Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 57

エルゴード定理とその応用

－丸山儀四郎先生講義録－

井上和行・編

1989

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

エルゴード定理とその応用

－丸山儀四郎先生講義録－

目　次

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

エルゴード定理とその応用

第1講　保測変換

上記のテーマを選んだ趣旨は，(1) 確率論の中では他分野との境界領域にあること，(2) 数学および，engineering 等の数学以外の分野において，応用範囲が広く役に立つことである。エルゴード定理は Lebesgue 積分論の成果と言える。しかし，"積分" とは，大胆に "面積・体積" と理解してすすめばよい。

$(\Omega, \mathcal{B}; \mu)$ ： 測度空間 (measure space)

ただし，

Ω ： 基礎空間 (Euclid 空間の domain 等)
$\mathcal{B}$ ： Ω 上の σ-algebra
μ ： $\mathcal{B}$ 上の measure

一般には $0 < \mu(\Omega) \leqq +\infty$ と仮定する。特に，$0 < \mu(\Omega) < +\infty$ の場合は normalize して $\mu(\Omega) = 1$ と考えても一般性を失わない。この時，μ を確率測度，$\mathcal{B}$ を事象の全体と考えて，$A \in \mathcal{B}$ に

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

対して $\mu(A)$ を"事象Aの確率"という。

これから考える問題の背景には

力学系 (dynamical system)

がある。 これは時間と共に状態が変化していく現象を記述する。

変換 $T:\Omega \longrightarrow \Omega$ は必ずしも全射ではないとする。 問題によっては本質を変えることなく, (T, Ω) を適当に変形して, (T', Ω') において, 変換 $T':\Omega' \longrightarrow \Omega'$ を全射と考えることが好都合のこともある。 しかし, 以下では T が全射ということを仮定しない。 このような変換 T について次の2つの場合を考える。

定義(I) T : 準同型 (endomorphism)

$\Longleftrightarrow$

(1) T は $\mathcal{B}$ - 可測である。 即ち, $T^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$

即ち, ${}^{\forall}A \in \mathcal{B}$ に対して, $T^{-1}A \in \mathcal{B}$

ただし, $T^{-1}A \equiv \{ \omega \ ; \ T\omega \in A \}$

(2) T は保測 (measure-preserving) である。

即ち, ${}^{\forall}A \in \mathcal{B}$ に対して, $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

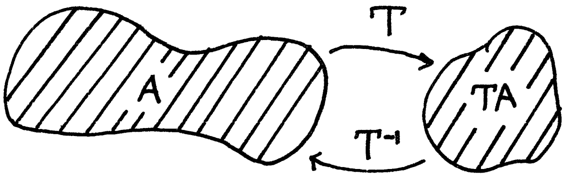
定義(II)　T：自己同型(automorphism)

$\Longleftrightarrow$

$\begin{cases} (1) & T\text{は全射で1対1} \\ (2) & T,\ T^{-1}\text{は準同型} \end{cases}$

この時，$T\mathcal{B} = \mathcal{B}$　(1対1).

$^\forall A \in \mathcal{B}$ に対して，$\mu(TA) = \mu(A) = \mu(T^{-1}A)$



$T^{-1}(TA) = A$

Exercise.　$T^0 \equiv$ 恒等変換，$T^1 \equiv T$，$T^2 \equiv TT$，$\cdots$，

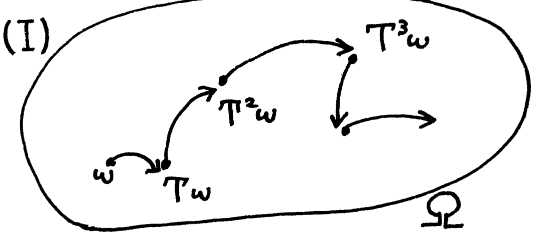
$T^n \equiv T \cdots T$　(n回)　とおく。この時，次のことを示せ。

(I)の場合：$\{T^n\ ;\ n \geqq 0\}$ は準同型の半群.

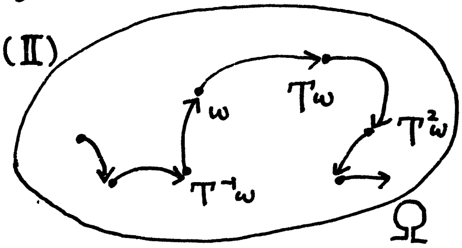
(II)の場合：$\{T^n\ ;\ -\infty < n < +\infty\}$ は自己同型の群.

nは"離散時間"(単位時間の何倍か)を表わすものと考える。又 ωは"力学系の状態"を表わす。

(I)



(II)



Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

Theorem 1.1 $p \geqq 1$ とする。

$f(\omega)$, $\omega \in \Omega$: $\mathcal{B}$-可測, $\int |f(\omega)|^p d\mu < +\infty$, (ただし $\int \equiv \int_\Omega$)

$Uf(\omega) \equiv f(T\omega)$ により変換 $U : f \longrightarrow Uf$ を定義する。

この時,

$$\int |Uf(\omega)|^p d\mu = \int |f(\omega)|^p d\mu$$

即ち, 変換 U は L^p ノルムを保存する: $\|Uf\|_p^p = \|f\|_p^p$

Proof. (i) $f(\omega) \geqq 0$, $p = 1$ の場合を示せば十分。

なぜなら, $f \in L^p$ の時, $|Uf(\omega)|^p = |f(T\omega)|^p = |f^p|(T\omega)$,

$0 \leqq |f^p| \in L^1$. 故に $g \equiv |f^p|$ とおく時, $0 \leqq g \in L^1$ であり,

示すべきことは $\|g(T\omega)\|_1 = \|g(\omega)\|_1$ となる。

(ii) さて, $f(\omega) \geqq 0$, $f \in L^1$ と仮定して

$$\int f(T\omega) d\mu = \int f(\omega) d\mu \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を示そう。 まず step functions $f_\varepsilon(\omega)$ ($\varepsilon > 0$) で近似する:

$$f_\varepsilon(\omega) = n\varepsilon \qquad \text{if} \quad f(\omega) \in [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon) \quad (0 \leqq n < +\infty)$$

即ち,

$$f_\varepsilon(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon \cdot 1_{A_n}(\omega), \qquad A_n \equiv \{\omega ; f(\omega) \in [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon)\}$$

ただし, $1_A(\omega) = 1$ $(\omega \in A)$, $1_A(\omega) = 0$ $(\omega \notin A)$.

この時, $0 \leqslant f_\varepsilon(\omega) \leqslant f(\omega)$, $|f(\omega)-f_\varepsilon(\omega)| \leqslant \varepsilon$, 更に

$$f_\varepsilon(T\omega) \longrightarrow f(T\omega) \quad (\varepsilon\downarrow 0), \quad f_\varepsilon(\omega) \longrightarrow f(\omega) \quad (\varepsilon\downarrow 0)$$

この収束は各点 ω についての収束(実は一様収束)である。これから $f(T\omega)$ は $\mathcal{B}$-可測なことも判る。なぜなら, $f_\varepsilon(T\omega)$ の $\mathcal{B}$-可測なことは容易に示される。$f(T\omega)$ はその $\varepsilon\downarrow 0$ の時の極限だから $\mathcal{B}$-可測である。 [Exercise. このことをキチンと示せ!]

(iii) 上で与えた step functions $f_\varepsilon(\omega)$ に対して,

$$\int f_\varepsilon(T\omega)\,d\mu = \int f_\varepsilon(\omega)\,d\mu \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

実際, $\displaystyle\int f_\varepsilon(T\omega)\,d\mu = \int \Big\{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon\cdot 1_{A_n}(T\omega)\Big\}\,d\mu.$

$$\underset{※_1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon \int 1_{A_n}(T\omega)\,d\mu$$

$$\underset{※_2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon \int_{T^{-1}A_n} 1\,d\mu$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon\cdot\mu(T^{-1}A_n)$$

$$\underset{※_3}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon\cdot\mu(A_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon \int 1_{A_n}(\omega)\,d\mu$$

$$= \int \Big\{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon\cdot 1_{A_n}(\omega)\Big\}\,d\mu$$

$$= \int f_\varepsilon(\omega)\,d\mu$$

[※$_1$ 正項級数の積分は項別積分可能。このようなことは Lebesgue 積分に限らず他のタイプの積分でもOK!

※$_2$ $1_{A_n}(T\omega) = 1_{T^{-1}A_n}(\omega)$

※$_3$ T の保測性による。]

(iv) $\varepsilon \downarrow 0$ の時, $0 \leqslant f_\varepsilon(\omega) \uparrow f(\omega)$, $0 \leqslant f_\varepsilon(T\omega) \uparrow f(T\omega)$

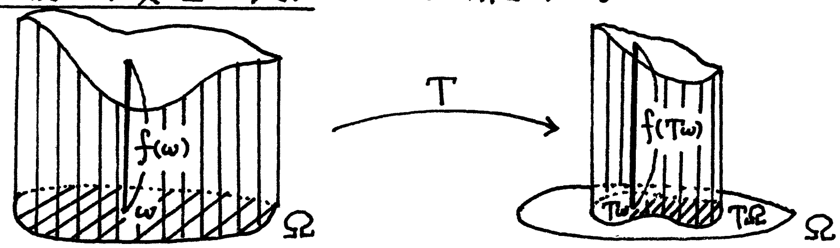
だから, 正項級数の積分に対する項別積分と同じ原理により,

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}\int f_\varepsilon(\omega)\,d\mu &= \int \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(\omega)\,d\mu = \int f(\omega)\,d\mu \\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int f_\varepsilon(T\omega)\,d\mu &= \int \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(T\omega)\,d\mu = \int f(T\omega)\,d\mu \end{aligned}\right\} \cdots ③$$

よって. ②,③ から①を得る。 [証終]

上の定理で, $\int f(\omega)\,d\mu =$ [筒の体積] = [底面積 × 高さ ($f(\omega)$)]

と考えれば, $f(\omega)$ の積分の, 変換Tに対する不変性は, 底面の保測性から筒の体積の不変性が従うものと理解される。



定義(i) $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ 準同型とする。

$A \in \mathcal{B}$ が T-不変集合 (T-invariant set)

$\Longleftrightarrow$

$T^{-1}A = A$ [即ち, $T^{-1}A \subset A$ かつ $TA \subset A$]

特に, T が自己同型の場合は, 次のことが成立つ:

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$A \in \mathcal{B}$ が T-不変集合 $\Longleftrightarrow$ $T : A \longrightarrow A$ 1対1, 点対応.

<u>定義(ii)</u> $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ 準同型とする。

$A \in \mathcal{B}$ が <u>T-不変集合</u>

$\Longleftrightarrow$

$$T^{-1}A = A \quad (\mathrm{mod.}\ 0)$$

<u>N. B.</u> " $f(\omega) = g(\omega)$ (測度0の ω の集合を除いて)" のことを " $f(\omega) = g(\omega)$ (mod. 0) " または, " $f(\omega) = g(\omega)$ (a.e.)", または単に " $f(\omega) = g(\omega)$" と書くことがある。 同様に, " $A = B$ (測度0の ω の集合を除いて)" のことを, " $A = B$ (mod. 0)" または単に "$A = B$" と書くことがある。 これは, $\mu(A \ominus B) = 0$ を意味する。 ただし, $A \ominus B \equiv (A \setminus B) + (B \setminus A)$. mod. 0 は modulus 0, 即ち測度0の集合を除いて成立する関係を表わし, 商空間を考えていることになる。

<u>Remark</u> $A \in \mathcal{B}$ に対する T-不変性は上で2通りに定義されたが本質的には同じことである。 即ち,

A : T-不変集合(ii) $\left[\text{i.e. } T^{-1}A = A \quad (\mathrm{mod.}\ 0) \right]$

に対して $\exists A_0$: T-不変集合(i) s.t. $A_0 = A$ (mod. 0).

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

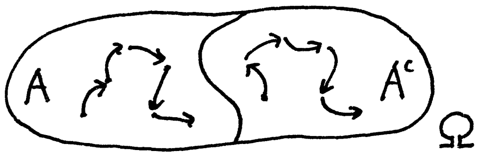
<u>Proof.</u> $A_0 \equiv \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcap_{n \geqq k} T^{-n}A$ とおくと, $T^{-n}A = A \pmod{0}$ を用いて, $A_0 = A \pmod{0}$ [Exercise]. 更に,

$$T^{-1}A_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n \geqq k} T^{-n}A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcap_{n \geqq k} T^{-n}A = A_0$$

故に, A_0 は T-不変集合(i) である。 [証終]

$$A : T\text{-不変集合} \Longleftrightarrow A^c \equiv \Omega \setminus A \ : T\text{-不変集合}.$$

A および A^c での運動は相互に出入りすることなく, A および A^c の内で閉じている。 従って, T を A 上に reduce することができる。



T : $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 上の準同型 , A : T-不変集合(i) とする。
この時, T : $(A, \mathcal{B} \cap A, \mu)$ 上の準同型となる。 ただし,

$$\mathcal{B} \cap A \equiv \{ B \cap A \ ; \ B \in \mathcal{B} \} \quad (: A \text{ 上の } \sigma\text{-algebra})$$

<u>定義</u> $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ 準同型とする。

T : <u>エルゴード的</u> (ergodic)

$\Longleftrightarrow$

$A \in \mathcal{B}$ が T-不変集合ならば, $A = \Omega \pmod{0}$ または $\mu(A) = 0$.

<u>Remark</u> 準同型 T がエルゴード的であるとは, 「 T を真に

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

reduceできるまともな集合は無い」ということ，即ち，「$\mu(A)>0$ かつ $\mu(A^c)>0$ なる T-不変集合 A は存在しない」ということである。 従って，T は“既約”であるといってもよい。物理，即ち，力学系の理論では運動に対する不変量を扱う。 例えば，エネルギーは系の第1積分のひとつである。 従って，力学系を“エネルギー＝一定”なる超曲面で考えればよいのである。［詳細は第7講を参照せよ］

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

第2講 最大エルゴード定理

次の定理が以下の話では基本になる。 証明はいろいろあるが, 2通りの方法で示す。

Theorem 2.1 (Maximal ergodic theorem, 最大エルゴード定理)
$0<\mu(\Omega)\leqslant+\infty$, ただし, $\mu(\Omega)=+\infty$ の場合は μ は σ-finite とする。[i.e. $\Omega=\bigcup_{n\geqslant1}\Omega_n$, $\Omega_1,\Omega_2,\cdots$ は互に disjoint で $\mu(\Omega_n)<+\infty$ $(\forall n\geqslant1)$] T は準同型, $f(\omega)\in L^1$ とする。
この時,

$$f^*(\omega)\equiv\sup_{n\geqslant1}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(T^k\omega)$$

とおけば,

$$\int_{\{f^*(\omega)>0\}}f(\omega)\,d\mu\geqslant0$$

注. $f^*(\omega)$ を "maximal function" という。 実解析で出てくる。

[1°] Combinatorial proof of maximal ergodic theorem

(i) まず，$E_k \equiv \{ \sup_{1\le n\le k} \sum_{m=0}^{n-1} f(T^m\omega) > 0 \}$ $(k \geqq 1)$,
$E \equiv \{ \sup_{n\geqq 1} \sum_{m=0}^{n-1} f(T^m\omega) > 0 \}$ とおく時，$E_k \uparrow E$ $(k \uparrow +\infty)$,
$E = \{ f^*(\omega) > 0 \}$. 故に Lebesgue 積分の積分領域に関する連続性により，

$$\int_{E_k} f(\omega)\,d\mu \longrightarrow \int_E f(\omega)\,d\mu \quad (k \to \infty)$$

従って，定理の証明の為には次のことを示せば十分:

(*) $$\sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(\omega)\,d\mu \geqq 0 \qquad ({}^\forall n \geqq 1)$$

実際，(*)が示されたとすると，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(\omega)\,d\mu \geqq 0 \qquad ({}^\forall n \geqq 1)$$

ところで，一般に $a_n \to a$ より $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to a$ が従うから，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(\omega)\,d\mu \longrightarrow \int_E f(\omega)\,d\mu \quad (n \to \infty)$$

従って，$\int_{\{f^*(\omega) > 0\}} f(\omega)\,d\mu \geqq 0$ を得る。

(ii) さて，(*) の左辺を書き換えて，

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(\omega)\,d\mu = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_{n-j}} f(\omega)\,d\mu = \sum_{j=0}^{n-1} \int 1_{E_{n-j}}(\omega) f(\omega)\,d\mu$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int 1_{E_{n-j}}(T^j\omega) f(T^j\omega)\,d\mu \qquad [\,T\text{の保測性}\,]$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

ここで, $1_{E_{n-j}}(T^j\omega)=1 \iff T^j\omega\in E_{n-j} \iff \omega\in T^{-j}E_{n-j}$

に注意して, $F_j \equiv T^{-j}E_{n-j}$ とおけば, $1_{E_{n-j}}(T^j\omega)=1_{F_j}(\omega)$

故に,

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} f(\omega)d\mu = \int\left\{\sum_{j=0}^{n-1} 1_{F_j}(\omega) f(T^j\omega)\right\}d\mu$$

よって, (*)の証明の為には次のことを示せば十分:

(α) $$\sum_{j=0}^{n-1} 1_{F_j}(\omega) f(T^j\omega) \geqq 0 \qquad (\forall n\geqq 1)$$

(iii) ここで次のことに注意しよう:

$\omega\in E_k \iff$ [$f(\omega)$, $f(\omega)+f(T\omega)$, $\cdots$, $f(\omega)+f(T\omega)+\cdots+f(T^{k-1}\omega)$ の中に >0 となるものがある。]

故に, $\omega\in F_j \iff T^j\omega\in E_{n-j}$

$\iff$ [$f(T^j\omega)$, $f(T^j\omega)+f(T^{j+1}\omega)$, $\cdots$, $f(T^j\omega)+f(T^{j+1}\omega)+\cdots+f(T^{n-1}\omega)$ の中に >0 となるものがある。]

よって, (α) を示すには次の combinatorial lemma を示せば十分:

<u>Lemma</u> 実数列 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ が与えられている。その部分集合 $\mathcal{C}=\mathcal{C}(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})$ を次の条件により定義する:

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$c_j \in \mathcal{C} \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} c_j,\ c_j + c_{j+1},\ \cdots,\ c_j + c_{j+1} + \cdots + c_{n-1} \\ \text{の中に } >0 \text{ となるものがある。} \end{array}\right]$$

この時,

$$(\beta) \qquad \sum_{c_j \in \mathcal{C}(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})} c_j \geqq 0$$

定理の証明は, $c_j \equiv f(T^j\omega)$ とおけば, 上のLemmaが適用できて, (α) が示されることにより完結する。

<u>Proof of Lemma.</u> 数学的帰納法による。

$n=1$ の場合: "$c_0 \in \mathcal{C}(c_0) \Longleftrightarrow c_0 > 0$" より明白。

$n \geqq 2$ の場合: $n-1$ 以前まで成立すると仮定して, n 段階を示す。

(1°) $c_0 \notin \mathcal{C} \equiv \mathcal{C}(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})$ の時:

(β) の和の中に c_0 は現れないから

$$[(\beta) \text{ の左辺}] = \sum_{j \geqq 1 : c_j \in \mathcal{C}(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})} c_j$$

$$= \sum_{j \geqq 1 : c_j \in \mathcal{C}(c_1, c_2, \cdots, c_{n-1})} c_j \geqq 0 \quad [\text{帰納法の仮定}]$$

(2°) $c_0 \in \mathcal{C} \equiv \mathcal{C}(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})$ の時:

(i) $k \equiv \min\{0 \leqq i \leqq n-1 \ ; \ c_0 + c_1 + \cdots + c_i > 0\}$ とおく。

この時, $c_0, c_1, \cdots, c_k \in \mathcal{C}$

実際, 背理法で示す為に結論を否定する。 即ち, $0 \leq {}^\exists i \leq k$ s.t. $c_i \notin \mathcal{C}$ とする。 この時, $c_i + c_{i+1} + \cdots + c_k \leq 0$. また k の定義から, $c_0 + c_1 + \cdots + c_{i-1} \leq 0$. よって, これらを加えて, $c_0 + c_1 + \cdots + c_k \leq 0$. これは$k$の定義に反する。

(ii) 上記のkを用いて,

$$[(\beta)\text{の左辺}] = (c_0 + c_1 + \cdots + c_k) + \sum_{j \geq k+1\,:\, c_j \in \mathcal{C}(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})} c_j$$

$$= (c_0 + c_1 + \cdots + c_k) + \sum_{j \geq k+1\,:\, c_j \in \mathcal{C}(c_{k+1}, \cdots, c_{n-1})} c_j$$

ここで, kの定義から, (第1項) > 0. また数列 $c_{k+1}, \cdots, c_{n-1}$ ($n-1$ 個以下!) に対して, 帰納法の仮定を用いて, (第2項) ≥ 0. 故に, $[(\beta)\text{の左辺}] \geq 0$ [証終]

[2°] Garsia's proof of maximal ergodic theorem

formulation も一般化しておこう。

$L^1 \equiv \{ f \,;\, \int |f(\omega)| d\mu < \infty \}$ とする。

$U : L^1 \longrightarrow L^1$ は, 中への写像で, 次の3条件をみたすもの:

(1) U : additive, $[f, g \in L^1 \Longrightarrow U(f+g) = Uf + Ug]$

(2) U : positivity-preserving, $[f(\omega) \geq 0 \Longrightarrow Uf(\omega) \geq 0]$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

(3) U : contractive (圧縮性), $\left[\ \|Uf\|_1 \leqslant \|f\|_1\ \right]$

このような U は積分核による変換等，いろいろ具体例がある。我々の問題を扱うには

$$Uf(\omega) \equiv f(T\omega)$$

とすれば，上記の性質 (1) 〜 (3) をみたしている。contractive なことは実は $\|Uf\|_1 = \|f\|_1$ として成立している。この時，maximal ergodic theorem は次のように書かれる。

Theorem 2.1′ (Maximal ergodic theorem)

$f \in L^1$ に対して，

$$f^*(\omega) \equiv \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k f(\omega)$$

とおけば，

$$\int_{\{f^*(\omega) > 0\}} f(\omega)\, d\mu \geqslant 0$$

Proof. $f_0(\omega) \equiv 0$, $f_n(\omega) \equiv f(\omega) + Uf(\omega) + \cdots + U^{n-1} f(\omega)$ $(n \geqslant 1)$.

$F_N \equiv \max_{0 \leqslant n \leqslant N} f_n$ $(N \geqslant 0)$ とおけば，$f_n \in L^1$ だから，

$$F_N \geqslant 0 \qquad かつ \qquad F_N \in L^1$$

$0 \leqslant n \leqslant N$ とする時，$f_n \leqslant F_N$ だから U の positivity-preserving を用いて，$F_N - f_n \geqslant 0$ より，$U(F_N - f_n) \geqslant 0$ を得る。

ここで両辺に Uf_n を加えると，U の additivity から．$Uf_n \leqslant UF_N$ を得る。　故に，$f_{n+1} = f + Uf_n \leqslant f + UF_N \quad (0 \leqslant n \leqslant N)$．

故に

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant N} f_n \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant N+1} f_n \leqslant f + UF_N$$

また　$F_N(\omega) > 0$ の時，$\displaystyle \max_{1 \leqslant n \leqslant N} f_n(\omega) = \max_{0 \leqslant n \leqslant N} f_n(\omega) = F_N(\omega)$．

故に　$A \equiv A_N \equiv \{ F_N(\omega) > 0 \}$ とおく時，

$$f(\omega) \geqslant F_N(\omega) - UF_N(\omega) \qquad \text{on } A$$

ここで，$F_N(\omega) \equiv 0$ on A^c，および $UF_N \geqslant 0$ に注意して，

$$\int_A f(\omega) d\mu \geqslant \int_A F_N(\omega) d\mu - \int_A UF_N(\omega) d\mu = \int F_N(\omega) d\mu - \int UF_N(\omega) d\mu$$

更に U の contractive なことと，$F_N \geqslant 0$，$UF_N \geqslant 0$ とにより，

$$\int UF_N(\omega) d\mu \leqslant \int F_N(\omega) d\mu$$

故に，

$$\int_{A_N} f(\omega) d\mu = \int_{\{F_N(\omega) > 0\}} f(\omega) d\mu \geqslant 0 \qquad ({}^\forall N \geqslant 0)$$

ここで，　$A_N \uparrow \{ f^*(\omega) > 0 \}$　$(N \uparrow \infty)$ だから，$N \to \infty$ とすることにより，

$$\int_{\{f^*(\omega) > 0\}} f(\omega) d\mu \geqslant 0$$

を得る。［証終］

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

第3講　個別エルゴード定理（離散時間）

次の定理は Birkhoff の定理（1931）とも呼ばれる。

<u>Theorem 3.1</u>　（Individual ergodic theorem, 個別エルゴード定理）

(1)　$0<\mu(\Omega)\leqslant+\infty$, ただし, $\mu(\Omega)=+\infty$ の場合は μ は σ-finite とする。　T は準同型，　$f\in L^1$ とし,

$$V_n f(\omega)\equiv\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(T^k\omega)$$

とおく。

この時, 殆んどすべての ω に対して, 有限な極限値

$$\bar{f}(\omega)\equiv\lim_{n\to\infty}V_n f(\omega)$$

が存在する。　更に, $\bar{f}\in L^1$ かつ $\bar{f}$ は T-不変 $[\bar{f}(T\omega)=\bar{f}(\omega)]$

(2)　特に $0<\mu(\Omega)<+\infty$ の場合は,

$$\lim_{n\to\infty}\int|V_n f(\omega)-\bar{f}(\omega)|\,d\mu=0$$

即ち,　$V_n f\longrightarrow\bar{f}$　$(n\to\infty)$（L^1 での平均収束）, 従って

$$\int\bar{f}(\omega)\,d\mu=\int f(\omega)\,d\mu$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

[1°] Proof of Theorem 3.1 (1)

(i) まず, $\limsup_{n\to\infty} V_n f(\omega)$, $\liminf_{n\to\infty} V_n f(\omega)$ はいずれも T-不変（測度 0 の例外点なしで）となる。

実際, $V_n f(\omega)$ の定義から, 各 ω に対して,

$$V_n f(T\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(T^k\omega) = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\left\{\sum_{k=0}^{n} f(T^k\omega) - f(\omega)\right\}$$

$$= \frac{n+1}{n} V_{n+1} f(\omega) - \frac{1}{n} f(\omega)$$

故に. $\limsup_{n\to\infty} V_n f(T\omega) = \limsup_{n\to\infty} V_n f(\omega)$

（ $\pm\infty = \pm\infty$ の場合を含む）

(ii) 次に, 任意の実数 $a < b$ に対して,

$$Y \equiv Y_{ab} \equiv \left\{ \liminf_{n\to\infty} V_n f(\omega) < a < b < \limsup_{n\to\infty} V_n f(\omega) \right\}$$ とおく時,

Y は T-不変集合 [Exercise. Y は T-不変関数により定義されていることに注意], 更に, $\mu(Y) = 0$.

