

# 熱力学形式のセルバーグゼータ関数への応用

盛田 健彦 述      浜 正樹 記

1996年7月31日～8月3日

# 目次

<b>1</b>	<b>序章</b>	<b>3</b>
1.1	このノートの‘Zeta’とは	3
1.2	モデュラー曲面と連分数展開の関連	4
1.3	連分数変換から転送作用素へ	5
1.4	転送作用素の族と Selberg zeta 関数	7
<b>2</b>	<b>Fuchs 群 と Riemann 面</b>	<b>11</b>
2.1	上半平面と Poincaré disc	11
2.2	Cofinite Discrete Subgroups	12
2.3	$PSU(1,1) - \{id\}$ の分類	13
2.4	Cofinite Discrete Subgroups と Riemann Surfaces	15
<b>3</b>	<b>Selberg zeta 関数</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Bowen-Series Markov maps</b>	<b>23</b>
4.1	Bowen-Series Markov Maps の構成	23
4.2	Bowen-Series Markov Maps の性質	24
4.3	Bowen-Series Markov maps の‘くりこみ’	27
<b>5</b>	<b>Markov systems and Transfer operators</b>	<b>31</b>
5.1	Markov systems	31
5.2	Transfer Operators	34
<b>6</b>	<b><math>L(s)</math> with <math>Res &gt; \frac{1}{2}</math></b>	<b>40</b>
6.1	Spectral Decomposition Theorem	40
6.2	定理の証明について	43
<b>7</b>	<b>Nuclear operators と Fredholm 行列式</b>	<b>47</b>
7.1	Grothendieck Theorem	47
7.2	$L(s)$ ( $Res > \frac{1}{2}$ ) が nuclear であること	48

<b>8</b>	<b>Zet=Det</b>	<b>52</b>
8.1	等式 $Z(s) = \text{Det}(I - L(s))$ .....	52
8.2	補題 .....	53



# Chapter 1

## 序章

このノートの目的は、論文 [3] で扱われている Selberg zeta 関数の転送作用素による行列式表示について、典型的な例を用いて解説を与えることである。

zeta 関数とよばれる類の関数は、多くの研究者によって興味を持たれて来た。それらが、(多分) 共通に備えている性質と思われているものに概念的な関係式

$$\text{'Zet} = \text{Det'}$$

というのがある。すなわち、zeta 関数は、行列式であるという考え方である。

このノートでは、最も単純な 2 元生成自由群と関連した Selberg zeta 関数を例にとり、これを熱力学形式にあらわれる 1 次元力学系の転送作用素 (transfer operator) の Fredholm 行列式で表示する試みについて解説する。

### 1.1 このノートの 'Zeta' とは

$M$  を面積有限な双曲的 Riemann 面とし、 $CG(M)$  で  $M$  上の向きを考慮した閉測地線の全体をあらわす。ここでは、 $M$  が分岐点を持つ場合を許容するものとする。

形式的な Euler 積

$$Z(s) = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{\gamma \in CG(M)} (1 - e^{-(s+k)l(\gamma)})$$

および

$$L(1, s) = \prod_{\gamma \in CG(M)} (1 - e^{-sl(\gamma)})^{-1}$$

を考える。ここで、 $l(\gamma)$  は、閉測地線  $\gamma$  の双曲的長さをあらわすものとする。

$Z(\cdot)$  は、Selberg zeta 関数とよばれるものであり、 $L(1, \cdot)$  は、Selberg L 関数とよばれるものの 1 つである。形式的に、

$$Z(s) = \prod_{k=0}^{\infty} L(s+k)^{-1}$$

であることに注意しておこう。

Riemann zeta 関数が

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

という Euler 積表示を持ち、素数の分布に関する情報を持っていることはよく知られている。ここで、 $p$  のところに  $\exp(l(\gamma))$  を代入すれば Selberg L 関数になることから、 $Z(\cdot)$  や  $L(1, \cdot)$  が多様体  $M$  の長さスペクトル (length spectrum) の情報を持っていることは想像つく。

## 1.2 モデューラー曲面と連分数展開の関連

さて、次に 'Det' がどのような 1 次元力学系と関連しているか、また、その背景にあるエルゴード理論を見るために  $M$  がモデューラー曲面の場合の連分数展開に関する有名な事実を挙げておこう。

複素上半平面

$$\mathbb{H}^2 = \{x + \sqrt{-1}y \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

上に、Poincaré metric

$$ds_{\mathbb{H}^2}^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

を導入すると  $\mathbb{H}^2$  は曲率 $-1$ の空間となる。一次分数変換

$$g : z \mapsto z + 1, \quad h : z \mapsto -\frac{1}{z}$$

は、

$$PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\} / \{-I, I\}$$

の生成元となっている。すなわち、

$$\langle g, h \rangle = PSL(2, \mathbb{Z})$$

である。

$g, h$  によって Poincaré 計量は保たれることから、商空間

$$M = \mathbb{H}^2 / PSL(2, \mathbb{Z})$$

に Poincaré 計量が遺伝する。こうやって出来た曲面をモデューラー曲面と呼んでいる。(Figure 1.1 参照。)

モデューラー曲面  $M$  上の測地線  $\gamma$  の  $\mathbb{H}^2$  への持ち上げ  $\tilde{\gamma}$  を考える。  $\tilde{\gamma}$  は、 $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  と直交する円弧となることがよく知られている。

$\gamma$  が閉測地線であるならば、その反影として  $\tilde{\gamma}$  の  $\hat{\mathbb{R}}$  上の足  $x, y$  は、 $0, \infty$  か実 2 次体の無理数であり、その連分数展開はある所から先で周期的になる。特に、Galois-Lagrange

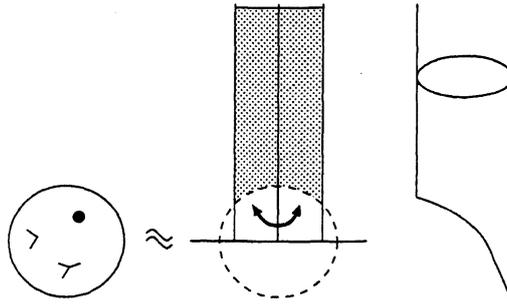


Figure 1.1

の定理によれば、実2次体の無理数  $x \in (0, 1)$  でその共役元  $y$  が  $(-\infty, -1)$  にあるものの連分数展開は真に周期的である。(Figure 1.2 参照。)

更に、 $\gamma \in CG(M)$  に対し唯一組  $x \in (0, 1)$  と  $y \in (-\infty, -1)$  があって  $x$  と  $y$  をつなぐ  $\mathbb{H}^2$  の測地線  $\tilde{\gamma}(x, y)$  が  $\gamma$  の持ち上げとなっている。

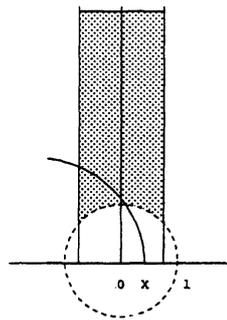


Figure 1.2

### 1.3 連分数変換から転送作用素へ

$x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}^c$  が、

$$x = \frac{1}{a_0(x) + \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \dots}}}$$

と連分数展開できたとすると、 $a_0(x), a_1(x), \dots$ は、

$$T_G : (0, 1] \mapsto (0, 1]; \quad f \mapsto \frac{1}{x} - \left[ \frac{1}{x} \right]$$

(但し、 $[a]$  は  $a$  の整数部分) を用いて、

$$a_0(x) = \left[ \frac{1}{x} \right]$$

$$a_n(x) = a_{n-1}(T_G x) = a_0(T_G^n x), \quad n \geq 1$$

で表されていることに着目する。つまり、

$$x_0 = x, \quad x_{n+1} = T_G x_n \quad (n \geq 0)$$

で時間発展のアルゴリズムが与えられた力学系の周期点と、周期的な連分数が対応している。 $T_G$  は 連分数変換とか、Gauss 変換とよばれている。

ここまでで、閉測地線を通してモジュラー曲面の Selberg zeta 関数と、1次元力学系  $T_G$  の周期軌道に何か関係があるということは分かってきたであろう。

これから導入する転送作用素の方法が有効なエルゴード理論的研究として

1.  $(0, 1]$  を標本空間、その上の Lebesgue 測度を基準とする確率測度とした時の確率過程

$$X_0 = x, X_1 = T_G x, \dots, X_n = T_G^n x, \dots$$

の漸近挙動に関するもの。

2.  $T_G$  の周期点の分布に関するもの。

がある。

ここで、1. は、Lebesgue 測度に関して a.e. で成り立つか、または Lebesgue 測度に関して積分した量に関するものである。それに対し、2. は Lebesgue 測度 0 の集合に関する研究である。この様な 一見相容れない対象のどちらに対しても、転送作用素の方法が有効であることは不思議で興味深いことである。

もう少し具体的に転送作用素について述べてみよう。1. のような確率過程  $X_0, X_1, X_2, \dots$  を扱う立場では、Lebesgue 測度  $m$  に絶対連続な  $T_G$ -不変測度  $\mu$  があれば、 $m$  の代わりにこれを用いることによって、 $X_0, X_1, X_2, \dots$  が強定常過程となり、多くの一般論が使用できるようになる。実は、その様な  $\mu$  は、Gauss によって発見されていて、その密度関数は、

$$\frac{d\mu}{dm} = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x}$$

であることが知られている。(但し、 $\mu(0, 1) = 1$  としている。)

現代流の存在定理の立場で  $m$ -絶対連続不変測度の存在を示そうとする時、Perron-Frobenius 作用素と呼ばれる一種の転送作用素が登場する。

一般に、 $(X, \mathcal{B}, m)$  を確率空間とし、 $T: X \rightarrow X$  を  $m$ -非特異変換、すなわち、可測であつて、 $m(A) = 0 \Rightarrow m(T^{-1}A) = 0$  を満たすものとする。この時、 $\mu \ll m$  なる  $T$ -不変測度とそのエルゴード理論的性質を調べるといった問題に対して、

$$f \mapsto \frac{d}{dm} \int_{T^{-1}(\cdot)} f dm$$

で定義される作用素  $L_{T,m}: L^1(m) \rightarrow L^1(m)$  を用いる。ここで、 $\frac{d}{dm} \int_{T^{-1}(\cdot)} f dm$  は  $m$ -絶対連続集合関数  $A \mapsto \int_{T^{-1}A} f dm$  の Radon-Nikodym 密度関数である。 $L_{T,m}$  は、 $m$  に関する  $T$  の Perron-Frobenius 作用素と呼ばれる。Perron-Frobenius 作用素は、

$$\int_X (g \circ T) \cdot f dm = \int_X g \cdot L_{T,m} f dm \quad \text{for } \forall g \in L^\infty(m) \text{ and for } \forall f \in L^1(m)$$

で特徴づけられる作用素である。これから、次のような性質を引き出すのは容易であろう。

1.  $f \in L^1(m)$  に対し  $L_{T,m} f = f$  なることと、 $f m$  が  $T$ -不変集合であることは同値。
2.  $L_{T^n, m} = L_{T,m}^n$ .

