$  について, ある  $k$  が存在して,  $\overline{F^k \langle a \rangle} \supset \cup_{b \in \mathcal{A}_1} \langle b \rangle$  をみたすとする. この Cantor 集合に関する  $\alpha$ -Fredholm matrix の作り方はこれ以上述べるのはやめよう. 記号力学系上で,  $\eta_a$  のかわりに  $\eta_a^\alpha$  と取るだけである. 示したい定理は:

**定理 2.1**  $\alpha_0$  を  $\Phi_\alpha(1)$  が最大固有値 1 をもつ最大の  $\alpha$  とする. このとき  $\alpha_0$  は  $C$  の Hausdorff 次元である.

この定理を証明するために, 別の Hausdorff 次元を考えよう.  $[0, 1]$  上の確率測度  $\mu$  について,

$$\mu_\alpha(C, \delta) = \inf \sum_i \mu(\langle v_i \rangle)^\alpha$$

とおく. ここで  $\inf$  は  $\mu(\langle v_i \rangle) < \delta$  をみたす words の集合  $\{v_i\}$  による  $C$  の被覆に関する  $\inf$  で, 今までの  $l_\alpha(C, \delta)$  とは, 長さを測るかわりに  $\mu$  による測度を用い, 区間による被覆のかわりに word による被覆を用いているところが異なる. また, 今までのラフな議論とは word の長さが一定でなくて良い点異なる. これについて

$$\mu_\alpha(C) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_\alpha(C, \delta)$$

とおいて, これが収束する  $\inf$ , または発散する  $\sup$  を  $\dim_\mu(C)$  と表そう. 定義から  $\mu$  が Lebesgue 測度なら  $\dim_{Lebes}(C)$  は Hausdorff 次元以上であることは明らかである. ここで, 区間を上手に word で覆えば, 容易につきの補題が従う.

**補題 2.2**  $C$  の Hausdorff 次元は  $\dim_{Lebes}(C)$  に等しい.

ここで次の定理を用いよう.

**定理 2.2 (Billingsley 定理 14.1[3])** 確率測度  $\mu_1, \mu_2$  について,

$$C \subset \left\{ x: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu_1(\langle a^x[1, n] \rangle)}{\log \mu_2(\langle a^x[1, n] \rangle)} = \alpha \right\}$$

が, ある  $0 \leq \alpha \leq \infty$  について成り立つとする. このとき,

$$\dim_{\mu_2}(C) = \alpha \dim_{\mu_1}(C)$$

が成り立つ. ここで  $a^x[1, n]$  は,  $x$  の展開の始めの長さ  $n$  の word である.

前に作った  $G: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  が役に立つ.  $\alpha_0$  を  $\Phi_{\alpha_0}(1)$  が固有値 1 をもつ最大の  $\alpha$  とする.  $\Phi_{\alpha_0}(1)$  が非負の成分をもつ行列であることに注意しよう. 正成分をもつ行列の Perron-Frobenius の定理によって, 最大固有値は非負 (仮定よりこれが 1 に等しい) で, 成分が非負な固有ベクトルが選べる. 成分の和が 1 になる固有ベクトルを選んで, symbol  $a$  ( $a \in A_1$ ) に対応する区間の長さを, 対応する固有ベクトルの成分とする.  $a$  を  $a \in A$  の順序に並べ, その上での傾きの絶対値を  $\eta_a^{-\alpha_0}$  として考えれば,  $\Phi_{\alpha_0}(z)$  を Fredholm matrix としてもつ写像  $G$  が得られる. 混乱を避けるために, この  $G$  の作用する  $[0, 1]$  を  $I_G$ ,  $F$  の作用する  $[0, 1]$  を  $I_F$  と書こう.  $F$  を  $C$  に制限したものと  $G$  は同じ記号力学系をもつことから,  $I_G$  上の Lebesgue 測度を  $I_F$  に induce したものを  $\mu_G$  と書こう.  $\mu_F$  で  $I_F$  上の Lebesgue 測度を表す. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu_F(\langle a^x[1, n] \rangle)}{\log \mu_G(\langle a^x[1, n] \rangle)} = \frac{1}{\alpha_0}$$

がすべての  $x \in C$  について成り立つ.  $\mu_G(C) = 1$  より,

$$\dim_{Lebes}(C) = \alpha_0 \dim_{\mu_2}(C) = \alpha_0$$

を得て証明が終わる.