実際, ① $b > 0$ の時, $\mu(Y) < +\infty$ なること: Ω 上で μ が σ-finite だから次のように集合 C を決めることができる。 $\mu(Y) < +\infty$ の時は $C \equiv Y$; 一般には $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$, $\mu(Y_k) < +\infty$ だから $C \equiv \bigcup_{k=1}^{n} Y_k$. この時, $g \equiv 1_C$ とおけば, $\mu(C) < +\infty$ より, $g \in L^1$. ここで最大エルゴード定理 (Theorem 2.1) の証明[1°]で

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

述べたように

$$\left\{\sup_{n\geqq 1}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) > 0\right\} = \left\{f^*(\omega) > 0\right\} \quad (\equiv E_f \text{ とおく.})$$

従って，$f - bg \in L^1$ に注意して，$E_{f-bg} \equiv F$ とおく時，最大エルゴード定理により，

(*) $$\int_F \{f(\omega) - bg(\omega)\} d\mu \geqq 0$$

ところで $\forall \omega \in Y$ に対して，$b < \limsup_{n\to\infty} V_n f(\omega)$ 従って，

$$\sup_{n\geqq 1}\sum_{k=0}^{n-1}\{f(T^k\omega) - bg(T^k\omega)\} \geqq \sup_{n\geqq 1}\sum_{k=0}^{n-1}\{f(T^k\omega) - b\} > 0$$

だから $\omega \in F$. 故に $Y \subset F$，更に $C \subset Y \subset F$.

故に (*) から

$$\int_F f(\omega)d\mu \geqq b\int_F g(\omega)d\mu = b\int_C 1\,d\mu = b\cdot\mu(C)$$

故に， $$b\cdot\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} Y_k\right) \leqq \int_F |f(\omega)|d\mu$$

ここで， $\bigcup_{k=1}^{n} Y_k \uparrow Y \quad (\text{as } n\uparrow+\infty)$ だから $n\to\infty$ として，

$$b\cdot\mu(Y) \leqq \int |f(\omega)|d\mu < +\infty$$

よって，$b>0$ から $\mu(Y) < +\infty$，従って $Y = C$ を得る。

② <u>$a<0<b$ の時 $\mu(Y)=0$ なること</u>: Y は T-不変集合

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

だから，第1講で述べたように T は Y 上に reduce される。そこで T を Y 上に制限して考えると，$Y=C$ だから，$E_{f-b}=Y$.
ここで，$f(\omega)-b \in L^1(Y)$ だから，これに対して最大エルゴード定理を適用すると，

$$\int_Y \{f(\omega)-b\}d\mu \geqq 0$$

従って，大小関係についての duality により，

$$\int_Y \{a-f(\omega)\}d\mu \geqq 0 \qquad \text{[Exercise]}$$

これらを辺ごとに加えると，$\int_Y (a-b)d\mu \geqq 0$ ，従って，$(a-b)\cdot\mu(Y)\geqq 0$. ここで $a<b$ を用いて $\mu(Y)=0$ を得る。

③ $0<a<b$ の時，$\mu(Y)=0$ なること： f, a, b の代りにそれぞれ，$f'=f-\frac{a+b}{2}$, $a'=a-\frac{a+b}{2}$, $b'=b-\frac{a+b}{2}$ を考えることにより，上の議論が適用できて，$\mu(Y)=0$ を得る。

④ $a<b=0$ の時，$\mu(Y)=0$ なること： $b_n \downarrow 0$ なる数列をとる時，$Y_{ab_n}\uparrow Y_{a0}$ (as $n\uparrow\infty$) だから，$\mu(Y_{a0})=\lim_{n\to\infty}\mu(Y_{ab_n})=0$

⑤ $a<b\leqq 0$ の場合も上の結果に帰着して，$\mu(Y)=0$ を得る。

(iii) 殆んどすべての ω に対して，有限または無限大の極限値

$$\bar{f}(\omega)\equiv\lim_{n\to\infty}V_n f(\omega)$$

が存在する。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

実際，$A \equiv \{$有限または無限大の極限値 $\lim_{n\to\infty} V_n f(\omega)$ が存在$\}$

とおく時，

$$A^c = \{ \liminf_{n\to\infty} V_n f(\omega) < \limsup_{n\to\infty} V_n f(\omega) \}$$
$$= \bigcup_{\substack{r<s \\ r,s\in\mathbb{Q}}} Y_{rs}$$

ここで，$\{Y_{rs}\}_{\substack{r<s \\ r,s\in\mathbb{Q}}}$ は可算無限個の集合からなり $\mu(Y_{rs})=0$ だから，$\mu(A^c)=0$. を得る。

(iv) 更に殆んどすべての ω に対して $\bar{f}(\omega)$ が有限であることを示すには，$\bar{f} \in L^1$ であることを示せば十分。　ところで，V_n の圧縮性より，$\|V_n f\|_1 \leqq \|f\|_1$，　即ち，

$$\int |V_n f(\omega)| d\mu \leqq \int |f(\omega)| d\mu \qquad (\forall n \geqq 1)$$

従って，Fatou の補題（後述）を用いて，

$$\int \liminf_{n\to\infty} |V_n f(\omega)| d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int |V_n f(\omega)| d\mu$$

であり，殆んどすべての ω に対して，$\lim_{n\to\infty} |V_n f(\omega)|$ が存在するから，

$$\int \lim_{n\to\infty} |V_n f(\omega)| d\mu \leqq \int |f(\omega)| d\mu < +\infty$$

故に，$\int |\bar{f}(\omega)| d\mu < +\infty$，即ち $\bar{f} \in L^1$ を得る。

(v) 最後に，$\bar{f}$ は T-不変である。　即ち，$\bar{f}(T\omega) = \bar{f}(\omega)$，

[両辺とも存在して等しい。 $\pm\infty = \pm\infty$ の場合を含む。]

実際, $\liminf_{n\to\infty} V_n f(\omega)$, $\limsup_{n\to\infty} V_n f(\omega)$ の T-不変性により示される。

[Exercise] [Theorem 3.1(1)の証終]

Fatou の Lemma (の一部分)

$0 \leqq f_n(\omega) \in L^1 \quad (n \geqq 1)$ とする時,

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega)\, d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int f_n(\omega)\, d\mu$$

Proof. $\forall k \geqq 1$ に対して, $0 \leqq \inf_{n \geqq k} f_n(\omega) \leqq f_k(\omega) \in L^1$

故に, $\inf_{n\geqq k} f_n(\omega) \in L^1$ かつ, $k \uparrow \infty$ の時, $\uparrow \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega)$

一方,

$$\int \inf_{n\geqq k} f_n(\omega)\, d\mu \leqq \int f_k(\omega)\, d\mu$$

の両辺で $\liminf_{k\to\infty}$ をとると,

$$\liminf_{k\to\infty} \int \inf_{n\geqq k} f_n(\omega)\, d\mu \leqq \liminf_{k\to\infty} \int f_k(\omega)\, d\mu$$

ここで, $[\text{左辺}] = \lim_{k\to\infty} \int \inf_{n\geqq k} f_n(\omega)\, d\mu = \int \lim_{k\to\infty} \left(\inf_{n\geqq k} f_n(\omega) \right) d\mu$

$$= \int \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega)\, d\mu$$

よって, 求める不等式を得る。 [証終]

[2°] Proof of Theorem 3.1 (2)

(i) まず, $\|V_n f\|_1 \leqslant \|f\|_1$

実際, $\int |V_n f(\omega)| d\mu \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int |f(T^k\omega)| d\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int |f(\omega)| d\mu$

$$= \int |f(\omega)| d\mu \quad \text{より.}$$

(ii) 次に, $V_n f \longrightarrow \overline{f}$ $(n\to\infty)$ (L^1 での平均収束)

実際, $a>0$ に対して, $f_1(\omega) \equiv \begin{cases} f(\omega) & \text{if } |f(\omega)| \geqslant a \\ 0 & \text{if } |f(\omega)| < a \end{cases}$,

$f_0(\omega) \equiv f(\omega) - f_1(\omega)$ とおくと, $f_0(\omega) f_1(\omega) = 0$, $f(\omega) = f_0(\omega) + f_1(\omega)$.

また $\{|f(\omega)| \geqslant a\} \downarrow \phi$ (as $a\uparrow\infty$) だから,

$$\int |f_1(\omega)| d\mu = \int_{\{|f(\omega)|\geqslant a\}} |f(\omega)| d\mu \downarrow 0 \quad (\text{as } a\uparrow\infty)$$

そこで, 予め与えられた $\varepsilon>0$ に対して, $a>0$ を十分大きくとって,

$$\int |f_1(\omega)| d\mu \leqslant \varepsilon$$

をみたすようにしておく。 この時, f_0, f_1 に定理前半を適用すると,

$$\lim_{n\to\infty} V_n f_0(\omega) = \overline{f}_0(\omega), \qquad \lim_{n\to\infty} V_n f_1(\omega) = \overline{f}_1(\omega),$$

$$\overline{f}(\omega) = \overline{f}_0(\omega) + \overline{f}_1(\omega),$$

また, $|f_0(\omega)| < a$, $|V_n f_0(\omega)| < a$ $({}^\forall n \geqslant 1)$ だから $|\overline{f}_0(\omega)| \leqslant a$.

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

更に，定理前半の証明の中で

$$\int |\bar{f}(\omega)| d\mu \leqq \int |f(\omega)| d\mu$$

が示されたことを想起しよう。　これから，

$$\int |V_n f - \bar{f}| d\mu = \int |V_n f_0 + V_n f_1 - \bar{f}_0 - \bar{f}_1| d\mu$$

$$\leqq \int |V_n f_0 - \bar{f}_0| d\mu + \int |V_n f_1| d\mu + \int |\bar{f}_1| d\mu$$

$$\leqq \int g_n d\mu + 2\int |f_1| d\mu \leqq \int g_n d\mu + 2\varepsilon ,$$

ただし，$g_n(\omega) \equiv |V_n f_0(\omega) - \bar{f}_0(\omega)|$.　この時，$\lim_{n\to\infty} g_n(\omega) = 0$，$|g_n(\omega)| \leqq 2a$，および $\mu(\Omega) < +\infty$ に注意して，Lebesgue の収束定理を用いると，

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = 0$$

よって，　$\lim_{n\to\infty} \int |V_n f - \bar{f}| d\mu = 0$ を得る。

(iii)　ここで，定理前半で示したのは，$V_n f \longrightarrow \bar{f}$ $(n\to\infty)$ が点収束(a.e.)，即ち 概収束 の意味で成立つということであって，上では，これと異なるタイプの収束が示されたことを指摘しておこう。

(iv)　さて，$\left| \int V_n f d\mu - \int \bar{f} d\mu \right| = \left| \int (V_n f - \bar{f}) d\mu \right| \leqq \int |V_n f - \bar{f}| d\mu$,

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

更に,
$$\int V_n f\,d\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int f(T^k\omega)d\mu$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int f(\omega)d\mu = \int f(\omega)d\mu$$

従って,(ii) とこれらを用いて, $\int \bar{f}\,d\mu = \int f\,d\mu$ を得る。

[Theorem 3.1(2)の証終]

<u>Theorem 3.2</u> $0<\mu(\Omega)\leqslant+\infty$, ただし, $\mu(\Omega)=+\infty$ の場合は, μ は σ-finite とする。 T は準同型, $f\in L^1$ とする。

この時, T がエルゴード的ならば, 前定理の $\bar{f}$ は定数関数 (mod. 0) であって, 次式で与えられる:

(1) $\bar{f}(\omega)\equiv 0$ [$\mu(\Omega)=+\infty$ の場合]

(2) $\bar{f}(\omega)=\dfrac{1}{\mu(\Omega)}\displaystyle\int f(\omega)d\mu$ [$\mu(\Omega)<+\infty$ の場合]

<u>Proof.</u> (i) 一般に T がエルゴード的ならば, T-不変関数 $g(\omega)$ は定数関数 (mod. 0) である。

<u>実際</u>, $g(\omega)$ が定数関数(mod. 0) ではないと仮定しよう。この時, 或る実数 a をとって, $\mu(g(\omega)\geqslant a)\cdot\mu(g(\omega)<a)\neq 0$ とできる。 また T-不変関数で定められている集合は T-不変なることから, 集合 $A\equiv\{g(\omega)\geqslant a\}$, $A^c\equiv\{g(\omega)<a\}$ はいずれも

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

T-不変である。 ［ $A=\{1_{[a,\infty)}(g(\omega))=1\}$ であり，$g(\omega)$ がT-不変ゆえその合成関数もT-不変.］ よって次の分解を得る：

$$\Omega=A\cup A^c\ ,\quad \mu(A)>0,\ \mu(A^c)>0\ ,\quad A,\ A^c : T\text{-不変}$$

これは，Tがエルゴード的なることに反する。

(ii) 前定理(1)により $\bar{f}(\omega)$ はT-不変だから，上で述べたことにより，或る実数 c に対して，

$$\bar{f}(\omega)=c \qquad (\mathrm{mod}.\ 0)$$

$\mu(\Omega)=+\infty$ の場合は，$\bar{f}\in L^1$ より $c=0$ 従って，$\bar{f}(\omega)\equiv 0$ を得る。

$\mu(\Omega)<+\infty$ の場合は，前定理(2)により，

$$\int f(\omega)d\mu=\int\bar{f}(\omega)d\mu=\int c\,d\mu=c\cdot\mu(\Omega)$$

故に， $$\bar{f}(\omega)=c=\frac{1}{\mu(\Omega)}\int f(\omega)d\mu.$$ ［証終］

<u>Remark.</u> 上の定理で次のことが示された：

$\mu(\Omega)<+\infty$，Tはエルゴード的，$f\in L^1$ とする時，殆んどすべての ω に対して，

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(T^k\omega)=\frac{1}{\mu(\Omega)}\int f(\omega)d\mu$$

この等式は次のように説明される。$\{T^n\omega\ ;\ 0\leqq n<+\infty\}$ を<u>ω から出発した軌道</u>と考える時，等式(*)を言い換えると，

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

"軌道上の f の時間平均" ＝ "f の空間平均"

経験的立場から言えば，μ は判っていなくて，左辺の時間平均が現実面の data として与えられることが多い。従って，上記の結果(*)は統計的処理においては重要である。物理におけるエルゴード仮説 ["時間平均"＝"空間平均"] が，上の定理では数学的に証明された。実際的問題（微分方程式等）ではこれらの定理が適用できる為の前提条件がみたされることを確めればよい。また，T, Ω が与えられていて μ が判っていないことが多い。μ をみつけることは難しいが統計的処理により，μ をみつけることが重要である。我々は上の定理では μ の存在を出発点にして議論したことに注意しよう。これらの点で，この1931年の Birkhoff の定理は非常に重要で，今尚，価値があると言える。

自己同型 T に対しては軌道 $\{T^n\omega\ ;\ -\infty<n<+\infty\}$ を考える時，将来の時間平均は過去の時間平均に等しい。即ち次のことが成立つ。

Theorem 3.3　$0<\mu(\Omega)<+\infty$，T は自己同型，$f\in L^1$ とし，$\bar{f}$ は Theorem 3.1 で与えられた関数とする。

この時，

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(T^{-k}\omega)=\bar{f}(\omega)$$ （概収束）

(2) $$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^{-k}\omega) \longrightarrow \bar{f}(\omega) \quad (n\to\infty)$$ (L^1-平均収束)

Proof. Theorem 3.1(1) でTの代りに T^{-1} を考えることにより殆んどすべての ω に対して，有限な極限値

$$g(\omega) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^{-k}\omega)$$

が存在し，g は T^{-1}-不変関数となる。ところで "A : T-不変 $\Longleftrightarrow$ A : T^{-1}-不変" [Tは1対1対応だから，"$T^{-1}A = A \Longleftrightarrow A = TA$"] だから，$g$ は T-不変関数である。故に，$g(\omega) = g(T\omega) = g(T^k\omega)$ $({}^\forall k \geq 1)$. 更に Theorem 3.1(2)より，

$$\int \left| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^{-k}\omega) - g(\omega) \right| d\mu \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

従って，$g(\omega) = \bar{f}(\omega)$ (mod. 0) を示せば，(1), (2) が示される。

$h_n(\omega) \equiv \left| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^{-k}\omega) - g(\omega) \right|$ とおくと，$\int h_n(\omega) d\mu \to 0$.

$$\int h_n(\omega) d\mu = \int h_n(T^{n-1}\omega) d\mu \qquad [\text{Tの保測性}]$$

$$= \int \left| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^{-k}(T^{n-1}\omega)) - g(T^{n-1}\omega) \right| d\mu$$

$$= \int \left| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^{(n-1)-k}\omega) - g(\omega) \right| d\mu$$

$$= \int \left| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^{k}\omega) - g(\omega) \right| d\mu$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$= \int |V_n f(\omega) - g(\omega)| d\mu$$

故に，
$$\int |V_n f(\omega) - g(\omega)| d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

一方，Theorem3.1(2)により，$\int |V_n f(\omega) - \bar{f}(\omega)| d\mu \to 0 \ (n \to \infty)$.
よって，L^1-極限の一意性から，$g(\omega) = \bar{f}(\omega) \ (\mathrm{mod}.\ 0)$.［証終］

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

第4講　個別エルゴード定理（連続時間）

今迄に述べた離散時間の場合の個別エルゴード定理においては，T を Ω 上の自己同型，n を離散時間として，自己同型の半群（または群）

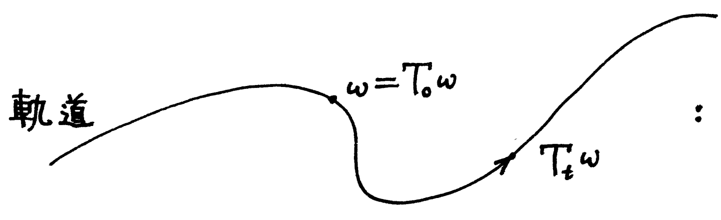
$$\{T^n\ ;\ n \geq 0\} \qquad [\text{または } \{T^n\ ;\ -\infty < n < +\infty\}]$$

を考えてきた。　このanalogyとして，t を連続時間とし，$t \geq 0$ または $-\infty < t < +\infty$ の場合を考えよう。　即ち，各 t に対して T_t は Ω 上の自己同型［T_0 は恒等変換］であって，

$$\{T_t\ ;\ -\infty < t < +\infty\} \equiv \{T_t\} \text{ は } t \text{ をパラメーターとする}$$

$$\text{自己同型の群}\ [\text{ i.e. }\ T_s T_t = T_{s+t} \quad (\forall s, t)\ ]$$

となるものを考える。　この場合は，離散時間の場合と異なり，基本となる変換 T がない。　$\{T_t\}$ に対応する現象としては微分方程式の解によって与えられるものがある。　$T_t\omega$ は ω を初期値とする微分方程式の解により与えられ，ω から出発して流れていく運動を記述している。　［第7講，参照］



：“flow”

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

連続時間の場合にも，離散時間の場合の Theorem 3.2 の analogy として次の命題が成立するものと予想される： $f \in L^1$ に対して軌道上の f の時間平均を

$$V_T f(\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T f(T_t\omega)\,dt \qquad (T>0 \text{ or } T<0)$$

と考える時，$\{T_t\}$ が"エルゴード的"ならば，$\mu(\Omega)<\infty$ の場合，

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t\omega)\,dt = \frac{1}{\mu(\Omega)}\int f(\omega)\,d\mu \qquad (a.e.\ \omega)$$

これは実際に成立する。 $\{T_t\}$ のエルゴード性の定義を与えよう。

<u>定義</u>　$A \in \mathcal{B}$ が <u>$\{T_t\}$-不変集合</u>［または単に，<u>不変集合</u>］

$\Longleftrightarrow$

$$T_t A = A \qquad (-\infty < {}^\forall t < +\infty)$$

<u>定義</u>　$\{T_t\}$ ： <u>エルゴード的</u>

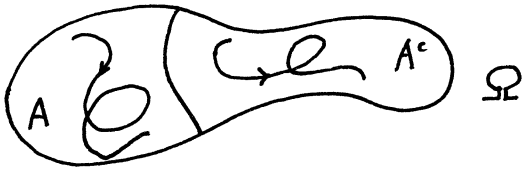
$\Longleftrightarrow$

$A \in \mathcal{B}$ が $\{T_t\}$-不変集合ならば，$\mu(A)=0$ または $\mu(A^c)=0$

A が $\{T_t\}$-不変であるとは，A および A^c をそれぞれ1つの空間と考えてよいことをいう。　運動，即ち軌道は A および

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

A^c の中で閉じている。［第1講 参照］



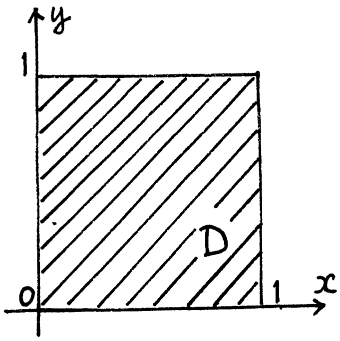
<u>問題点</u> (1) $g(t,\omega) \equiv f(T_t\omega)$ とおく時，変数 t についての積分 $\int_0^T g(t,\omega)dt$ はうまくいくか？ ―― $\{T_t\}$ に或る付加条件を課さないと，この積分は正当化できない。

(2) ω の関数 $V_T f(\omega) \equiv \frac{1}{T}\int_0^T g(t,\omega)dt$ が $\mathcal{B}$-可測なること，即ち μ で計量できること，が必要である。

$T_t\omega$ が微分方程式の解により与えられる場合は，Ω は位相空間であり，$T_t\omega$ が (t,ω) について連続，即ち，写像

$$(-\infty,+\infty)\times\Omega \ni (t,\omega) \longrightarrow T_t\omega \in \Omega$$

が連続であって，上で指摘された問題は解決される。しかし，一般の問題ではこのことが保障されるとは限らない。被積分関数 $g(t,\omega)$ は２つのパラメーターに従うので，Fubini の定理が適用できる形で問題を処理する。



<u>２変数関数の積分</u>　$D \equiv [0,1]\times[0,1]$

領域 D 上の２変数 (x,y) の関数を $f(x,y)$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$f(x,y)$が連続の場合は次の等式が成立つ：

(*) $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy$$

これは，$f(x,y)$の連続性より簡単に示される。　$f(x,y)$が連続でない場合は問題が生じる。　ところで，Lebesgue測度は，$d\lambda = dx \cdot dy$ であり，$d\lambda$ に関するLebesgue積分を考えると，被積分関数のクラスも異ってくる。　$f(x,y)$が連続の場合は，$a < f(x,y) < b$ なる(x,y)はDの開集合であり，この時，積分(*)はDの開集合のみに関する情報により定義される。　$f(x,y)$がBorel可測の場合は，$a < f(x,y) < b$ なる(x,y)はDのBorel集合であり，この集合は測度λで“測れる”。　従って$d\lambda$に関する$f(x,y)$のLebesgue積分が定義される。　この時，測度空間

(D , DのBorel集合全体のσ-algebra , λ)

を考えると，Lebesgue積分の意味で(*)と同様の等式が示される：

(**) $$\iint_D f(x,y)\,d\lambda = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy$$

この関係式を示すのは講義をする方も聴く方も余りおもしろくない話になる。　この場合の“面積”は“縦×横”ではなく，領域内の“粒々”をcountしていく立場でとらえる。　しかしながら，特に長方形 の面積は，$\lambda($ $)$＝“縦×横”である。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

即ち，x軸上の測度を $dx=d\lambda_x$，y軸上の測度を $dy=d\lambda_y$ と表わす時，λ()$=\lambda_x$(横)$\times\lambda_y$(縦) となる。

2変数関数の積分(我々の問題)

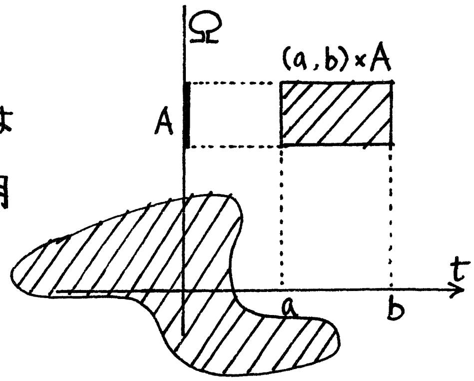
上で行なった考察を我々の問題の $g(t,\omega)$ の積分に適用しよう。$(-\infty,+\infty)$ 上の測度は dt，Ω 上の測度は $d\mu$ として与えられている。この時，直積空間 $(-\infty,+\infty)\times\Omega$ 上の測度 ν を次のように定義する：$(a,b)\times A$，$[a<b,\ A\in\mathcal{B}]$ に対しては，

$$\nu((a,b)\times A)\equiv(b-a)\cdot\mu(A)$$

$(a,b)\times A$ の形の集合全体から σ-algebra をつくる。その σ-algebra 上で測度 ν が定義される。この時 ν は記号的に

$$d\nu=dt\cdot d\mu$$

と表わされる。目的の Fubini の定理は次のように述べられる。この定理の証明は難しい。



Fubiniの定理 $g(t,\omega)$ を ν-可積分とする時，

$$\int_{(-\infty,+\infty)\times\Omega} g(t,\omega)d\nu=\int_\Omega d\mu\int_{-\infty}^{+\infty} g(t,\omega)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} dt\int_\Omega g(t,\omega)d\mu$$

[3つの量は，どれかが存在すれば皆存在して，相等しい]

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

積分 $\int_0^T f(T_t\omega)dt$ の正当化

可測関数［ $\mu(\Omega)=1$ の場合は，確率変数］ $f(\omega)$ が与えられていて，次の条件をみたすものと仮定する：

$$g(t,\omega)\equiv f(T_t\omega)\ :\ (t,\omega)\text{-可測}\ \Big[\overset{i.e.}{d\nu}(=dt\cdot d\mu)\text{-可測}\Big]$$

この条件は一般には保証されないが，例えば $\{T_t\}$ が，微分方程式に対応する場合のように，Euclid 空間上の運動で，$T_t\omega$ が (t,ω) について連続の時は確かに成立つ。　今，更に $f(\omega)\in L^1(d\mu)$ とすると，Fubini の定理により，任意の a,b $(-\infty<a<b<+\infty)$ に対して，

$$\int_{[a,b]\times\Omega}|f(T_t\omega)|dt\cdot d\mu=\int_a^b dt\int_\Omega |f(T_t\omega)|d\mu$$
$$=\int_a^b dt\int_\Omega |f(\omega)|d\mu=(b-a)\cdot\|f\|_1<+\infty.$$

故に，再び Fubini の定理により，

$$\int_\Omega d\mu\int_a^b f(T_t\omega)dt=\int_a^b dt\int_\Omega f(T_t\omega)d\mu=\int_{[a,b]\times\Omega}f(T_t\omega)dt\cdot d\mu$$

また，$\int_a^b f(T_t\omega)dt$ は殆んどすべての ω に対して，有限値として存在し，これは ω の可測関数になっている。　［このことも Fubini の定理の「読み方」から得られる。］

以上の準備に基き，離散時間の場合の応用として，連続時間の場合の個別エルゴード定理が得られる。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

Theorem 4.1 (個別エルゴード定理)

$\{T_t\}_{-\infty<t<+\infty}$ を自己同型の群とする。

(1) $0<\mu(\Omega)\leqq+\infty$, ただし, $\mu(\Omega)=+\infty$ の場合は μ は σ-finite とする。 $f\in L^1$ とし,

$$V_T f(\omega)\equiv\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t\omega)dt$$ とおく。

この時, 殆んどすべての ω に対して, 有限な極限値

$$\bar{f}(\omega)\equiv\lim_{T\to+\infty}V_T f(\omega)$$

が存在する。 更に, $\bar{f}\in L^1$, $\|\bar{f}\|_1\leqq\|f\|_1$ かつ $\bar{f}$ は $\{T_t\}$-不変。

(2) 特に $0<\mu(\Omega)<+\infty$ の場合は,

$$\int\bar{f}(\omega)d\mu=\int f(\omega)d\mu,$$ かつ,

$$V_T f\longrightarrow\bar{f}$$ (L^1-平均収束)

(3) 更に $\{T_t\}$ がエルゴード的ならば, (1),(2) を通じて $\bar{f}$ は定数関数となる。 より詳しく言えば,

$$\begin{cases}\mu(\Omega)=+\infty \text{ の時は,} & \bar{f}(\omega)\equiv 0\\ \mu(\Omega)<+\infty \text{ の時は,} & \bar{f}(\omega)=\dfrac{1}{\mu(\Omega)}\displaystyle\int f(\omega)d\mu\end{cases}$$

注. $T\to+\infty$ の代りに $T\to-\infty$ としても同じ結果が成立つ。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

<u>*Proof.*</u> 証明の方針は Theorem 3.1 に帰着させることにあり，主要な事実のみ示す。[残りは，<u>Exercise</u>] 分解 $f(\omega)=f^+(\omega)-f^-(\omega)$, $f^\pm \geqq 0$，を用いることにより，$f(\omega)\geqq 0$ の場合のみ示せば十分。ただし，$f^\pm \equiv (|f| \pm f)/2$.