具体的に、 $(X, \mathcal{B}, m) = ((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}, m)$ ,  $T = T_G$  としてみると、変数変換の公式から

$$\begin{aligned} L_{T_G, m} f(x) &= \sum_{y: T_G y = x} |T'_G y|^{-1} f(y) \quad m - \text{a.e.} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2} f\left(\frac{1}{n+x}\right) \end{aligned}$$

と表せる。これは、Ruelle 等の熱力学形式で出てくる転送作用素 (transfer operator)

$$f \mapsto \sum_{y: T y = x} e^{V(y)} f(y)$$

の形をしている。この場合、 $V(x) = -\log |T'_G|$  であることは言うまでもない。

## 1.4 転送作用素の族と Selberg zeta 関数

連分数変換の Perron-Frobenius 作用素に、パラメーター依存性をつけて形式的な作用素の族

$$\begin{aligned} L_s f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{2s}} f\left(\frac{1}{n+x}\right) \\ &= \sum_{y: T_G y = x} |T'_G(y)|^{-s} f(y) \quad (s \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

を考えよう。収束の問題が生じないように  $\text{Res} > \frac{1}{2}$  としておく。  $L(s)$  の具体的な表示を利用すれば、  $[0, 1] \subset D \subset \mathbb{C}$  なる単連結複素領域をうまく選ぶことが出来て、  $\text{Res} > \frac{1}{2}$  において  $s \mapsto L_s$  は  $\mathcal{A}_b(D)$  上の有界線形作用素に値をとる解析関数とみなせる。ここで、  $\mathcal{A}_b(D)$  は領域  $D$  上の有界正則関数全体からなる Banach 空間である。

D. Mayer [2] は、次を示した。

**定理**  $M = \mathbb{H}^2/PSL(2, \mathbb{Z})$  の時、  $s \mapsto L_s$  は  $\mathcal{A}_b(D)$  上の有界線形作用素に値をとる関数として全平面に有理型に解析接続される。

更に、 Selberg zeta 関数  $Z(s)$  は、

$$Z(s) = \text{Det}(I - L_s) \text{Det}(I + L_s)$$

と行列式表示される。ここに、  $\text{Det}(I - L_s)$  は  $L_s$  の Fredholm 行列式である。

上の定理の  $Z(s)$  の表示式において  $L_{T_G^2}(s) = L_{T_G^2}^2(s)$  に注意すれば、

$$Z(s) = \text{Det}(I - L_{T_G^2}(s))$$

となっていることが分かる。

Mayer の結果は、モデューラー曲面の場合に Selberg zeta 関数が、1次元力学系  $T_G^2$  の転送作用素の Fredholm 行列式で表されることを主張しているわけである。

Mayer は、この定理を示すにあたって、  $L_s f$  において  $f \equiv 1$  とした時、 Hurwitz zeta 関数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{2s}}$  を得ることに注目して、 Hurwitz zeta 関数に関して知られている様々な公式を適用している。そのため、有理型接続などが、たまたまうまくいっている様な印象を与えてしまうかも知れない。

そこで、  $M$  が一般の有限面積の双曲的 Riemann 面である時を考えてみよう。この時、一意化定理によって Fuchs 群  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$  が存在して、  $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$  と書けている。モデューラー曲面、すなわち、  $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$  の時、連分数変換が果たした役割を演じてくれる  $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  上の変換  $T_\Gamma$  を見い出せば、それから定まる転送作用素の族の Fredholm 行列式で、  $\Gamma$  に関する Selberg zeta 関数を表示することが可能ではないか？という希望が出てくる。

実は、その  $T_\Gamma$  にあたるものは、Bowen と Series によって既に構成されていたのである [1]。従って、ある程度系統的な議論をすることによって、モデューラー曲面の時に Mayer が得たものと同様な結果を得られることを確かめる作業だけが残っていたわけである。

その作業自体は色々な行程を必要とするのだが、  $\Gamma$  が2元生成自由群の場合には、その行程の見通しが良い。そこで、このノートでは  $\Gamma$  が2元生成自由群で  $M$  が球面に3つ穴をあけたものと同相な場合に、 [3] の行程をざっと眺めてみることにしよう。(Figure 1.3 参照。)

このノートの構成は、以下の様になっている。

- Ch2 では、双曲幾何の必要事項を準備する。

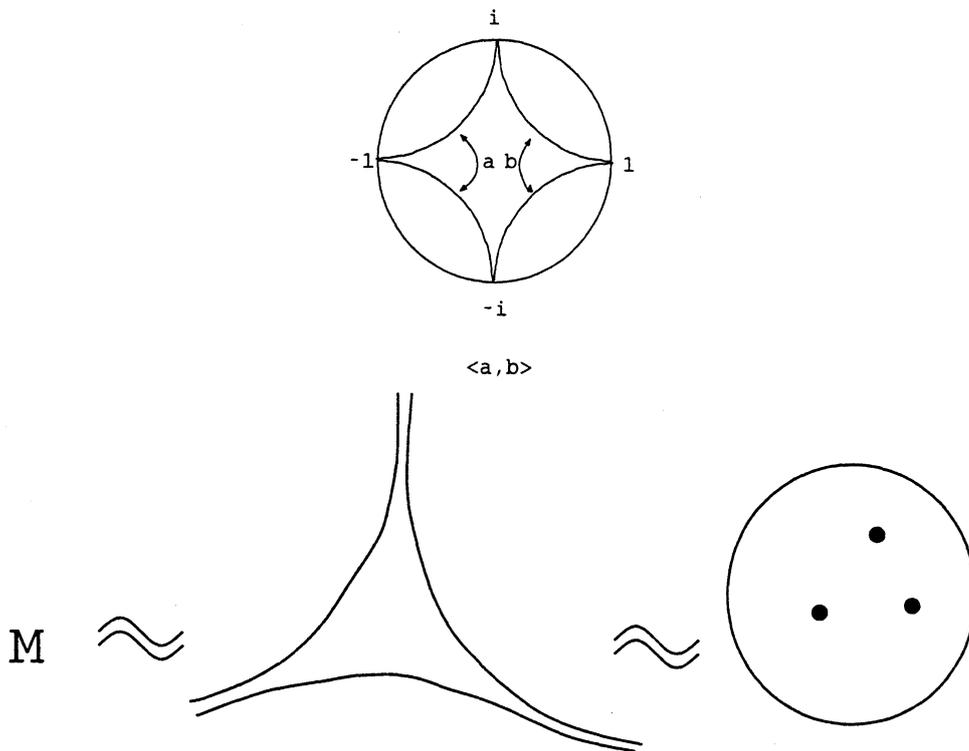


Figure 1.3

- Ch3 では、Selberg zeta 関数について基本的なことを見ておく。
- Ch4 では、Bowen-Series の Markov map とその性質を調べて、それに力学系としての‘繰り込み’を行なう。
- Ch5 では、Bowen-Series Markov map から Markov system を作り、その転送作用素を‘良い空間’に作用するように定義する。
- Ch6 では、転送作用素の族  $L(s)$  ( $\text{Res} > \frac{1}{2}$ ) のスペクトルの性質を調べる。
- Ch7 では、Grothendieck の nuclear operator と Fredholm 行列式の理論を準備する。
- Ch8 で、‘Zet = Det’、すなわち、

$$Z(s) = \text{Det}(I - L(s))$$

を、 $\text{Res} > 1$  の時に確かめてみる。

# Bibliography

- [1] R. Bowen and C. Series, *Markov maps associated with Fuchsian groups*, Publ. IHES 50 (1979) 401-418.
- [2] D. Meyer, *The thermodynamic formalism approach to Selberg zeta function for  $PSL(2, \mathbb{Z})$* , Bull. AMS 25 (1991) 55-60.
- [3] T. Morita, *Markov systems and transfer operators associated with cofinite Fuchsian groups*, to appear in Ergod. Th & Dynam. Sys.

## Chapter 2

# Fuchs 群 と Riemann 面

この章では、Fuchs 群と双曲的 Riemann 面についての知識を準備する。詳しくは、Beardon [1] を見よ。

### 2.1 上半平面と Poincaré disc

$$\mathbb{H}^2 = \{z = x + \sqrt{-1}y : x \in \mathbb{R}, y > 0\}, \quad \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial\mathbb{H}^2$$

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad S^1 = \partial\mathbb{D}$$

のそれぞれに、Poincaré 計量、または双曲計量と呼ばれる Riemann 計量

$$ds_{\mathbb{H}^2}^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

$$ds_{\mathbb{D}}^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}$$

を導入したものは、典型的な双曲的空間の例である。

Euclid 空間における向きを保つ等長変換群は、平行移動と回転の合成によって構成されていた。(  $\mathbb{H}^2, ds_{\mathbb{H}^2}^2$  ), (  $\mathbb{D}, ds_{\mathbb{D}}^2$  ) の場合は、それぞれ

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\} / \{-I, I\}$$

$$PSU(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\} / \{-I, I\}$$

であり、いずれも 1 次分数変換として  $\mathbb{H}^2, \mathbb{D}$  に作用しているとみなされている。その際、1 次分数変換の合成と行列の積が自然に対応していることに注意しておこう。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

このような理由で、以後1次分数変換と行列を同一視して議論することが多い。  
 $(\mathbb{H}^2, ds_{\mathbb{H}^2}^2)$  と  $(\mathbb{D}, ds_{\mathbb{D}}^2)$  は、Caley 変換

$$z \mapsto \frac{z - \sqrt{-1}}{z + \sqrt{-1}}$$

によって等長な関係にあり、Riemann 多様体としては同じものとみなすことができる。  
 以下では、 $(\mathbb{D}, ds_{\mathbb{D}}^2)$  と  $PSU(1,1)$  を中心に話を進めることが多い。

## 2.2 Cofinite Discrete Subgroups

ここでは、 $\Gamma < PSU(1,1)$  が discrete subgroup であることを、 $\Gamma$  に対応する行列全体が位相空間  $SU(1,1)$  で discrete であることと解釈しておく。 $\Gamma < PSU(1,1)$  が discrete である時、商空間  $M = \mathbb{D}/\Gamma$  に  $ds_{\mathbb{D}}^2$  が遺伝する。但し、代数的な特異点は有るかも知れない。(Figure 2.1 参照)

1番目と3番目のような場合 finite area となっており2番目のような場合 infinite area となっている。ここでは、1番目と3番目の場合を扱う。

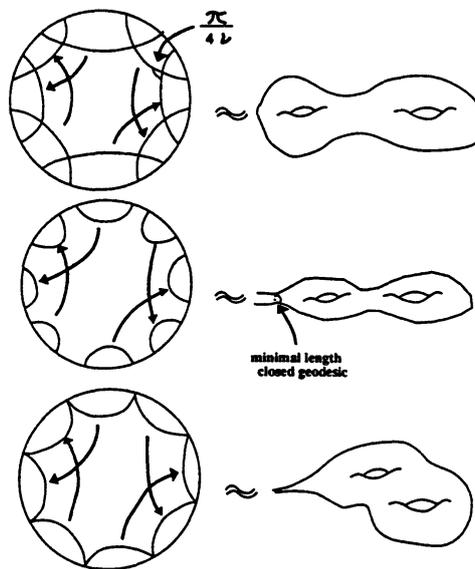


Figure 2.1

$PSU(1,1)$  の discrete subgroup を以後 Fuchs 群と呼んでいくことにする。Fuchs 群  $\Gamma$  が cofinite とは、商空間  $M = \mathbb{D}/\Gamma$  の双曲計量  $ds_{\mathbb{D}}^2$  により測った面積が有限であることとする。特に、 $\mathbb{D}/\Gamma$  が compact になる時  $\Gamma$  は cocompact であると言われる。

よく知られている事実として：

Fuchs 群  $\Gamma$  が cofinite であるための必要十分条件は、次の 1, 2, 3 を満たす有限個の辺  $(s_1, s_2, \dots, s_N$  としよう。) を持つ多角形  $R$  が存在することである。

1. 各  $s_i$  は  $S^1$  と直交する円  $C(s_i)$  に拡張される。
2. 隣合う辺  $s_i$  と  $s_{i+1}$  の共有点は、 $\mathbb{D}$  の内部または  $S^1$  上の一点である。
3. 各  $s_i$  に対し、 $g_i \in \Gamma$  と  $s_j$  が定まり  $s_j = g_i(s_i)$  の様に  $s_i$  と  $s_j$  は同一視される。

この  $R$  を  $\Gamma$  の 基本多角形 (fundamental polygon) という。

注 1)  $S^1$  と直交する  $\mathbb{D}$  内の円弧は Poincaré 計量に関する測地線である。

注 2)  $\Gamma_0 = \{g_i : i = 1, 2, \dots, N\}$  とおく。但し、 $g_i$  は上の  $s_i$  と  $g_i(s_i)$  を同一視する元である。 $\Gamma_0$  は  $\Gamma$  を生成する。また、 $\Gamma_0$  は  $\Gamma$  の symmetric set of generators になっている。

注 3) 一意化定理 (uniformization theorem) によれば、有限面積の双曲的 Riemann 面は、cofinite Fuchs 群を用いて  $M = \mathbb{D}/\Gamma$  と書けている。すなわち、我々の立場は決して特殊ではない。

## 2.3 $PSU(1,1) - \{id\}$ の分類

$PSU(1,1) - \{id\}$  は、以下のタイプに分類される。

$g \in PSU(1,1) - \{id\}$ ,  $g : z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}$  を、 $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$  ( $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ ) で表すことにする。

1.  $g \in PSU(1,1) - \{id\}$  が hyperbolic

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists z_1 \neq z_2 \in S^1 \text{ s.t. } g(z_i) = z_i \quad (i = 1, 2)$$

$$\stackrel{\text{iff}}{\iff} \exists 1 \text{ 次分数変換 } h \text{ s.t. } h^{-1}gh = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \text{ for some } \lambda > 1 \text{ or } 0 < \lambda < 1$$