## 2.2 連分数展開から導かれる Cantor 集合

この節では連分数展開において, 記号 1 と 2 のみが現れる数全体の Hausdorff 次元を計算してみよう. これには変換  $F(x) = 1/x \pmod{1}$  を考えれば良い. この変換は Markov であるが, piecewise linear でないため, 今までの仮定をみたさない. 区間上の力学系においては, 符号つき記号力学系と formal piecewise linear 変換による近似によって, 一般の piecewise  $C^2$  変換にも議論が拡張できたが, Cantor 集合を考える際には, 技術的な理由によって, piecewise linear でない場合には Markov の場合のみ拡張ができていない ([40]). 仮定を述べよう. 有限集合  $A$  に対し, 区間  $[0, 1]$  の分割  $\{\langle a \rangle\}_{a \in A}$

$$(1) \cup_{a \in A} \langle a \rangle = [0, 1],$$

$$(2) \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \emptyset \text{ if } a \neq b.$$

が存在し,  $\mathcal{A}$  の部分集合  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$  について,  $\cup_{a \in \mathcal{A}_1} \langle a \rangle$  から  $[0, 1]$  への変換  $F$  で

- (1)  $\langle a \rangle$  上で  $F$  は単調で, その閉包にまで単調に  $C^{1+\gamma}$  ( $\gamma > 0$ ) 関数として拡張できる (piecewise  $C^{1+\gamma}$ ).
- (2)  $a, b \in \mathcal{A}_1$  について  $F(\langle a \rangle) \cap \langle b \rangle \neq \emptyset$  ならば,  $\overline{F(\langle a \rangle)} \supset \langle b \rangle$  (Markov).
- (3)  $\xi = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{ess\,inf}_{x \in I} \log |F^{n'}(x)| > 0$  (expanding),
- (4) 任意の  $a, b \in \mathcal{A}_1$  について, ある  $n$  が存在して,  $\overline{F^n(\langle a \rangle)} \supset \langle b \rangle$  (irreducible).

とする. ここで, 上の仮定から

$$\xi_0 = \log \operatorname{ess\,inf}_{x \in I} |F'(x)| > 0$$

が従うことに注意する. 我々の考えたい集合は

$$C = \{x \in I : F^n(x) \in \cup_{a \in \mathcal{A}_1} \langle a \rangle, \forall n \geq 0\}$$

である.  $\mathcal{A}_1 = \{1, 2\}$ ,  $\langle 1 \rangle = [1/2, 1]$ ,  $\langle 2 \rangle = [1/3, 1/2]$  とおくことで, 連分数展開において, 記号 1 と 2 のみをもつ点全体の集合は, 上の仮定をみたすことに注意しよう.  $x \in \langle w \rangle$  ( $|w| = m$ ) について, 変換  $F$  をもつとも傾きの緩い場合  $F_m^+$  と急な場合  $F_m^-$  とで近似する.

$$F_m^+(x) = F_m^+(w) = \begin{cases} + \operatorname{ess\,inf}_{y \in \langle w \rangle} |F'(y)| & \text{if } F'(x) > 0 \\ - \operatorname{ess\,inf}_{y \in \langle w \rangle} |F'(y)| & \text{if } F'(x) < 0 \end{cases}$$

$$F_m^-(x) = F_m^-(w) = \begin{cases} + \operatorname{ess\,sup}_{y \in \langle w \rangle} |F'(y)| & \text{if } F'(x) > 0 \\ - \operatorname{ess\,sup}_{y \in \langle w \rangle} |F'(y)| & \text{if } F'(x) < 0 \end{cases}$$

$$(F_m^\tau)^{n'}(x) = \prod_{i=0}^{n-1} F_m^{\tau'}(F^i(x)) \quad (\tau \in \{+, -\})$$

で定義する. これらの変換は  $[0, 1]$  上に実現できるとは限らないので, formal piecewise linear 変換と呼ばれ, 1次元の  $C^2$ 変換のエルゴード性の研究に用いた(1.8節). これらを用いて, Cantor 集合の次元を上下から評価する. 今まで同様に  $s_{g,\alpha}^w(z)$  などを定義すると

$$s_{g,\alpha}^w(z; F) \leq s_{g,\alpha}^\epsilon(z; F),$$

$$s_{g,\alpha}^w(z; F_1^-) \leq s_{g,\alpha}^w(z; F_2^-) \leq \dots$$

$$\leq s_{g,\alpha}^w(z; F) \leq \dots \leq s_{g,\alpha}^w(z; F_2^+) \leq s_{g,\alpha}^w(z; F_1^+)$$

をみたすことは明らかである。したがって、

$$1 \geq \alpha_1^+ \geq \alpha_2^+ \geq \cdots \geq \alpha_0 \geq \cdots \geq \alpha_2^- \geq \alpha_1^- \geq 0$$

であることがわかる。ここで、 $\alpha_m^+$  は  $s_{g,\alpha}^w(z: F_m^+)$  がある  $g \in L^\infty$  について  $z = 1$  が特異点となる最小の  $\alpha$  とする。また、 $\alpha_0$  は  $F$  の対応する値である。