(i) ① まず，$A_n \equiv \left\{\omega \,;\, \int_{-n}^{n} f(T_t\omega)dt < +\infty\right\}$ $(n \geqq 1)$，$\Omega_0 \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく。 この時，Fubini の定理により，$\mu(A_n^c)=0$ 従って，$\mu(\Omega_0^c)=0$. 即ち，$\Omega=\Omega_0$ (mod. 0)

② Ω_0 は $\{T_t\}$-不変，i.e. $T_s\Omega_0=\Omega_0$ $(-\infty < {}^\forall s < +\infty)$

<u>実際</u>，容易に示されるように，

$$\Omega_0 = \left\{\omega \,;\, \int_a^b f(T_t\omega)dt < +\infty \quad \text{for } -\infty < a < b < +\infty\right\}$$

従って，$-\infty < {}^\forall s < +\infty$ に対して

$$T_s\Omega_0 \ni \omega \iff \Omega_0 \ni T_{-s}\omega$$

$$\iff (*) \int_{a-s}^{b-s} f(T_t\omega)dt < +\infty \quad \text{for } -\infty < a < b < +\infty$$

なぜなら，$\int_a^b f(T_t(T_{-s}\omega))dt = \int_a^b f(T_{t-s}\omega)dt = \int_{a-s}^{b-s} f(T_t\omega)dt$ より。

今，${}^\forall\omega \in \Omega_0$ に対して $(*)$ が成立つから $\omega \in T_s\Omega_0$

故に，$\Omega_0 \subset T_s\Omega_0 \quad (-\infty < {}^\forall s < +\infty)$

ここで s の代りに $-s$ とおいて，$\Omega_0 \subset T_{-s}\Omega_0$ 従って $T_s\Omega_0 \subset \Omega_0$

故に，$T_s\Omega_0 = \Omega_0 \quad (-\infty < {}^\forall s < +\infty)$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

③ よって. Ω_0 を Ω とみて差しつかえないから,

$$\forall \omega \in \Omega \text{ に対して, } \int_a^b f(T_t\omega)dt < +\infty \quad \text{for } -\infty < a < b < +\infty$$

が成立っていると仮定することができる。

(ii) 今, $n \leqslant T < n+1 \quad (0 \leqslant n < +\infty)$ に対して

$$\frac{1}{n+1}\int_0^n f(T_t\omega)dt \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T f(T_t\omega)dt \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{n+1} f(T_t\omega)dt$$

が成立つことに注意して, $n \to \infty$ の時の極限をとりたい。

$$[\text{左端}] = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(T_t\omega)dt$$

$$= \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f(T_t(T_k\omega))dt$$

ここで $\quad g(\omega) \equiv \int_0^1 f(T_t\omega)dt \quad$ とおくと,

$$\int g(\omega)d\mu = \int_0^1 dt\int f(T_t\omega)d\mu = \int f(\omega)d\mu < +\infty$$

従って, $g \in L^1$, 更に, $T_k = T_1^k$, T_1 は自己同型, だから,
g と T_1 に対して Theorem 3.1 (1) を適用して, $n \to \infty$ の時,

$$[\text{左端}] = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(T_1^k\omega) = \frac{n}{n+1}V_n g(\omega) \longrightarrow {}^\exists\bar{g}(\omega)$$

ここで極限値 $\bar{g}(\omega)$ は殆んどすべての ω に対して有限であり, $\bar{g} \in L^1$
この $\bar{g}(\omega)$ を $\bar{f}(\omega)$ と書こう : $\bar{f} \in L^1$.

全く同様に，［右端］も同じ極限値に収束するから，

$$\lim_{T\to\infty} V_T f(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(T_t\omega)dt = \bar{f}(\omega) \quad : 存在 \quad (\text{mod}.0)$$

(iii) $\bar{f}$ は $\{T_t\}$-不変, i.e. $\bar{f}(T_s\omega) = \bar{f}(\omega) \quad (-\infty < {}^\forall s < +\infty)$

<u>実際</u>, ${}^\forall s > 0$ を固定する。（ $s<0$ としても同様 ）

$$V_T f(T_s\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T f(T_t(T_s\omega))dt = \frac{1}{T}\int_s^{T+s} f(T_t\omega)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{T+s} f(T_t\omega)dt - \frac{1}{T}\int_0^s f(T_t\omega)dt$$

ここで，$T\to+\infty$ の時，［第1項］$\to \bar{f}(\omega)$，［第2項］$\to 0$ だから，

$$\lim_{T\to+\infty} V_T f(T_s\omega) = \bar{f}(\omega) \quad また \quad \lim_{T\to+\infty} V_T f(T_s\omega) = \bar{f}(T_s\omega)$$

よって，
$$\bar{f}(T_s\omega) = \bar{f}(\omega) \qquad (-\infty < {}^\forall s < +\infty)$$

(iv) $0 < \mu(\Omega) < +\infty$ の場合，Theorem 3.1 (2) により，(2) の前半を得る：

$$\int \bar{f}(\omega)d\mu = \int \bar{g}(\omega)d\mu = \int g(\omega)d\mu = \int f(\omega)d\mu \qquad [証終]$$

<u>Remark</u>. この定理の証明は離散時間の場合の結果に帰着されたが，他の定理では連続時間に固有の難しさが出てくる。

<u>Exercise</u>. $0 < \mu(\Omega) < +\infty$ とし，T は準同型とする。この時，

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

Tがエルゴード的である為には，次の２条件が成立つことが必要十分である：

$$\begin{cases} (1) & L^1 \supset {}^{\exists}E \ \text{ such that } \ E \text{ は } L^1 \text{ で稠密,} \\ & \left[\text{i.e. } {}^{\forall}f \in L^1,\ {}^{\forall}\varepsilon > 0 \text{ に対して } {}^{\exists}f_\varepsilon \in E \ \text{ s.t. } \|f - f_\varepsilon\|_1 < \varepsilon\right] \\ (2) & {}^{\forall}f \in E \text{ に対して, } \ \bar{f}(\omega) = \text{定数} \quad (\text{mod. } 0) \end{cases}$$

<u>ヒント</u>. [必要性] Theorem 3.2 で示した。 [十分性] (1),(2) から，$E = L^1$ とおいても，(1),(2) が成立つことが示され，Tのエルゴード性が導かれる。

[第1講～第4講 ＝ 1979年6月20日～6月22日]

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

第5講　Birkhoff の定理への補足

以下，$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ は probability space，即ち，measure space であって，$\mu(\Omega)=1$ をみたすものと仮定する。また，T は Ω 上の endomorphism（準同型）とする。空間 Ω 上の関数 $f(\omega)$ の積分を $E[f]\equiv\int f(\omega)d\mu$ と表わし，f の平均と呼ぶ。この時，第3講で次のことが示された。

Birkhoff の定理　$f\in L^1$ に対して $V_n f(\omega)\equiv\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega)$ とおく時，次の条件をみたす $\bar{f}\in L^1$ が存在する：

(1)　$V_n f(\omega)\longrightarrow \bar{f}(\omega)\ (n\to\infty)$　(a.e.)　かつ L^1-平均収束

(2)　$E[\bar{f}]=E[f]$

(3)　特に，T が ergodic（エルゴード的）ならば

$$\bar{f}(\omega)\equiv(\text{constant function})=E[f]\qquad(\text{a.e.})$$

今，$\mathcal{I}\equiv\{T\text{-invariant sets の全体}\}$ とおく時，$\mathcal{I}$ は自ずから $\mathcal{B}$ の sub-σ-algebra となる。そして，一般の endomorphism T に対しても，条件付平均の概念を用いることにより，定理の(3)に相当する結果を与えることができる。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

Theorem 5.1（Birkhoffの定理への補足）

$$\bar{f} = E[f \mid \mathcal{J}]$$

ここで，$f \in L^1$ に対して，f の $\mathcal{J}$ に関する条件付平均 $E[f \mid \mathcal{J}]$ の定義は次のように与えられる。　まず，

$$\nu(A) \equiv \int_A f(\omega)\, d\mu \qquad ({}^\forall A \in \mathcal{J})$$

とおく時，ν は $\mathcal{J}$ 上の signed measure であって，μ に関して絶対連続（$\nu \ll \mu$）である。　即ち，

$$\begin{cases} (1)\ (\sigma\text{-additive on } \mathcal{J}) & \nu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \quad \text{if } A_i \cap A_j = \phi\ (i \neq j). \\ (2)\ A \in \mathcal{J},\ \mu(A) = 0 & \text{ならば，}\quad \nu(A) = 0. \end{cases}$$

従って，Radon-Nikodym の定理により，${}^{\exists_1}(\mathrm{mod}.\,0)$ $g(\omega)$: $\mathcal{J}$-可測関数，such that

$$\nu(A) = \int_A g(\omega)\, d\mu \qquad ({}^\forall A \in \mathcal{J})$$

ここで，g は $A \in \mathcal{J}$ に無関係に定まる。　この時，symbolicalに，"$g(\omega) \equiv \dfrac{d\nu}{d\mu}(\omega)$" と書く。　特に，今の場合は ν は f から決っているので，　$g(\omega) \equiv E[f \mid \mathcal{J}](\omega)$ と表わし，この関数を f の $\mathcal{J}$ に関する条件付平均と呼ぶ。　任意の $A \in \mathcal{J}$ は T-invariant set だから T を A 上に reduce すれば，Theorem 3.1 (2) により，

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$\int_A \bar{f}(\omega)d\mu = \int_A f(\omega)d\mu \qquad ({}^\forall A \in \mathcal{J})$$

即ち，これは Theorem 5.1 の等式が成立つことを示している。

Remark　以下，別の観点からの条件付平均の定義を与える。これを一般の Ω に適用することは無理だが，或る条件の下では可能である。

(i)　probability space $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ において，Ω は完備可分距離空間とし，$\mathcal{B}$ は Borel field，即ち開集合全体を含む Ω 上の最小の σ-algebra とする。　この場合，$\mathcal{J}$ の countable dense subset $\{A_1, A_2, \cdots\}$ が存在する。　ただし，dense であるとは次の事を意味する：

$${}^\forall A \in \mathcal{J},\ {}^\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して，} {}^\exists A_k \quad \text{s.t. } \mu(A \ominus A_k) < \varepsilon$$

ここで，$A \ominus B$ は A と B との対称差であり，$\mu(A \ominus B)$ は $\mathcal{J}$ 上の距離を定義していること，また $\mathcal{J}$ の代りに $\mathcal{B}$ の任意の sub-σ-algebra を考えても上のような countable dense subset の存在が示されることを注意しておこう。

(ii)　今，$[0,1]$ の元の２進展開 $\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots)$, $(\varepsilon_i = 0 \text{ or } 1)$ に対して，$A_i^{\varepsilon_i}$ を $A_i^0 \equiv A_i^c$，$A_i^1 \equiv A_i$ として定義し，

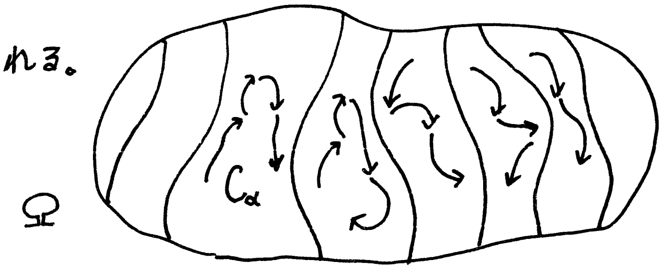
$$C_\alpha \equiv \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^{\varepsilon_i} \qquad (\alpha \in \mathcal{A})$$

とおく。　ただし，$\mathcal{A}$ は２進展開 α の全体を表わす。　この時，$\{C_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ は Ω の分割を与えている：

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$\zeta \ : \quad \Omega = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha \qquad (\text{disjoint union})$$

ここで，各 C_α は T-invariant set だから T は C_α 上に reduce され，C_α 上で考えた T は ergodic であることが容易に示される。即ち，Ω は既約成分に分割される。



更に，各 $\alpha \in \mathcal{A}$ に対して，μ から自然に $C = C_\alpha$ 上に induce される measure $\mu_\alpha \equiv \mu_C$ を考えることができる。μ_α は Ω 上の probability measure であって C_α 上に集中している，即ち support が C_α である measure であり，これは C_α における local な構造を記述しているものと考えられる。

(iii) 次に分割 ζ により誘導される measure space $(\Omega^\zeta, \mathcal{B}^\zeta, \mu^\zeta)$ の定義を与えよう。$\Omega^\zeta \equiv \{ C_\alpha \ ; \ \alpha \in \mathcal{A} \}$ とおき，分割 ζ から induce される写像 $\zeta : \Omega \longrightarrow \Omega^\zeta$ を，

$$\zeta : \Omega \ni \omega \longrightarrow C_\alpha \equiv C_\alpha(\omega) \in \Omega^\zeta \qquad (\omega \in C_\alpha(\omega))$$

で定義する。そこで，$\mathcal{B}^\zeta \equiv \{ A \subset \Omega^\zeta \ ; \ \zeta^{-1}(A) \in \mathcal{B} \}$ とおけば，$\mathcal{B}^\zeta$ は Ω^ζ 上の σ-algebra となる。更に，

$$\mu^\zeta(A) \equiv \mu(\zeta^{-1}(A)) \qquad (\forall A \in \mathcal{B}^\zeta)$$

とおけば，μ^ζ は $\mathcal{B}^\zeta$ 上の probability measure となる。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

μ は各 $\omega\in\Omega$ に重みを与えるmeasureであるのに対して，μ^ξ は各 $C_\alpha\in\Omega^\xi$ に重みを与えるmeasureとなっている。

(iv) 上で述べたprobability measuresの族 $\{\mu_C\}$ に対して更に，次のことが成立つ： $^\forall f\in L^1(\Omega)$ に対して，

(1) $\displaystyle\int_\Omega |f(\omega)|\mu_C(d\omega)<+\infty \quad (\mu^\xi\text{-a.e. } C)$

(2) $\displaystyle\int_\Omega f(\omega)\mu_C(d\omega)$ は μ^ξ-可測.

(3) $\displaystyle\int_{\Omega^\xi}\mu^\xi(dC)\int_\Omega f(\omega)\mu_C(d\omega)=\int_\Omega f(\omega)d\mu(\omega)$

[Fubiniの定理に類似！]

このことに注意して，条件付平均 $E[f\mid\mathcal{G}]$ を次のように定義する：

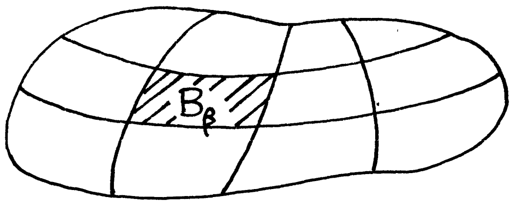
$$E[f\mid\mathcal{G}]\equiv\int_\Omega f(\omega)\mu_C(d\omega),\quad \text{on } C,\ (C\in\Omega^\xi)$$

(v) 積分値 $\displaystyle\int_\Omega f(\omega)\mu_C(d\omega)$ は具体的に次のようにして得られる。与えられた $A_1, A_2, \cdots$ に対して，Ω の分割の列

$$\{A_1^{\varepsilon_1}\},\ \{A_2^{\varepsilon_2}\},\ \cdots,\ \{A_n^{\varepsilon_n}\},\ \cdots$$

の共通の細分の分割列を考える。 即ち，$^\forall n\geq 1$，$^\forall\beta=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ に対して， $B_\beta\equiv A_1^{\varepsilon_1}\cap A_2^{\varepsilon_2}\cap\cdots\cap A_n^{\varepsilon_n}$ とおけば Ω は $\{B_\beta\}$ で分割される。

(n : fixed)



Ω

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

各 B_β 上で f の平均 $\int_{B_\beta} f(\omega)d\mu \big/ \mu(B_\beta)$ を与える Ω 上の step function を $g_n(\omega)$ とする:

$$g_n(\omega) \equiv \sum_\beta \frac{\int_{B_\beta} f(\omega)d\mu}{\mu(B_\beta)} 1_{B_\beta}(\omega)$$

この時，確率変数列 $\{g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots\}$ は martingale であり，
<u>martingale の収束定理</u>により，　$g_n(\omega) \longrightarrow {}^\exists g(\omega)$　(μ-a.e.) かつ

$$g(\omega) = \int_\Omega f(\omega)\mu_C(d\omega) \qquad \text{on } C \text{ , } (\ C \in \Omega^\zeta\ )$$

<u>Example</u>　(Weyl の変換)

$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$: probability space，　ただし $\Omega \equiv [0, 1)$ は 1 次元 torus $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (: 円周) とみる。　$\mathcal{B}$ は Ω 上の Borel field，　$d\mu = dx$ は Ω 上の Lebesgue 測度とする。　固定した無理数 α ($0 < \alpha < 1$) に対して，

$$T: \ \Omega \ni \omega \longrightarrow T\omega = \omega + \alpha \in \Omega \qquad (\text{mod. } 1)$$

とおく時，　μ は T-不変測度だから，T は Ω 上の準同型であって，更に，　T は ergodic である。

<u>Proof.</u>　まず，　$T^n\omega = \omega + n\alpha$　(mod. 1)．　また，Ω 上の関数は 1-periodic function on $\mathbb{R}$ と同一視できることに注意して，　$L^1(\Omega)$ の元 $f(\omega)$ を，　1-periodic function $f(x)$ on $\mathbb{R}$ s.t. $\int_0^1 |f(x)|dx < +\infty$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

とみなす。　この時，Birkhoff の定理により，$^\exists \bar{f}(x)$ s.t.

$$V_n f(x) \equiv \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \longrightarrow \bar{f}(x) \quad \text{(a.e.) かつ } L^1\text{-平均収束}$$

容易に示されるように，T が ergodic である為には，任意の $f \in L^1$ に対して，$\bar{f}(x) = E[f]$ (a.e. x) が成立つことと同値，更に L^1 の dense subspace の元 f に対して成立つことと同値である。

(i)　$f(x)$：三角多項式の場合．

$$f(x) = C_0 + \sum_n C_n e^{2\pi i n x} \quad \text{(有限和)}$$

この時，　$C_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$，　$C_0 = \int_0^1 f(x) dx = E[f]$

また，　$V_n f(x) = C_0 + \sum_m C_m V_n(e^{2\pi i m x})$

さらに，

$$V_n(e^{2\pi i m x}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m (x + k\alpha)}$$

$$= e^{2\pi i m x} \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m k \alpha}$$

$$= e^{2\pi i m x} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - e^{2\pi i m n \alpha}}{1 - e^{2\pi i m \alpha}} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

ここで，α は無理数だから $e^{2\pi i m \alpha} \neq 1$ である。　故に，

$$V_n f(x) \longrightarrow C_0 = E[f], \quad \text{各点収束 かつ } L^1\text{-収束}$$

(ii)　$f(x)$：連続，1-periodic function on $\mathbb{R}$ の場合

$$f(x) \sim C_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n x} \quad (\text{: Fourier 級数})$$

まず, $S_n(x) \equiv \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{2\pi ikx}$, $g_n(x) \equiv \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x)$

とおく時, Fejér の定理により,

$$g_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{一様収束}$$

次に $n \geqq 1$ を固定する時, $g_n(x)$ は三角多項式だから(i)の結果から,

$$V_m g_n(x) \longrightarrow E[g_n] \ (m \to \infty) \quad \text{各点収束かつ} L^1\text{-収束}$$

これから更に, $V_n f(x) \longrightarrow E[f]$ L^1-収束

実際, $\int_0^1 | V_m f(x) - E[f] | dx$

$$\leqq \int_0^1 |V_m f(x) - V_m g_n(x)| dx + \int_0^1 |V_m g_n(x) - E[g_n]| dx + \int_0^1 |E[g_n] - E[f]| dx$$

$$= \| V_m(f - g_n) \|_1 + \| V_m g_n - E[g_n] \|_1 + | E[g_n - f] |$$

$$\leqq \| f - g_n \|_1 + \| V_m g_n - E[g_n] \|_1 + \| g_n - f \|_\infty$$

$$\leqq 2 \| f - g_n \|_\infty + \| V_m g_n - E[g_n] \|_1$$

n を十分大, 次に m を十分大にとることにより, 求める結果を得る。

(iii) 一般の場合は $C[0,1]$ が $L^1(\Omega)$ で dense とみなせることに注意して, $\forall f \in L^1(\Omega)$ を $C[0,1]$ の元で L^1-近似することにより, 上の場合と同様の評価を用いて, $V_n f(x) \longrightarrow E[f]$ (L^1-収束) なることが示される。 [第4講の Exercise 参照] [証終]

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

第6講　エルゴード定理としての強大数の法則

Theorem 6.1 （強大数の法則）

$(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$ は probability space とし，この上の実数値確率変数列 $x_0(\omega)$, $x_1(\omega)$, $x_2(\omega)$, $\cdots$ が独立，同分布，平均をもつ，と仮定する。

この時，

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \longrightarrow E[x_0]\right) = 1$$

定義：　確率変数列 $\{x_n\}$ について，

独立 $\Longleftrightarrow$ $P(x_0 \in B_0, \cdots, x_n \in B_n) = P(x_0 \in B_0) \cdots P(x_n \in B_n)$

for $\forall n \geqq 1$, $\forall B_i$: Borel 集合 $(0 \leqq i \leqq n)$

同分布 $\Longleftrightarrow$ $P(x_0 \in B) = P(x_n \in B)$

for $\forall n \geqq 1$, $\forall B$: Borel 集合

同分布であるとは，“x_0 の分布関数 $=$ x_n の分布関数 $(\forall n \geqq 1)$” と言ってもよい。　更に，この条件の下で，平均をもつとは，$E|x_n| = E|x_0| < +\infty$ $(\forall n \geqq 1)$ が成立つことを言う。　上の定理が適用できる確率変数列の具体例として貨幣投げの問題を挙げておこう。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

<u>貨幣投げの問題</u>　確率変数列 $\{x_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ において，x_n は $(n+1)$ 回目の試行の結果を表わす確率変数で，

$$x_n = \begin{cases} 1 & (\text{表が出る時}) \\ 0 & (\text{裏が出る時}), \end{cases}$$

であって，$P(x_n=1)=p$，$P(x_n=0)=q$，をみたすものとする。(ただし，$0<p<1$，$q=1-p$)　この時，$\{x_n\}$ は上の定理の仮定をすべてみたす。　今，$\nu_n \equiv \sum_{k=0}^{n-1} x_k$ とおく時，ν_n は n 回投げたうちの表の出る回数を表わし，その相対頻度 $\frac{\nu_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k$ は定数関数 $(\equiv p)$ に概収束する：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(\omega)}{n} = E[x_0] = 1\cdot P(x_0=1) + 0\cdot P(x_0=0) = p \quad (\text{a.e.})$$

Bernoulli はこの問題を少し弱い形で formulate した。　これは確率論で初めて示された"結果"である：　$\forall \varepsilon > 0$ に対して，

$$P\left(\left|\frac{\nu_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

即ち，$P\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n}{n} = p$　（：確率収束）が成立つ。　Bernoulli の結果は Khintchine により，次のように一般化された。

<u>Theorem 6.2</u>　（弱大数の法則）　$\forall \varepsilon > 0$ に対して，

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k - E[x_0]\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

強大数の法則の証明法はいろいろあるが，ここではエルゴード定理を応用することにより証明する。

[1°] まず一般的準備から始めよう。

$(X, \mathcal{B}(X), \nu)$，$(W, \mathcal{B}(W), \mu)$ は probability spaces とし，更に，写像 $(X, \mathcal{B}(X), \nu) \xrightarrow{\varphi} (W, \mathcal{B}(W), \mu)$ は次の条件をみたすものと仮定する：

$$\begin{cases} ① & \varphi : X \longrightarrow W \quad \text{は into map}, \\ ② & \varphi^{-1}\mathcal{B}(W) \subset \mathcal{B}(X), \ \text{i.e.}, \ \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X), \ ({}^{\forall}A \in \mathcal{B}(W)), \\ ③ & \mu(A) = \nu(\varphi^{-1}(A)) \quad \text{for } {}^{\forall}A \in \mathcal{B}(W). \end{cases}$$

（上の仮定の下で，$\mu = \varphi\nu$ と表わす。）

この時，以下のことが成立つ：

(1) $f(w)$, $w \in W$: μ-measurable ならば，$f(\varphi(x))$, $x \in X$: ν-measurable.