2.  $g \in PSU(1,1) - \{id\}$  が parabolic

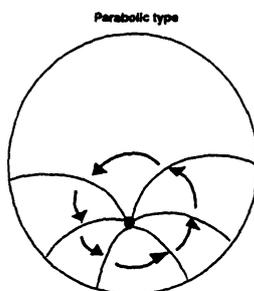
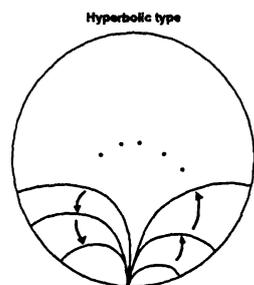
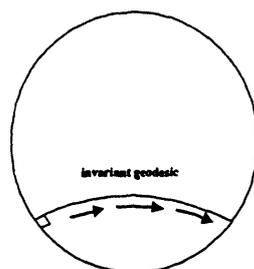
$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists z \in S^1 \text{ s.t. } g(z) = z$$

$$\stackrel{\text{iff}}{\iff} \exists 1 \text{ 次分数変換 } h \text{ s.t. } h^{-1}gh = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ for some } x \in \mathbb{R}$$

3.  $g \in PSU(1,1) - \{id\}$  が elliptic

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists z \in \mathbb{D}$  s.t.  $g(z) = z$

$\stackrel{\text{iff}}{\iff} \exists$  1次分数変換  $h$  s.t.  $h^{-1}gh = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  for some  $\theta \in \mathbb{R}$



Elliptic type

Figure 2.2

注)  $\Gamma < PSU(1,1)$  が discrete  $\Rightarrow$  「 $g \in \Gamma$  : elliptic  $\Rightarrow \exists n$  s.t.  $g^n = id$ 」

## 2.4 Cofinite Discrete Subgroups と Riemann Surfaces

以下の関係が成立する。

双曲的 Riemann 面  $M = \mathbb{D}/\Gamma$  が有限面積である。

$\iff \Gamma$  が幾何学的有限かつ理想境界に  $S^1$  が無い。

$\iff \Gamma$  が cofinite である。

更に、Gauss-Bonnet の定理を一般化して  $\text{Area}(M) = 2\pi(2g - 2 + \tau + \sum_i(1 - \frac{1}{l_i}))$  という関係式が得られる。

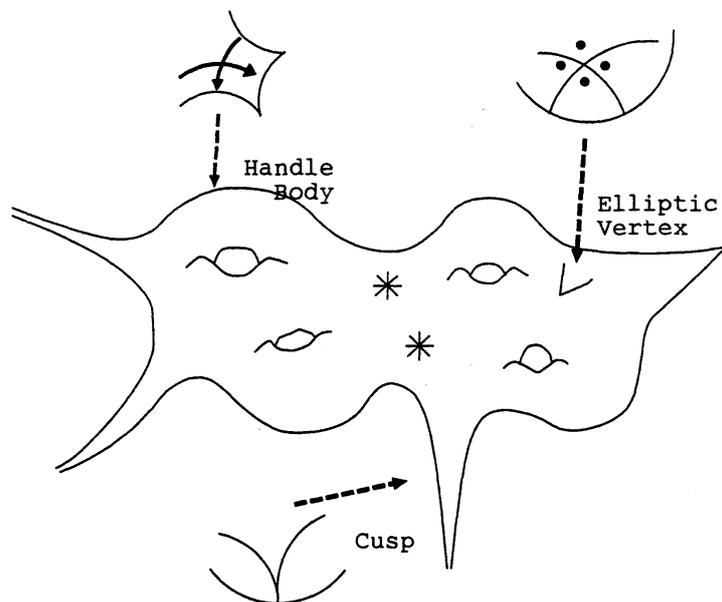


Figure 2.3

荒っぽく言うと  $g, \tau, l_i$  は、それぞれ、 $g$  は  $M$  の種数 = うきわの穴の数、 $\tau$  は  $M$  の尖点の数、そして、 $l_i$  は  $M$  の分岐点の分岐の様子を表す量である。

このノートでは、compact でなく cofinite な最も単純な  $\Gamma$  の例として

$$a = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -i & 1-i \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ i & 1-i \end{pmatrix}$$

で生成される群  $\Gamma = \langle a, b \rangle$  を考える。 $a, b$  は、それぞれ  $-1, 1$  を固定点とする parabolic element で  $\Gamma$  の基本多角形は、Figure 2.4 の様になる。

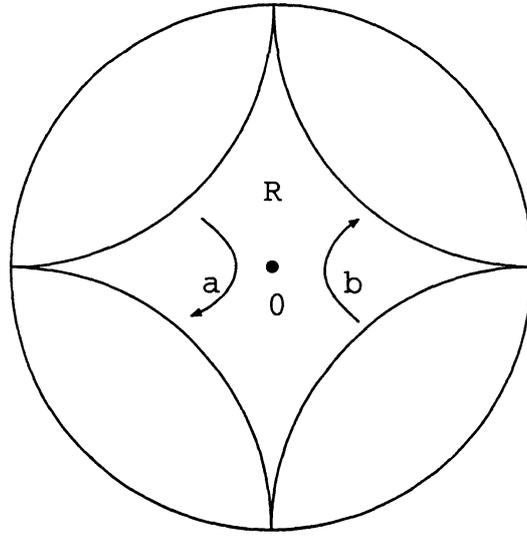


Figure 2.4

$\Gamma$  は代数的には、 $a, b$  で生成される自由群である。それは、 $\Gamma$  による原点の像  $\Gamma 0 = \{g0 : g \in \Gamma\}$  の元  $g0$  と  $g'0$  を  $gg'^{-1} \in \Gamma_0 = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$  の時に edge で結んでグラフを書いた時、cycle が出来ないことから分かるであろう。(Figure 2.5 参照)

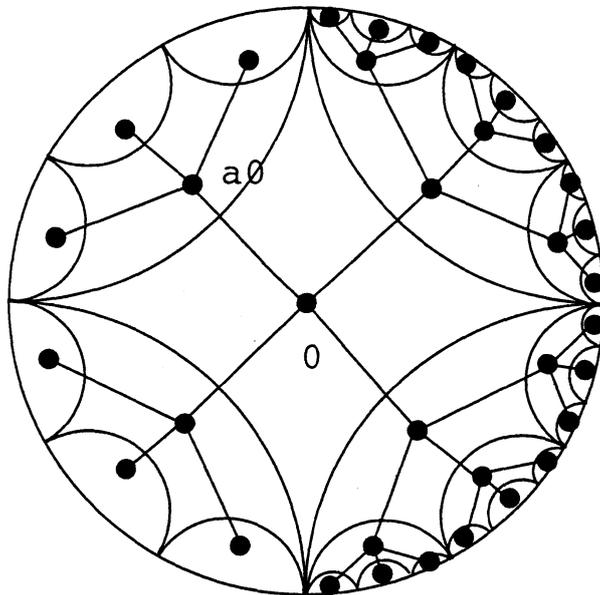


Figure 2.5

# Bibliography

- [1] F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Springer GTM 91.

# Chapter 3

## Selberg zeta 関数

この章では、Selberg zeta 関数に関する予備知識をまとめておく。  
 $\Gamma < PSU(1,1)$  を cofinite Fuchs 群とする。形式的 Euler 積

$$Z(s) = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{c \in HC(\Gamma)} (1 - \exp(-(s+k)l(c)))$$

及び、

$$L(1, s) = \prod_{c \in HC(\Gamma)} (1 - \exp(-sl(c)))^{-1}$$

を考える。(序章では、 $HC(\Gamma)$  ではなく  $CG(\Gamma)$  について積をとっていたが、それについては後述する。)

ここで、 $HC(\Gamma)$  は、 $\Gamma$  の双曲共役類 (hyperbolic conjugacy class) 全体、すなわち  $c \in HC(\Gamma)$  とすると、 $c$  は  $\Gamma$  の原始双曲元  $h$  の共役類

$$c = \{ghg^{-1} : g \in \Gamma\} = (h)$$

である。また、 $l(c)$  は  $h$  を用いて  $l(c) = 2 \cosh^{-1} \frac{tr h}{2}$  と表される量である。但し、 $h$  が  $\Gamma$  の原始双曲元 (primitive hyperbolic element) であるとは「 $h$  は hyperbolic で  $h = h_0^n$  for some  $h_0 \in \Gamma \Rightarrow n = 1$  or  $-1$ 」ということである。

注)  $CG(M)$  を  $M$  上の向き付けられた閉測地線全体とすれば、 $HC(\Gamma)$  と  $CG(M)$  の間には、自然な  $1:1$  対応があり  $c = (h)$  と  $\gamma \in CG(M)$  が対応している時、

$$l(c) = l(\gamma)$$

が成り立っている。

上記の注) は、次のように確かめられる。

$c = (h) \in HC(\Gamma)$ 、 $h$  は  $\Gamma$  の原始的双曲元とする。 $x \neq y \in S^1$  を、 $h$  の固定点とする。この時、 $(\mathbb{D}, ds^2)$  から  $(\mathbb{H}^2, ds_{\mathbb{H}^2}^2)$  への等長変換  $L$  で  $Lx = 0, Ly = \infty$  なるものをもって、

$$LhL^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda > 1 \text{ または } 0 < \lambda < 1$$

となるように出来る。

$\lambda > 1$  の時、微分の連鎖法則を用いて

$$\begin{aligned} h'(x) &= (L^{-1}(LhL^{-1})L)'(x) \\ &= (L^{-1})'(LhL^{-1}Lx) \cdot (LhL^{-1})'(Lx) \cdot L'x \\ &= \lambda^2 \end{aligned}$$

となる。従って、 $h'(x)$  は  $c$  の代表元の取り方に依らず、共役類のみに依存する。

$c$  に対応する  $CG(M)$  の元は、 $x, y$  を結ぶ  $\mathbb{D}$  の測地線に  $x$  から  $y$  へ移動する方向に向きを付け、 $M$  に射影して得られる。 $0 < \lambda < 1$  の場合は、 $x$  と  $y$  の立場を替えてこの逆向きの閉測地線をとる。

さて、対応する閉測地線  $\gamma$  の双曲的長さは、

$$l(\gamma) = \int_1^{\lambda^2} \frac{dy}{y} = 2 \log \lambda$$

と

$$\text{tr}h = \text{tr}L = \lambda + \lambda^{-1}$$

より

$$l(\gamma) = 2 \cosh^{-1} \frac{\text{tr}h}{2} = l(c)$$

と分かる。ここで、

$$h'(x) = \exp(l(c))$$

となっていることに注意しておこう。

Selberg zeta 関数と Selberg L 関数について知られていることをまとめておこう。まず、 $L(1, s)$  について

1.  $\text{Res} > 1$  で正則で零点を持たない。
2.  $\text{Res} = 1$  を越えて有理型に解析接続される。
3.  $\text{Res} = 1$  上では零点を持たず、 $s = 1$  がその上の唯1つの極であり、しかも単純である。

ことが知られている。上記の 1, 2, 3 と Ikehara の Tauberian theorem を組み合わせれば、いわゆる閉測地線定理を得る。

### 定理

$$\#\{\gamma \in CG(M) : \exp(l(\gamma)) \leq x\} \frac{\log x}{x} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty)$$

次に、 $Z(s)$  について  $\Gamma$  が purely hyperbolic、つまり、 $\mathbb{D}/\Gamma$  が smooth compact となる場合について砂田 [2, p.139] から抜き出したものを挙げておく。

1.  $\text{Res} > 1$  で、 $Z(s)$  は絶対収束。
2.  $Z(s)$  は整関数に解析接続される。
3.  $s = -n$  は位数  $(2n+1)/(g-1)$  の零点となる。
4. その他の零点は  $s = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_i}$  にある。(但し、 $\lambda_i$  は Laplacian  $-\Delta_M$  の固有値である。)

通常、上記の 1. ~ 4. は Selberg trace formula を用いて証明される。勿論  $\Gamma$  が、cofinite であっても trace formula に当たるものはあるが、purely hyperbolic の時に比べてかなり複雑である。([1, p.163] 参照。) このノートでは、3, 4 のような詳しいところまでは出せないものの、熱力学形式からかなりのことが出来そうだという雰囲気、 $\Gamma$  が 2 元生成自由群の場合に確かめてみよう。

# Bibliography

- [1] J. Fischer, *An approach to the Selberg trace formula via the Selberg zeta function*, Springer Lecture Note in Math 1253 (1980).
- [2] 砂田 利一, 基本群とラプラシアン, 紀伊國屋 (1988).