我々の考察中の変換は piecewise linear でないため、有限次元の Fredholm matrix は考えられないが、formal piecewise linear 変換  $F_m^+$  についての  $\alpha$ -Fredholm matrix を  $\mathcal{W}_m \times \mathcal{W}_m$  matrix を

$$\Phi_\alpha(z: F_m^+)_{u,v} = \begin{cases} z |F_m^+(u)'|^{-\alpha} & \text{if } \overline{F(\langle u \rangle)} \supset \langle v \rangle, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく。また、 $\alpha$ -zeta function を

$$\zeta_\alpha(z: F) = \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{y \in \mathbf{C}: y=F^n(y)} |F^{n'}(y)|^{-\alpha} \right]$$

$$\zeta_\alpha(z: F_m^+) = \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{y \in \mathbf{C}: y=F^n(y)} |(F_m^+)^{n'}(y)|^{-\alpha} \right]$$

によって定義する。このとき、十分小さな  $|z|$  について、 $\zeta_\alpha(z: F_m^+) = \det(I - \Phi_\alpha(z: F_m^+))$  は  $\zeta_\alpha(z: F)$  に収束することが示せる。このことを用いると、つぎの補題が従う。

**補題 2.3**  $\alpha_m^+$  は単調減少に、 $\alpha_m^-$  は単調増加に  $\alpha_0$  に収束する。

前と同様に  $[0, 1]$  上に Cantor 集合上の変換  $F$  と同じ記号力学系をもつ変換  $G$  を構成しよう。  $e_m^+ = (e_m^+(w))_{w \in \mathcal{W}_m}$  を  $\Phi_{\alpha_m^+}(1: F_m^+)$  の固有値 1 の固有ベクトルで、その和が 1 に等しいものとする。この固有ベクトルを用いて、piecewise linear 変換の場合に考察したように、 $[0, 1]$  上の変換  $G_m^+$  で、Fredholm matrix  $\Phi_{\alpha_m^+}(z: F_m^+)$  をもつものを構成できる。この写像  $G_m^+$  と上の補題を用いることで、適当な部分列を選ぶことにより、極限として、Cantor 集合上の写像  $F$  と同じ記号力学系をもつ  $[0, 1]$  上の写像  $G$  を構成できる。この構成は技術的なだけなので詳細は省略する。更にこの  $G$  は

$$G'(x) = \begin{cases} +|F'(\phi(x))|^{\alpha_0} & \text{if } F'(\phi(x)) > 0, \\ -|F'(\phi(x))|^{\alpha_0} & \text{if } F'(\phi(x)) < 0 \end{cases}$$

が  $L^1$  の意味でみたし、つぎの補題が成立する。

**補題 2.4**  $\alpha_0 > 0$  とする. このとき, ある  $\gamma' > 0$  が存在して,  $1/G'(x)$  は universally bounded  $\gamma'$ -variation である. ここで,  $f$  が universally bounded  $p$ -variation であるとは,

$$\text{var}_p(f) = \sup_{0 \leq x_0 < \dots < x_n \leq 1} \left( \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p} < \infty$$

をみたすことである.

以上の議論から,  $C$  の Hausdorff 次元を計算しよう. 前と同様に,  $\mu_1$  を  $[0, 1]$  上の Lebesgue 測度,  $\mu_2$  を  $G$  の作用している  $[0, 1]$  上の Lebesgue 測度を記号力学系の対応により induce した測度とすると,  $x \in C$  について

$$\frac{\log \mu_1(\langle a^x[1, n] \rangle)}{\log \mu_2(\langle a^x[1, n] \rangle)} = \frac{\log(\text{Lebes}(\langle a^x[1, n] \rangle_F))}{\log(\text{Lebes}(\langle a^x[1, n] \rangle_G))}$$

は  $1/\alpha_0$  に収束する. そこで Billingsley の定理 2.2 によって,

$$\dim_{\mu_1}(C) = \alpha_0 \dim_{\mu_2}(C) = \alpha_0 \dim_{\text{Lebes}}([0, 1]) = \alpha_0$$

であることがわかる. まとめれば,

**定理 2.3**  $C$  の Hausdorff 次元は  $\alpha_0$  である.

不変測度を構成しよう. 補題 2.4 により,  $1/G'$  は universally bounded  $\gamma'$ -variation である. このことから,  $G$  は [18] の Theorem 3.5 の仮定をみたす. したがって, Lebesgue 測度に絶対連続な不変確率測度  $\mu_G$  が存在し, 力学系  $([0, 1], \mu_G, G)$  が weakly mixing であることが従う.  $\mu_G$  を  $C$  上に induce したものを  $\mu_F$  で表そう.