(2) $[f(w)$ の確率分布 (w.r.t. μ)$] = [f(\varphi(x))$ の確率分布 (w.r.t. ν)$]$

(3) $f(w) \in L^1(\mu)$ である為には $f(\varphi(x)) \in L^1(\nu)$ であることが必要十分であり，このいずれかの条件の下で

$$\int f(w)\,d\mu(w) = \int f(\varphi(x))\,d\nu(x)$$

[2°] 次に我々の目的に合わせて，具体的に $(W, \mathcal{B}(W), \mu)$ を構成しよう。

(i) $\mathbb{N}_+ \equiv \{0, 1, 2, \cdots\}$ とし，$W_k \equiv [\mathbb{R}$ indexed by $k \in \mathbb{N}_+]$，と表わす。 ただし，$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ では Euclid topology を考える。 次に

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$W \equiv \prod_{k=0}^{\infty} W_k = \mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}$$

とおき，W では product topology を考える。 また，$W \ni w$ に対して，

$$y_k(w) = w_k \quad , \qquad w = (w_0, w_1, w_2, \cdots, w_k, \cdots)$$

とおく。 即ち，$y_k(w)$ は w の第 k 座標 $w_k \in W_k$ を表わす。

(ii) $\alpha, \beta, \cdots$, etc. は $\mathbb{N}_+$ の有限部分集合を表わし，

$$\alpha = (k, \cdots, l) , \qquad k, \cdots, l \in \mathbb{N}_+ ,$$

と書くことにする。 ただし，右辺において順序は考慮しない。 $\mathbb{N}_+$ の有限部分集合の全体を $\mathcal{A}$ と表わし，$\mathbb{R}$ の Borel 集合族を $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ とする。 今， $\alpha = (k, \cdots, l) \in \mathcal{A}$，$(k, \cdots, l \in \mathbb{N}_+)$ および，$B_k, \cdots, B_l \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して，

(*) $$E = \{ w \in W \ ; \ w_k \in B_k, \cdots, w_l \in B_l \}$$

なる形の W の部分集合 E を考える。 この集合 E を cylinder set という。 E は，α，$B_k, \cdots, B_l$ に依存する。 固定した $\alpha \in \mathcal{A}$ に対して，

$$\mathcal{B}_\alpha(W) \equiv \left((*) \text{の形をした} E \text{の有限和として表わされる集合の族} \right)$$

とおき， $\mathcal{B}_0(W) \equiv \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha(W)$ とおく。 この時，$\mathcal{B}_0(W)$ は W 上の有限加法的集合族となる。 即ち，次の条件が成立つ：

① $\mathcal{B}_0(W) \ni W$,

② $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{B}_0(W)$ に対して，

$$A_i^c \in \mathcal{B}_0(W) \quad (1 \leq i \leq n) , \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B}_0(W)$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

更に，$\mathcal{B}_\alpha(W)$，$\alpha\in\mathcal{A}$，を含む W 上の最小の σ-algebra を $\mathcal{B}(W)$ と表わす。[これを，$\mathcal{B}_\alpha(W)$，$\alpha\in\mathcal{A}$，が生成する σ-algebra という。]

即ち，
$$\mathcal{B}(W)\equiv\sigma(\mathcal{B}_\alpha(W),\ \alpha\in\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{B}_0(W)).$$

この時，$\mathcal{B}(W)$ はすべての $y_k(w)$，$k\in\mathbb{N}_+$，を可測にするような W 上の最小の σ-algebra と一致する：
$$\mathcal{B}(W)=\sigma(y_k\ ;\ k\in\mathbb{N}_+)$$

実際，可測空間 $(W,\mathcal{B})$ が与えられた時，$y_k(w)$ が $\mathcal{B}$-可測とは，
$$\forall B_k\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ に対し，} \{w\ ;\ y_k(w)\in B_k\}\in\mathcal{B}$$
ということであった。 故に各 $y_k(w)$，$k\in\mathbb{N}_+$，が $\mathcal{B}$-可測ならば，(*) の $E\in\mathcal{B}$，となるから，$\mathcal{B}(W)\subset\mathcal{B}$． ここで特別な $\mathcal{B}$ として，$\mathcal{B}(W)$ をとることができ，このような $\mathcal{B}$ の中で最小のものが $\sigma(y_k\ ;\ k\in\mathbb{N}_+)$ だから，求める等式を得る。

(iii) 更に定理で与えられた確率変数列 $\{x_n\}$ に対応して，可測空間 $(W,\mathcal{B}(W))$ 上の probability measure μ を定義しよう。 写像 $x:(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),P)\longrightarrow(W,\mathcal{B}(W))$ を，$\omega\in\Omega$ に対して，
$$x(\omega)\equiv(x_0(\omega),\ x_1(\omega),\ x_2(\omega),\ \cdots),\quad x_k(\omega)\in W_k,\quad k\in\mathbb{N}_+,$$
とおくことにより定義するとき，

① $x:\Omega\longrightarrow W$ は into map.

② $x^{-1}\mathcal{B}(W)\subset\mathcal{B}(\Omega)$.

実際，$\mathcal{B}_\alpha(W)$ の基本となる集合として，(*) の E をとると，

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$x^{-1}(E)=\{\omega\in\Omega\ ;\ x_k(\omega)\in B_k,\cdots,x_\ell(\omega)\in B_\ell\}$$
$$=\{x_k\in B_k\}\cap\cdots\cap\{x_\ell\in B_\ell\}\ \in\mathcal{B}(\Omega)$$

故に，$^\forall F\in\mathcal{B}_\alpha(W)$ に対しても $x^{-1}(F)\in\mathcal{B}(\Omega)$ となり，更に，$^\forall G\in\mathcal{B}(W)$ に対しても $x^{-1}(G)\in\mathcal{B}(\Omega)$ となる。

③ これを用いて，$xP=\mu$ をみたす probability measure μ を $\mathcal{B}(W)$ 上につくれる。 実際，

$$\mu(A)\equiv P(x^{-1}(A))\qquad \text{for } ^\forall A\in\mathcal{B}(W)$$

とおく時，μ が measure となることを言えばよいが，それは P が measure であることから容易に示される。

[3°] 上で構成された写像 $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),P)\xrightarrow{x}(W,\mathcal{B}(W),\mu)$ は最初に[1°]で述べた条件 ① ～ ③ をみたしている。

(i) 特に，$A=E$ (：(*)の集合)の場合は，

$$\mu(A)=P(x^{-1}(A))=P(x_k(\omega)\in B_k,\cdots,x_\ell(\omega)\in B_\ell)$$

更に，蛇足ながら，次のことも述べておこう： $^\forall A\in\mathcal{B}_0(W)$ に対して，$^\exists\beta=(k,\cdots,\ell)\in\mathcal{A}$ s.t.

$$A=[(*)\text{の形をした } E_i\in\mathcal{B}_\beta(W) \text{ の disjoint 和}].$$

即ち，$A=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ ，$E_i\cap E_j=\phi\ (i\neq j)$. この時，

$$\mu(A)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)=\sum_{i=1}^{n}P(x_k(\omega)\in B_k^i,\cdots,x_\ell(\omega)\in B_\ell^i),$$

ただし，$B_k^i,\cdots,B_\ell^i\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\quad(1\leqslant i\leqslant n)$.

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

(ii) $y_k(w)$, $k\in\mathbb{N}_+$, は$\mathcal{B}(W)$-可測，従って[1°]で述べたように，

$x_k(\omega)=y_k(x(\omega))$ は $\mathcal{B}(\Omega)$-可測であって，

$$[y_k(w)\text{ の確率分布 }(\text{w.r.t. }\mu)]=[x_k(\omega)\text{ の確率分布 }(\text{w.r.t. }P)],$$

$$\int y_k(w)\,d\mu(w)=\int x_k(\omega)\,dP(\omega).\qquad (k\in\mathbb{N}_+).$$

(iii) より一般に次のことが成立つ：

① $\forall n\geqq 0$ に対して，$[(y_k(w),\ 0\leqq k\leqq n)$ の確率分布 $(\text{w.r.t. }\mu)]$

$=[(x_k(\omega),\ 0\leqq k\leqq n)$ の確率分布 $(\text{w.r.t. }P)]$，

従って，$\{y_0, y_1, y_2, \cdots\}$ と $\{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$ は同一法則に従う。

② 特に，$\{y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ は独立，同分布 $(\forall n\geqq 0)$。

実際，$\forall B_k$: Borel 集合 $(0\leqq k\leqq n)$ に対して，

$$\mu(y_0(w)\in B_0,\cdots,y_n(w)\in B_n)=P(y_0(x(\omega))\in B_0,\cdots,y_n(x(\omega))\in B_n)$$
$$=P(x_0(\omega)\in B_0,\cdots,x_n(\omega)\in B_n)=\prod_{k=0}^{n}P(x_k(\omega)\in B_k)$$
$$=\prod_{k=0}^{n}\mu(y_k(w)\in B_k)$$

[4°] 次に変換 $T: W\longrightarrow W$ を $W\ni w=(w_0, w_1, w_2,\cdots)$ に対して，

$Tw\equiv(w_1, w_2,\cdots)\in W$， 即ち $(Tw)_k=w_{k+1}$， $k\in\mathbb{N}_+$，

とおくことにより定義する。 この時，明らかに T は全射であるが，1対1ではない。 定義から，$y_k(Tw)=y_{k+1}(w)$，だから，

$$y_k(w)=y_0(T^k w),\quad k\in\mathbb{N}_+,$$

従って，確率変数列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ を考えることは，確率変数 y_0 と変換列 $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ を考えることに帰着する。ただし，$T^0 = I$（：恒等変換）.
更に，T は $(W, \mathcal{B}(W), \mu)$ 上の endomorphism になる。

<u>実際</u>，（1） T は $\mathcal{B}(W)$-可測，即ち $T^{-1}\mathcal{B}(W) \subset \mathcal{B}(W)$ ： これは，$^\forall \alpha \in \mathcal{A}$ に対して，$^\exists \beta \in \mathcal{A}$ s.t. $T^{-1}\mathcal{B}_\alpha(W) \subset \mathcal{B}_\beta(W) \subset \mathcal{B}(W)$ より。

(2) T は μ-保測 ： これは，$\mathcal{B}(W)$ における基本の集合

$$(※) \text{ の } E = \{w \in W \,;\, y_k(w) \in B_k, \cdots, y_\ell(w) \in B_\ell\}$$

に対して，μ-保測性，即ち $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$ を示せば十分。

ところで，

$$\begin{aligned} w \in T^{-1}E &\iff Tw \in E \iff y_k(Tw) \in B_k, \cdots, y_\ell(Tw) \in B_\ell \\ &\iff y_{k+1}(w) \in B_k, \cdots, y_{\ell+1}(w) \in B_\ell, \end{aligned}$$

故に，

$$\begin{aligned} \mu(T^{-1}E) &= P(x_{k+1}(\omega) \in B_k, \cdots, x_{\ell+1}(\omega) \in B_\ell) \\ &= P(x_{k+1}(\omega) \in B_k) \cdots P(x_{\ell+1}(\omega) \in B_\ell) \qquad [\text{独立}] \\ &= P(x_k(\omega) \in B_k) \cdots P(x_\ell(\omega) \in B_\ell) \qquad [\text{同分布}] \\ &= P(x_k(\omega) \in B_k, \cdots, x_\ell(\omega) \in B_\ell) \qquad [\text{独立}] \\ &= \mu(y_k(w) \in B_k, \cdots, y_\ell(w) \in B_\ell) \\ &= \mu(E) \end{aligned}$$

[5°] 上で述べたことから $(W, \mathcal{B}(W), \mu)$ 上の endomorphism T および

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$y_0 \in L^1$ に対してエルゴード定理が適用できる。 そこで

$$W_0 \equiv \left\{ w \in W \ ; \ {}^{\exists}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_0(T^k w) \equiv \overline{y}_0(w) \right\}$$

とおけば, $W_0 \in \mathcal{B}(W)$, 従って $\Omega_0 \equiv x^{-1}(W_0)$ とおくと $\Omega_0 \in \mathcal{B}(\Omega)$.
また, "$\omega \in \Omega_0 \iff x(\omega) \in W_0$" および $y_0(T^k x(\omega)) = y_k(x(\omega)) = x_k(\omega)$ より,

$$\Omega_0 = \left\{ \omega \in \Omega \ ; \ {}^{\exists}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k(\omega) \right\}$$

この時, Birkhoff の定理[第5講]により, $\mu(W_0) = 1$ 従って $P(\Omega_0) = 1$.
即ち, ${}^{\exists}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k(\omega) \equiv g(\omega) \qquad (\text{a.e. } \omega)$

[6°] 上では強大数の法則の一部分が示された。 あとは極限関数 $g(\omega)$ が定数 $(= E[x_0])$ であることを示せばよい。
(i) $\forall a \in \mathbb{R}$ に対して $A_a \equiv \{ \omega \in \Omega \ ; \ g(\omega) \leqq a \}$ とおくと,
$A_a \in \sigma(x_k(\omega),\ 0 \leqq k < \infty) \equiv \mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\Omega)$, 従って $g(\omega)$ は $\mathcal{B}$-可測.
ところで, $\forall p \geqq 0$ に対して,

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{p+N+1} \sum_{k=0}^{p+N} x_k(\omega) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \cdot \frac{N}{p+N+1} \left(\sum_{k=p+1}^{p+N} x_k(\omega) + \sum_{k=0}^{p} x_k(\omega) \right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=p+1}^{p+N} x_k(\omega) \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

従って，$g(\omega)$ は $\forall p \geqq 0$ に対して $\sigma(x_k(\omega),\ p+1 \leqq k)$-可測である。

一方，$A_a \in \sigma(x_k(\omega),\ 0 \leqq k < \infty)$ だから，$\exists A_a^{(p)} \in \sigma(x_k(\omega),\ 0 \leqq k \leqq p)$ $(p \geqq 0)$ s.t. $P(A_a^{(p)} \ominus A_a) \longrightarrow 0 \ (p \to \infty)$. そこで，$A_a^{(p)}$，$A_a$ の定義関数を $\chi_a^{(p)}$，χ_a とする時，それぞれ $\sigma(x_k(\omega),\ 0 \leqq k \leqq p)$-可測，$\sigma(x_k(\omega),\ p+1 \leqq k)$-可測だから，$\exists f_a^{(p)} : \mathbb{R}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{R}$，$\exists f_a : W \longrightarrow \mathbb{R}$，可測関数，s.t.

$$\chi_a^{(p)}(\omega) = f_a^{(p)}(x_0(\omega), \cdots, x_p(\omega)), \quad \chi_a(\omega) = f_a(x_{p+1}(\omega), x_{p+2}(\omega), \cdots)$$

故に，$\chi_a^{(p)}$ と χ_a は独立になる。 従って，

$$P(A_a^{(p)} \cap A_a) = E[\chi_a^{(p)} \cdot \chi_a] = E[\chi_a^{(p)}] \cdot E[\chi_a] = P(A_a^{(p)}) P(A_a)$$

ここで，$p \longrightarrow \infty$ とすれば，

$$[\text{左辺}] \longrightarrow P(A_a \cap A_a) = P(A_a), \qquad [\text{右辺}] \longrightarrow (P(A_a))^2$$

だから $P(A_a) = (P(A_a))^2$ 従って，$(P(A_a) - 1) \cdot P(A_a) = 0$.

故に，$P(A_a) = 1$ or 0.

ところで，$a \in \mathbb{R}$ は任意だったから，

$$g(\omega) = \text{constant function} = c \qquad (\text{w.r.t. } P)$$

(ii) 更に，$g(\omega)$ と $\overline{y}_0(w)$ は同じ分布に従うことに注意して，

$$\overline{y}_0(w) = \text{constant function} = c \qquad (\text{w.r.t. } \mu)$$

ここで，T が ergodic であることが示されたとすると，Birkhoff の定理により，

$$c = \overline{y}_0(w) = E[y_0(w)] = E[x_0(\omega)]$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

従って，$g(\omega)=E[x_0]$ (a.e. ω) を得て，強大数の法則が完全に示されることになる。

[7°] 最後にTのergodicなことを示そう。 $A\in\mathcal{B}(W)$: T-invariant, i.e., $T^{-1}A=A$ (mod.0) とする。 今，Aの定義関数を

$$1_A(w)\equiv f(w)=f(w_0,w_1,\cdots)=f(y_0(w),y_1(w),\cdots)$$

と表わす時，$f(w)$は$\mathcal{B}(W)$-可測。 $1_A(Tw)=1_A(w)$ より，

$$1_A(w)=1_A(Tw)=f(y_0(Tw),y_1(Tw),\cdots)=f(y_1(w),y_2(w),\cdots)$$

この操作を繰り返すことにより，

$$1_A(w)=f(y_{p+1}(w),y_{p+2}(w),\cdots) \qquad ({}^\forall p\geq 0)$$

故に，$A\in\sigma(y_k(w),\ p+1\leq k)$ $({}^\forall p\geq 0)$. ここで列$\{y_n\}$の独立性を用いると，[6°]におけるA_αの場合と同じ論法により，$\mu(A)=1$ or 0，を得る。 これでTのergodicなことが示された。

[強大数の法則の証明終]

<u>注意</u> [6°], [7°]の議論において，もしTのergodicなことが先に示されているならば，Birkhoffの定理から

$$\overline{y_0}(w)=E[y_0] \qquad (\text{a.e. } w)$$

従って，[5°]から直ちに，$g(\omega)=E[x_0]$ (a.e. ω) を得る。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

第7講 Hamilton力学系とLiouvilleの定理

まず，次の微分方程式を考える。

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = X^1(x^1,\cdots,x^n) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx^n}{dt} = X^n(x^1,\cdots,x^n) \end{cases}$$

ここで，$\vec{X}=(X^1,\cdots,X^n)$ はvector場で，各成分関数 X^i は変数 t を含まないものと仮定する。 また $x=(x^1,\cdots,x^n)\in\Omega$ は力学系の"状態"を表わす。($\Omega\subset\mathbb{R}^n$)

<u>仮定</u> Ω は $\mathbb{R}^n$ のdomainとする。 任意の $\omega=(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^n)\in\Omega$ を初期値として，(*)の解 $f(t,\omega)\in\Omega$, $-\infty<t<\infty$, が存在しているものとし，しかも解の一意性が成立しているものとする。 また，$f(t,\omega)$ は (t,ω) について連続とする。

この時，(*)は Ω 上の運動を記述しており，(*)によって任意の ω から出発して流れていく運動 $\Omega\ni\omega\longrightarrow\omega_t\equiv f(t,\omega)\in\Omega$，が得られる。 $T_t\omega\equiv\omega_t$ ，$-\infty<t<\infty$，と表わす。 解の一意性から，$\forall s,t$ に対して，$f(s+t,\omega)=f(s,\omega_t)$ が成立するから，

$$T_{s+t}\,\omega = T_s T_t \omega \quad , \quad i.e., \quad T_{s+t} = T_s T_t$$

即ち $\{T_t\}$ は Ω 上の変換群であり，$T_t\omega$ は (t,ω) について連続である。

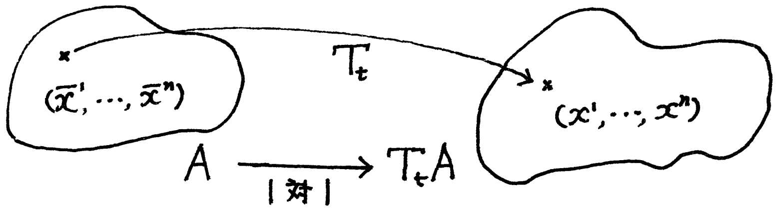
Theorem 7.1 (Liouville)

μ は Ω 上の Lebesgue 測度とし，$\mu(\Omega) \leqq +\infty$ とする。

この時，μ が $\{T_t\}$-不変である為の必要十分条件は Ω 上で，

$$\mathrm{div}\,\vec{X} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial x^i}(x) = 0$$

Proof. $\mu(A) < +\infty$ なる Borel 集合 $A \subset \Omega$ を考える。



積分の変数変換公式により，

$$\mu(T_tA) = \int_{T_tA} dx^1 \cdots dx^n = \int_A |D|\, d\bar{x}^1 \cdots d\bar{x}^n$$

ただし，$D \equiv \dfrac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n)}$ ，　従って，D は $t, \bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n$ の関数。

また，$|D|$ は Jacobian D の絶対値であるが，実は $D > 0$ であり，$|D| = D$.

<u>実際</u>，　行列式の微分公式から，

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} D_i \qquad (D_i \text{ は } D \text{ の第 } i \text{ 行の微分})$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$D_i \equiv \frac{\partial(x^1,\cdots,x^{i-1},\partial x^i/\partial t,x^{i+1},\cdots,x^n)}{\partial(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^{i-1},\bar{x}^i,\bar{x}^{i+1},\cdots,\bar{x}^n)}$$

$$= \frac{\partial(x^1,\cdots,x^{i-1},X^i,x^{i+1},\cdots,x^n)}{\partial(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^{i-1},\bar{x}^i,\bar{x}^{i+1},\cdots,\bar{x}^n)}$$

更に，$\displaystyle \frac{\partial X^i}{\partial \bar{x}^j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}$ より，

$$D_i = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} & \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^j} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^n} \end{vmatrix} & (i \end{array}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \frac{\partial(x^1,\cdots,x^{i-1},x^k,x^{i+1},\cdots,x^n)}{\partial(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^{i-1},\bar{x}^i,\bar{x}^{i+1},\cdots,\bar{x}^n)}$$

$$= \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\cdot D$$

故に，$\displaystyle \frac{\partial D}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\cdot D = D\cdot \mathrm{div}\vec{X}$

ところで，$t=0$ の時，$x^i = \bar{x}^i$ だから，$D \equiv D(t)$ に対して，$D(0)=1$.

故に，$\displaystyle D(t) = \exp\left(\int_0^t (\mathrm{div}\vec{X})(s)\,ds\right)$，従って $D>0$ を得る。

よって，最初に述べた $\mu(T_t A)$ の積分表現を書き改めて，

$$\mu(T_t A) = \int_A D\,dx \qquad (dx = dx^1\cdots dx^n)$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

これから,
$$\frac{d}{dt}\mu(T_tA)=\int_A \frac{\partial D}{\partial t}dx=\int_A(\mathrm{div}\vec{X})\cdot D dx$$

ここで, $t=0$ の場合を考えて,

μ が $\{T_t\}$-不変, 即ち, $\{T_t\}$ が μ-保測

$\Longleftrightarrow$

$$\int_A(\mathrm{div}\vec{X})\cdot D dx=0 \qquad ({}^\forall A : \text{有界開集合} \subset \Omega)$$

$\Longleftrightarrow$

$$\mathrm{div}\vec{X}=0 \qquad \text{on } \Omega$$ [証終]

さて, <u>Hamiltonian dynamical system</u> (Hamilton力学系)を与える微分方程式を考えよう。 運動の"状態"は $(p, q)\in\mathbb{R}^{2n}$ で与えられる。 ここで, $p=(p_1,\cdots,p_n)\in\mathbb{R}^n$ は運動量, $q=(q_1,\cdots,q_n)\in\mathbb{R}^n$ は位置を表わしている。 この時, 考えている運動は Hamiltonian (Hamilton関数) $H(p,q,t)$ がみたす次の微分方程式により記述される:

$$(**) \quad \begin{cases} \dfrac{dp_\alpha}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} \\[2ex] \dfrac{dq_\alpha}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \end{cases} \qquad (\alpha=1,2,\cdots,n)$$

<u>注意</u> 最初に述べた微分方程式 (*) における vector 場 $\vec{X}=(X^1,\cdots,X^n)$ に相当するものが, 上の (**) では

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$\left(-\frac{\partial H}{\partial q_1},\ \cdots,\ -\frac{\partial H}{\partial q_n},\ \frac{\partial H}{\partial p_1},\ \cdots,\ \frac{\partial H}{\partial p_n}\right)$$

で与えられ，力学系の状態 $x=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n$ に相当するものが，$(p,q)=(p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n)\in\mathbb{R}^{2n}$ で与えられている。　特に H が t を含まない場合は，対応する $div\vec{X}$ は 0 となる：

$$\text{“}div\vec{X}\text{”}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\right\}=0$$

従って，Liouville の定理により，$\mathbb{R}^{2n}$ 上の Lebesgue 測度 μ は $\{T_t\}$-不変。

次に，Hamiltonian dynamical system の例として，3次元空間内の n 粒子からなる Newton 力学系を考えよう。　以下，第 ν 粒子 $(1\leqq\nu\leqq n)$ の運動量を $p^\nu=(p_{3\nu-2},p_{3\nu-1},p_{3\nu})$，位置を $q^\nu=(q_{3\nu-2},q_{3\nu-1},q_{3\nu})$，質量を $m^\nu=(m_{3\nu-2},m_{3\nu-1},m_{3\nu})$ ただし $m_{3\nu-2}=m_{3\nu-1}=m_{3\nu}$ で表わし，第 ν 粒子に対して働く力を $\mathbb{F}^\nu=(F_{3\nu-2},F_{3\nu-1},F_{3\nu})$ で表わす。
また，$p=(p_1,\cdots,p_{3n})$，$q=(q_1,\cdots,q_{3n})$，$\mathbb{F}=(F_1,\cdots,F_{3n})$ とおく。

Example 1　vector 場 $\mathbb{F}$ が potential $V(q,t)$ をもつとする。即ち，

$$\mathbb{F}=-\mathrm{grad}\,V,\quad \text{i.e.},\quad F_\alpha=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\quad(\alpha=1,2,\cdots,3n)$$

この時，この力学系は Hamiltonian dynamical system となる。
実際，　簡単の為，$\dot{}\equiv\dfrac{d}{dt}$，$V_\alpha\equiv\dfrac{\partial V}{\partial q_\alpha}$ と表わす時，仮定

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

から，この力学系に対する運動方程式は

$$\begin{cases} \dot{p}_\alpha = -V_\alpha(q, t) \\ m_\alpha \dot{q}_\alpha = p_\alpha \end{cases} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, 3n)$$

で与えられる。 そこで，$H(p, q, t)$を次式で定義する：

$$H(p, q, t) \equiv \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3n} \frac{p_\alpha^2}{m_\alpha}}_{(\text{運動エネルギー})} + \underbrace{V(q, t)}_{(\text{potential エネルギー})}$$

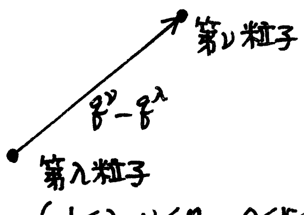
この時，上の運動方程式は次の形に書き換えられる：

$$\begin{cases} \dot{p}_\alpha = -\partial H / \partial q_\alpha \\ \dot{q}_\alpha = \partial H / \partial p_\alpha \end{cases} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, 3n)$$

従って，この力学系は Hamiltonian dynamical system である。

<u>注意</u> 上の例で，$V(q, t)$がtを含まない場合，対応する$\{T_t\}$は保測。

<u>Example 2</u> n粒子が相互に力を及ぼし合い，第ν粒子が他から受ける$\mathbb{F}^\nu$が次のように表わされるものとする：



$$\mathbb{F}^\nu = \sum_{\lambda=1}^{n} f^{\lambda\nu}(|q^\lambda - q^\nu|, t) \cdot \frac{q^\nu - q^\lambda}{|q^\nu - q^\lambda|},$$

$$f^{\lambda\nu}(r, t) = f^{\nu\lambda}(r, t), \quad f^{\lambda\lambda}(r, t) = 0 \quad (1 \leq \lambda, \nu \leq n, \ 0 < r < \infty)$$