# Chapter 4

## Bowen-Series Markov maps

以後、 $\Gamma = \langle a, b \rangle$  とする。

### 4.1 Bowen-Series Markov Maps の構成

第3章で見たように、量  $l(c) = l(\gamma)$  は  $\Gamma$  の  $S^1$  上の作用のみから定まっている。Fuchs 群  $\Gamma$  の  $S^1$  への作用自身は discrete であるが、これを  $S^1$  上の一個の変換で、つまり、 $N$  の作用で調べることが出来れば、話はぐっと簡単になるような気がする。しかし、 $\Gamma$  の作用は自由群の作用であるから こんなものが、直接  $N$  の作用に置き換えることが出来る筈がない。

ところが、 $PSL(2, \mathbb{Z})$  と連分数変換  $T_G$  の時の様に、‘軌道同値’ という意味ではこの置き換えが可能な例がある。実は、一般の cofinite Fuchs 群に対して 連分数変換の役割を果たす変換が構成できるのである。‘軌道同値性’ の定義は後回しにして、 $\Gamma = \langle a, b \rangle$  に対して その様な変換を作ることから始めて行こう。

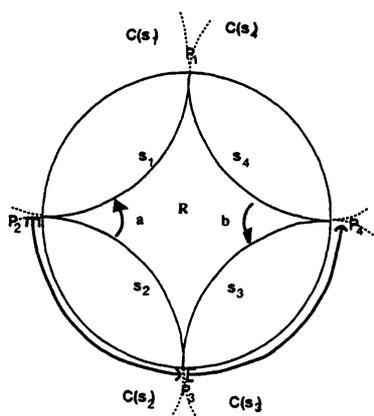


Figure 4.1

$\Gamma$  の基本多角形として Figure 4.1 の様なものを取り、各辺に  $s_1, s_2, s_3, s_4$  とラベルをつける。辺を同一視する  $\Gamma$  の元は、 $g_1 = a^{-1}, g_2 = a, g_3 = b^{-1}, g_4 = b$  である。

次の事実は、容易に確かめられる。

1. 各  $i$  に対して、 $g_i$  は円  $C(s_i)$  の内部領域を円  $C(g_i(s_i))$  の外部領域にうつす。
2.  $|g'_i(z)| = 1$  は円  $C(s_i)$  の方程式である。つまり、 $g_i$  の isometric circle が円  $C(s_i)$  となる。
- 3.

$$\begin{aligned} |g'_i(z)| &> 1 && \text{within } C(s_i). \\ |g'_i(z)| &< 1 && \text{outside } C(s_i). \end{aligned}$$

- 4.

$$\begin{aligned} g'_2(P_2) &= 1, & g_2(P_2) &= P_2. \\ g'_4(P_4) &= 1, & g_4(P_4) &= P_4. \end{aligned}$$

注) 基本多角形  $R$  は、次のような ‘対称性’ を持っている。

- (\*)  $R$  の  $\Gamma$  による像が作るネットを  $\mathcal{N}$  とすると、各  $C(s_i)$  は  $\mathcal{N}$  の部分集合になっている。
- (\*\*)  $R$  は三角形でなく、位数 2 の楕円型頂点 (=楕円型元の固定点となっている頂点) を持たない。

一般の cofinite Fuchs 群が (\*), (\*\*) を満たしているとは限らない。しかし、擬等角変形の理論を使って (\*), (\*\*) を満たす群に議論を帰着できる。([1, §4] 参照。)

本節の最後に、 $\Gamma = \langle a, b \rangle$  に付随した Bowen-Series の Markov Map を定義しよう。  
 $T: S^1 \rightarrow S^1$  と  $\tilde{T}: S^1 \rightarrow S^1$  を

$$\begin{aligned} Tx &= g_i x && \text{if } x \in [P_i, P_{i+1}) \\ \tilde{T}x &= g_i x && \text{if } x \in (P_i, P_{i+1}] \end{aligned}$$

で定義する。(但し、 $P_5 = P_1$  と定める。)

## 4.2 Bowen-Series Markov Maps の性質

$T$  を前節で定義した Bowen-Series Markov Map とする。この節では、その性質を補題としてまとめておこう。 $I_i = [P_i, P_{i+1})$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) とする。

**補題 (Bowen-Series[1])** 1.  $(x, y) \in S^1 \times S^1$  に対し、

$$\lceil y = gx \text{ for some } g \in \Gamma \iff T^m x = T^n y \text{ for some } m, n \geq 0 \rceil$$

2.  $T|_{I_i}$  は  $\Gamma$  の元に拡張される。
3.  $TI_i \cap I_j \neq \emptyset \Rightarrow I_j \subset TI_i$
4.  $\bigcup_{n \geq 0} T^n I_i = S^1$
5.  $|T'x| > 1 \quad x \neq P_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$  かつ、 $\inf |T'x| = 1$

注. 1. の性質がまさに、 $\Gamma$  の  $S^1$  への作用と  $T$  のそれが軌道同値であるということである。

2. は、自明だが重要。

3. は、Markov 性と呼ばれる性質である。

4. は、位相的推移性と呼ばれる性質で、この場合はそれより強い位相的混合性がある。

証明 1. のみ証明しておく。

( $\Leftarrow$ ) は自明。

( $\Rightarrow$ )  $y = ax$  の時と  $y = bx$  の時に証明しておけば十分である。

$y = ax$  の時 (Figure 4.2 参照)、

$$x \in I_2 \Rightarrow ax = Tx$$

$$x \notin I_2 \Rightarrow ax \in I_1$$

$$\Rightarrow Tax = a^{-1}ax = x$$

となる。

$y = bx$  の時も同様。

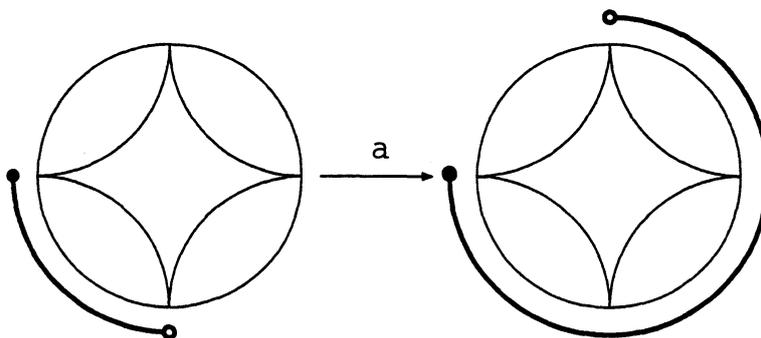


Figure 4.2

証明終り

補題の軌道同値性 1. から  $T$  の周期軌道と  $\Gamma$  の双曲共役類の自然な  $1 : 1$  対応を導くことが出来る。ここで、 $T$  の周期軌道という時は、 $S^1$  の相異なる元からなる有限集合  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$  で添字を取り替えれば  $Tx_i = x_{i+1} \pmod p$  となるものとする。時には、 $\tau = \{x, Tx, \dots, T^{p-1}x\}$  と書くこともある。

$PO(T)$  で  $T$  の周期軌道全体の集合を表す。

補題  $PO(T) \setminus (\{P_2\}, \{P_4\}, \{P_1, P_3\})$  と  $HC(\Gamma)$  の間には、次の関係をみたす様な自然な  $1 : 1$  対応がある。

$\tau = \{x, Tx, \dots, T^{p-1}x\}$  と  $c = (h)$  が対応するとき

$$\exp(l(c)) = (T^p)'(x)$$

が成立する。

証明  $\tau = \{x, Tx, \dots, T^{p-1}x\} \in PO(T)$ ,  $x \neq P_i$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) とする。この時、 $x$  の近傍で  $T^p = e_{p-1}^{-1} \cdots e_1^{-1} e_0^{-1}$  ( $e_0, e_1, \dots, e_{p-1} \in \Gamma_0$ ) と書けている。 $(T^p)'(x) > 1$ ,  $T^p x = x$  であるから、 $h = e_{p-1}^{-1} \cdots e_1^{-1} e_0^{-1}$  は双曲元である。 $h_0^n = h$  ( $n \geq 1$ ) を満たす原始双曲元  $h_0$  をとり、 $\Phi(\tau) = (h_0)$  で

$$\Phi : PO(T) \setminus \{\{P_2\}, \{P_4\}, \{P_1, P_3\}\} \rightarrow HC(\Gamma)$$

を定義する。実は、後で見るが  $h$  自身が原始的で  $h = h_0$  であることも分かる。

$\Phi$  が全射であることを見よう。

$c = (h) \in HC(\Gamma)$  とする時、 $hx = x$ ,  $h'x > 1$  となる固定点に着目する。 $S^1$  における  $x$  の十分小さな近傍  $U$  をとれば、軌道同値性から

$$\exists m, n \geq 0 \text{ s.t. } T^m h x' = T^n x' \text{ for } \forall x' \in U$$

となる。 $\Gamma_0$  の元を用いてこれを書き直すと、

$$e_{m-1}^{-1} e_{m-2}^{-1} \cdots e_0^{-1} h x' = e_{n-1}^{-1} e_{n-2}^{-1} \cdots e_0^{-1} x' \text{ for } \forall x' \in U$$

であるから、一次変換の性質から

$$e_{m-1}^{-1} e_{m-2}^{-1} \cdots e_0^{-1} h = e_{n-1}^{-1} e_{n-2}^{-1} \cdots e_0^{-1}$$

を得る。

$h'x > 1$  を用いると  $n > m$  でなければならないことが分かり、

$$T^{n-m} T^m x = T^m x$$

より

$$e_{n-1}^{-1} \cdots e_m^{-1} = (e_0 \cdots e_{m-1})^{-1} h (e_0 \cdots e_{m-1})$$

つまり、

$$\Phi(\tau(T^m x)) = (h)$$

が分かる。ここに、 $\tau(T^m x) = \{T^m x, T^{m+1} x, \dots, T^{n-1} x\}$  で、 $n - m$  が最小周期であることは  $h$  が原始的であることから従う。

この全射性の証明をよく見ると  $\Phi$  を定義した時の  $h_0$  は、 $h = h_0$  であったことが分かるだろう。

最後に、 $\Phi(\tau_1) = \Phi(\tau_2)$  の時  $\tau_1 = \tau_2$  を示す。

$$\tau_1 = \{x, Tx, \dots, T^{p-1} x\}, \quad \tau_2 = \{y, Ty, \dots, T^{q-1} y\}$$

とすると、 $T^p x = x$ ,  $(T^p)'(x) > 1$ 、および  $T^q y = y$ ,  $(T^q)'(y) > 1$  より 双曲元  $h_1, h_2$  で  $h_1 x = x, h_1' x > 1, h_2 y = y, h_2' y > 1$  かつ  $h_1$  と  $h_2$  は共役となるものがある。 $h_2 = g h_1 g^{-1}$  とすると  $y = gx$  を得るから、軌道同値性を用いると  $\exists m, n \geq 1$  s.t.  $T^m x = T^n y$  となる。これは、 $x$  と  $y$  が同じ軌道上にあることを意味し  $\tau_1 = \tau_2$  が示される。 証明終り

### 4.3 Bowen-Series Markov maps の‘くりこみ’

4.2 節の最初の補題における 5 番目の主張より、 $|T'x| > 1$  ( $\inf_{x \notin \{P_1, P_2, P_3, P_4\}} |T'x| = 1$ ) であるが、この様な状況では 力学系  $T$  の絶対連続不変測度を Gibbs 測度として解析するという熱力学形式の方法を、直接適用するには不十分であることが知られている。そこで、 $T$  に力学系としての‘くりこみ’を行って  $\text{ess.inf}|T'| > 1$  となる様な変換を構成する。そのために、基本多角形  $R$  の辺  $s_1, s_2, s_3, s_4$  の  $\Gamma$  による像について少し考察しておこう。

各  $i = 1, 2, 3, 4$  に対し 頂点  $P_i$  を一方の端とする  $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$  の  $\Gamma$ -像の足全体を  $W(P_i)$  と書く。 $W = \bigcup_{i=1}^4 W(P_i)$  とし、 $W$  の点を分点として得られた  $S^1$  の分割を  $\mathcal{P}(W) = \{I_j\}$  と書く。更に、各  $P_i$  に対し  $W(P_i)$  の点を分点とする  $S^1$  の分割を考え、それに現れる区間に Figure 4.3 のようにラベルを付ける。

この時、

$$(A) \quad \begin{cases} TL_j(P_i) = L_{j-1}(g_i P_i), & j \geq 2, \\ TR_k(P_i) = R_{k-1}(g_{i-1} P_i), & k \geq 3. \end{cases}$$

が成り立っていることに注意しておく。

$\mathcal{P}(W)$  は、 $L_j(P_i), R_k(P_i), T_i, S_i$  などを用いると

$$\mathcal{P}(W) = \{[T_i, S_i], L_j(P_i), R_k(P_i), j \geq 2, k \geq 3, i = 1, 2, 3, 4\}$$