**補題 2.5**  $G$  の作用する  $[0, 1]$  の Lebesgue 測度を induce した測度  $\mu_2$  は,  $\alpha_0$ -conformal 測度である. ここで,  $\mu$  が  $\alpha_0$ -conformal とは,

$$\mu(F(A)) = \int_A |F'(x)|^{\alpha_0} d\mu$$

がすべての  $A \subset (a)$  ( $a \in A_1$ ) について成り立つことである.

**証明.** Lebesgue 測度は  $G$  について, 1-conformal 測度であり, また  $|G'(x)| = |F'(y)|^{\alpha_0}$  が成り立つ. ここで,  $y$  はその  $G$  による展開が,  $F$  による  $x$  の展開と一致する点である.

**定理 2.4**  $\mu_F$  は  $\alpha_0$ -conformal 測度  $\mu_2$  と絶対連続な不変確率測度であり, 力学系  $(C, \mu_F, F)$  は weakly mixing である.

conformal 測度と Hausdorff 測度の間の関係について、述べておこう。

**定義 2.1** (1) Cantor 集合  $C$  が Darboux property をもつとは、 $F(\langle a \rangle \cap C) = F(\langle a \rangle) \cap C$  をみたすことである。

(2)  $F$  が Misiurewicz condition をみたすとは、 $\{c_i\}_{i=0}^N$  は  $\langle a \rangle$  ( $a \in A_1$ ) の端点を表すとき、

$$\bigcup_{i=1}^N \left\{ \lim_{x \uparrow c_i} F^j(x) : j \geq 1 \right\} \cup \bigcup_{i=0}^{N-1} \left\{ \lim_{x \downarrow c_i} F^j(x) : j \geq 1 \right\}$$

がある  $\varepsilon > 0$  について、

$$\bigcup_{i=0}^{N-1} (c_i, c_i + \varepsilon) \cup \bigcup_{i=1}^N (c_i - \varepsilon, c_i)$$

と交わりをもたないことである。

我々が考察中の  $C$  が Darboux property をみたし、さらに  $F$  が Misiurewicz condition をみたすことは明らかである。したがって、[9] の Theorem 6 によって、ある定数  $c \neq 0$  が存在して、 $\nu = c\mu_2$  をみたす。したがって、

**定理 2.5** Hausdorff 測度  $\nu$  は、その全体の測度は 0 でも、無限大でもない。さらに、 $\mu_F$  は  $\nu$  に絶対連続な不変確率測度であり、力学系  $(C, \mu_F, F)$  は weakly mixing である。

最後に例として、連分数展開において、記号 1 と 2 のみが現れる集合の Hausdorff 次元を求めてみよう。この写像は本質的に  $[1/(1+\sqrt{3}), -1+\sqrt{3}]$  からそれ自身への写像とみなせる。

$[1/(1+\sqrt{3}), (1+\sqrt{3})/(3+2\sqrt{3})]$ ,  $[(1+\sqrt{3})/(3+2\sqrt{3}), 1/\sqrt{3}]$ ,  $[1/\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}]$  をそれぞれ 区間  $\langle 0 \rangle$ ,  $\langle 1 \rangle$ ,  $\langle 2 \rangle$  と表すことにする。  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $A_1 = \{0, 2\}$ ,  $I = [1/(1+\sqrt{3}), -1+\sqrt{3}]$ ,

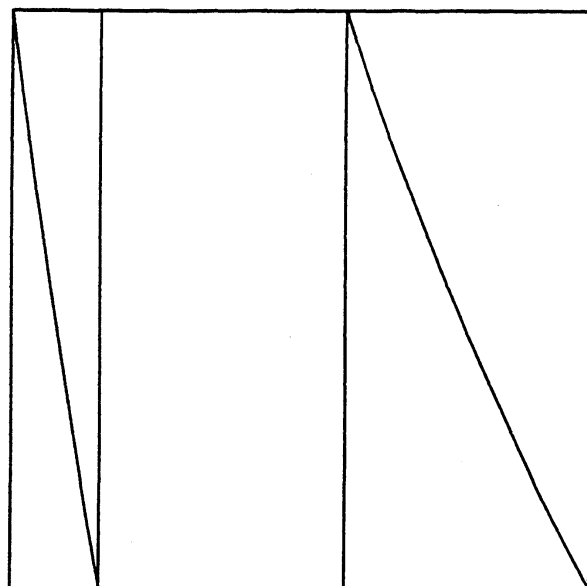
$$F(x) = \begin{cases} 1/x - 2 & \text{if } x \in \langle 0 \rangle, \\ 1/x - 1 & \text{if } x \in \langle 2 \rangle \end{cases}$$