この時，

$$\begin{cases} V(q, t) \equiv \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\nu=1}^{n} V^{\lambda\nu}(|q^\lambda - q^\nu|, t) \\ V^{\lambda\nu}(r, t) \equiv -\int_a^r f^{\lambda\nu}(u, t)\,du + \text{const.} \quad (a > 0) \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

とおけば，$V(q,t)$ は vector 場 $\mathbb{F}$ の potential となる。

実際，　例えば，$F_1 = -\partial V/\partial q_1$ を示す為には，V を書き直して，

$$V = \sum_{\lambda \neq 1} V^{\lambda 1}\left(\sqrt{(q_1 - q_{3\lambda-2})^2 + (q_2 - q_{3\lambda-1})^2 + (q_3 - q_{3\lambda})^2}\,, t\right)$$
$$+ (q_1 \text{ を含まない項}),$$

従って，$$-\frac{\partial V}{\partial q_1} = \sum_{\lambda \neq 1} f^{\lambda 1}(|q^1 - q^\lambda|, t) \cdot \frac{q_1 - q_{3\lambda-2}}{|q^1 - q^\lambda|} = F_1$$

注意．上の例で，$f^{\lambda\nu}(r,t)$ が t を含まない場合，$\{T_t\}$ は保測である。

Example 3　　万有引力（または斥力）を及ぼし合っている n 粒子力学系は Example 2 の特別の場合であって，$\mathbb{F}^\nu$ は次式で与えられる：

$$\mathbb{F}^\nu = \sum_{\lambda \neq \nu} \frac{m_{3\lambda} m_{3\nu}}{r_{\lambda\nu}^2} \cdot \frac{q^\nu - q^\lambda}{|q^\nu - q^\lambda|}, \qquad r_{\lambda\nu} \equiv |q^\lambda - q^\nu|$$

この場合，粒子間の引力の大きさ $f^{\lambda\nu}(r) \equiv m_{3\lambda} m_{3\nu}/r^2$ は r^2 に逆比例し，vector 場 $\mathbb{F}$ には次の Newton potential が対応する：

$$V(q) = \sum_{\substack{\lambda,\nu=1 \\ (\lambda \neq \nu)}}^{n} \frac{m_{3\lambda} m_{3\nu}}{r_{\lambda\nu}}$$

実際，　Example 2 の $V^{\lambda\nu}$ の定義式において，積分の下端 $a = \infty$ として，

$$V^{\lambda\nu}(r) \equiv -\int_\infty^r \frac{m_{3\lambda} m_{3\nu}}{u^2}\, du = \frac{m_{3\lambda} m_{3\nu}}{r} \qquad \text{とおけばよい。}$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

第8講　多様体上の測度

以下の講義では，これまでの議論の一般化として多様体上の運動を考える。　ここではその為の準備をする。

<u>目的</u>　(Liouvilleの定理の一般化)　多様体M上の測度μとvector場$\vec{X}$が与えられている時，その運動に関して保測になる為の条件を与えること。

この問題を記述する際に，$\mathrm{div}\,\vec{X}=0$ に相当する式はどうなるであろうか。　それを考える為には，densityをもつM上の測度(一般に，signed measure)の概念，更に可微分多様体の概念をきちんと説明しておく必要がある。　参考書として，L.H.Loomis and S.Sternberg："Advanced Calculus" を挙げておく。

<u>定義</u>　M：<u>n-dimensional manifold of C^∞-class</u>（n次元C^∞-多様体，または，可微分多様体）

$\Longleftrightarrow$

M : topological space such that

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$\begin{cases} \text{(i)} & \text{局所的に } n \text{ 次元 Euclid 空間と同相} \\ \text{(ii)} & \text{可微分 } (: C^\infty \text{級}) \end{cases}$$

より詳しく言えば, topological space M に対して, 次の条件をみたす M の open covering (開被覆) $\{(U_\alpha, \alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が付随している:

$$\begin{cases} \text{(o)} & \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha = M \quad \& \quad U_\alpha : \text{open set} \subset M \quad (\alpha\in\mathcal{A}). \\ \text{(i)} & \forall\alpha\in\mathcal{A} \text{ に対して,} \\ & \quad \alpha : \underset{\substack{\cap \\ M}}{U_\alpha} \longrightarrow \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{\alpha(U_\alpha)} \quad : \text{homeomorphism (同相写像)} \\ \text{(ii)} & (U_\alpha, \alpha),\ (U_\beta, \beta) \quad (\alpha, \beta\in\mathcal{A}) \text{ に対して, } U_\alpha\cap U_\beta \neq \phi \text{ の時,} \\ & \quad \beta\circ\alpha^{-1} : \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)} \longrightarrow \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{\beta(U_\alpha\cap U_\beta)} \quad : C^\infty\text{-map} \end{cases}$$

ここで, 組 (U_α, α) を <u>chart</u> (地図, または座標近傍) といい, 開被覆 $\mathcal{A} \equiv \{(U_\alpha, \alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ (これを $(U_\alpha, \alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ と書く) を M の <u>atlas</u> (地図帳, または座標近傍系) という。

今, M に対して別の atlas $\mathcal{A}' \equiv (W_\beta, \beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ が与えられ, $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ が異なる場合の扱いは次のようにする。

<u>定義</u>　　$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ が <u>同値</u> ($\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ と書く) であるとは,

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ の合併 $\{(U_\alpha, \alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}, (W_\beta, \beta)_{\beta \in \mathcal{B}}\}$ も M の atlas となることをいう。 即ち, $U_\alpha \cap W_\beta \neq \phi$ の時,

$$\beta \circ \alpha^{-1} : \alpha(U_\alpha \cap W_\beta) \longrightarrow \beta(U_\alpha \cap W_\beta) \quad : C^\infty\text{-map}$$

$\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ は M の atlases に対する同値関係であり, 同値な atlases は M 上に同じ可微分構造を定義するものと考える。 そこで topological space M に対して, このような atlases の同値類を付随させたものを改めて M と表わし, この M を n 次元 C^∞-多様体と考える。

<u>定義</u> n 次元 C^∞-多様体 M 上の <u>density</u> ρ とは次の条件をみたす system $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ のことをいう:

(i) M の atlas $\mathcal{A} = (U_\alpha, \alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ が1つある。 簡単の為に $U \equiv U_\alpha$, $(U, \alpha) \equiv (U_\alpha, \alpha)$ とおき,

$$\alpha : U \ni x \longrightarrow \alpha(x) = u \in \alpha(U)$$

と表わす。 また $u = (u^1, \cdots, u^n)$ を $\mathbb{R}^n$ の Euclid 座標とする。

(ii) $^\forall \alpha \in \mathcal{A}$ に対して, ρ_α : (signed) function on $\alpha(U)$ s.t.

① 可測 (w.r.t. Lebesgue measure), ② locally integrable,

i.e., $\displaystyle\int_K |\rho_\alpha(u)| du < +\infty$ for $^\forall K$: compact $\subset \alpha(U)$.

(iii) <u>Consistency</u> : $(U, \alpha), (W, \beta) \in \mathcal{A}$, $U \cap W \neq \phi$ の時,

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$\alpha(U)$ および $\beta(W)$ 上の関数 $\rho_\alpha(u)$ および $\rho_\beta(w)$ に対して，
$\alpha(U\cap W)$ および $\beta(U\cap W)$ 上で

$$\rho_\alpha(u) = \left|\frac{\partial(w^1, \cdots, w^n)}{\partial(u^1, \cdots, u^n)}\right| \cdot \rho_\beta(w) \qquad \left(w = \beta\circ\alpha^{-1}(u)\right)$$

さて上で与えられた density $\rho = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対応して，M上の (signed) measure μ を定義しよう。　我々の目的は，ρ を用いて，${}^\forall A$: Borel set $\subset M$，に対して $\mu(A)$ を定義することである。

[1°]　まず，予備的考察から始める。　今，density ρ の条件(iii)における (U, α)，(W, β) が与えられている時，

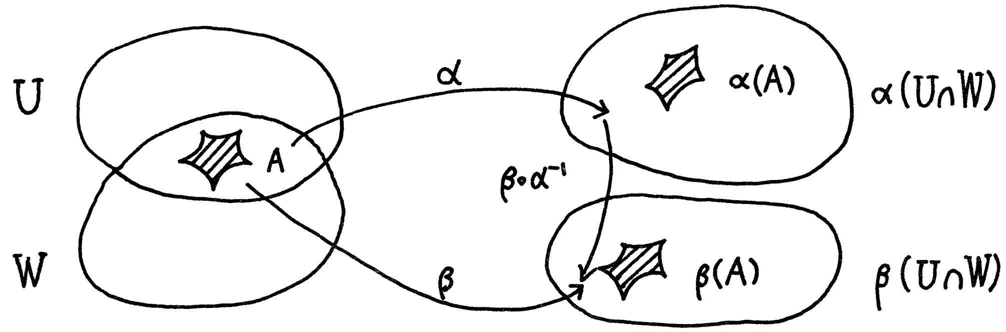
$$\mu(A) \equiv \int_{\alpha(A)} \rho_\alpha(u)du \qquad \text{for } {}^\forall A : \text{Borel set} \subset U\cap W$$

とおく。　積分の変数変換公式と条件(iii)から，

$$\mu(A) = \int_{\beta\circ\alpha^{-1}(\alpha(A))} \rho_\alpha(u) \cdot \left|\frac{\partial(u^1, \cdots, u^n)}{\partial(w^1, \cdots, w^n)}\right| dw = \int_{\beta(A)} \rho_\beta(w)dw$$

従って，$U\cap W$ 上では $\alpha(A)$ と $\beta(A)$ のどちらを用いて定義しても $\mu(A)$ は同じ値をとる。　条件(iii)は M上の universal な measure を構成する際の charts の間のつなぎがうまくいくことを保障している。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121



[2°] 一方，density $\rho=\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ に対して，densities $|\rho|$, ρ_+, ρ_- が定義される。 即ち，$|\rho|\equiv\{|\rho_\alpha(u)|\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $\rho_\pm\equiv\{(\rho_\alpha(u))_\pm\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ とおく。 ただし，$x\in\mathbb{R}$ に対して，$x_\pm\equiv(|x|\pm x)/2$ とおく。

この時，density ρ の条件(iii)から，

$$|\rho_\alpha(u)|=\left|\frac{\partial(w)}{\partial(u)}\right|\cdot|\rho_\beta(w)|,\qquad (\rho_\alpha(u))_\pm=\left|\frac{\partial(w)}{\partial(u)}\right|\cdot(\rho_\beta(w))_\pm$$

従って，$|\rho|$, ρ_+, ρ_- も densities になる。 そこで densities ρ_+, ρ_- から measures μ_+, μ_- on M を定義し，これを用いて

$$\mu\equiv\mu_+-\mu_-\qquad(:\text{ signed measure on } M)$$

を定義する方針で議論をすすめることにする。

[3°] さて，しばらくは $\rho\geqq0$，即ち $\forall\alpha\in\mathcal{A}$ に対して $\rho_\alpha(u)\geqq0$ と仮定する。 今，(U,α) において，

$$\mu(A)\equiv\int_{\alpha(A)}\rho_\alpha(u)\,du\quad\text{for } {}^\forall A:\text{Borel set}\subset U$$

と定義すると，μ は U 上の measure（: σ-additive）になる。更に μ は Radon measure on U となる。即ち，

$$\begin{cases} ① & {}^{\forall}K : \text{compact} \subset U, \text{ に対して，} \mu(K) < +\infty . \\ ② & \text{内正則性：} \quad \mu(A) = \sup\{\mu(K) ; K \text{ compact} \subset A\}. \end{cases}$$

異なる charts (U, α), (W, β) に対して，上の方法で構成された measures μ_α, μ_β がうまくつなぎ合わされることは [1°] の議論によって保障される。以上をまとめると，次のように述べることができる。集合 X は $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ と表わされる。ここで，次のことが成立つ：

$$\begin{cases} ① & (X_\alpha, \mathcal{B}_\alpha, \mu_\alpha),\ \alpha \in \mathcal{A} : \text{measure spaces.} \\ ② & X_\alpha \cap X_\beta \equiv D \quad (\alpha, \beta \in \mathcal{A}) \text{ とおく時，} \\ & D \cap \mathcal{B}_\alpha \equiv \{D \cap A ; A \in \mathcal{B}_\alpha\}, \quad D \cap \mathcal{B}_\beta \equiv \{D \cap A ; A \in \mathcal{B}_\beta\} \\ & \text{は } \sigma\text{-algebras on } D \text{ であり，} D \cap \mathcal{B}_\alpha = D \cap \mathcal{B}_\beta \text{ かつ } \subset \mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta . \\ ③ & \mu_\alpha|_D = \mu_\beta|_D \qquad ({}^{\forall}\alpha, \beta \in \mathcal{A}) \end{cases}$$

従ってこの時，X 上に σ-algebra $\mathcal{B}$ が定義され，更に

$$(X, \mathcal{B}, \mu) : \text{measure space, s.t. } \mu|_{X_\alpha} = \mu_\alpha \quad ({}^{\forall}\alpha \in \mathcal{A})$$

が定義される。（一般的には，このような X 上の measure μ は一意的に定まらない［井上・注］）

[4°] かくして，M 上に Borel sets からなる σ-algebra $\mathcal{B}$ と universal な measure μ が構成され，measure space $(M, \mathcal{B}, \mu)$ が構成される。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

更に, μ は Radon measure on M となる。

実際, ① $^\forall K$: compact $\subset M$, に対して, $\mu(K)<+\infty$:

$K=\overset{m}{\underset{i=1}{\dot{\bigcup}}} K_i$ (: disjoint union) と表わせて,

$\exists (U_i, \alpha_i)\in \mathcal{A}$ ($1\leq i\leq m$) such that

$\overline{K_i}$: compact $\subset U_i$ ($1\leq i\leq m$)

$$\therefore\ \mu(K)=\sum_{i=1}^{m}\mu(K_i)\leq\sum_{i=1}^{m}\mu(\overline{K_i})=\sum_{i=1}^{m}\int_{\alpha_i(\overline{K_i})}\rho_{\alpha_i}(u)du<+\infty .$$

② μ の内正則性 :　　キチンとやるのはウルサイ!

[5°] 一般の density ρ に対しては, [2°] で述べたように, 非負の densities $|\rho|$, ρ_+, ρ_- を定義し, それぞれに対応する measures $|\mu|$, μ_+, μ_- on M をつくる。　この時更に, Borel set $A\subset M$ に対して, $|\mu|(A)<+\infty$ ならば

$$\mu(A)\equiv\mu_+(A)-\mu_-(A)$$

とおけば, この μ は $(M,\mathcal{B})$ 上の σ-additive signed measure になる。　ただし, μ が σ-additive であるとは次の条件が成立つことをいう:

$$\left[\begin{array}{l} A_i\in\mathcal{B}\ (i\geq 1)\ \text{disjoint},\ A=\overset{\infty}{\underset{i=1}{\dot{\bigcup}}}A_i,\ |\mu|(A)<+\infty\ \text{ならば} \\ \qquad \mu(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) \end{array}\right]$$

([注] μ の構成についての詳しい議論は, 丸山先生のノートを参照せよ。)

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

第9講　多様体上の flow

ここでは，多様体上の flow と，それに付随する vector 場および微分方程式について述べる。　まず，多様体の間の可微分写像および微分同相写像の定義を与えよう。

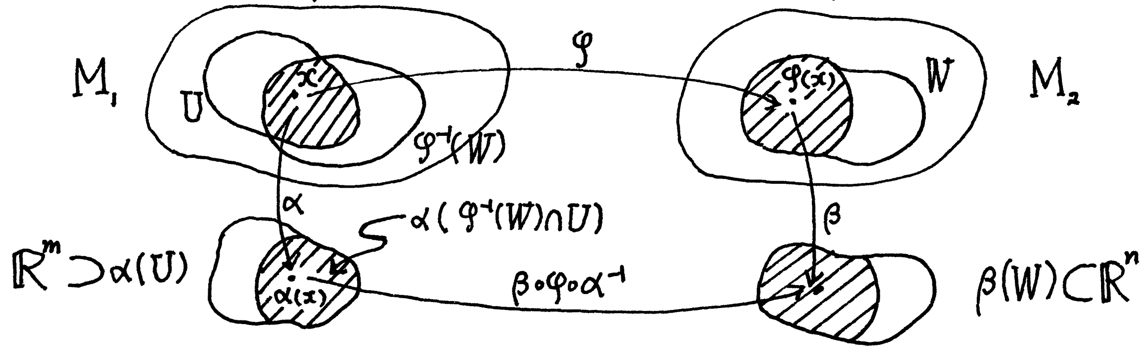
定義　M_1，M_2 ： C^∞-多様体，$\dim M_1 = m$，$\dim M_2 = n$，
$\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$　into map　とする。

φ ： 可微分 (differentiable)

$\Longleftrightarrow$

(i)　φ ： 連続

(ii)　${}^\forall x \in M_1$ に対して，${}^\exists(U, \alpha)$，${}^\exists(W, \beta)$ ： M_1，M_2 の charts such that　$x \in U$，$\varphi(x) \in W$，かつ
$\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$ ： $\alpha(\varphi^{-1}(W) \cap U) \longrightarrow \beta(W)$ が $\alpha(x)$ で可微分
[即ち，座標の各成分が可微分]



Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

注意　写像 φ の可微分性の定義は，(U,α) および (W,β) のとり方に依存しない。

定義　M_1, M_2 : n 次元 C^∞-多様体

$\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ 　1対1，onto map とする。

更に，φ, φ^{-1} がともに可微分の時，φ を（従って φ^{-1} も）微分同相（diffeomorphism）という。

Proposition 9.1　M_1, M_2 : n 次元 C^∞-多様体，$\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ 微分同相，とする。

この時，$^\exists\{(U_\alpha,\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$，$^\exists\{(W_\beta,\beta)\}_{\beta\in\mathcal{A}}$: M_1, M_2 の atlases such that　$\varphi(U_\alpha) = W_\alpha$　for $^\forall\alpha\in\mathcal{A}$.

Proof.　M_1, M_2 の atlases を $\mathcal{a}_1, \mathcal{a}_2$ とする時，$\varphi^{-1}(\mathcal{a}_2), \varphi(\mathcal{a}_1)$ は M_1, M_2 の開被覆である。　従って，$(\mathcal{a}_1, \varphi^{-1}(\mathcal{a}_2)), (\mathcal{a}_2, \varphi(\mathcal{a}_1))$ は M_1, M_2 の開被覆となる。　そこで，

$$(\mathcal{a}_1 \vee \varphi^{-1}(\mathcal{a}_2)) \equiv \{A\cap B \;;\; A\in\mathcal{a}_1,\ B\in\varphi^{-1}(\mathcal{a}_2)\}$$

$$(\mathcal{a}_2 \vee \varphi(\mathcal{a}_1)) \equiv \{A\cap B \;;\; A\in\mathcal{a}_2,\ B\in\varphi(\mathcal{a}_1)\}$$

とおけば，これらはそれぞれ M_1, M_2 の開被覆であり，

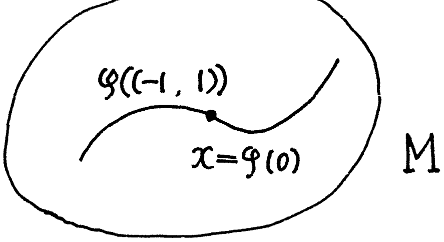
$\varphi : (\mathcal{a}_1 \vee \varphi^{-1}(\mathcal{a}_2)) \longrightarrow (\mathcal{a}_2 \vee \varphi(\mathcal{a}_1))$　1対1，onto

となる。　次に，$^\forall U \in (\mathcal{a}_1 \vee \varphi^{-1}(\mathcal{a}_2))$ に付随する写像 α については，$U = A \cap B$ ［ $A \in \mathcal{a}_1$， $B \in \varphi^{-1}(\mathcal{a}_2)$ ］と表わされる時，A に付随した元々の写像 α を使うことにする。　この時，$(\mathcal{a}_1 \vee \varphi^{-1}(\mathcal{a}_2))$ にこのような写像をつけたものは M_1 の atlas になる。　更に，この M_1 の atlas を φ で M_2 上に移したものは M_2 上の求める atlas となる。　［証終］

さて，多様体上の vector 場について考えよう。　M を n 次元 C^∞-多様体とし，　$x \in M$，

$$\varphi : (-1,\ 1) \longrightarrow M \qquad \text{into map},$$

$(-1,\ 1)$ を多様体とみて，写像 $\varphi(t)$ は可微分とする。　また，$\varphi(0) = x$ とする。　この時，$\varphi((-1,\ 1))$ は x を通る M 上の曲線となる。



(i)　f を M 上の可微分，実数値関数とする。　この時，多様体上の可微分写像の合成 $f \circ \varphi(t) \equiv f(\varphi(t))$ は可微分関数となる。　そこで，

$$D_\varphi f(x) \equiv \frac{d}{dt} f \circ \varphi(t) \Big|_{t=0} \quad (\in \mathbb{R})$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

とおいて，$D_\varphi f(x)$ を f の，x における，φ に沿っての微分(係数) という。 対応

$$D_\varphi : f \longrightarrow D_\varphi f(x)$$

は f の linear functional となる。 また，ψ を x を通る別の曲線とする時，$D_\varphi = D_\psi$ ，即ち任意の可微分実数値関数 f に対して，

$$D_\varphi f(x) = D_\psi f(x)$$

が成立つならば，φ と ψ は同値であるという。

(ii) 次に，D_φ の表現を与えよう。 (U, α) を M の chart とし，$x \in U$ とする。

$$\Phi(t) = (\Phi^1(t), \cdots, \Phi^n(t)) \equiv \alpha \circ \varphi(t), \quad -1 < t < 1,$$

とおく時，Φ は $\alpha(x)$ を通る $\alpha(U)$ 上の曲線となる。 そこで，f を M 上の可微分，実数値関数として，

$$f_\alpha(u) \equiv f \circ \alpha^{-1}(u), \qquad u \in \alpha(U),$$

とおく時，f_α は $\alpha(U)$ 上の可微分関数で，

$$f_\alpha \circ \Phi(t) = f \circ \varphi(t), \qquad -1 < t < 1$$

故に，

$$D_\varphi f(x) = \frac{d}{dt} f \circ \varphi(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f_\alpha \circ \Phi(t)\Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d\Phi^i}{dt}(0) \frac{\partial f_\alpha}{\partial u^i} = \left(\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) f_\alpha$$

従って，linear functional $D_\varphi : f \longrightarrow D_\varphi f(x)$ の表現は微分

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

作用素 $\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ によって，更に $(a^1, \cdots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ によって与えられる。　この対応において，特に x における微分

$$\frac{\partial}{\partial u^i}(x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

は，それぞれ $(0, \cdots, 0, \overset{i}{\check{1}}, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ によって与えられ，これらは x における1階微分作用素の全体からなる vector space の basis になっている。　この vector space を，<u>x における接空間</u>（tangent space）といい，

$$T_x(M)$$

と書く。　また，D_φ を <u>x における曲線 φ の接 vector</u> という。

<u>定義</u>　M を n 次元 C^∞-多様体とする。

$\varphi = \{\varphi_t\}_{-\infty<t<\infty}$: M 上の <u>flow</u>（または，<u>dynamical system</u>）

$\Longleftrightarrow$

φ: 1-parameter family of diffeomorphisms φ_t on M such that

$$\left\{\begin{array}{ll} & \varphi(x,t) \equiv \varphi_t(x), \quad x \in M,\ t \in \mathbb{R} \text{ とおく時，} \\ \text{(i)} & \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s} \quad (\forall s, t \in \mathbb{R}), \quad \varphi_0 \text{ は } M \text{ の恒等変換.} \\ & \left[\begin{array}{ll} \text{i.e.,} & \varphi(\varphi(x,s),t) = \varphi(x,t+s), \quad (\forall x \in M, \ \forall s,t \in \mathbb{R}) \\ & \varphi(x,0) = x, \quad (\forall x \in M) \end{array}\right] \\ \text{(ii)} & \varphi(x,t) : (x,t) \text{ について可微分.} \\ & \left[\ \text{i.e.,} \quad \varphi : M \times \mathbb{R} \ni (x,t) \longrightarrow \varphi(x,t) \in M \ : \text{可微分}\ \right] \end{array}\right.$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

M 上の flow $\varphi=\{\varphi_t\}_{-\infty<t<\infty}$ が与えられた時，$^\forall x\in M$ に対して，写像

$$(-\infty,\ \infty)\ni t\longrightarrow\varphi_t(x)=\varphi(x,t)\in M$$

は x を通る可微分曲線になっている。 そこで，この曲線の x における接 vector を $X(x)$ と表わす。 更に，vector 場

$$X:M\ni x\longrightarrow X(x)\in T_x(M)$$

を <u>flow φ の生成作用素</u>（infinitesimal generator）という。

次に，生成作用素 $\{X(x),\ x\in M\}$ の座標表現を用いて，flow φ の微分方程式を導こう。 $f(x)$ を M 上の可微分，実数値関数とする。 (U,α) を M の chart とし，$x\in U$，$\alpha(x)=u$ とする。 また，$f_\alpha(u)\equiv f\circ\alpha^{-1}(u)$，$u\in\alpha(U)$，とおく。 まず，$^\exists\varepsilon>0$ s.t. $\varphi(x,t)\in U$ for $-\varepsilon<t<\varepsilon$，であることに注意して，

$$\Phi(u,t)\equiv\alpha\circ\varphi(\alpha^{-1}(u),\ t)\qquad\text{for }-\varepsilon<t<\varepsilon$$

とおく。 この時，$\varphi_t^*f(x)\equiv f\circ\varphi_t(x)=f_\alpha\circ\Phi(u,t)$ より，

$$\left.\frac{d\varphi_t^*f(x)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}(f_\alpha\circ\Phi(u,t))\right|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{d}{dt}\Phi^i(u,t)\right|_{t=0}\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial u^i}$$

故に，　$X_\alpha(u)\equiv\left.\frac{d}{dt}\Phi(u,t)\right|_{t=0}$ とおく時，

$$\left.\frac{d\varphi_t^*f(x)}{dt}\right|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}X_\alpha^i(u)\frac{\partial f_\alpha}{\partial u^i}$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

従って，$X_\alpha(u)=(X_\alpha^1(u),\cdots,X_\alpha^n(u))$ は接vector $X(x)$ の表現を与えている。 ここで，$\left.\dfrac{d\varphi_t^* f}{dt}\right|_{t=0}$ を f のLie微分（または，flow φ に沿っての微分）といい，$D_X f$ と表わす。 即ち，

$$D_X f \equiv \left.\frac{d\varphi_t^* f}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^* f - f}{t}$$

この座標表現は，上の議論から次式で与えられる：

$$(D_X f)_\alpha(u) = \sum_{i=1}^n X_\alpha^i(u)\frac{\partial f_\alpha}{\partial u^i}$$