と書ける。

$$K = \bigcup_{i=1}^4 (L_2(P_i) \cup R_3(P_i) \cup [T_i, S_i])$$

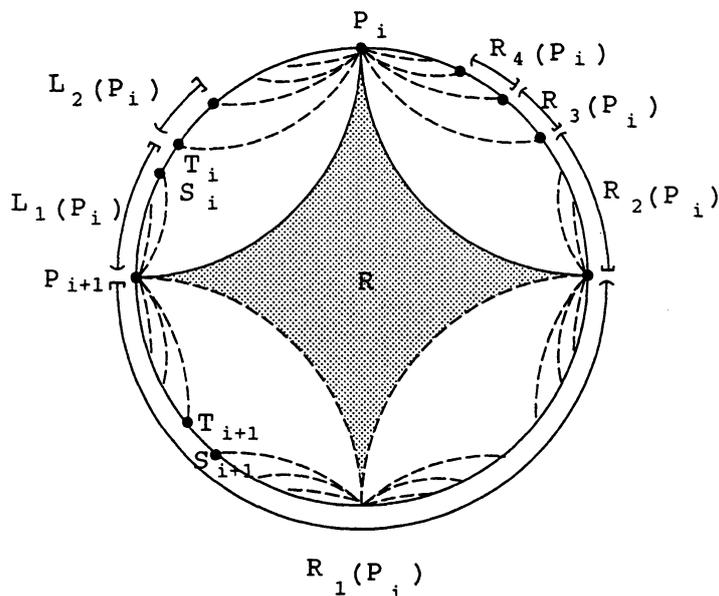


Figure 4.3

とおくと、4.2 節の最初の補題における位相的推移性を用いれば、可算個の点を除けば  $T$  の  $K$  への first return map  $S$  を以下の様に定義出来る。すなわち、

$$n(x) = \begin{cases} \min \{n > 0 : T^n x \in K\}, & \text{if } \{ \} \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とおいて、

$$Sx = T^{n(x)}x \quad \text{if } n(x) < \infty$$

で定義する。

4.2 節の 2 つの補題と first return map の性質から次を得る。

**補題** 1.  $\text{ess.inf}|S'| > 1$

2.  $S$  の周期軌道の全体  $PO(S)$  と  $HC(\Gamma)$  の間には、 $\tau = \{x, Sx, \dots, S^{p-1}x\} \in PO(S)$  と  $c \in HC(\Gamma)$  が対応するならば、

$$(S^p)'(x) = \exp(l(c))$$

の関係が成立するような自然な 1 : 1 対応がある。

それ以外の  $S$  の性質をまとめる前に記号を導入しておく。

$$\mathcal{R}_0 = \{L_2(P_i), R_3(P_i), [T_i, S_i] : i = 1, 2, 3, 4\}$$

$$\mathcal{P}_0 = \{J : J = A \cap T^{-1}I \text{ if } (\text{int}A) \cap T^{-1}(\text{int}I) \neq \emptyset, A \in \mathcal{R}_0, I \in \mathcal{P}(W)\}$$

注)  $\mathcal{R}_0$  は  $K$  の分割であり、 $\mathcal{P}_0$  は可測分割として  $\mathcal{R}_0$  の細分である。

まとめ 有限個 (1-2 個) の  $S^1$  上の区間からなる集合  $K$  の分割  $\mathcal{R}_0$  と可算無限個の区間からなる  $\mathcal{R}_0$  の Lebesgue 可測分割としての細分  $\mathcal{P}_0$  があって以下が成り立つ。

(1) (有限性と Markov 性)  $\forall J \in \mathcal{P}_0, \exists A \in \mathcal{R}_0$  s.t.  $SJ = A$ .

(2) (混合性)  $S^4 J = K$  a.e. for  $\forall J \in \mathcal{P}_0$ .  
i.e.  $m(S^4 J \Delta K) = 0$  ( $m$  は  $K$  上の Lebesgue 測度。)

(3)  $\text{ess.inf}|S'| > 1$ .

この様な  $S$  に対しては、

$$L_{S,m}f(x) = \sum_{y:Sy=x} |S'y|^{-1}f(y)$$

が、 $L^1(K, m)$  上の線型作用素であるばかりでなく  $\text{Lip}(\bigsqcup_{A \in \mathcal{R}_0} A)$  上の quasi-compact operator として実現できることが分かる。 $L^1(K, m)$  の  $\text{Res} \geq 1$  の近傍での性質を調べる程度ならば、この作用素としての実現で十分なのだが、 $Z(s)$  の行列表現を得るにはこの空間よりもっと '良い' 空間上の作用素としての実現が要求される。

それでは、 $L_{S,m}$  の形と  $L(1, s)$  を  $S$  の周期軌道で表した時の類似性に注意してこの章を終わろう。

$$\begin{aligned} \log L(1, s) &= \sum_{c \in HC(\Gamma)} -\log(1 - e^{-sl(c)}) \\ &= \sum_{c \in HC(\Gamma)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-sml(c)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{c \in HC(\Gamma)} e^{-sml(c)} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{pm} \sum_{\substack{S^p a = a \\ p=p(a)}} (T^p)'(a)^{-ms} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{a: S^n a = a} (S^n)'(a)^{-s}. \end{aligned}$$

以上は、形式的な計算である。これより、

$$L(1, s) = \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{a: S^n a = a} (S^n)'(a)^{-s} \right]$$

である。

# Bibliography

- [1] R. Bowen and C. Series, *Markov maps associated with Fuchsian groups*, publ IHES 50 (1979) 401-418.

# Chapter 5

## Markov systems and Transfer operators

### 5.1 Markov systems

転送作用素を解析関数の空間上の作用素として実現するには、前章で得た Markov map では不十分である。そこで、周期軌道の情報を変えないような修正を施して Markov system を作る。

**定義** 三つ組  $\mathcal{T} = (\mathcal{R}, \mathcal{P}, \{T_J\}_{J \in \mathcal{P}})$  が以下を満たす時、( $S^1$ 上の) Markov system であるという。

1.  $\mathcal{R} = \{A(1), \dots, A(q)\}$  は互いに素な interior を持つ閉区間からなる有限集合。
2.  $\mathcal{P} = \{J\}$  は、互いに素な interior をもつ閉区間からなり、
  - 2-1.  $\forall J \in \mathcal{P}, \exists A \in \mathcal{R} \text{ s.t. } J \subset A$
  - 2-2.  $|\bigcup_{A \in \mathcal{R}} A \setminus \bigcup_{J \in \mathcal{P}} J| = 0$となっている。つまり、 $\mathcal{P}$  は  $\mathcal{R}$  の Lebesgue 可測分割として細分になっている。
3. 各  $J \in \mathcal{P}$  に対し、 $A \in \mathcal{R}$  があって

$$T_J : J \rightarrow A \text{ は homeo}$$

となっている。

$\mathcal{T} = (\mathcal{R}, \mathcal{P}, \{T_J\}_{J \in \mathcal{P}})$  を、Markov system とし、 $\mathcal{R} = \{A(1), A(2), \dots, A(q)\}$  と番号付けされていたとする。この時、各  $J \in \mathcal{P}$  に対し、

$$\begin{aligned} \iota(J) &= i \text{ if } J \subset A(i) \\ \tau(J) &= i \text{ if } T_J J = A(i) \end{aligned}$$

で  $\iota(J), \tau(J)$  を定義する。

Markov system  $\mathcal{T} = (\mathcal{R}, \mathcal{P}, \{T_J\}_{J \in \mathcal{P}})$  が与えられると、可測変換

$$S : \bigcup_{A \in \mathcal{R}} A \longrightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{R}} A \quad (\text{defined a.e.})$$

を、

$$S|_{\text{int}J} = T_J|_{\text{int}J}$$

によって定めることが出来る。Markov system は、本来  $S$  から出発して、それを修正して得られたものなのである。

$S$  の  $n$  回合成は、a.e. で意味をもつが、これに対応した Markov system の  $n$  回合成を定義しておく。 $\mathcal{P} = \{J(1), J(2), \dots\}$  と番号付けしておこう。

$$\text{int}J(i_0) \cap T_{J(i_0)}^{-1} \text{int}J(i_1) \cap \dots \cap T_{J(i_0)}^{-1} \circ T_{J(i_1)}^{-1} \circ \dots \circ T_{J(i_{n-2})}^{-1} \text{int}J(i_{n-1}) \neq \emptyset$$

の時、

$$J \equiv J(i_0) \cap T_{J(i_0)}^{-1} J(i_1) \cap \dots \cap T_{J(i_0)}^{-1} \circ T_{J(i_1)}^{-1} \circ \dots \circ T_{J(i_{n-2})}^{-1} J(i_{n-1})$$

は閉区間になるが、それらの全体のなす族を  $\mathcal{P}_n$  と書き  $J \in \mathcal{P}_n$  に対し、

$$T_J^n \equiv T_{J(i_{n-1})} \circ T_{J(i_{n-2})} \circ \dots \circ T_{J(i_0)}$$

と定義する。明らかに  $T_J^n : J \rightarrow A(\tau(J(i_{n-1})))$  は homeo となる。こうして新たな Markov system  $(\mathcal{R}, \mathcal{P}_n, \{T_J^n\}_{J \in \mathcal{P}_n})$  出来るが、これが

$$S^n|_{\text{int}J} = T_J^n|_{\text{int}J} \quad \text{for } \forall J \in \mathcal{P}_n$$

を満たすことは明らかである。そこで、 $\mathcal{T}^n = (\mathcal{R}, \mathcal{P}_n, \{T_J^n\}_{J \in \mathcal{P}_n})$  と書いて Markov System  $\mathcal{T}$  の  $n$  回合成と呼ぶことにする。また、混乱を生ずる可能性がすくなければ、 $(T_J^n)^{-1}$  を  $T_J^n$  で表すことにする。

さて、前章で  $\Gamma = \langle a, b \rangle$  から作られた Markov map を ‘くりこん’ で構成された変換  $S$  を思い出そう。まず、

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{\overline{L_2(P_i)}, \overline{R_3(P_i)}, [T_i, S_i], \quad i = 1, 2, 3, 4\} \\ \mathcal{P} &= \{\overline{J} : J \in \mathcal{P}_0\} \end{aligned}$$

より、 $J \in \mathcal{P}$  に対し  $T_J$  を  $T_J|_{\text{int}J} = S|_{\text{int}J}$  となる  $\Gamma$  の元とすれば  $\mathcal{T}_\Gamma = (\mathcal{R}, \mathcal{P}, \{T_J\}_{J \in \mathcal{P}})$  は Markov system となる。これを、Fuchs 群  $\Gamma$  に付随した Markov system と呼ぶことにする。

次を準備しておく。

**補題**  $\Gamma = \langle a, b \rangle$  に付随した Markov system  $\mathcal{T}_\Gamma = (\mathcal{R}, \mathcal{P}, \{T_J\}_{J \in \mathcal{P}})$  は、以下の性質を持つ。

1. Lasorta-York 条件

$$\inf_{J \in \mathcal{P}} \inf_{x \in J} |(T_J)'(x)| > 1.$$

2. Rény 条件

$$R(T_\Gamma^n) \equiv \sup_{J \in \mathcal{P}_n} \sup_{x \in J} \left| \frac{(T_J^n)''(x)}{\{(T_J^n)'(x)\}^2} \right| < +\infty \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}$$

特に、 $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{R(T_\Gamma^n)}{n} < +\infty$  である。

3.  $\mathcal{R} = \{A(1), A(2), \dots, A(q)\}$  ( $q = 12$ ) と書いた時、 $\mathbb{C}$  内の単連結領域  $B(i), D(i)$  で以下をみたすものが取れる。

3-1.  $A(i) \subset B(i) \Subset D(i) \quad 1 \leq i \leq q$

3-2.  $T_J^{-1}D(\tau(J)) \subset B(\iota(J))$  for  $\forall J \in \mathcal{P}$

3-3.  $\sum_{J \in \mathcal{P}} \sup_{z \in D(\tau(J))} (|T_J'(T_J^{-1}z)|^{-\delta}) < +\infty$  for  $\forall \delta > \frac{1}{2}$

### 証明について

主張 1. は明らかである。2. や 3. の主張を示すには、 $T_J$  が、 $a, b, a^{-1}, b^{-1}$  の合成で書けていることを旨く使わなければならない。そこで、4.3 節の関係式 (A) に注目する。Bowen-Series Markov map  $T$  と  $T_J$  ( $J \in \mathcal{P}$ ) の関係は、

$$T|_{\text{int}J} = \begin{cases} (T_i, S_i), & (a) \\ \text{int}L_j(P_i) \quad j \geq 2, & (b) \\ \text{int}R_k(P_i) \quad k \geq 3, & (c), \end{cases}$$