とおくと、求めたい Cantor 集合は

$$C = \{x \in I : F^m(x) \notin \langle 1 \rangle\}$$

と表せる。これを formal piecewise linear 変換で近似することにより、コンピュータを用いて、その Hausdorff 次元を計算するとつぎのようになる。





$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$-1 + \sqrt{3}$$

approximation	minimum	maximum
1	0.4599714039	0.6429535391
2	0.5066200906	0.5573891372
3	0.5239108226	0.5395066173
4	0.528895873377809917692	0.533552187854664990041
5	0.530600797037892992251	0.532010237643201833751

以上から、Hausdorff 次元はおおむね第 5 近似の平均 0.531305517...  
であることが予測される。

## 3 章

# 関数解析の補足

この節の内容は N.Dunford, J.T. Schwartz[7], T. Kato[16] によっている。

### 3.1 有界変動関数

**定義 3.1**  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  が有界変動関数とは, ある定数  $K > 0$  が存在して, 任意の有限分割  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$  について  $\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < K$  が成り立つ関数のことである. すべての分割に関する上の量の上限を  $f$  の全変動と呼び  $\bar{v}(f)$  で表す.

これが有界変動関数の一般的定義だが, 我々は測度 0 を無視したいと考えているので, この有界変動関数の定義を少し変えることにする. 有界変動関数を  $L^1$  の元と見なし,  $f \in L^1$  の全変動を

$$v(f) = \inf\{\bar{v}(\tilde{f}) : \tilde{f} = f \text{ a.e.}\}$$

とおき, 有界変動関数全体を

$$BV = \{f \in L^1 : v(f) < \infty\}$$

と定義する. 有界変動関数全体  $BV$  上のノルムを全変動 +  $L^1$  ノルム, または  $\max\{\text{全変動}, L^1 \text{ ノルム}\}$  を考える. これらはノルムになり, 同じ位相を導き,  $BV$  は Banach 空間になる.

### 3.2 nuclear operators

我々の考察する Perron–Frobenius operator はその定義域を有界変動関数にとっても, ある円板内の点はすべて固有値であるから, コンパク

トではない。したがって nuclear ではないのだが, Fredholm determinant という概念を用いるので, この節で, 定義だけ振り返ることにする。

**定義 3.2**  $X$  を Banach 空間,  $K$  を  $X$  から  $X$  への線形写像とする。ある列  $f_n^* \in X^*$ ,  $x_n \in X$  と数列  $\{c_n\}$  が存在して,

$$\sup_n \|f_n^*\|, \sup_n \|x_n\|, \sum_n |c_n| < \infty$$

かつ

$$Kx = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m c_n(x, f_n^*)x_n$$

が成立するとき,  $K$  を nuclear operator または trace class であると呼ぶ。ここで,  $X^*$  は  $X$  の dual space を表す。

nuclear operator  $Kx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x, f_n^*)x_n$  は,  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p < \infty$  がある  $0 \leq p < 2/3$  で成り立つときには, この形の表現が一意的であることがわかる。この場合には  $K$  のトレースを

$$tr(K) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x_n, f_n^*)$$

で定義でき, またその Fredholm determinant

$$\det(I - zK) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} tr(K^n)\right)$$

が  $|z| < 1/\limsup_{n \rightarrow \infty} (tr(K^n))^{1/n}$  で定義できる。この Fredholm determinant は entire function であることがわかり, さらに  $\lambda_i$  を多重度もこめた  $K$  の固有値とすると

$$\det(I - zK) = \prod_i (1 - z\lambda_i)$$

が成立し, とくに

$$tr(K) = \sum_i \lambda_i$$

が成り立つ。

### 3.3 Banach 空間上の spectral decomposition

Banach 空間での一般論としては, 次の定理があげられる。

**定理 3.1 (Ionescu Tulcea and Marinescu[11])**  $E$  を norm  $|\cdot|$  をもつ Banach 空間,  $B$  を  $E$  の部分集合で, その上に norm  $\|\cdot\|$  が与えられた Banach 空間とする. 線形写像  $F: B \rightarrow B$  が有界 ( $\|F\| < \infty$ ) とする.

- (1)  $x_n \in B$ , ある定数  $C$  について  $\|x_n\| < C$ , かつある  $x \in B$  について  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$  が成立するならば,  $\|x\| < C$  をみたく.
- (2) ある  $H$  が存在して,  $\|F^n\| < H$ .
- (3) ある  $R$  と  $0 < r < 1$  が存在して,  $x \in B$  について  $\|Fx\| \leq r\|x\| + R|x|$  が成立する.
- (4)  $B$  の中で有界な  $P \subset B$  について,  $F(P)$  は  $E$  で compact である.