さて，flow φ の条件(i)より，$\Phi(u,0)=u$ であり，$|s|,|t|$ が十分小の時，

$$\Phi(\Phi(u,t),s)=\Phi(u,s+t)$$

従って，この両辺の $s=0$ における微分を計算すると，次式を得る：

$$(*)\qquad \frac{d}{dt}\Phi(u,t) = X_\alpha(\Phi(u,t)) \qquad \text{for } -\varepsilon<t<\varepsilon.$$

注意1　第7講では $\mathbb{R}^n$ の領域上のflowを与えるものとして，微分方程式(*)を考えた。 多様体 M 上のflowの場合に上で得られた(*)は，$\Phi(u,t)=(\Phi^1(u,t),\cdots,\Phi^n(u,t))$ および $X_\alpha(u)=(X_\alpha^1(u),\cdots,X_\alpha^n(u))$ を，それぞれ $x=(x^1,\cdots,x^n)$ および $\vec{X}(x)=(X^1(x),\cdots,X^n(x))$ と読み替えれば，(*)に相当する微分方程式であることがわかる。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

注意2　多様体M上のflow $\{\varphi(x,t)\}_{-\infty<t<\infty}$ は，第4および第7講で考察した測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 上のflow $\{T_t x\}_{-\infty<t<\infty}$ と同じものである。

注意3　第8講では多様体M上のdensity $\rho=\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が与えられた時，M上のRadon measure μ が定義されることを示した。
この μ がM上のflow $\{\varphi(x,t)\}_{-\infty<t<\infty}$ に対する不変測度になる為には，$\forall\alpha\in\mathcal{A}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\rho_\alpha(u) X_\alpha^i(u))}{\partial u^i} = 0 \qquad \text{on } \alpha(U)$$

が成立つことが必要十分である。［Liouvilleの定理，第11講参照］
第7講で述べたLiouvilleの定理（Theorem 7.1）では，Mが$\mathbb{R}^n$の領域Ωとして与えられ，μがLebesgue measureとして与えられていた。従ってこの場合はMのchart (U,α) は1つで，$\rho_\alpha(u)\equiv 1$ となる。
故に上の条件は，次のように表わされる：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^i(u)}{\partial u^i} = 0 \qquad \text{on } \Omega$$

これは，既にTheorem 7.1で与えられた結果と一致する。

［第5講～第9講 ＝ 1979年11月6日～11月8日］

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

第10講　densityの構成と引戻し

この講義の最終目標である多様体上のflowに対するLiouvilleの定理を論じる前に，ここでは多様体上のdensityの概念について必要な補足をする。　第8講で述べたように，n次元C^∞-多様体M上のdensity $\rho=\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$が与えられた時，$\rho$を"density"にもつM上のRadon measure μが定義される。　ここで，$\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$はM上のatlas $\mathcal{a}=\{(U,\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$に付随した，$\alpha(U)$上の局所可積分関数$\rho_\alpha(u)$のsystemであって，$U\cap W\neq\phi$の時に，charts (U,α)，(W,β)の間に，次の"つなぎの条件"を仮定したものである：$\alpha(U\cap W)$および$\beta(U\cap W)$上で，

$$\rho_\alpha(u)=\left|\det\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^j}\right)\right|\cdot\rho_\beta(w)\qquad\left(w=\beta\circ\alpha^{-1}(u)\right)$$

ただし，$\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^j}\right)\equiv J_{\beta\circ\alpha^{-1}}(u)$　$\left(:\ \beta\circ\alpha^{-1}\text{の}u\text{におけるJacobian matrix}\right)$

<u>Proposition 10.1</u>　system $\rho=\{\rho_x,\ x\in M\}$は，実数値関数$\rho_x(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$\xi_i\in T_x(M)$　$(1\leqslant i\leqslant n)$，で与えられ，次の2条件をみたすものとする：

$\Big\{$ (i)　ρは<u>可微分</u>，即ち，chart (U,α)，$x\in U$，$\alpha(x)=u$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$\begin{cases} \text{に対して,}\ x \longrightarrow \rho_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial u^n}(x)\right) \text{ は可微分 } (C^1 \text{とせよ}). \\ \text{(ii)} \quad \rho_x(A\xi_1, \cdots, A\xi_n) = |\det A| \cdot \rho_x(\xi_1, \cdots, \xi_n) \\ \qquad \text{for } \forall A : T_x(M) \longrightarrow T_x(M) \text{ linear into map.} \end{cases}$$

この時, chart (U, α), $x \in U$, $\alpha(x) = u$ に対して

$$(※) \qquad \rho_\alpha(u) \equiv \rho_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial u^n}(x)\right)$$

とおけば, $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ は可微分な M 上の density となる。

逆に, M 上の可微分な density $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ が任意に与えられた時, 等式(※)を用いて system $\rho = \{\rho_x,\ x \in M\}$, $\rho_x(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $\xi_i \in T_x(M)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ を定義するならば, ρ は条件(i), (ii)をみたす。

<u>Proof.</u> (※)で定義された$\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$が, density に対する"つなぎの条件"をみたすことのみ示す。[他の部分の証明は省略] まず, 別の chart (W, β), $U \cap W \neq \phi$, をとる時,

$$\frac{\partial}{\partial u^i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w^j}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial w^j}(x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

に注意して, linear map $A : T_x(M) \longrightarrow T_x(M)$ として, 式

$$A\frac{\partial}{\partial w^i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w^j}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial w^j}(x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

で与えられるものを考える。 この時, 条件(ii)により,

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$\rho_\alpha(u) = \rho_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial u^n}(x)\right) = \rho_x\left(A\frac{\partial}{\partial w^1}(x), \cdots, A\frac{\partial}{\partial w^n}(x)\right)$$

$$= |\det A| \cdot \rho_x\left(\frac{\partial}{\partial w^1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial w^n}(x)\right)$$

$$= \left|\det\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right)\right| \cdot \rho_\beta(w) = \left|\det\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^j}\right)\right| \cdot \rho_\beta(w) \qquad \text{[証終]}$$

Pull back of ρ （ρの引戻し）

M_1, M_2 を n 次元 C^∞-多様体とし，

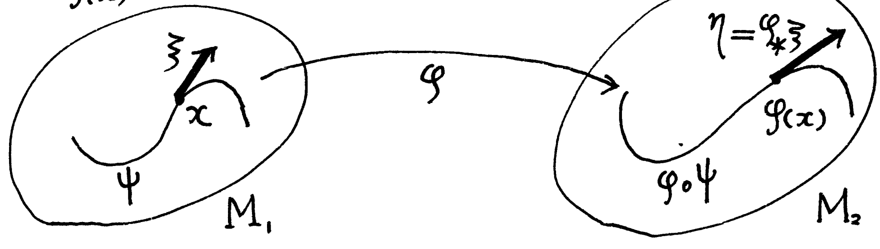
$$\varphi : M_1 \longrightarrow M_2 \quad \text{onto diffeomorphism}$$

とする。　今，M_2 上の density ρ が与えられた時，$\varphi^*\rho$ と表わされる M_1 上の density を，<u>φ による ρ の引戻し</u>として定義する。

[1°]　まず，写像 φ から，$\forall x \in M_1$ に対して，

$$\varphi_* : T_x(M_1) \longrightarrow T_{\varphi(x)}(M_2) \quad \text{onto, linear map}$$

が自然に誘導される。　即ち，$\xi \in T_x(M_1)$ が，x を通る M_1 上の可微分曲線 ψ の x における接 vector として与えられている場合，$\varphi(x)$ を通る M_2 上の可微分曲線 $\varphi\circ\psi$ の $\varphi(x)$ における接 vector $\eta \in T_{\varphi(x)}(M_2)$ を $\varphi_*\xi$ と表わす。



[2°] M_2 上の density ρ が system $\rho=\{\rho_y,\ y\in M_2\}$ として与えられているとする。 そこで, $\forall \xi_i\in T_x(M_1)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ に対して,

$$(\varphi^*\rho)_x(\xi_1,\cdots,\xi_n)\equiv \rho_{\varphi(x)}(\varphi_*\xi_1,\cdots,\varphi_*\xi_n),\quad x\in M_1,$$

とおく。 この時, system $\varphi^*\rho=\{(\varphi^*\rho)_x,\ x\in M_1\}$ は M_1 上の density になる。 [証略]

[3°] 次に, density $\sigma\equiv\varphi^*\rho$ の座標表現を与えよう。 Proposition 9.1 により, $\exists\{(U_\alpha,\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $\exists\{(W_\beta,\beta)\}_{\beta\in\mathcal{A}}$: M_1, M_2 の atlases s.t. $\varphi(U_\alpha)=W_\alpha$ for $\forall\alpha\in\mathcal{A}$. 従って, 簡単の為に, 今, (U,α), (W,β) を M_1, M_2 の charts で $\varphi(U)=W$ をみたすものとする。 $x\in U$ に対して, $u=\alpha(x)$, $w=\beta\circ\varphi\circ\alpha^{-1}(u)$ と表わす時,

$$\beta\circ\varphi\circ\alpha^{-1}:\alpha(U)\longrightarrow\beta(W)\quad \text{onto diffeomorphism}$$

従って,

$$\frac{\partial}{\partial u^i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial}{\partial w^j}\qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

を用いることにより, 次式を得る:

$$\varphi_*\Big(\frac{\partial}{\partial u^i}(x)\Big)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial}{\partial w^j}(\varphi(x))\qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

さて, Proposition 10.1 により, $\sigma=\varphi^*\rho$ に対して,

$$\sigma_\alpha(u)=\sigma_x\Big(\frac{\partial}{\partial u^1}(x),\cdots,\frac{\partial}{\partial u^n}(x)\Big)$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$=(\varphi^*\rho)_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x),\cdots,\frac{\partial}{\partial u^n}(x)\right)$$
$$=\rho_{\varphi(x)}\left(\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x)\right),\cdots,\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^n}(x)\right)\right)$$

ここで，linear map $A: T_{\varphi(x)}(M_2)\longrightarrow T_{\varphi(x)}(M_2)$ として，式

$$A\frac{\partial}{\partial w^i}(\varphi(x))=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial}{\partial w^j}(\varphi(x))\qquad(1\leqslant i\leqslant n)$$

で与えられるものを考える。　この時，Proposition 10.1 の条件(ii)により，

$$\sigma_\alpha(u)=\rho_{\varphi(x)}\left(A\frac{\partial}{\partial w^1}(\varphi(x)),\cdots,A\frac{\partial}{\partial w^n}(\varphi(x))\right)$$

$$=|\det A|\cdot\rho_{\varphi(x)}\left(\frac{\partial}{\partial w^1}(\varphi(x)),\cdots,\frac{\partial}{\partial w^n}(\varphi(x))\right)$$

$$\therefore\quad \sigma_\alpha(u)=\left|\det\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^j}\right)\right|\cdot\rho_\beta(w)$$

<u>Proposition 10.2</u>　M_1, M_2 を n 次元 C^∞-多様体とし，

$\varphi: M_1\longrightarrow M_2$　onto diffeomorphism

とする。　M_2 上の density ρ の φ による引戻しを $\varphi^*\rho$ とする。

この時，

$$\int_A\varphi^*\rho=\int_{\varphi(A)}\rho\qquad \text{if } A\in\mathcal{B}(M_1)\ \&\ \int_{\varphi(A)}|\rho|<\infty.$$

<u>Proof.</u>　A は M_1 の compact set と仮定して示せば十分。

この時，Proposition 9.1 を用いて，次のことが示される：

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$\exists\{(U_k,\alpha_k)\}_{1\leqq k\leqq N}, \exists\{(W_k,\beta_k)\}_{1\leqq k\leqq N}$: M_1, M_2 の charts s.t.

$$\varphi(U_k)=W_k \qquad (1\leqq k\leqq N)$$

更に, $\exists\{A_k\}_{1\leqq k\leqq N}\subset\mathcal{B}(M_1)$ s.t.

$$\overline{A_k}\subset U_k, \quad \varphi(\overline{A_k})\subset W_k \qquad (1\leqq k\leqq N),$$

$$A=\bigcup_{k=1}^{N}A_k \qquad (\text{: disjoint union})$$

従って, 各 k $(1\leqq k\leqq N)$ に対して,

$$\int_{A_k}\varphi^*\rho=\int_{\varphi(A_k)}\rho$$

を示せばよい。 ここで, $\sigma\equiv\varphi^*\rho$ とすると, [3°] より,

$$\sigma_{\alpha_k}(u)=\left|\det\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^j}\right)\right|\cdot\rho_{\beta_k}(w), \quad \left(w=\beta_k\circ\varphi\circ\alpha_k^{-1}(u)\right)$$

であったから, 積分の変数変換公式を用いると,

$$\begin{aligned}\int_{A_k}\varphi^*\rho&=\int_{A_k}\sigma=\int_{\alpha_k(A_k)}\sigma_{\alpha_k}(u)\,du\\&=\int_{(\beta_k\circ\varphi\circ\alpha_k^{-1})(\alpha_k(A_k))}\rho_{\beta_k}(w)\,dw\\&=\int_{\beta_k(\varphi(A_k))}\rho_{\beta_k}(w)\,dw\\&=\int_{\varphi(A_k)}\rho\end{aligned}$$

[証終]

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

第11講　一般化されたLiouvilleの定理

これ迄の準備によって，多様体上のflowに関するLiouvilleの定理を論じることが可能になった。証明方法は本質的には第7講で取扱った$\mathbb{R}^n$の領域Ω上のflowの場合と同じである。以下，Mをn次元C^∞-多様体，$\{(U,\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$を$M$のatlas，$\rho$を$M$上の可微分なdensity，$\mu$を$\rho$によって定義される$M$上のRadon measureとする。また，$\{\varphi_t\}_{-\infty<t<\infty}$を$M$上のflowとし，$X$をその生成作用素とする。$M$のchart (U,α)におけるXの座標表現$X_\alpha(u)=(X_\alpha^1(u),\cdots,X_\alpha^n(u))$は，$\varphi(x,t)\equiv\varphi_t(x)$，$\Phi(u,t)\equiv\alpha\circ\varphi(\alpha^{-1}(u),t)$とおく時，

$$X_\alpha(u)=\frac{d}{dt}\Phi(u,t)\Big|_{t=0}$$

で与えられる。この時，次の命題により，第9講で述べたM上の関数$f(x)$のLie微分D_Xfと同様にして，M上のdensity ρのLie微分$D_X\rho$を定義することができる。

Proposition 11.1　M上のdensity ρに対して，極限

$$D_X\rho\equiv\lim_{t\to0}\frac{\varphi_t^*\rho-\rho}{t}$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

が存在して，$D_X\rho$ は M 上の density になる。更に，M の chart (U,α) における $D_X\rho$ の座標表現は次式で与えられる:

$$(D_X\rho)_\alpha(u)=div\,(\rho_\alpha(u)X_\alpha(u))\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\rho_\alpha(u)X_\alpha^i(u)\right)$$

<u>定義</u>　$D_X\rho$ を $div(\rho X)$ と書くこともある。

<u>Proof.</u>　(U,α) を M の chart とし，V を M の開集合で $\overline{V}$ が compact かつ $\overline{V}\subset U$ をみたすものとする。この時，φ の連続性から，十分小さな $\varepsilon>0$ に対して，$\varphi_t(V)\subset U$ for $\forall\,|t|<\varepsilon$，とできる。
しばらく，$|t|<\varepsilon$ なる t を固定する。この時，

$$\varphi_t : V\longrightarrow\varphi_t(V)\quad \text{onto diffeomorphism.}$$

今，$x\in V$，$y=\varphi_t(x)$ とし，$u=\alpha(x)$ とおく。更に，M の chart (W,β) を (U,α) と同一にとって，$w=\alpha(y)$ とおく時 $w=\alpha\circ\varphi_t\circ\alpha^{-1}(u)$ と表わされる。第10講で述べたことから，

$$(\varphi_t^*\rho)_\alpha(u)=(\varphi_t^*\rho)_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x),\cdots,\frac{\partial}{\partial u^n}(x)\right)$$

$$=\rho_{\varphi_t(x)}\left((\varphi_t)_*\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x)\right),\cdots,(\varphi_t)_*\left(\frac{\partial}{\partial u^n}(x)\right)\right)$$

$$=\left|\det\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right)\right|\cdot\rho_y\left(\frac{\partial}{\partial w^1}(y),\cdots,\frac{\partial}{\partial w^n}(y)\right)$$

$$=\left|\det\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right)\right|\cdot\rho_y\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(y),\cdots,\frac{\partial}{\partial u^n}(y)\right)$$

ここで，$\det\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right)$ を計算しよう。　まず，第9講で示したように，flow $\{\varphi_t\}$ のみたす微分方程式は

$$\frac{d}{dt}\Phi(u,t) = X_\alpha(\Phi(u,t)) \quad ; \quad \Phi(u,0) = u$$

で与えられる。　そこで，$u(t) \equiv \Phi(u,t)$ とおき，X_α を単に X と表わすことにすれば，この微分方程式は

$$\frac{d}{dt}u(t) = X(u(t)) \quad ; \quad u(0) = u$$

と表わされる。　従って，積分によって次式を得る：

$$u(t) = u + \int_0^t X(u(s))ds$$
$$= \left(u^1 + \int_0^t X^1(u(s))ds, \cdots, u^j + \int_0^t X^j(u(s))ds, \cdots, u^n + \int_0^t X^n(u(s))ds\right)$$

即ち，$W = u(t)$ は，この積分方程式の解として，初期条件 u に非線形に依存している。　これを成分の形で表わすと，

$$w^j = u^j + \int_0^t X^j(u(s))ds \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

だから，$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$，とする時，

$$\frac{\partial w^j}{\partial u^i} = \delta_i^j + \int_0^t \frac{\partial}{\partial u^i}X^j(u(s))ds$$

更に，$X_k^j(u(s)) \equiv \frac{\partial X^j}{\partial u^k}(u(s)) \quad (1 \leqslant j, k \leqslant n)$ とおく時，

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial u^i} X^j(u(s))ds = \sum_{k=1}^n \int_0^t X^j_k(u(s)) \frac{\partial}{\partial u^i} \Phi^k(u,s)ds$$

従って，

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \Phi^k(u,s) = \frac{\partial w^k}{\partial u^i}(s) = \delta^k_i + O(s) \qquad (s \to 0)$$

に注意することにより，$t \to 0$ の時，

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{\partial}{\partial u^i} X^j(u(s))ds = \int_0^t X^j_i(u(s))ds + O(t^2) \\ \displaystyle\int_0^t \frac{\partial}{\partial u^i} X^j(u(s))ds = O(t) \end{cases}$$

結局，$t \to 0$ の時，

$$\det\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right) = 1 + \sum_{i=1}^n \int_0^t X^i_i(u(s))ds + O(t^2)$$

故に，$|t|$ が十分小の時は $\det\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right) > 0$ であって，

$$\frac{1}{t}\left\{\det\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right) - 1\right\} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^n \int_0^t X^i_i(u(s))ds + O(t)$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial u^i}(u) \qquad (t \to 0)$$

従って，$(\varphi_t^* \rho - \rho)/t$ の座標表現は，次のようになる：

$$\left(\frac{\varphi_t^*\rho - \rho}{t}\right)_\alpha (u) = \frac{1}{t}\left(\left|\det\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right)\right| - 1\right) \cdot \rho_y\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(y), \cdots, \frac{\partial}{\partial u^n}(y)\right)$$

$$+ \frac{1}{t}\left\{\rho_y\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(y), \cdots, \frac{\partial}{\partial u^n}(y)\right) - \rho_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial u^n}(x)\right)\right\}$$

ここで，$t \to 0$ の時 $y = \varphi_t(x) \to x$，に注意して，

$$(\text{右辺第1項}) \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i_\alpha}{\partial u^i}(u)\right) \cdot \rho_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial u^n}(x)\right) \quad (t \to 0).$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$(\text{右辺第2項}) \longrightarrow D_X \rho_\alpha(u) = \sum_{i=1}^{n} X_\alpha^i(u) \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial u^i}(u) \qquad (t \to 0)$$

ここで，$D_X \rho_\alpha(u)$ は $\rho_\alpha(\alpha(x))$，$x \in U$，の Lie 微分を表わす。これらを併せて，

$$\left(\frac{\varphi_t^* \rho - \rho}{t}\right)_\alpha(u) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left\{ \rho_\alpha(u) \frac{\partial X_\alpha^i}{\partial u^i}(u) + X_\alpha^i(u) \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial u^i}(u) \right\} \quad (t \to 0)$$

故に，極限 $D_X \rho \equiv \lim_{t \to 0} (\varphi_t^* \rho - \rho)/t$ の存在が示され，更に開集合 V の任意性から，

$$(D_X \rho)_\alpha(u) = \mathrm{div}\,(\rho_\alpha(u) X_\alpha(u)) \qquad \text{for } {}^\forall u \in \alpha(U)$$

を得る。　最後に，$D_X \rho = \{ (D_X \rho)_\alpha \}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ が M 上の density であることを示そう。　今，A は compact で $A \subset U$ とし，$t=0$ における $\mu(\varphi_t(A))$ の微分を考える。　仮定から，$\mu(\varphi_t(A))$ は C^1 級であることに注意して，$t=0$ における右微分を考えれば十分である。　t は正で，十分小とする。　Proposition 10.2 より

$$\frac{1}{t}\{ \mu(\varphi_t(A)) - \mu(\varphi_0(A)) \} = \frac{1}{t}\left\{ \int_{\varphi_t(A)} \rho - \int_{\varphi_0(A)} \rho \right\}$$

$$= \frac{1}{t}\left\{ \int_A \varphi_t^* \rho - \int_A \rho \right\} = \int_A \frac{\varphi_t^* \rho - \rho}{t}$$

$$= \int_{\alpha(A)} \left(\frac{\varphi_t^* \rho - \rho}{t} \right)_\alpha (u)\, du$$

$$\longrightarrow \int_{\alpha(A)} (D_X \rho)_\alpha(u)\, du \qquad (t \to 0)$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

よって，$$\frac{d}{dt}\mu(\varphi_t(A))\Big|_{t=0}=\int_{\alpha(A)}(D_X\rho)_\alpha(u)du$$

ここで，左辺は座標近傍のとり方によらない量であることに注意すれば，別のchart (W,β) に対して，$A\subset W$ の時

$$\int_{\alpha(A)}(D_X\rho)_\alpha(u)du=\int_{\beta(A)}(D_X\rho)_\beta(w)dw$$
$$=\int_{\alpha(A)}(D_X\rho)_\beta(\beta\circ\alpha^{-1}(u))\cdot\left|\frac{\partial(w)}{\partial(u)}\right|du$$

故に，Aの任意性から，$\alpha(U\cap W)$ および $\beta(U\cap W)$ 上で，

$$(D_X\rho)_\alpha(u)=\left|\frac{\partial(w^1,\cdots,w^n)}{\partial(u^1,\cdots,u^n)}\right|\cdot(D_X\rho)_\beta(w),\quad(w=\beta\circ\alpha^{-1}(u))$$

よって $D_X\rho$ は M 上の density である。 【証終】

<u>Remark</u>　Mの任意のcompact集合Aに対して，

$$\frac{d}{dt}\mu(\varphi_t(A))\Big|_{t=0}=\int_A D_X\rho$$

<u>実際</u>，　Proposition 10.2 の証明と同様にして，$^\exists\{(U_k,\alpha_k)\}_{1\leq k\leq N}$：Mのcharts，$^\exists\{A_k\}_{1\leq k\leq N}\subset\mathcal{B}(M)$ such that

$$A=\bigcup_{k=1}^{N}A_k\quad(\text{: disjoint union}),\ \overline{A_k}\subset U_k\quad(1\leq k\leq N)$$

この時，$\varphi_t(A)=\bigcup_{k=1}^{N}\varphi_t(A_k)$ (: disjoint union) だから，

$$\frac{d}{dt}\mu(\varphi_t(A))\Big|_{t=0}=\sum_{k=1}^{N}\frac{d}{dt}\mu(\varphi_t(A_k))\Big|_{t=0}$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$= \sum_{k=1}^{N} \int_{\alpha_k(A_k)} (D_X \rho)_{\alpha_k}(u)\,du$$

$$= \int_A D_X \rho$$

［証終］

<u>Theorem 11.1</u> （Liouville）

μ が $\{\varphi_t\}$-不変である為の必要十分条件は

$$\mathrm{div}(\rho X) = 0 \qquad \text{on } M$$

<u>Proof.</u> flow の性質 $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ と上の Remark により，

μ が $\{\varphi_t\}$-不変

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\mu(\varphi_t(A)) = 0 \qquad \text{for } {}^\forall t \in \mathbb{R},\ {}^\forall A \text{ compact} \subset M$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left.\frac{d}{dt}\mu(\varphi_t(A))\right|_{t=0} = 0 \qquad \text{for } {}^\forall A \text{ compact} \subset M$$

i.e. $\mathrm{div}(\rho X) = 0$ on M ［証終］

この講義を終えるにあたり，一つの注意を与えておこう。エルゴード定理は，エルゴード理論，即ち力学系の理論の重要な基礎となっている。 この定理は工学および物理学等に応用され

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

るが，その応用に際しては“応用可能性”を厳しく検討しなければならない。 エルゴード理論そのものは，数学的理論として，抽象的構成がなされており，全く正しい。 しかし応用の場においては“適用限界”があることを銘記しなければならない。 例えば応用の場では，大数の法則（Birkhoff のエルゴード定理）や力学系の理論を，その結果だけ適用していることがよくあるが，実際の現象を扱うには，エルゴード性とか，またはそれよりも強い混合性とか，可微分性についての検討が必要である。 最後に，エルゴード理論の適用例として，騒音の計測について述べておく。

<u>騒音の計測</u>　騒音計によって，<u>騒音レベル</u> $L(t)$ が測定される。$L(t)$ は時刻 t と共に変動する。 そこで，時間間隔 $0 \leq t \leq T$ における<u>等価騒音レベル</u> L_{eq} を次式で定義する（$0 < T < \infty$）:

$$L_{eq} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{T}\int_0^T 10^{\frac{L(t)}{10}}\,dt\right)$$

応用上は，T が大きい時の L_{eq} を求めることが重要である。 さて，通常，$\{L(t)\}$ は<u>定常過程</u>としてモデル化することができる。 即ち，$\{L(t)\}$ は確率過程であって，次の条件をみたす： $\forall k \geq 1$ ，$\forall t_1, \ldots, t_k$ ，$\forall h$ に対して，

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$(L(t_1), \cdots, L(t_k))$ と $(L(t_1+h), \cdots, L(t_k+h))$ は同一分布。

この時，定常過程の一般論から，$\{L(t)\}$ を次のように表わすことができる。 $^\exists(\Omega, \mathcal{F}, P)$：確率空間， $^\exists L$：確率変数 on Ω

$^\exists T_t$：保測変換 on Ω s.t. $L(t) = L(T_t\omega)$.