の可能性がある。

それぞれ、

(a)  $\implies T|_{\text{int}J} = T_J|_{\text{int}J}.$

(b)  $\implies T^{j-2}|_{\text{int}J} = T_J|_{\text{int}J}.$

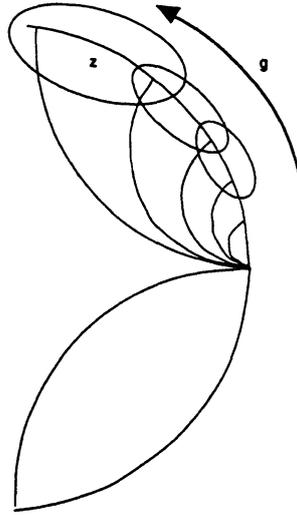
(c)  $\implies T^{k-3}|_{\text{int}J} = T_J|_{\text{int}J}.$

となっている。

3-3. は、高々  $q^2$  個の無限和

$$\sum_{\substack{J \in \mathcal{P}: \\ \iota(J)=i, \tau(J)=j}} \sup_{z \in D(j)} |T_J'(T_J^{-1}z)|^{-\delta}$$

である。この和に現れる  $T_J$  は、容易に分かるように放物元  $g$  と  $c \in \Gamma_0$  があって、 $g^n c$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) と表されている。原点を中心とする回転は、Poincaré 計量と  $S^1$  上の Lebesgue



測度を保つことにすれば、 $g| = 1$  を仮定してよい。そうすれば上の無限和の評価は、1 から十分離れた  $S^1$  の近傍の点  $z$  に対して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(g^n)'(g^{-n}z)|^{-\delta}$$

を評価する問題に帰着される。

$g| = 1$  より、 $t \in \mathbb{R}$  があって、

$$g = \begin{pmatrix} 1 + t\sqrt{-1} & -t\sqrt{-1} \\ t\sqrt{-1} & 1 - t\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

という形をしている。これより、

$$(g^n)'(g^{-n}z) = ((1 - z)nt\sqrt{-1} + 1)^2$$

となっているから、3-3. の評価式が成立することを確信するのはたやすいだろう。

## 5.2 Transfer Operators

この節では、 $K = \bigcup_{i=1}^4 (L_2(P_i) \cup R_3(P_i) \cup [T_i, S_i])$  上の関数  $f$  に対して、

$$f \mapsto L(s)f(x) = \sum_{y:Sy=x} |S'y|^{-s} f(y)$$

で定義される転送作用素を‘くりこまれた’Bowen-Series Markov map  $S$  のかわりに Markov system  $\mathcal{T}_\Gamma$  を用いることによって、豊富な構造を持った関数空間の作用素となるよう修正する。

以後、 $\mathcal{T}_\Gamma = (\mathcal{R}, \mathcal{P}, \{T_J\}_{J \in \mathcal{P}})$  において  $\mathcal{R} = \{A(1), A(2), \dots, A(q)\}$  と書かれているものとし、集合の和  $\sqcup$  は、直和の意味とする。

$$\begin{aligned} X &= \bigsqcup_{i=1}^q A(i) \\ D(X) &= \bigsqcup_{i=1}^q D(i) \\ B(X) &= \bigsqcup_{i=1}^q B(i) \end{aligned}$$

とおく。領域  $D \subset \mathbb{C}$  と compact 集合  $E$  に対し、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_b(D) &= \{f : D \rightarrow \mathbb{C} \text{ 有界正則} \} \\ \mathcal{A}(D) &= \{f : D \rightarrow \mathbb{C} \text{ 正則} \} \\ C(E) &= \{f : E \rightarrow \mathbb{C} \text{ 連続} \} \end{aligned}$$

を表すものとする。

$\mathcal{A}_b(D)$  と  $C(E)$  は、それぞれ  $\|f\|_\infty = \sup_{z \in D} |f(z)|$ ,  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$  をノルムとして Banach 空間になり、 $\mathcal{A}(D)$  は  $\|f\|_{E, \infty} = \sup_{z \in E} |f(z)|$  ( $E \subset D : \text{compact}$ ) を半ノルムとして Frechet 空間になる。

また、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_b(D(X)) &\text{ と } \bigoplus_{i=1}^q \mathcal{A}_b(D(i)), \\ \mathcal{A}(D(X)) &\text{ と } \bigoplus_{i=1}^q \mathcal{A}(D(i)), \\ C(X) &\text{ と } \bigoplus_{i=1}^q C(A(i)). \end{aligned}$$

を同一視する。それに伴い  $f \in \bigsqcup_{i=1}^q D(i)$  に対し、 $f_i \equiv f|_{D(i)}$  とおいた時、 $f = \bigoplus_{i=1}^q f_i$  とみなし、 $f = \bigoplus_{i=1}^q f_i \in \mathcal{A}_b(D(X))$  に対し、 $\|f\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq q} \|f_i\|_\infty$  とする。

さて  $s \in \mathbb{C}$  に対し、 $L(s) : \mathcal{A}_b(D(X)) \rightarrow \mathcal{A}_b(D(X))$  を

$$L(s)f(z) = \sum_{y: S'y=z} |S'y|^{-s} f(y)$$

と定義したいところであるが、次の様な問題が生じる。

一つは、 $\text{Res} > \frac{1}{2}$  でないと右辺は収束しない。

もう一つは、 $y \mapsto |S'y|$  は、 $y$  に関して解析的ではないので  $L(s)f \in \mathcal{A}_b(D(X))$  とはならないということである。

そこで簡単な考察を試みよう。

$$g(e^{\sqrt{-1}\theta}) = e^{\sqrt{-1}F(\theta)}$$

より、両辺を微分して

$$\begin{aligned} g'(e^{\sqrt{-1}\theta})e^{\sqrt{-1}\theta} &= e^{\sqrt{-1}F(\theta)}F'(\theta) \\ \therefore |g'(e^{\sqrt{-1}})| &= F'(\theta) \end{aligned}$$

更に、

$$\begin{aligned} F'(\theta) &= \frac{g'(e^{\sqrt{-1}\theta})e^{\sqrt{-1}\theta}}{g(e^{\sqrt{-1}\theta})} \\ &= \frac{g'(z)z}{g(z)} \quad \text{hol. in } z \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$G_J(s)(w) \equiv \left( T_J'(w) \frac{w}{T_J w} \right)^{-s}$$

とおけば、 $S^1$  上で

$$G_J(s)(w) = |T_J'(w)|^{-s}$$

となっている。

更に、

$$f = \bigoplus_{i=1}^q f_i \in \mathcal{A}(D(X)) \quad \text{or} \quad C(X)$$

に対し

$$(L(s)f)_i(z) = \sum_{\substack{J \in \mathcal{P} \\ \tau(J)=i}} G_J(s)(T_J^{-1}z) f_{i(J)}(T_J^{-1}z)$$

とおく。

注) 3-3. より  $\text{Res} > \frac{1}{2}$  で 右辺は収束する。

さて  $\text{Res} > \frac{1}{2} \implies L(s) : \mathcal{A}_b(D(X)) \rightarrow \mathcal{A}_b(D(X))$  が有界作用素であることは分かったが、 $L(s)^n$  はどうだろうか？

$$\begin{aligned} J &= J(i_0 i_1 \dots i_{n-1}) \in \mathcal{P} \\ &= J(i_0) \cap T_{J(i_0)}^{-1} J(i_1) \cap \dots \cap T_{J(i_0)}^{-1} \circ \dots \circ T_{J(i_{n-2})}^{-1} J(i_{n-1}) \end{aligned}$$

なので

$$G_{n,J}(s)(w) \equiv \left( (T_J^n)'(w) \frac{w}{T_J^n w} \right)^{-s}$$

とおくと

$$G_{n,J}(s)(w) = G_{J(i_0)}(s)(w) \times G_{J(i_1)}(s)(T_{J(i_0)}w) \times \cdots \times G_{J(i_{n-1})}(s)(T_{J(i_0 \dots i_{n-2})}^{n-1}w)$$

であることに注意すると

$$(L(s)^n f)_i(z) = \sum_{\substack{J \in \mathcal{P} \\ \tau(J)=i}} G_{n,J}(s)(T_J^{-n}z) f_{i(J)}(T_J^{-n}z)$$

$$\therefore "L_T^n = L_{T^n}"$$

である。

以後、'L(s)' を作用する空間によって区別して書く。(取り合えず  $\text{Res} > \frac{1}{2}$  を仮定する)

$$L_0(s) : \mathcal{A}_b(B(X)) \rightarrow \mathcal{A}_b(B(X))$$

$$L(s) : \mathcal{A}_b(D(X)) \rightarrow \mathcal{A}_b(D(X))$$

$$L_X(s) : C(X) \rightarrow C(X)$$

$$r : \mathcal{A}_b(D(X)) \rightarrow \mathcal{A}_b(B(X)) \quad \text{制限写像}$$

とおくと

$$L(s) = L_0(s) \circ r$$

となる。次が証明出来る。

**定理** 領域  $\{s \in \mathbb{C} : \text{Res} > \frac{1}{2}\}$  において  $L_0(s)$  は  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_b(B(X)) \rightarrow \mathcal{A}_b(D(X)))$ -値解析関数であり  $s$ -平面全体に  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_b(B(X)) \rightarrow \mathcal{A}_b(D(X)))$ -値関数として有理型に解析接続される。

すなわち、rank が  $q^2$  以下の  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_b(B(X)) \rightarrow \mathcal{A}_b(D(X)))$  の元からなる列  $\{L_{0,k}\}_{k=-1,0,1,2,\dots}$  があって各  $k$  に対し

$$L_0(s) = \left( \frac{L_{0,-1}}{s - \frac{1}{2}} + \frac{L_{0,0}}{s} + \frac{L_{0,1}}{s + \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{L_{0,k}}{s + \frac{k}{2}} \right)$$

は  $\{s \in \mathbb{C} : \text{Res} > -\frac{k+1}{2}\}$  において  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_b(B(X)) \rightarrow \mathcal{A}_b(D(X)))$ -値関数として解析的である。

系 解析関数  $\{s \in \mathbb{C} : \text{Res} > \frac{1}{2}\} \ni s \mapsto L(s) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_b(D(X)) \rightarrow \mathcal{A}_b(D(X)))$  は  $s$ -平面全体へ order zero の nuclear operator に値をとる 有理型関数に解析接続される。

特に、特異点はあるとすれば、 $s = -\frac{k}{2}$  ( $k = -1, 0, 1, 2, \dots$ ) である。従って、Fredholm 行列式  $\text{Det}(I - L(s))$  もまた  $s$ -平面全体に有理型に解析接続され、その特異点の候補点は  $s = -\frac{k}{2}$  ( $k = -1, 0, 1, 2, \dots$ ) である。但し、 $L(s)$  のそれとは、order が異なる可能性がある。

注) 下線部については Ch 7 で解説する。

定理の証明は、初等的であるが かなり長くなるので省くことにする。アイデアは、Riemann zeta 関数を全平面に解析接続する時の様に Gamma 関数

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad \text{Res} > 0$$

を  $\text{Res} > 1$  において  $L(s)$  にかけた作用素  $\Gamma(s)L(s)$  を考え  $L(s)$  の具体的な表示を利用して解析接続を実行するのである。( [1, §5], [2, Appendix 2] 参照。 )

# Bibliography

- [1] T. Morita, *Markov systems and transfer operators associated with cofinite Fuchsian groups*, to appear in *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*
- [2] S. J. Patterson, *An introduction to the theory of the Riemann zeta-Function*, Cambridge Univ. Press.