ならば, 有限個の絶対値 1 の固有値  $c_1, c_2, \dots, c_p$  が存在して

$$F^n = \sum_{i=1}^p (1/c_i^n) F_i + S^n$$

と表せる. ここで  $F_i$  は定義域  $B$ , 値域が有限次元の  $B$  の部分空間である有界線形作用素,  $S$  は定義域  $B$ , 値域  $B$  の有界線形作用素で

$$F_i^2 = F_i, F_i F_j = 0 (i \neq j), F_i S = S F_i = 0$$

かつある  $M, h > 0$  について

$$\|S^n\| \leq M/(1-h)^n$$

が成り立つ.

つまり, ある条件をみたせば有限個の単位円上の固有値とそれから離れたスペクトルに分解できることをこの定理は示している.

Perron-Frobenius operator  $P$  は Ionescu Tulcea and Marinescu の定理 3.1 を  $E = L^1, B = BV$  として適用することができる. さらに, この定理と類似のタイプとして, quasi-compact operator の分解定理がある. これは有限個の固有値を除いては spectrum はある円の内側にあるというものである.

**定義 3.3**  $F$  を Banach 空間  $X$  上の線形作用素とする. このとき  $F$  が quasi-compact であるとは, ある  $k$  と compact operator  $K: X \rightarrow X$  が存在して

$$\|P^k - K\| < r(F)^k$$

が成り立つことである. ここで  $r(F)$  は  $F$  の spectrum 半径である.

$$r_K = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf\{\|P^n - K\|: K \text{ は compact operator}\})^{1/n}$$

と定義する.

有界線形作用素の non-essential spectrum とは isolated spectrum で  $\text{range}(P - \lambda I)$  は closed,  $\cup_{n \geq 0} \text{Ker}(P - \lambda I)^n$  が有限次元であることである. この補集合を essential spectrum とよび, その全体を  $\text{ess}(P)$  で表す.

$$r_{\text{ess}} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \text{ess}(P)\}$$

と定義すると,  $r_K = r_{\text{ess}}$  が成り立つ ([42]).

Dunford-Schwartz VIII 定理 8.2([7]) および T.Kato III 定理 6.5 ([16]) によれば,  $r > r_K$  について,  $r$  より大きな絶対値を持つ spectrum は固有値で有限個  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  しかない. すなわち,

$$P = \sum \lambda_i (E_i + N_i) + Q$$

と表せる. ここで  $E_i$  は固有空間への射影.  $N_i = (P - \lambda_i I)E_i$  は nilpotent,  $r(Q) < r$ ,  $E_i E_j = 0$  ( $i \neq j$ ),  $E_i N_i = N_i E_i = N_i$ ,  $E_i Q = Q E_i = 0$  をみただす.

### 3.4 Mazur の定理, Kakutani-Yosida の定理

**定理 3.2 (Mazur)**  $X$ : Banach space,  $A \subset X$  が compact ならば, その linear convex hull も compact である.

**定理 3.3 (Kakutani-Yosida)** 列  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k$  が有界とする. このとき  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k$  が strong operator norm で収束する必要十分条件は  $\frac{1}{n} P^n f \rightarrow 0$  が fundamental set に属する  $f$  について成り立ち, かつ  $\{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f\}$  が fundamental set について weakly sequentially compact であることである. ここで fundamental set とは, その linear span の閉包が全体になるもののことである.

## 4 章

# エルゴード理論からの補足

この節の内容は十時東生 [53] に詳しくのっている。

### 4.1 Spectral Theory

ある空間の上に  $F$  から導かれる線形作用素を考えて、 $F$  のエルゴード問題を線形作用素のスペクトル問題に置き換えるというのが、我々の取った方法である。この方法で古典的なものは力学系  $([0, 1], \mu, F)$  にともなう isometry

$$Uf(x) = f(F(x))$$

を  $L^p$  上で考える方法である。

$$\begin{aligned} \|Uf\|_p^p &= \int |Uf(x)|^p d\mu = \int |f(F(x))|^p d\mu \\ &= \int |f(x)|^p d\mu = \|f\|_p^p \quad (\mu \text{ の不変性}) \end{aligned}$$

によって  $U$  が isometry になる、とくに内積

$$\begin{aligned} (Uf, Ug) &= \int Uf(x) \overline{Ug(x)} d\mu = \int f(F(x)) \overline{g(F(x))} d\mu \\ &= \int f(x) \overline{g(x)} d\mu = (f, g) \end{aligned}$$

によって  $L^2$  で考えれば、 $U$  は unitary 変換になり spectrum の一般論を用いることができる。

$U$  は positive operator である、すなわち任意の  $x \in [0, 1]$  について  $f(x) \geq 0$  ならば、任意の  $x$  について  $Uf(x) \geq 0$  が成り立つ。  $L^2$  における unitary 変換の spectrum 分解  $U = \int_0^1 e^{2\pi i\phi} dE(\phi)$  を考えよう。ここ