今， $a \equiv (\log 10)/10$ とおけば

$$\frac{1}{T}\int_0^T 10^{\frac{L(t)}{10}}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \exp(a\cdot L(t))dt \doteqdot \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp(a\cdot L(k))$$

従って，<u>$\{T_t\}$ がエルゴード的ならば</u>［：これが問題！］，エルゴード定理（Theorem 4.1）により， T が大きい時，

$$\frac{1}{T}\int_0^T \exp(a\cdot L(t))dt \doteqdot E[\exp(a\cdot L(0))]$$

これで L_{eq} の計算ができる。 この時，L_{eq} は定数値確率変数となる。

通常，$\{L(t)\}$ の分布が Gauss 分布で近似できる。 今，$L(0)$ が，平均 m，分散 σ^2 の Gauss 分布に従うものとすると，Gauss 分布の Laplace 変換は計算できて，

$$E[\exp(a\cdot L(0))] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = \exp\left(am + \frac{a^2}{2}\sigma^2\right)$$

故に， $L_{eq} \doteqdot 10\cdot\log_{10}\exp\left(am + \frac{a^2}{2}\sigma^2\right)$ となり， $a = (\log 10)/10$ より，

$$L_{eq} = m + \sigma^2\cdot\frac{\log 10}{20} \quad (\text{理論値})$$

を得る。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

我々は，定常過程 $\{L(t)\}$ に対応する L_{eq} の理論値を上で求めたが，実際の測定値 $\{L(0), L(1), L(2), \cdots\}$ に対しては，中央値を L_{50}，標本分散を S^2 とする時，

$$L_{eq} = L_{50} + S^2 \cdot \frac{\log 10}{20} \qquad (\text{測定値})$$

を得る。　これらは，$\{L(t)\}$ が Gaussian system である場合には推定値として妥当なものである。

【第10講～第11講＝1980年2月12日～2月13日】

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

参考書

［1］ P.Billingsley: "Ergodic Theory and Information", John Wiley & Sons, 1965.

［2］ K.L.Chung: "A Course in Probability Theory", Harcourt, Brace & World, 1968.

［3］ N.A.Friedman: "Introduction to Ergodic Theory", Springer, Lecture Notes in Math., 458 (1975).

［4］ P.R.Halmos: "Lectures on Ergodic Theory", Math. Soc. Japan, 1956.

［5］ E.Hopf: "Ergodentheorie", Springer, 1937.

［6］ L.H.Loomis & S.Sternberg: "Advanced Calculus", Addison-Wesley, 1968.

［7］ J.Neveu: "Mathematical Fundations of the Calculus of Probability, Holden-day, 1965.

［8］ V.V. Nemytskii & V.V. Stepanov: "Qualitative Theory of Differential Equations", Princeton Univ. Press, 1960.

［9］ 西尾真喜子:「確率論」, 実教出版, 1978.

［10］ 十時東生:「エルゴード理論入門」, 共立出版, 1971.

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

丸山儀四郎先生・自筆ノート

（信州大学集中講義，１９８０年２月）

§ measure with density on a manifold

M n-dim. differentiable (C^∞-class) manifold

(i) locally Euclidean of dim. n

(ii) differentiable

more precisely

M is a topological space (and Hausdorff) $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha = M$

$\mathcal{A} = \{ (\overset{U_\alpha}{\overline{U}}, \alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \}$ open covering of M.

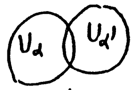
$\alpha : U \longrightarrow \alpha(U) \subset \mathbb{R}^n$, homeomorphism

(U, α), $(\underset{W_\beta}{W}, \beta) \in \mathcal{A}$

(1) $\beta\circ\alpha^{-1} : \alpha(U\cap W) \longrightarrow \beta(U\cap W)$ is C^∞.

$\alpha(U) \ni u = (u^1, \dots, u^n)$, $\beta(W) \ni w = (w^1, \dots, w^n)$

$w^i = w^i(u^1, , u^n)$, $1 \le i \le n$



local coordinates

$\mathcal{A}$ atlas, (U, α) chart.

$\alpha(U_\alpha\cap U_{\alpha'}) \underset{\alpha\circ\alpha'^{-1}}{\overset{\alpha'\circ\alpha^{-1}}{\longleftrightarrow}} \alpha'(U_\alpha\cap U_{\alpha'})$ both C^∞,

(Def) $\mathcal{A}' = \{ (U', \alpha') \}$ is another atlas

$\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ equivalent $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\{ (U, \alpha), (U', \alpha') \}$ is also an atlas.

(Def) M associated with equivalent atlases is called a differentiable manifold.

(V_λ, λ) open covering

($(\underset{W_{\alpha,\lambda}}{U_\alpha\cap V_\lambda})$, $\underset{\beta\alpha}{\alpha}$) is an atlas (α,λ)

($W_{\alpha,\lambda}$, α)

<u>Density ρ on M</u> — measure μ on M

(i) $\mathcal{A}$ an atlas. $= \{ (U, \alpha) \}$, ρ assigns ρ_α

$\rho = \{ (\rho_\alpha, U, \alpha) \}$, ρ_α is a locally integrable measurable function on $\alpha(U)$, $\rho_\alpha(u)$

$$\int_K |\rho_\alpha| \underbrace{du^1 \cdots du^n}_{du} < \infty, \quad K \subset \alpha(U) \text{ compact}$$

$J_{\beta\circ\alpha^{-1}}$ (Jacobian matrix)

(ii) $\rho_\alpha(u) = \rho_\beta(w) \left| \dfrac{\partial(w^1 \cdots w^n)}{\partial(u^1, u^n)} \right|$ on $\alpha(U\cap W)$ & $\beta(U\cap W)$

through (1), for $\forall$ $(U, \alpha), (W, \beta) \in \mathcal{A}$

Easily

$\left(\begin{matrix}\mathcal{B}_\alpha, \mu_\alpha \\ X_\alpha, \alpha\in\mathcal{A}\end{matrix}\right)$ ρ_α locally integrable on $\alpha(U\cap W)$

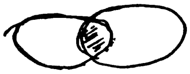
$\longleftrightarrow \rho_\beta$ is so on $\beta(U\cap W)$

$X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$

$\forall\alpha,\beta$: A Borel $\subset \alpha(U\cap W)$ integrable, i.e.

$D = X_\alpha\cap X_\beta \in \mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta$ $\int_A |\rho_\alpha|\, du < \infty \longleftrightarrow \beta\circ\alpha^{-1}(A) = B \subset \beta(U\cap W)$

$\underline{D\cap\mathcal{B}_\alpha} = D\cap\mathcal{B}_\beta$ is integrable, more precisely,



$$\int_A |\rho_\alpha|\, du = \int_B |\rho_\beta|\, dw < \infty.$$

$\mu_\alpha|_{D\cap\mathcal{B}_\alpha} = \mu_\beta|_{D\cap\mathcal{B}_\beta}$

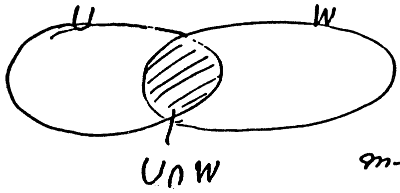
$|\rho| = \{(|\rho_\alpha|, U, \alpha)\}$ is also a density

$\left\{\begin{matrix}\rho_\pm = \{(\rho_\alpha)_\pm, U, \alpha\} \\ |\rho| = \{|\rho_\alpha|, U, \alpha\} \\ \text{are densities.} \\ |\mu|,\ \mu_\pm\end{matrix}\right.$

more over

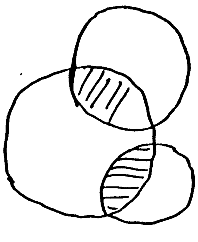
~~measure~~ $\displaystyle\int_A \rho_\alpha\, du = \int_A \rho_\beta(w) \left|\frac{\partial(w)}{\partial(u)}\right| du = \int_B \rho_\beta\, dw$

(1) This implies that ρ_α, ρ_β supplies the same distribution on $U\cap W$



$\Longrightarrow \exists$ a universal measure (μ) ~~distribution~~ on M

measure of $A \equiv \int_A \rho$
$\mu(A)$ synonymously used



~~To define more precisely~~

We can see that

$\int_K |\rho| < \infty$ for $\forall$ compact K.

Systematic way of assigning the measure of a compact K.

K compact $\subset M \Longrightarrow \exists\ K = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ (disjoint union)

~~$K\cap U$~~ $K\cap U \neq \phi$, finite # of α's

A's are Borel with compact $\bar{A}_i$, $\exists$ $\mathcal{A}$ atlas, $(U_i, \alpha_i) \in \mathcal{A}$ such that $\bar{A}_i \subset U_i$.

now $\displaystyle\int_K \rho = \sum_1^k \int_{A_i} \rho$ — finite

which is finite & independent of such partition.

Borel A on M is "integrable" $\underset{\text{def}}{\longleftrightarrow}$ $\sup_{\substack{K\subset A\\ \text{compact}}} \int_K |\rho| < \infty \equiv \int_A |\rho|$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

3

Determination of Radon measure.

$\mathcal{F}$: the family of Borel sets subsets of M

A practically useful σ-algebra is

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(M) = \{ A : A \in \mathcal{F},\ \exists$ an atlas $\mathcal{A}$, such that $\exists\ (U_n, \alpha_n) \in \mathcal{A}$. $A \subset \bigcup_{n \geq 1} U_n \}$?

If an atlas $\mathcal{A}$ satisfies the properties in $\{\ \}$, any other atlas does, so that those properties are independent of the choice of an atlas.

Using continuation condition (1), p. 2,

A becomes a measure space (σ-finite)

$$\infty \geq \int_A |\rho| = \sup_{K \text{ compact}} \int_K |\rho| ,$$

(1) A is split into a denumerable disjoint union of Borel sets

$$A = \bigcup_{k \geq 1} A_k$$

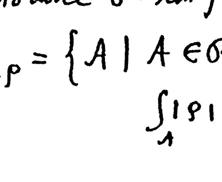
every A_k is contained in a chart (U, α)

(ii) $\int_{A_k} |\rho| < \infty$

$$\int_{A_k} \rho = \int_{\alpha(A_k)} \rho_\alpha \, du \quad \text{(coordinate representation)}$$

Thus A is σ-finite

$\mathcal{B}(M)$ becomes a σ-ring



σ-additivity, $A_k \in \mathcal{F}$, disjoint

$A = \bigcup_k A_k$, $|\mu|(A)$

$\Rightarrow \quad \mu(A) = \sum_k \mu(A_k)$

Introduce σ-ring

$$\mathcal{R}_\rho = \{ A \mid A \in \mathcal{B}(M),\ \int_A |\rho| < \infty \}$$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

Any compact set on M is integrable, §4
i.e., ρ induces a Radon measure

(Def) (differentiable map)

M_1, M_2 m, n-dimen. manifolds

$\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ differentiable iff

(i) φ is continuous (into-map)

(ii) $\forall x \in M_1$, $\exists (U_\alpha, \alpha)$ & (W_β, β) charts of M_1, M_2 such that
$x \in U$, $\varphi(x) \in W$, $U = U_\alpha$, $W = W_\beta$

$\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1} : \alpha(U) \longrightarrow \beta(W)$ is differentiable at $u = \alpha(x)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad \|$
this is a def meaningful around x $\quad C^\infty$ $\quad$ around $\alpha(\varphi^{-1}(W) \cap U)$
, because φ is continuous

(Def) (diffeo).

M_1, M_2 as above but $m = n$

$\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$, 1-1, onto-map.

φ & φ^{-1} are differentiable

(Remark) φ is a diffeo from M_1 onto M_2

$\Longrightarrow \exists$ atlases $\{(U, \alpha)\}$ on M_1, & $\{(W, \beta)\}$ on M_2
such that $\qquad \varphi(U) = W$.

<u>differentiable curve</u> on M.

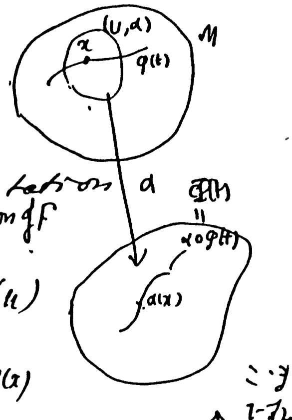
Suppose $\varphi(t) : (-1, 1) \longrightarrow M$, $\varphi(0) = x$, differentiable

f on M, real-valued, differentiable.

φ is called a differentiable curve throug x.

$\Longrightarrow \varphi^* f = f \circ \varphi$ is a differentiable real-valued ft on $(-1,1)$

$$\mathcal{D}_\varphi(f) = \frac{d(\varphi^* f)}{dt}\Big|_{t=0}$$



$f \longrightarrow D_\varphi(f)$ is a linear functional

We are looking for its coordinates representation

(U, α) chart, $x \in U$, $\alpha(x) = u$ — Representation of f

$f_\alpha \circ \Phi(t) = \varphi^* f(t) = f \circ \varphi(t)$

$\Phi(t) = \alpha \circ \varphi(t)$, $f_\alpha(u) = (f \circ \alpha^{-1})(u)$

$$\Longrightarrow \quad D_\varphi(f) = \frac{d}{dt} f_\alpha(\Phi(t))\Big|_{t=0}, \quad u = \alpha(x)$$

$$= \frac{d\Phi^1(0)}{dt} \frac{\partial f_\alpha(u)}{\partial u^1} + \cdots + \frac{d\Phi^n(0)}{dt} \frac{\partial f_\alpha(u)}{\partial u^n} \quad \text{on } \alpha(U)$$

ここまで
1-7A
11A

So that

$$D\varphi = \text{diff. op. } a^1\frac{\partial}{\partial u^1} + \cdots + a^n\frac{\partial}{\partial u^n}, \quad a^k = \frac{dI^k(0)}{dt}$$

$$\sim (a^1, \cdots, a^n)$$

Let $D\psi \sim (b^1, \cdots, b^n)$

$D\varphi = D\psi$ iff $a^i = b^i$ $(1 \leq i \leq n)$

under this identification, i.e. equivalence relation.

$D\varphi$ becomes a vector space, which is identified with R^n, ~~...~~ or more effectively the ~~...~~ vector space of diff. operators

$$\left\{ a^1\frac{\partial}{\partial u^1} + \cdots + a^n\frac{\partial}{\partial u^n}, \ (a^1, \ldots, a^n) \in R^n \right\}$$

In the last representation,

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = 1 \times \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

form a basis.

Terminology

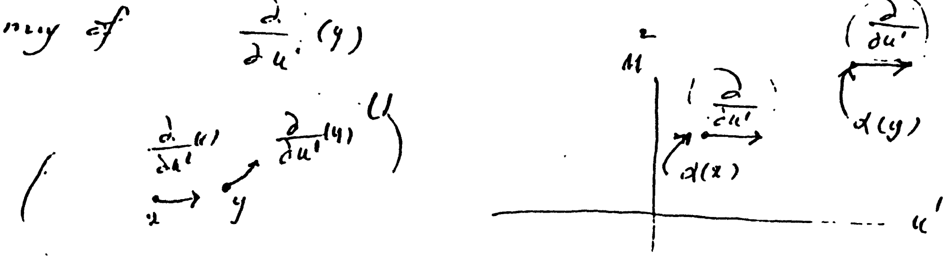
$D\varphi$ = tangent vector to φ at x

The above vector spaces of $D\varphi$ associated with the above equivalence is called the tangent space of M at x, denoted as $T_x(M)$.

The element of $T_x(M)$ corresponding to $\frac{\partial}{\partial u^i}$ will be denoted by

$$\frac{\partial}{\partial u^i}(x)$$

In this notation, if $y \in U$, we understand the meaning of $\frac{\partial}{\partial u^i}(y)$



Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

The Flow of the dynamical system

a one-para family (group) of diffeo on M, $\{\varphi_t\}$,

$\varphi(x,t) = \varphi_t(x) = \varphi_x(t)$, $x \in M$

$-\infty < t < \infty$

(i) $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ or

$\varphi(\varphi(s,x), t) = \varphi(s+t, x)$

φ_0 identity $\varphi(x,0) = x$

(ii) $\varphi(t,x)$ is differentiable in (t,x) C^1 ...

Then $\varphi_x(t)$ being a diff. curve through x

$\exists$ tangent to $\varphi_x(t)$ at $x = X(x) \in T_x(M)$.

Generally speaking we think of the situation

$X : M \ni x \longrightarrow X(x) \in T_x(M)$

a "vector field".

$D_X f(x)$

The vector field generated by $\{\varphi_t\}$ is called the infinitesimal generator of the flow

$\frac{d f(\varphi_t(x))}{dt}\Big|_{t=0}$ $= X(x) f$ $= D_X f(x)$

Coordinate rep. of the infinitesimal generator or the diff. equation governing the flow

(U, α), $x \in U$, $\alpha(x) = u$

$\frac{d f_\alpha(\Phi(u,t))}{dt}\Big|_0 = X_\alpha(u) f_\alpha = \sum X^i_\alpha(u) \frac{\partial f_\alpha}{\partial u^i}$

Put $\Phi(u,t) = \alpha \circ \varphi(\alpha^{-1}(u), t)$ then by (i)

$\Phi(\Phi(u,s), t) = \Phi(u, s+t)$

So that, if we write

$X_\alpha(u) = \frac{d}{dt}\Phi(u,0)$

$a^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \cdots + a^n \frac{\partial}{\partial u^n}$

$\varphi(t) \to \Phi(t)$

$\varphi_t(x) \to \Phi(u,t)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{d\Phi(u,t)}{dt} = X_\alpha(\Phi(u,t)) \\ \Phi(u,0) = u \end{cases}$$

d. e. describing the flow

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

Generation of density 第7

$\rho = \{\rho_x, x \in M\}$, $\rho_x(\xi_1, \dots, \xi_n)$ real-valued, $\xi_i \in T_x(M)$.

(i) ρ is differentiable meaning that

$x \to \rho_x(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \dots)$ is differentiable C^r etc.

(ii) $\rho_x(A\xi_1, \dots, A\xi_n) = |\det A|\, \rho_x(\xi_1, \dots, \xi_n)$ (consistency of the def)

for $\forall$ $A: T_x(M) \longrightarrow T_x(M)$ (linear into-map)

(Probably this ~~and~~ amounts to saying that
$\rho_x(\xi_1, \dots) = \rho(x)|\det(\xi_1, \dots, \xi_n)|$)

$\Rightarrow$ chart (U, α), $x \in U$, $\alpha(x) = u$ assigned ρ_α

(*) $\rho_\alpha(u) \equiv \rho_x(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \dots)$ とおけば

$\rho = \{\rho_\alpha\}$ is a differentiable ~~chart~~ density

ここで $\frac{1}{\text{1}}$ density は かくして得られる(前記)

(Proof) Take another chart (coordinate neighborhood) (W, β)

$$\rho_\alpha(u) \equiv \rho_x(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \dots) = \rho_x(\dots, \sum_j \frac{\partial w^j}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial w^j}(x), \dots)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_j \frac{\partial}{\partial w^j}\frac{\partial w^j}{\partial u^i}$$

notation 不備

$$= |\cancel{\det(\frac{\partial w^i}{\partial u^j})}|\ \rho_x(\frac{\partial}{\partial w^1}(x), \dots) = |J_{\beta\circ\alpha^{-1}}(u)|\, \rho_\beta(w)$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{|\det(\frac{\partial w^i}{\partial u^j})|}_{J_{\beta\circ\alpha^{-1}}(u)}$$

Jacobian matrix

i.e. $\rho_\alpha(u) = |J_{\beta\circ\alpha^{-1}}(u)|\,\rho_\beta(w)$ Q.E.D.

(*) (Notation) $f(x)$ a function on M, through the map $\alpha(x) = u$, of the chart (U, α) we may & shall write
$f_\alpha(u) = f(x)$

$J_{\beta\circ\alpha^{-1}}$

$dw^i = \sum_j \left(\frac{\partial w^i}{\partial u^j}\right) du^j$

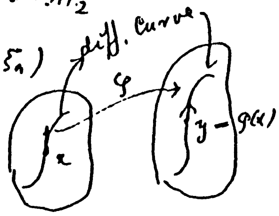
Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

Pull back ρ (ひきもどし)

(Def) $\varphi : M_1 \to M_2$ diffeomorphism, ρ on M_2

$$(\varphi^*\rho)_x(\xi_1, \dots, \xi_n) = \rho_{\varphi(x)}(\varphi_*\xi_1, \dots, \varphi_*\xi_n)$$

$x \in M_1$, $\xi_i \in T_x(M)$.



Coordinate representation of $\varphi^*\rho$

$\sigma = \varphi^*\rho$, (U, α), (W, β) be charts on M_1, M_2, such that $\varphi(U) = W$. $\varphi(u) = w$

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_j \frac{\partial}{\partial w^j}\frac{\partial w^j}{\partial u^i} = \sum_j \frac{\partial w^j}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial w^j}$$

$$\sigma_\alpha(u) = (\varphi^*\rho)_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \dots\right) = \rho_{\varphi(x)}\left(\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x)\right), \dots\right)$$

(A). φ_*の行列

$$\begin{pmatrix} \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x)\right) \\ \\ \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^n}(x)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial w^n}{\partial u^1} \\ & & \\ \frac{\partial w^1}{\partial u^n} & \cdots & \frac{\partial w^n}{\partial u^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial w^1}(\varphi(x)) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial w^n}(\varphi(x)) \end{pmatrix}$$

$$= \rho_{\varphi(x)}\left(A'\frac{\partial}{\partial w^1}(\varphi(x)), \dots, A'\frac{\partial}{\partial w^n}(y)\right), \quad y = \varphi(x).$$

where A ~~transfo~~ is a lin. map $T_x(M) \to T_x(M)$, whose matrix w.r.to the basis $\frac{\partial}{\partial w^i}(y)$ is $\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^j}\right)$

(1) $$= \left|\cancel{\det}\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right)\right| \rho_{\varphi(x)}\left(\frac{\partial}{\partial w^1}(\varphi(x)), \dots\right)$$

$$= \left|\det\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^j}\right)\right| \rho_\beta(w) \leftarrow u \xleftrightarrow{\varphi} w$$

$y = \varphi(x)$

Prop $\varphi : M_1 \to M_2$ diffeo.

ρ is a locally integrable density

$\Longrightarrow \int \varphi^*\rho = \int \rho$

meaning $\int_A \varphi^*\rho = \int_{\varphi(A)} \rho$, A Borel $\in \mathcal{B}(M)$

$dy_i =$ $\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial}{\partial w^i}\frac{\partial w^i}{\partial u^i}$

φ is "integrable" A w.r.to $\varphi^*\rho \Longleftrightarrow \int_A |\varphi^*\rho| < \infty$

This follows from the considerations on p.3 $\Longleftrightarrow \int_{\varphi(A)} |\rho| < \infty$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

(Proof) $A = \bigcup_{k \geq 1} A_k$ — Borel, compact, (A_k disjoint Borel sets)

$A_k \subset U_k$ — $(U_k, \alpha_k) \in \mathcal{A}_1$ atlas on M_1

$$\updownarrow \varphi \qquad \updownarrow \varphi$$

$(W_k, \beta_k) \in \mathcal{A}_2$ corresponding atlas on M_2

$\varphi(A_k) \subset W_k$

$\sigma = \varphi^* \rho$, $\sigma_\alpha(u) = (\varphi^*\rho)_\alpha(u) = (\varphi^*\rho)_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \dots\right)$

$\alpha(x) = u$

$= \left|\det\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right)\right| \rho_{\varphi(x)}\left(\frac{\partial}{\partial w^1}(\varphi(x)), \dots\right) = \left|\det\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right)\right| \rho_\beta(w)$

$$\Rightarrow \int_{A_k} \varphi^*\rho \;\hat{=}\; \int_{\alpha_k(A_k)} \sigma_\alpha(u)\,du = \int_{\beta_k(\varphi(A_k))} \psi_\beta(w)\,dw \;\hat{=}\; \int_{\varphi(A_k)} \rho$$

Summing up these

$$\Rightarrow \int_A \varphi^*\rho = \int_{\varphi(A)} \rho \qquad \begin{cases} \alpha_k(U_k) \xrightarrow{\varphi} \beta_k(W_k) \\ u \xrightarrow{\varphi} w \;:\; \left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right) \end{cases}$$

$D_X \rho$, X = infinitesimal generator of a flow $\{\varphi_t\}$

$(\varphi_t^*\rho)_x(\xi_1, \dots) = \rho_y((\varphi_t)_* \xi_1, \dots)$, $\xi_i \in T_x(M)$, $y = \varphi_t(x)$

(U, α) is a chart such that

$\varphi_t(x) \in U$, for $|t| < \varepsilon$. $\quad x, y \in U$, $\alpha(x)$, $\alpha(y) = w$

Write $w = \alpha(y)$, t being fixed, $\alpha(x) = u$

$(\varphi_t^*\rho)_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \dots\right) = \rho_y\left((\varphi_t)_* \frac{\partial}{\partial u^1}(x), \dots\right)$

$= \left|\det\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right)\right| \rho_y\left(\frac{\partial}{\partial w^1}(y), \dots\right)$

as before where $W = U$, 同一座標系を用いているから

$\frac{\partial}{\partial w^i}(y) = \frac{\partial}{\partial u^i}(y)$ (両ベクトルは一致)

To compute $\int_A \varphi^t \rho - \int_A \rho$ ← minus preserving $\mu(\varphi_t(A)) = \mu(A)$

10

$\mu(\varphi_t(A)) = \int \rho$, $\varphi = \varphi_t$ $\varphi_t(A)$

$\int_A \varphi^t \rho$ subtraction,

$\mu(A) = \int_A \rho$

(✱) $(\varphi^t \rho)_x \left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \dots\right) - \rho_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \dots\right)$

$= \left(\left|\det\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right)\right| - 1\right) \rho_y\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(y), \dots\right)$

$\varphi_t(A) \subset U$, $|t| \ll 1$

$+ \left(\rho_y\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(y), \dots\right) - \rho_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \dots\right)\right)$

Rewrite in U-coordinates $\alpha \circ \varphi(\alpha^{-1}(u), t)$

$u(t) = \Phi(u,t) = (\alpha \circ \varphi_t)(x)$ $(\alpha(x) = u)$

$\frac{d}{dt}\Phi(u,0) = \frac{d}{dt}(\alpha\circ\varphi_t)(x)\Big|_{t=0} = X(u)$ (suppress α)

flow の 微分方程式

Suppress α, & simply write $X(u)$

$\frac{d}{dt}\Phi(u,t) = X(\Phi(u,t))$

or $\dot{u}(t) = X(u)$ $(u(0) = u)$

$\Rightarrow$ $u(t) = u + \int_0^t X(u(s))\,ds = \left(u^j + \int_0^t X^j(u(s))\,ds\right)$ component-wise

$\Rightarrow \left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right) = \left(\delta^j_i + \int_0^t \frac{\partial}{\partial u^i} X^j(u(s))\,ds\right)$, with a_{ij}, $a_{ij}t$

$\int_0^t \frac{\partial}{\partial u^i} X^j(u(s))\,ds = \sum_k \int_0^t X^j_k(u(s)) \frac{\partial u^k(s)}{\partial u^i}\,ds$

$X^j_k = \frac{\partial X^j}{\partial u^k}(u)$, $\frac{\partial u^k(s)}{\partial u^i} = \delta^k_i + O(s)$ ($|s|$ small)