# Chapter 6

## $L(s)$ with $\text{Res} > \frac{1}{2}$

### 6.1 Spectral Decomposition Theorem

今後しばらくは、 $\text{Res} > \frac{1}{2}$  とする。次を示すのがこの Ch の目標である。

**定理**  $\text{Res} > \frac{1}{2}$  とする。 $s \in \mathbb{R}$  のとき  $L(s) : \mathcal{A}_b(D(X)) \rightarrow \mathcal{A}_b(D(X))$  のスペクトル半径は  $\lambda(\text{Res})$  より小さい。

$s \in (\frac{1}{2}, \infty)$  に関しては  $(\frac{1}{2}, \infty)$  の  $\mathbb{C}$  での近傍  $U$  があって以下のようなスペクトル分解が成立する。

$$L^n(s) = \lambda^n(s)E(s) + R^n(s) \quad n \geq 1$$

1.  $s \mapsto E(s), s \mapsto R(s)$  は  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_b(D(X)))$ -値解析関数で

$$E^2(s) = E(s), E(s)R(s) = R(s)E(s) = 0$$

を満たし、 $R(s)$  のスペクトル半径は  $|\lambda(s)|$  より小さい。

更に、 $E(s)$  は

$$E(s)f = F(s)(f)h(s)$$

の形で書ける。ただし、 $h(s) = E(s)1$  は  $\mathcal{A}_b(D(X))$ -値解析関数で  $F(s)$  は  $\mathcal{A}_b(D(X))$ -値解析関数である。

2.  $\lambda(s)$  は解析的で  $(\frac{1}{2}, \infty)$  上で狭義単調減少であり  $L(s)$  の絶対値最大の固有値である。

3.

$$s \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \implies h(s)|_X > 0 \quad \text{かつ、} \quad F(s)f = \int_X f|_X(x)\nu(s)(dx)$$

但し、 $\nu$  は確率測度で特に、 $\nu(1)$  は正規化 Lebesgue 測度である。

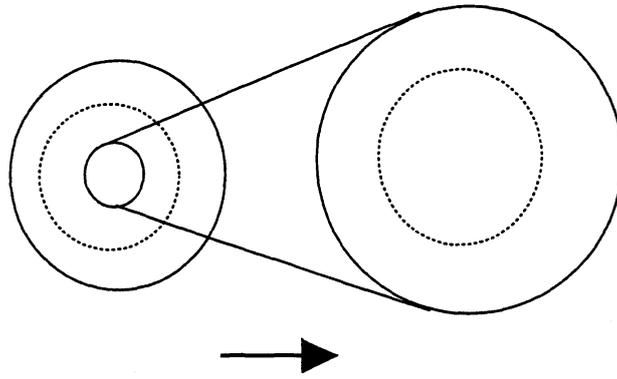
幾つかの補題を用意しておく。

**補題 (Perron-Frobenius Type)** 各  $\sigma > \frac{1}{2}$  に対し、 $L(\sigma) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_b(D(X)))$  は正の固有値  $\lambda(\sigma)$  で、他の固有値の絶対値がそれ以下となるものを持つ。特に、 $\lambda(\sigma)$  に属する固有関数として  $X$  上いたるところ正值のものをとれる。

以下、 $\lambda = \lambda(\sigma)$  を maximal eigenvalue と呼んでいくことにする。

補題の略証

$$T_J^{-1}(D(\tau(J))) \subset B(\iota(J)) \Subset D(\iota(J))$$



$$L(\sigma) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(D(X)) \rightarrow \mathcal{A}_b(D(X)))$$

とする。

$$\Lambda = \left\{ f \in \mathcal{A}(D(X)) : f|_X \geq 0, \|f\|_\infty \leq 1 \right\}$$

は Frechet 空間  $\mathcal{A}(D(X))$  で compact な凸集合である。

$$L(\sigma)|_\Lambda : \Lambda \longrightarrow \mathcal{A}_b(D(X)) \quad \text{連続}$$

に対し、

$$\mathcal{F}_n(f) = \frac{L(\sigma)(f + \frac{1}{n})}{\|L(\sigma)(f + \frac{1}{n})\|_\infty}$$

で  $\mathcal{F}_n : \Lambda \rightarrow \Lambda$  を定義する。

Schauder-Tychonoff Fixed Point Theorem から

$$\exists f_n \in \Lambda \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{F}_n f_n = f_n$$

$$\text{i.e.} \quad L(\sigma)(f_n + \frac{1}{n}) = \lambda_n f_n$$

$$\lambda_n = \|L(\sigma)(f_n + \frac{1}{n})\|_\infty$$

であるが、この時、 $\lambda_n \neq 0$  ( $\because L_X(\sigma) \geq 0$ ) である。

更に、

$$\alpha(\sigma) \equiv \min_{x \in X} L(\sigma) 1 > 0$$

とおくと

$$f_n(z) = \min_{x \in X} f_n(x) \quad \text{for some } z \in X$$

なので

$$\alpha(\sigma) \left( f_n(z) + \frac{1}{n} \right) \leq \lambda_n f_n(z)$$

となり、従って

$$f_n(x) > 0,$$

$$\lambda_n \geq \alpha(\sigma).$$

さて、 $\{L(\sigma) f_n\}_{n=1}^{\infty}$  は  $\mathcal{A}_b(D(X))$  で relatively compact であるから、 $L(\sigma) \left( f_n + \frac{1}{n} \right) = \lambda_n f_n$  より  $\{f_n\}$  も  $\mathcal{A}_b(D(X))$  で同様の性質を持つ。

必要ならば部分列をとって  $f_n \rightrightarrows f, \lambda_n \rightarrow \lambda$  としてよい。この時

$$L(\sigma) f = \lambda f$$

$$\|L(\sigma) f\|_{\infty} = \lambda \geq \alpha(\sigma) > 0$$

である。

この  $f$  が  $f|_X > 0$  を示すことが出来れば、他の主張は難しくない。

$x_0 \in A(i), f(x_0) = 0$  とすると  $L^n(\sigma) f = \lambda^n f$  から

$$\begin{aligned} 0 = f(x_0) &= \lambda^{-n} L^n(\sigma) f(x_0) \\ &= \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}_n \\ \tau(J)=i}} G_{n,J}(\sigma)(T_J^{-n} x_0) f(T_J^{-n} x_0) \end{aligned}$$

$$\therefore f(T_J^{-n} x_0) = 0 \quad \text{for } \forall J \in \mathcal{P}_n, (n = 1, 2, \dots), \tau(J) = A(i)$$

$\{T_J^{-n} x_0 : J \in \mathcal{P}_n, \tau(J) = A(i), n = 1, 2, \dots\}$  は位相的推移性から  $X$  内で dense である。

$$\therefore f \equiv 0 \quad \text{矛盾}$$

略証終り

補題  $\text{Res} > \frac{1}{2}$  とする。

1.  $s \in \mathbb{R} \implies \lambda(s)$  は単純である。
2.  $L_X(s) : C(X) \rightarrow C(X)$  が  $|\lambda| = \lambda(\text{Res})$  となる固有値を持つならば  $s \in \mathbb{R}$  である。
3. 特に、実数  $s > \frac{1}{2}$  に対し  $L(s)$  について  $\lambda(s)$  以外に  $|\lambda(s)| = |\lambda|$  となる固有値はない。

### 補題の略証

1. について

$L(s) : \mathcal{A}_b \rightarrow \mathcal{A}_b$  に対し、 $L_X(s) : C(X) \rightarrow C(X)$  で議論すれば十分である。  
 $f$  を先の補題で得たものとし、 $\lambda = \lambda(s)$  とする。

$$\tilde{L}_X(s)g = \frac{1}{f}\lambda^{-1}L_X(s)(fg)$$

とすると、

$$\tilde{L}_X(s)1 = 1$$

なので、1 が  $\tilde{L}_X(s)$  の単純固有値であることを示せば良い。

$\tilde{L}_x(s)g = g$  とおく。  $\max g = g(x_0)$  とすると、

$$g(x_0) = \tilde{L}_X(s)^n g(x_0) = \sum \alpha_J g(T_J^n x_0)$$

より、 $g(T_J^n x_0) = g(x_0)$  である。従って、 $g \equiv g(x_0)$  である。

2. と 3. は、次の主張を用いて示せる。

主張  $t \in \mathbb{R}, \alpha \in [0, 2\pi)$  とする。任意の  $S$  の周期点  $x$  に対し、

$$(T_J^n)'(x)^{\sqrt{-1}t} = e^{\sqrt{-1}n\alpha}$$

が成立するとする。但し、 $n$  は  $x$  の  $S$  についての周期で  $J \in \mathcal{P}_n$  は  $x \in J$  となるものとする。この時  $t = \alpha = 0$  でなければならない。

この主張は、 $\Gamma$  が discrete であることを用いて証明できる。

略証終り

## 6.2 定理の証明について

1. 2つ目の補題から  $s \in (\frac{1}{2}, \infty)$  ならばスペクトル分解

$$L^n(s) = \lambda^n(s)E(s) + R^n(s)$$

が得られる。

2.  $s \mapsto L(s)$  が  $\mathcal{L}(\mathcal{A}_b(D(X)))$ -値解析関数であることから摂動論の一般論 ([2] 参照。) を用いて主張 1. や 主張 2. の最初の条件を満たす  $U \cap (\frac{1}{2}, \infty)$  を選べる。
3. 主張 3. における  $h(s)|_X > 0$  if  $s \in (\frac{1}{2}, \infty)$  については、

$$(*) \quad \lambda^{-n}(s)L^n(s)f = F(s)(f)h(s) + \lambda^{-n}(s)R^n(s)$$

より、(\*) において  $f \equiv 1$  とおくと

$$\lambda^{-n}(s)L^n(s)1|_X > 0$$

$$\lambda^{-n}(s)L^n(s)1 \rightrightarrows h(s) \quad \text{on } D(X)$$

更に、 $L(s)f(s) = \lambda(s)f(s)$  となる  $f(s)$  で  $f(s)|_X > 0$  となるものが最初の補題でとれるから

$$\begin{aligned} \lambda^{-n}(s)L^n(s)1 &\geq \lambda^{-n}(s)L^n(s) \frac{f(s)}{\sup_{x \in X} f(s)(x)} \\ &\geq \frac{\inf_{x \in X} f(s)(x)}{\sup_{x \in X} f(s)(x)} \end{aligned}$$

4. 主張 3. の  $F(s)$  の表現  $F(s)f = \int_X f|_X(x)\nu(s)(dx)$  について。

$$\begin{aligned} (**) \quad \lambda^{-n}(s)L^n(s)f(x) &\leq \lambda^{-n}(s)L^n(s) \frac{h(s)}{\inf_{y \in X} h(s)(y)}(x) \cdot \|f|_X\|_\infty \\ &\leq \frac{\sup_{y \in X} h(s)(y)}{\inf_{y \in X} h(s)(y)} \cdot \|f|_X\|_\infty \quad \text{for all } x \in X \end{aligned}$$

に注意しておく。

(\*) を  $x \in X$  で考えると (\*\*) から

$$|F(s)f| \leq \frac{\sup_{y \in X} h(s)(y)}{(\inf_{y \in X} h(s)(y))^2} \cdot \|f|_X\|_\infty + \frac{\lambda^{-n}(s)|R^n(s)f(x)|}{\inf_{y \in X} h(s)(y)}$$

だから、 $n \rightarrow \infty$  として

$$|F(s)f| \leq \frac{\sup_{y \in X} h(s)(y)}{(\inf_{y \in X} h(s)(y))^2} \cdot \|f|_X\|_\infty$$

を得る。従って、 $F(s)$  は  $C(X)$  上の有界線型汎関数に拡張される。 $F(s)$  の正値性や  $F(s)(1) = 1$  はすぐ分かる。

5.  $\nu(1)$  が  $X$  上の正規化 Lebesgue 測度であることについて。

$L_X(1)$  が  $L_{S,m}$  すなわち正規化 Lebesgue 測度  $m$  に関する  $S$  の Perron-Frobenius operator であることはその定義式から、

$$\int_X L(1)f(x)m(dx) = \int_X f(x)m(dx) \quad \text{for all } f \in C(X)$$

が成立することに注目すれば容易に証明出来る。

# Bibliography

- [1] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators 1*, Wiley 1988.
- [2] T. Kato, *Perturbation Theory for linear operators*, Springer 1976.

# Chapter 7

## Nuclear operators と Fredholm 行列式

### 7.1 Grothendieck Theorem

$\mathfrak{X}$  を複素 Banach 空間とし、 $a_i \in \mathfrak{X}', x_i \in \mathfrak{X}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) を

$$\sum_i \|a_i\| \|x_i\| < +\infty$$

を満たすものとする。

この時、 $L = \sum_i a_i \otimes x_i$  は  $Lx = \sum_i \langle x_i, a_i \rangle x_i$  で定義される作用素を意味するものとする。  
 $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X})$  が

$$\exists (a_i) \subset \mathfrak{X}, (x_i) \subset \mathfrak{X}' \quad \text{s.t.} \quad L = \sum_i a_i \otimes x_i, \text{ かつ、} \sum_i \|a_i\| \|x_i\| < +\infty$$

をみたす時  $L$  を nuclear operator という。

**命題 (Grothendieck)**  $\mathfrak{X}$  は基底を持つ Banach 空間、 $L$  を nuclear operator、 $L = \sum_i a_i \otimes x_i$  をその nuclear 表現とする。

この時、

$$\alpha_n(L) \equiv \frac{1}{n!} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} \det(\langle x_{i_k}, a_{i_l} \rangle)$$

は  $L$  の nuclear 表現に依らず

$$|\alpha_n(L)| \leq \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!} \cdot \left( \sum_i \|a_i\| \|x_i\| \right)^n$$

を満たす。

注1)  $\mathfrak{X}$  が基底を持つ。

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \{e_1, e_2, \dots\} \subset \mathfrak{X}$  があって、任意の  $x \in \mathfrak{X}$  に対し、 $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$  があって  $\|x - \sum_{i=1}^n a_i e_i\| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) と出来る。

注2)  $\alpha_n(L) = \text{Tr}(L \wedge \cdots \wedge L)$

特に、 $\alpha_1(L) = \text{Tr}L = \sum_i \langle x_i, a_i \rangle$

注3) 評価式は Hadamard の不等式  $|\det(a_{ij})| \leq \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}^2| \right)^{\frac{1}{2}}$  から従う。

$$\text{Det}(I - \alpha L) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n(L) \alpha^n \quad (\alpha_0(L) = 1)$$