で、 $E(\phi)$  は単位の分解である。まず定数関数が unitary operator  $U$  の固有値 1 の固有関数であることは明らかである。  $U$  の固有値 1 の固有空間をみれば、力学系のエルゴード性がただちに仕上がる。

**定理 4.1** 力学系  $([0, 1], \mu, F)$  がエルゴード的であることの必要十分条件は、対応する unitary operator  $U$  の固有値 1 が単純であることである。

**定理 4.2** 力学系  $([0, 1], \mu, F)$  に対応する unitary operator を  $U$  で表す。このとき、(i)  $f$  を単位円上の固有値に対応する固有関数とすると、 $|f|$  は固有値 1 の固有関数である。(ii) 固有値 1 が単純であるとする、単位円上の固有値は群を成す。

**定理 4.3** 変換  $F$  に対応する unitary operator が 1 を simple eigenvalue としてもつとき、 $L^2 \setminus C([0, 1])$  で連続スペクトルのみを持つことが weakly mixing である必要十分条件である。

ここで、 $C([0, 1])$  で  $[0, 1]$  上の定数関数全体を表す、また、

**定義 4.1** 力学系  $([0, 1], \mu, F)$  が weakly mixing であるとは、任意の可測集合  $A, B$  について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A \cap F^{-k}(B)) - \mu(A)\mu(B)| = 0$$

をみたすことである。

言葉の綾からもわかるように、mixing (strongly mixing)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap F^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B)$$

ならば、weakly mixing である。

## 参考文献

- [1] Baladi, V., and Keller G., Zeta functions and transfer operators for piecewise monotone transformations. *Comm.Math. Phys.* 127 (1990), 459–477.
- [2] Baladi, V. and Ruelle, D., An extension of the theorem of Milnor and Thurston on the zeta functions of interval maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 14 (1994), 621–632.
- [3] Billingsley, P., *Ergodic theory and Information*. John Wiley & Sons (1965). 確率論とエントロピー (渡辺毅, 十時東生 訳) 吉岡書店
- [4] Bowen, R., Bernoulli maps of the interval. *Israel J. Math.* 28 (1977), 161–168.
- [5] Collet, P., and Eckmann, J-P., *Iterated Maps on the interval as Dynamical Systems*. Birkhäuser (1980). カオスの出現と消滅 (森 真 訳) 遊星社
- [6] Devaney, R.L., *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Second Edition, Addison–Wesley (1989).
- [7] Dunford, N., and Schwartz, J.T., *Linear Opertors* I,II,III. Interscience Publishers *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley and Sons (1990).
- [8] Gora, P., and Schmitt, B., Un exemple de transformation dilatante et  $C^1$  par morceau de l'intervalle, sans probabilité absolument continue invariante. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 9 (1989), 101–113.
- [9] Hofbauer, G., Hausdorff and conformal measures for expanding piecewise monotonic maps of the interval. *Studia Math.* 103 (1992), 191–206.



- [10] Hofbauer, F., and Keller, G., Zeta functions and transfer-operators for piecewise linear transformations. *J. reine angew. Math.* **352** (1984), 100-113.
- [11] Ionescu Tulcea, C.T., and Marinescu, G., Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues. *Ann. Math.* **47** (1946), 140-147.
- [12] Ishitani, H., A central theorem of mixed type for a class of 1-dimensional transformations. *Hiroshima Math. J.* **16** (1986), 161-168.
- [13] Ito, Sh., Nakada, H., and Tanaka, S., Unimodal linear transformations and chaos I,II. *Tokyo J. Math.* **2** (1979), 221-259.
- [14] Ito, Sh., and Takahashi, Y., Markov subshifts and realization of  $\beta$ -transformations. *J. Math. Soc. Japan*, **26** (1974), 33-35.
- [15] Jakobson, M.V., Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Comm. Math. Phys.* **81** (1981), 39-88.
- [16] Kato, T. *Perturbation theory for linear operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band **132** (1966), Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York.
- [17] Keane, M. and Mori, M., preparing.
- [18] Keller, G., Generalized bounded variation and application to piecewise monotonic transformations. *Z. Warsherinlich.* **69** (1985), 461-478.
- [19] Keller, G., Markov extensions, zeta functions and Fredholm theory for piecewise invertible dynamical systems. *Trans Amer. Math. Soc.* **314** (1989), 433-497.
- [20] Keller, G., On the rate of convergence to equilibrium in one-dimensional systems. *Comm. Math. Phys.* **96** (1984), 181-193.
- [21] Kowalski, Z., Invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Lect Notes Math.* **472** (1975), Springer, 77-94.