は  $\alpha$  に関し整関数となる。これを  $L$  の Fredholm 行列式という。

定理  $\mathfrak{X}$  は基底を持つ Banach 空間とし、 $L$  は  $\mathfrak{X}$  上の nuclear operator とする。この時、Fredholm 行列式  $D(\alpha) = \text{Det}(I - \alpha L)$  は  $\alpha$  の整関数である。

また、 $\alpha_0$  が  $D(\alpha)$  の位数  $m$  の零点であることと、 $\frac{1}{\alpha_0}$  が  $L$  の重複度  $m$  の固有値であることは同等である。

Weierstrass, Hadamard, Jensen, Lindelöf et.al の整関数に関する結果を用いると次を得る。

定理  $\mathfrak{X}$  は基底を持つ Banach 空間とし、 $L$  が

$$L = \sum_i a_i \otimes x_i$$

(但し、 $\sum \|a_i\|^r < \infty$  ( $0 < r < 1$ ),  $\|x_i\|^2 < \infty$ ) を満たすとする。この時、

$$\|\lambda_n(L)\| \leq C_r n^{-\frac{1}{r}}$$

となり、かつ

$$\text{Det}(I - \alpha L) = \prod (1 - \alpha \lambda_n)$$

と書ける。つまり、Fredholm 行列式はスペクトル行列式と一致する。

## 7.2 $L(s)$ ( $\text{Res} > \frac{1}{2}$ ) が nuclear であること

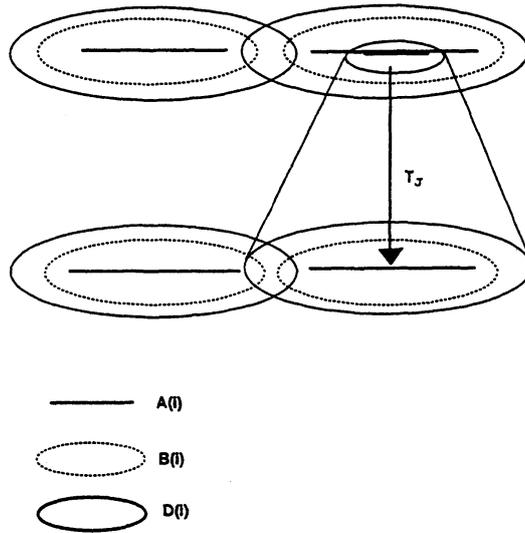
$D(X) = \bigsqcup_{i=1}^q D(i)$ ,  $B(X) = \bigsqcup_{i=1}^q B(i)$  とおく。

また、 $f \in \mathcal{A}_b(D(X))$ ,  $z \in D(X)$  に対し、

$$f \mapsto (L(s)f)_i(z) = \sum_{\substack{J \in \mathcal{P} \\ \tau(J)=i}} G_J(s)(T_J^{-1}z) f_{i(J)}(T_J^{-1}z)$$

を思い出そう。 $w = T_J^{-1}z \in B(X)$  とおくと

$$G_J(s)(w) = \left( T_J'(w) \frac{w}{T_J(w)} \right)^{-s}$$



である。更に、必要があれば  $B(i), D(i)$  を小さくにとって

$$\sum_{J \in \mathcal{P}} \sup_{z \in D(\tau(J))} |G_J(s)(T_J^{-1}z)| < +\infty$$

とする。

$$\begin{aligned} r : \mathcal{A}_b(B(X)) &\rightarrow \mathcal{A}_b(D(X)) && \text{制限写像} \\ L_0(s) : \mathcal{A}_b(B(X)) &\rightarrow \mathcal{A}_b(D(X)) \end{aligned}$$

とおくと

$$L(s) = L_0(s) \circ r$$

となる。

従って、2つの単連結領域  $B \Subset D$  に対して、制限写像  $r : \mathcal{A}_b(D) \rightarrow \mathcal{A}_b(B)$  をとり、この  $r$  について次を示せば  $L(s)$  ( $\text{Res} > \frac{1}{2}$ ) が nuclear operator of order zero であることが言える。ここで、order zero というのは nuclear 表現に現れる  $a_i, x_i$  のノルムが  $i$  について急減少となる様にとれることと理解しておこう。

主張  $\exists (u_k) \subset \mathcal{A}_b(D(X))', (v_k) \subset \mathcal{A}_b(B(X))$  s.t.

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \otimes v_k$$

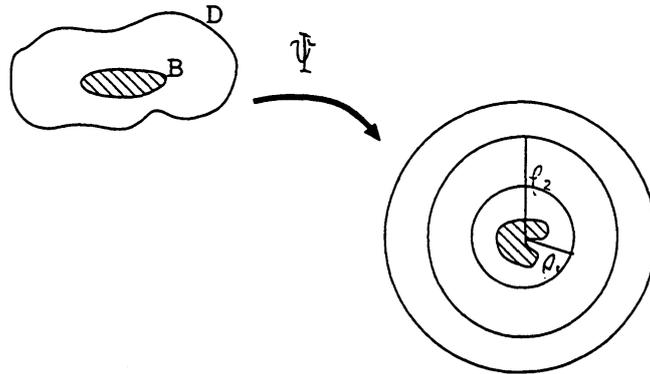
$\|u_k\| \rightarrow 0, \|v_k\| \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) rapidly.

略証

$\Psi$ : Riemann mapping とする。

この時、

$$0 < \exists \rho_1 < \exists \rho_2 < 1 \quad \text{s.t.} \quad |\Psi(z)| < \rho_1 \quad \text{if} \quad z \in \bar{B}$$



なので、

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\Psi^{-1}\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \cdot z^k$$

を用いると

$$r(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|\zeta|=\rho_2} \frac{f(\Psi^{-1}\zeta)}{\zeta^{k+1}} \rho_1^k d\zeta \cdot \left(\frac{\Psi(z)}{\rho_1}\right)^k$$

であるから

$$f \mapsto \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|\zeta|=\rho_2} \frac{f(\Psi^{-1}\zeta)}{\zeta^{k+1}} \rho_1^k d\zeta \in \mathcal{A}_b(D), \quad \left(\frac{\Psi(z)}{\rho_1}\right)^k \in \mathcal{A}_b(B)$$

が分かる。

略証終り

# Bibliography

- [1] A.Grothendieck, *La Théorie de Fredholm*, Bull. Soc. math.France 84 (1956) 319 -384.
- [2] A.Pietsch, *Eigenvalues and s-numbers* 1987.

# Chapter 8

## Zet=Det

### 8.1 等式 $Z(s) = \text{Det}(I - L(s))$

最後に、 $\text{Res} > 1$  において Selberg zeta 関数  $Z(s)$  を  $L(s)$  の Fredholm 行列式で表現出来ることを確かめよう。

$\text{Res} > 1$  ( $L(s)$  の固有値が小さくなるように十分大きければよい) と仮定すると

$$\text{Det}(I - L(s)) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr}L(s)^n\right)$$

が成立する。これを見るには、いたって形式的であるが  $L(s)$  の固有値を  $\lambda_i$  として、

$$\begin{aligned} \prod_i (1 - \lambda_i) &= \exp \log \prod_i (1 - \lambda_i) \\ &= \exp\left(-\sum_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^n}{n}\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_i \lambda_i^n\right) \end{aligned}$$

の様に確かめれば良い。 ( $\because \log(1 - \lambda) = -\sum_n \frac{\lambda^n}{n}$  if  $|\lambda| < 1$ )

そこで  $\text{Tr}L(s)^n$  を計算してみよう。

$$(L^n(s)f)_i(z) = \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}_n, \\ \tau(J)=i}} G_{n,j}(s)(T_J^{-n}z) \cdot f_{\tau(J)}(T_J^{-n}z)$$

より  $L(n, s, J) : \mathcal{A}_b(D(\iota(J))) \rightarrow \mathcal{A}_b(D(\tau(J)))$  を

$$L(n, s, J)f(s) = G_{n,j}(s)(T_J^{-n}z) \cdot f(T_J^{-n}z)$$

で定義すると

$$\text{Tr}L(s)^n = \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}_n \\ T_J^n J \supset J}} \text{Tr}L(n, s, J)$$

となる。従って、次の節の補題を仮定すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} L^n(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}_n \\ T_J^c J \supset J}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( (T_J^n)'(a_J) \right)^{-(s+k)} \\ &= \sum_{\tau \in PO(S)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp(-(s+k)n \cdot l(\Phi(\tau))) \\ \therefore \text{Det}(I - L(s)) &= Z(s). \end{aligned}$$

## 8.2 補題

補題  $D \subset \mathbb{C}$  を単連結有界領域、

$\varphi: D \rightarrow D$  を  $\sup_{z \in D} |\varphi'(z)| < 1$  を満たす単葉関数及び、

$F: D \rightarrow \mathbb{C}$  を正則関数で  $F(a) \neq 0$  を満たすものとする。(但し、 $a$  は  $\varphi$  の唯一つの固定点とする。)

この時、

$$L: \mathcal{A}_b(D) \rightarrow \mathcal{A}_b(D)$$

$$f \mapsto F(\varphi(\cdot))f(\varphi(\cdot))$$

の固有値の全体は、

$$\Lambda(L) = \{F(a)\{\varphi'(a)\}^k : k = 0, 1, 2, \dots\}$$

であり、その元はすべて単純である。

### 略証

1.  $Lf = \lambda f$ ,  $0 \neq f \in \mathcal{A}_b(D) \implies \lambda \in \Lambda(L)$  について。

$f^{(j)}(a) = 0$  ( $j < k$ ),  $f^{(k)}(a) \neq 0$  とする。

$$F(\varphi(\cdot))f(\varphi(\cdot)) = \lambda f(\cdot)$$

の両辺を  $z = a$  において  $k$  回微分する。

$$F(a)f^{(k)}(a)\{\varphi'(a)\}^k = \lambda f^{(k)}(a)$$

を得るから  $\lambda = F(a)\{\varphi'(a)\}^k$  の形であることが分かる。

2.  $\lambda \in \Lambda(L)$  は  $L$  の固有値であること。

$L$  は nuclear である。従って、compact なのでスペクトルは固有値のみから成る。

$$(L - \lambda)\mathcal{A}_b(D) \subseteq \mathcal{A}_b(D) \quad \text{if } \lambda \in \Lambda(L)$$

を示す。‘=’の時は、Banach の inverse mapping theorem から  $\lambda$  はスペクトルでない。

### 主張

$$\exists f \in \mathcal{A}_b(D) \quad \text{s.t.} \quad Lf(z) - F(a)\{\varphi'(a)\}^k f(z) = (z-a)^k$$

$\therefore l$  を  $f^{(j)}(a) = 0$  ( $j < l$ ),  $f^{(l)}(a) \neq 0$  とする。

$F(\varphi(z))f(\varphi(z)) - F(a)\{\varphi'(a)\}^k f(z) = (z-a)^k$  の両辺を  $l$  回微分する。

- $l < k \implies$  左辺  $= F(a)(\{\varphi'(a)\}^l - \{\varphi'(a)\}^k)f^{(l)}(a) \neq 0$  だが、一方 右辺  $= 0$ 。矛盾。
- $l = k \implies$  左辺  $= 0$  だが、一方 右辺  $= k!$ 。矛盾。
- 左辺  $\neq 0$ , 右辺  $= 0$ 。矛盾。

3.  $\lambda \in \Lambda(L)$  はすべて単純であること。

$f^{(j)}(a) = 0$   $j < p$ ,  $f^{(p)} \neq 0$  とすると  $p = k$ 。

$\lambda = F(a)\{\varphi'(a)\}^k$  の時

$$(L - \lambda)^l f = 0 \quad \text{in } \mathcal{A}_b(D) \quad f \neq 0 \quad \text{in } \mathcal{A}_b(D)$$

としてみる。

$$\sum_{j=0}^l {}_l C_j (-1)^{l-j} \{F(a)\}^{l-j} \{\varphi'(a)\}^{k(l-j)} F(\varphi(z)) \cdots F(\varphi^j z) f(\varphi^j z) = 0$$

の両辺を  $p$  回  $z = a$  で微分する。

$$\therefore (\{\varphi'(a)\}^p - \{\varphi'(a)\}^k)^l \{F(a)\}^l = 0$$

$$\therefore p = k$$

このことから  $\exists C_{k+j}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) ( $f$  に依らない) s.t.  $C_{k+j} f^{(k)}(a) = f^{(k+j)}(a)$  となり、 $\dim\{f : (L - \lambda)^i f = 0\} = 1$  である。

略証終り