- [22] Kowalski, Z., Ergodic properties of piecewise Monotonic Transformations, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **27** (1979), 63–69.
- [23] Lambert, A., Siboni, S., and Valenti, S., Statistical properties of a non-uniformly hyperbolic map of the interval. *J. Statistical Physics* **72** (1993), 1305–1330.
- [24] Lasota, A. and Yorke, J.A., On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **186** (1973), 481–488.
- [25] Li, T.Y., and Yorke, J.A., Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly* **82** (1975), 895–922.
- [26] Li, T.Y., and Yorke, J.A., Ergodic Transformation from an interval into itself. *Trans. Amer. Math. Soc.* **235** (1978), 183–193.
- [27] Lorenz, E.N., Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* **20** (1963), 130–141.
- [28] May, R.M., Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* **261** (1976), 459–467.
- [29] Melo W. de, and Strien, S. van, *One-dimensional Dynamics*, Springer-Verlag (1993), New York.
- [30] Milnor, J. and Thurston, W., Iterated maps of the interval, *Springer Lecture Notes in Math.* **1342** (1988), 465–564, ed. J.C.Alexander. Springer, Berlin-Heidelberg-New York.
- [31] Mori, M., The extension of Sarkovskii's results and the topological entropy in unimodal linear transformations. *Tokyo J. Math.* **4** (1981), 133–152.
- [32] Mori, M., On the decay of correlation for piecewise monotonic mappings I,II, *Tokyo J. Math.* **8** (1985), 389–414, **9** (1986), 135–161.
- [33] Mori, M., Fredholm determinant for piecewise linear transformations. *Osaka J. Math.* **27** (1990), 81–116.
- [34] Mori, M. Fredholm determinant for piecewise monotonic transformations. *Osaka J. Math.* **29** (1992), 497–529.

- [35] Mori, M. On the intermittency of a piecewise linear map (Takahashi model). *Tokyo J. Math.* **16** (1993), 411–428.
- [36] Mori, M. On the convergence of the spectrum of Perron–Frobenius operator. *Tokyo J. Math.* **17**, (1994) 1–19.
- [37] Mori, M. Perron–Frobenius operator for higher dimensional piecewise linear transformations. *Proceeding of the international Conference on Dynamical Systems and Chaos*, 1 (1995), World Scientific, 178–181.
- [38] Mori, M. Fredholm Matrix and Zeta Functions for 1–dimensional Mappings. *Algorithms, Fractals, and Dynamics, Proceedings of Algorithms, Fractals and Dynamics in Kyoto(1992)* (1995), 161–168.
- [39] Mori, M., Zeta function and Perron-Frobenius operator of piecewise linear transformations on  $R^k$ . *Tokyo Journal of Math.* **18** (1995), 401–416.
- [40] Mori, M. Dynamical system on Cantor set, preprint.
- [41] Morita, T., Random iteration of one–dimensional transformations. *Osaka J. Math.* **22** (1985), 489–518.
- [42] Nussbaum, R.D., The radius of the essential spectrum. *Duke Math. J.* **37**, (1970) 473–478.
- [43] Rousseau–Egele, J., Un theoreme de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes et monotones par morceau. *Annal. Prob.* **11**, (1983) 772–788.
- [44] Rychlik, M., Bounded variation and invariant measure. *Studia Math.* **76** (1983), 69–80.
- [45] Rychlik, M. Invariant measures for piecewise monotonic  $C^{1+\epsilon}$  transformations. not published.
- [46] Šarkovskii, A.N., Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. *Ukr. Mat. Z.* **16** (1964), 61–71.
- [47] Stefan, P., A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms on the line. *Comm. Math. Phys.* **54** (1977), 237–248.

- [48] Takahashi, Y., Fredholm determinant of unimodal linear maps. *Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo* **31** (1981), 61–87.
- [49] Takahashi, Y., One dimensional maps and power spectrum. *Recent Studies on Turbulent Phenomena* (1985), 99–116, Association for Science Documents Information, Tokyo.
- [50] Takahashi, Y., Power spectrum and Fredholm determinant related to intermittent chaos. *Stochastic Processes in Physics and Engineering*(eds. Albeverio et al.), Reidel (1988), 357–379.
- [51] Thaler, M., Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points. *Israel J. Math.* **37** (1980), 303–314.
- [52] Thaler, M., Transformations on  $[0, 1]$  with infinite invariant measures. *Israel J. Math.* **46** (1983), 67–96.
- [53] 十時東生, エルゴード理論入門, 共立出版 (1971)
- [54] Wagner, G., The ergodic behavior of piecewise monotonic transformation. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete.* **46** (1979), 317–324.
- [55] Wong, S., Some metric properties of piecewise monotonic mappings of the unit interval. *Trans Amer. Math. Soc.* **246** (1973), 493–500