$\Rightarrow \int_0^t \frac{\partial}{\partial u^i} X^j(u(s))\,ds = \int_0^t X^j_i(u(s))\,ds + O(t^2) = a_{ij}t$

So that, on expanding $\det\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right)$, it is essentially (up to a remainder of higher infinitesimals) diagonal, & one gets

$\det\left(\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\right) = 1 + \sum_i \int_0^t X^i_i(u(s))\,ds + O(t^2) > 0$ ($|t|$ small)

$\begin{vmatrix} 1+a_{11}t & a_{12}t & \cdots \\ t & \cdots & 1+a_{nn}t \end{vmatrix}$

Inserting this into the above expression (✱), i

$\left(\left|\det\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^j}\right)\right| - 1\right)/t \to \sum_i \frac{\partial X^i(u(0))}{\partial u^i}$,

whereas $\rho_y\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(y), \dots\right) \longrightarrow \rho_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(x), \dots\right) = \rho_\alpha(u)$ $(u = \alpha(x))$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

On the other hand, by the definition of Lie-derivation

$$\Big(\rho_y\big(\tfrac{\partial}{\partial u^1}(u),\dots\big) - \rho_x\big(\tfrac{\partial}{\partial u^1}(x),\dots\big)\Big)/t \qquad (11)$$

$$\longrightarrow \underline{D_X\rho_\alpha = \sum X_\alpha^i(u)\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial u^i}}$$

$$\Longrightarrow \Big\{(\varphi_t^*\rho)_x\big(\tfrac{\partial}{\partial u}(x),\dots\big) - \rho_x\big(\tfrac{\partial}{\partial u^1}(x),\dots\big)\Big\}/t$$

$$\longrightarrow \sum\Big(\rho_\alpha(u)\frac{\partial X^i(u)}{\partial u^i} + X^i(u)\frac{\partial\rho_\alpha(u)}{\partial u^i}\Big) = \mathrm{div}(\rho_\alpha X(u))$$
$$= \sum \frac{\partial}{\partial u^i}(\rho_\alpha(u)X^i(u))$$

(Prop) A Borel $(\subset M)$, with compact $\overline{A}$

(0) $\displaystyle \frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(A)}\rho\,\Big|_{t=0} = \int_A D_X\rho$, ρ a ~~smooth~~ differentiable density

where

(1) $\displaystyle D_X\rho = \lim_{t\to0}\frac{\varphi_t^*\rho-\rho}{t}$ exists as a density "given rise to $\rho(\xi_1,\dots,\xi_n)$"

and is given locally by $\mathrm{div}(\rho_\alpha X_\alpha)$

(2) $\displaystyle (D_X\rho)_\alpha = \sum_i \frac{\partial\rho_\alpha X_\alpha^i(u)}{\partial u^i}$ (on $\alpha(U)$)

if $X = (X_\alpha^1,\dots,X_\alpha^n)$ on the chart (U,α)

(Comments) (1) は両辺 density であって、この式では 表示される(2)
量として表示されているが, local にそれによって
$\rho_\alpha^{(u)} = \rho_\alpha\big(\frac{\partial}{\partial u^1}(x),\dots\big)$ に対し

$$(D_X\rho)_\alpha(u) = \sum_i \frac{\partial(\rho_\alpha X_\alpha^i(u))}{\partial u^i}.$$

(0) の正確な意味は

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k \quad (\text{disjoint Borels})$$

compact $\overline{A_k} \subset U_k$, (U_k,α_k) are charts of an atlas (of the same atlas)

$$\int D_X\rho = \sum_k \int_{\overline{B_k}} \frac{\partial(\rho_k X_k^i(u))}{\partial u^i}\,du$$

we set (U_k,α_k) ~~...~~

$\leftarrow \overline{B_k}$ compact , $B_k = \alpha_k(A_k)$ in the above $\overline{B_k} = \alpha_k(\overline{A_k}) \subset \alpha_k(U)$

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

$$\left(\tfrac{d}{dt}\right)\left(\int_{\varphi_t(A)} f - \int_A f\right)/t \qquad (t>0)$$ (15)

$$= \int_A (\varphi_t^* f - f)/t$$

$$= \sum_k \left(\int_{B_k} \frac{\{(\varphi_t^* f)_x(\frac{\partial}{\partial u^i}(x), \cdots) - f_x(\frac{\partial}{\partial u^i}(x), \cdots)\}}{t}\, du \right)$$

$\alpha(x) = u$

$$\longrightarrow \sum_k \int_{B_k} \frac{\partial (f_k X_k^i)}{\partial u^i}\, du$$ QED

In the passage to the limit we have used the arguments on pp 9 ~ 11, and the following facts

~~$\Phi(u,t) = \Phi_\alpha(u,t) = \alpha \circ \varphi_t \circ \alpha^{-1}(u)$~~

$\exists\ \varepsilon > 0$ such that

~~$\Phi(u,t) \in \alpha(U)$~~

$\varphi_t(x) \in U$ if $x \in \overline{A_k}$, $|t| \le \varepsilon$

($\overline{A} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ is metrizable).

Otherwise, there exists $\begin{cases} t_n \to 0, \\ x_n \in \overline{A_k} \end{cases}$ such that $\varphi_{t_n}(x_n) \in U^c = F$ (closed)

Suppose $x_n \longrightarrow x_0 \in \overline{A_k}$ (we may)

$$\varphi_{t_n}(x_n) \longrightarrow \varphi_0(x_0) = x_0 \in \overline{A_k}$$

On the other hand, since

$\varphi_{t_n}(x_n) \in F$

$x_0 \in F$, contradiction.

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

確 率 論 を 語 る

ー 回 顧 と 展 望 ー

丸 山 儀 四 郎

私の専門は大学をでていらい，ずっと確率論です。ここに今日来ている人にも確率論の人が多いわけですが，それ以外の分野の人も居られるので色々の分野からの意見も聞けると思います。

私も来年停年という時期にあり私のような年輩の者からでないと聞けない話があると思いますし，私も特に若い人達におしつけがましくも言っておきたいことがあります。専門が確率論ですのでどうしてもその方面からみた日本の数学の状態ということにならざるをえないので，話に多少偏見があるかもしれません。

私の学生時代から始めます。大学にいるとき自分に適した分野を色々に考えたわけですが，確率論を始めたのは大学を卒業して以後のことです。在学中は色々のものをかじってみました。解析では当時関数論が盛んだったのでその方面のものも大分読みました。その頃輸入されてまもなくであったトポロジーなどもかじりました。しかしなにをやったらよいかわからなかったわけです。

私は数学は好きではあったけれど，色々な分野に接してみて，将来数学でやって行けるかなと自信なく思ったわけです。というのは色々論文を読んでみても，どうしてこんなことが考えられるのかなと驚異を感じまして，自分が本当の意味でとても数学にはいっていけないんじゃないかと感じました。

満州事変とか日支事変とかがおこっていて，そろそろ第２次大戦にさしかかる時期になるのですが，雰囲気も悪く，研究条件も悪く，就職口もなかった。卒業後研究を続けたいと思っていましたが，数学教室に残る希望がみたされず，徴兵にかかることが気になり，北大の物理に再入学しました。そこに１年半おったわけですがほとんど物理の勉強はしませんでした。北大の２年目の後半は物理を退学して数学教室の嘱託という名目で少し手当をもらっていました。その間，割合ゆっくり考える時間があり，確率論に徐々にはいっていったと思います。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

当時は，日本にはドイツから輸入された数学が浸透していたが，その後の研究の停滞というかそんなものがあった時期です。そこにどういう意識のもとに起こったのかわかりませんが，若い人達（助手，助教授，講師）に現代化の動きが起こった。特に中心は，できてまもなくの大阪大学で，吉田耕作先生，中山さん，助手で角谷さん，それから小松先生らによって現代化が行なわれていて，それが若い層にかなり影響を与えていた。私も学生の頃，そのことを知ってこれはしまった阪大に行けばよかったと思ったことがあったのを記憶しています。その阪大の研究成果が伝わってきまして，内容は解りませんでしたが新鮮なものを感じました。

それで確率論に限っていいますとすでに国際的レベルにいくような研究も行なわれていました。確率論としては限られた分野でしたが，エルゴード理論（吉田ー角谷）を中心としてその当時のレベルとしては相当高い成果があがっていました。その頃でていた本というと，ホップの "エルゴード理論"，確率論の本流でいえば，コルモゴロフ，ヒンチンの有名な２つの著書がありました。北大にいた頃，それらを読みました。私が確率論に対して強く受けた印象というのは，ほかの数学にくらべて自然科学のにおいがする，自然科学の影響をうけつつ発展してきているということです。エルゴード理論も，もちろんそうですから非常に魅力を感じまして，これならばなんとかある程度はいっていけそうだと感じました。しかし普通（本流）の確率論というのは、日本ではまだまだ十分研究は行なわれていなかったといっていいんじゃないかと思います。その頃一番強力だった国はソ連だったと思います。アメリカはその時は研究者がいなかったと思います。フランスには伝統がありましたが少数精鋭（レビィ）でした。それにくらべてソ連はコルモゴロフ，ヒンチン，グニェジェンコ，それと若い人達がかなりいて，量的にも質的にも非常に充実していたと思います。

当時の日本の状況ですが，大阪大学でのエルゴード理論の研究というのはちゃんとできあがっていたわけです。その他に確率論専攻者としては，河田（龍）さん，北川先生，それから伊藤（清）さん，私の年代では国沢さんです。北川先生は大阪大学におられる頃から割合応用的な面つまり統計学あるいは，もっと自然科学的な面といっていいかもしれませんが，そういう応用面に関心を持ちながらやっておられた

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

ように思います。伊藤さんは私と1年位しか違わないのですが，早くから確率論にはいられて，当時は内閣統計局におられたと思います。そしてレビィにせまる非常に本格的な研究にとりくんでいることがわかりまして啓発されたわけです。国沢さんは大阪大学で角谷さんなどの影響をうけて確率論にはいったんだと思いますが，ソ連のヒンチンとかグニェジェンコの仕事を非常に詳しく丹念に読んで自分の研究を始め色々な成果をあげられたと思います。

大体，それ位の方々じゃないかと思います。学会のなかでの確率論関係の位置づけはどうしたって低かったといわざるを得ないのです。日本の数学で強い伝統をもっていたのは代数および整数論で，高木先生以来の伝統です。そのほか関数論などにしてもかなりの研究者がいたように思います。それにくらべると確率論は非常に弱い状態であったと思います。だから確率論の教育も，まあ実用数学という形で統計をちょっと教えていたような状態です。

それから戦争にはいるわけです。衣食住などの生活条件ももちろん悪かったわけですが，研究は熱心にやっていた。しかし全体として日本の数学が枯渇していく寒々とした空気を非常に感じました。日本の数学というのは根がないということを，いま思いおこして感じたのを特に強調しておきます。

統計数理研究所というのが文部省付置であるのですが，これは戦争中にできたのです。軍の支持でできました。なんでもなんとか陸軍中将とかが「そりゃ作らにゃあかん」というので一声で決まったという話を聞いています。それはその頃生産管理といいますか，生産と数学との結びつきを当然軍も意識しておったし，統計を生産の方にとりいれて能率をあげようと考えていた，そういうことの反映があったと思います。

だけれども統計数理研究所の人達はそのようなことはほとんどやっていなかったというのが私のみた状況です。私もある期間所員を兼任したことがありますが，ソ連の論文などを読み，みんな好きなことをやっていました。軍はそれほどりこうじゃないから，本当の意味で生産のための研究を管理する能力がなかった。結果的にはそういう自由な面もあったわけです。しかしアメリカは学者を有効に動員したわけです。そして戦時研究のなかで統計を強力に使ったわけですね。それはもちろん秘密だったわけです。そのなかで有名なのはワルドです。彼はルーマニアからアメリカへ亡命した非常に有能な

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

科学者ですが，学問的にも非常に秀れた研究をしながらそれが同時に軍事研究だったわけです。それからウィーナーの自動制御の有名な例がある。

戦争が終ってアメリカの数学雑誌が来てびっくりしたわけですが，戦争中もずっと継続して出ていたわけです。アメリカの進駐軍が方々の図書館にばらまいて東京でも東大とか日比谷の一角にあるセンターあたりにも来ていました。それを東京へくるたびに手で写して，また写さんことにはこっちの数学が始まらないということでした。しかもその内容を見ましても数学を本格的にしかも継続的にやっている，とてもこれはかなわないと感じました。ソ連の雑誌もあんまりはいりませんでしたがどこかで一寸あったのを見たことがあります。やっぱり同様でちゃんと数学研究をやっておりました。そのときに受けた印象ということは日本の数学の自立性といいますかそういうものが一体どうなんだろうかということですね。

それから後，戦後の時間が経過するわけですけれども，若い人達が単に学問というだけでなくもっと社会的背景を考慮した上での学問のあり方も考えながら、端的にいえば自主的研究を始めようということで自分達で組織を作り始めました。それで確率論のほうでは統計の人と一緒になって信州に集まり確か第１回目のＰＳＧ会合をもったわけです。僕はそのときすでに年輩だったので指導的に組織作りの役割を果したというのではなくて大いに賛意を表わしてすぐにメンバーになりました。確率論としてはそれがその後の発展において非常に大きな原動力になったと思います。つまり組織作りができてそのなかで一定の意識をもって数学研究をやっていく。あまり年とった先生に気がねしないで自由にやりました。それが末端では色々まさつを起こしたようです。九大でも運営上の，たとえば科研費の配分をめぐって年輩の先生との意見の違い，対立が起こりました。今から思うとそんな非常識なことはないと思われることについて意見の違いがあったわけです。たとえばその頃科研費といいますと偉い先生の所にきてそれを分かち与えるというような雰囲気が強かった。今はそんなことは確率論の場合はないわけです。

現在，確率論の研究者数というのは多くなって知らない人や名前と顔のあわない人もかなりいます。学会で初めて会う人もいる。戦争にはいった頃にはアメリカの確率の論文も非常に少なくて，ヨーロッパから行ったフェラー，

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

アメリカ育ちのドゥーブ，その２人が指導的な確率論の研究をやっていてそのほかに１～２名いたがその程度の数の人達が論文を書いていましたから，アメリカの数学雑誌にでた確率の論文はかたはしから読んでもたいしたことがありませんでした。ソ連はちょっと数が多くってそうもいかなかったけれども目を通すぐらいなら大体できました。フランスにしても絶対数が少なかった。今になると日本国内の雑誌だけでも目を通すだけでもとてもしんどいわけで，学会でも行って耳ではやいとこ聞いておかないといけない。今の日本の論文数は当時の世界全体の論文数に匹敵する量ではないかと思います。

さて今となって年輩者として感じたこと，日頃思っていることを何か参考になることと思い申しあげます。

一つは日本の数学で伝統が浅いことがなんといっても致命的だと感じていることです。さらに学問をとりいれたときの社会的背景および意図というところにもあると思いますが，たとえば確率論と統計は隣りあっている，非常に近くて境界もないといっていいわけだけれども日本の研究では両方のブランチはあまり接触がない。現在もそうです。ところがアメリカではそういうことはないわけで，先程申しあげたフェラーやドゥーブなども始め統計に関する論文を書いています。たとえばドゥーブは最尤推定量について確率論からみた論文を書いています。それにアメリカの社会的風土というかむしろ生活の問題がかかっているからかも知れないが，社会的問題と数学の結びつきをすんなりやっていくスタイルを持っているわけですね。だからアメリカでは確率論と統計の関係は非常に密接な状態で研究が進んできております。

西欧の学問の輸入期，明治１０年頃の東京帝大（正確にはその前身）のカリキュラムを見たんだけれどもこれは今の中学校のカリキュラムとレベルはそう変わらない。もちろん時代もあるからだが，それにしてもヨーロッパの方がずっと先をいっていたわけですね。ところが１０年位たったときにはもうすでにすくなくとも教育の内容において，大体国際的な水準をいくようなことをやっていたように思うんです。そのスピードたるやものすごいものでやっぱり明治政府の富国強兵のために学問をやらなければいかんという意気ごみを非常に感じます。しかし非常に早く追いつき追い越せということだからどうしても視野が狭くならざるを得なかったという感じがします。だからたとえば数学が他のブランチ，まあ統計

などといわずともすくなくとも自然科学の影響のことを考え，そういう意識を持ちながらやっていくということはヨーロッパなんかと比べたら非常に微弱だったのではないかと思います。それも当時としてまたやむをえない事情があったんじゃないか。伝統ということをいえばポアンカレなんてのは天体力学でもあんな本を書くんだし物理学に対する理解も第1級で，数学をやっているわけです。もっとさかのぼればガウスなんかは応用数学者といってもいいわけです。

私が感じるのは自分はとてもそんなことはできないけれどもやはり数学と社会，自然との結びつきということは非常に大事だということです。そういう結びつきというものを意識し，研究をやっていくことは数学が絶えず新鮮な活力をもって発展していく重要な原動力になるんじゃないか。実際そうしたなかで重要な問題提起がなされるというようなこともあるわけです。

それからもう一つ，現在，外国からみた日本の数学の評価というのは高いということはもちろんですが時々妙なことをいう人がいます。それはいわれてもしょうがないと自分でも思うわけです。たとえばドイツのある学者が日本人というのは ”みがきあげることは非常に上手だ。あるものを最高のとこまでもっていくというそういう事については非常に能力がある。そしてそういう努力をよくやっている”と。そしてそのあともうすこし言ってくれるといいんだけど，そう言われたときに僕はその言われない部分に問題を感じたんです。数学の研究では，いろんな重要な問題を解いていくということ，それから既成の理論を発展させて整備していく，そのなかで秀れた仕事もたくさんあるわけです。難しい解けそうもない問題を解くというのも大切なことですから。いま一つの点は新しい理論の芽になるような方向での研究だと思います。たとえば我々の方面でいうとコルモゴロフなんていうのは典型だと思うんだけれども、みがくというよりもいつも新しいことで論文を書きそれがきっかけでそれからずっとそこでいろんな事が発展していくというそういうきっかけになるような仕事をし，大部分そういうことに精力を費してきた。これは能力の問題もありますが，コルモゴロフほどでなくてもやはりそういう点では日本の数学は確率論に限っても今までは全般的には遅れる面があるんじゃないかと思う。もちろん論文を書かなければ職業として成立しないし就職のこともあるから僕も就職のため

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

に書いたんだけれども，ある程度書いたらやっぱり今度は自分の数学をやろうという気持ちを持つことが必要ではないか。その人の考え方といいますか着想の豊かな研究というのがもし発展していくならば日本の確率論は今でも国際級だと思いますけれども，非常にいいんじゃないか。まあかってのように戦争が始まると”枯渇する”というようなことがないようなそういう根づいた数学になってくれたらなあと思います。

果物にたとえていいますと日本ではなったりんごの実だけに興味を持つ。しかしりんごには幹があり，幹には土壌があり，そこで幹が育って果実ができているというそういうふうに元のほうまでみていくことにちょっと欠けるということを感じます。それは先程述べたような歴史的な見方とも関連しますけれども。

私はある農業経済学者からちょっと聞いたことを憶えているんだけれども，内容的にいいますと農民を３つに分けています。

上農，中農，駄農といっていまして，上農と言うのは篤農家ですぐれた農民で，中農と言うのは普通の農民で，駄農と言うのは駄目な農民で，駄農は米を作る，中農は稲を作る，上農は土を作る。それは一つのたとえです。自分のブランチで言うと，例えばエルゴード理論におけるコルモゴロフの５０代の仕事で情報理論と関係があることですが対象物の複雑さを計量するという考えがあります。対象は色々あるけれども例えば力学系でいうと統計力学で使われているエントロピーという量をうまく使ってエルゴード理論のなかで強力な武器として活かしたわけです。それから図形の複雑性を計量するエントロピー（εーエントロピー），それから論理との関係で，これはあまり良く知らないけれども，コルモゴロフ，マルチンレーフによる研究にcomplexity という考えがあります。それから細かい話になりますがやはりエルゴード理論のほうですけど力学系の近似問題というのがありまして，これはコルモゴロフのやったことを受けついでもっと若い人がやったんだけれども，一般の力学系を簡単な力学系（周期的なもの）で近似する，その近似の速さによって対象の情況を知るという発想でもって力学系を調べる。

私が見たところではこういったことはソ連では自然に着想されるという感じを持っています。というのはうがち過ぎかもしれないけれども帝政時代のチェビシェフ以来の伝統があります。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

チェビシェフはその時代の数学者のなかで，現代のソビエト数学からみた場合に，最も敬意を払われています。いろんな理由がありますがようするに多くの着想が今だに影響を持つようなそういう人だったのです。確率論もやっていました。そのほか関数の近似の問題をやっています。この問題はチェビシェフが起こりでそれ以後ずっと続いていまして少し近年での大家としてはベルンシュテインとかまだまだたくさんいる。その関数の近似の問題にもとの関数を典型的な単純な関数（たとえば多項式や三角多項式）で近似する。その近似の状態によって相手の状況を知るという考え方です。そういう伝統があるわけですから力学系でもそういった着想が割合自然にでてくるんじゃないかという感じがするんです。けれども我々が力学系の論文を見ますとどうしてこんなことを考えたんだろう，うまいこと考えたもんだなあと驚嘆するわけです。

それからコルモゴロフの図形のエントロピーにつきましてもそうですね。複雑な図形を簡単なものでカバーしていく。どの位の個数でカバーできるかというこれは一種の近似なんですね。それによって相手の状況を知る。これらは大体同じような発想になっているわけです。あとは数学者の持っているテクニックの問題です。そういうことで伝統の重みは大変なものでやっぱりいい土壌がそこにあって，どうもうらやましい。

自分でもとても出来ないことをいろいろ言ったわけですがこれで話を終りにします。

以上のような先生のお話のあと，約１時間ほど活発な討論をおこないました。幹事の不手際で討論部分の録音がとれず，当日の討論を詳しく紹介できませんが，ノートに筆記したものからその要旨だけを簡単に記します。

（１）数学と他の分野との関わり

経済学との関わりについて意見がだされ、これを受けて英国，北欧で生物学，経済学，保険が確率・統計理論に大きな影響を与えたことが話されました。たとえばスウェーデンでは保険制度が発達していて，人口が少ないため小サンプル理論が必要とされ，その精密化が行なわれたこと。また制御と確率・統計との関わりもだされました。

（２）「新しい研究の芽となることをやるのは，同感だが，自分では精密化しかやれていない。どうしたらよいか」

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

という参加者からの意見が出され，多くの討論がされた。
①外国でも同じ悩みがあること，ソ連でもイマジネーションの豊かな人は数人で，その後に皆ついていっている。
②数学の各分野および電気工学での日本の伝統がだされたが，学問研究が各分野ごとに輸入され，互いに交渉がないこと。他の科学•技術分野でもそうであり，工学と数学との関係もきわめてうすいこと。そういう点で伝統が浅く土壌がないこと。

（3）果実と土壌のたとえ話に関連して，土壌は大切であるが，ないことにあまりこだわりすぎてはいけない。自分達で作っていかねばならない。そのためにまずすぐ心がけることとして
①各人の新しい研究の芽をはぐくもうとする気持ちが大切.
②研究へのアプローチの教育的配慮（定理を与えるだけでなく，なぜそのような発見がなされたかを考える）
③テクニカルな議論でなく具体的問題そのもので自主的に意見交換をすること.
などがだされました。

（4）（2）に関連して丸山先生より確率論への考えがだされました。
①確率論はいまなにをやっているのか，論文をいろいろ読む。討論•意見交換をよくやる。
②この方面はもう少しこうあった方がよいのではないかという認識を持つ。

確率論のかなめの所は
（i） マルコフ過程（遷移確率）
（ii）ガウス分布（分布の形自身が内包する豊かな性質）
で，それをはなれるとあまりうまくいかない。後者は $\exp(-x^2)$ という形そのものをよりどころにしている。形はないが構造がある場合の解析•分析はどうなるのか，そのへんのことをやってみたい。

備考 これは1976年4月29日に開催された数学若手の会総会における特別講演で丸山先生が話された内容を尾形良彦、江口正義の両氏が記録されたものです。
「数学若手の会会報」(第3号，1976年8月)所収。

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

あとがき

丸山儀四郎先生は今を去る2年半前，１９８６年7月5日に病気のため亡くなられました。 それは同年7月8日から京都において開催された「第5回日ソ確率論シンポジウム」の直前の事でした。 当時先生は日ソ確率論シンポジウムの組織委員長として活躍され，旺盛な研究活動を続けておられました。 全く事情を知らない私にとって，先生が亡くなられたという知らせは，にわかには信じ難い衝撃的な出来事でした。 最近出版された論文選集["Gisiro Maruyama Selected Papers", Kaigai Publications,(1988)]を読んでみると，先生が日本における確率論研究の先駆的指導者の一人として，内外の研究者から尊敬され高い信望を受けておられたことがよくわかります。 またかつて日本学術会議会員として学術行政の分野でも活躍されたことはよく知られています。 しかし先生の全体像を知る上で研究者・教育者としての一つの素顔を紹介することも意義のあることと思います。

丸山先生は１９４１年九州大学理学部に赴任して以来，お茶の水大学・再び九州大学・東京教育大学・東京大学・電気通信大学・信州大学・最後に東京電機大学，と各地の大学で教鞭をとってこられました。 このうち１９７８年度からの2年間は電気通信大学に本務地をおきながらの併任という形で私の勤める信州大学理学部数学科の関数解析学講座の教授の任に就かれました。 ちなみに，先生は１９１６年4月4日長野県でお生まれになり，母校の旧制松本高等学校は戦後の改組を経て信州大学理学部に引継がれています。

この講義録は，１９７９年の6月，１１月および翌年の2月に延べ１４回にわたって信州大学で行なわれた丸山先生の講義の内容を記録するとともに，研究者として日頃先生が考えておられたことの一端を紹介する目的でまとめられたものです。 先生の担当された講義は学部の3・4年生を対象にしたもので「エルゴード定理とその応用」というテーマでした。 カリキュラム上はルベーグ測度論の予備知識を持っていない学生たちに，実に丁寧な入門的講義をされたのが大

Sem. on Probab.
Vol.57 1989年
P1-121

変印象に残っています。 私は先生の学会講演などは何回も聴いていますが，このような講義を聴く機会はめったにないことなのでその時は克明にノートをとりました。 毎回の講義で話されるテーマははっきりしていましたが，特に章・節に分けたり見出しを付けることもなく，また定理に番号を付けることもありませんでした。 数式の計算をするのに，黒板に一度書いた式の一部分を利用しながら変形を繰り返すので，写すことだけに専念したい学生たちには少し不評のようでした。 しかし新しい概念を導入するのに，学生の持っている既存の知識を手がかりにしながら嚙んで含めるように語られる巧妙な説明には感心させられました。 私はこのような先生のソフトな語り口の中に，教育に対する情熱と優しさを感じました。

私はこの講義録をまとめるにあたり，これが確率論のひとつの入門書として利用されることを考えて，全体を１１回分に再編成しそれぞれに適当な見出しを付けることにしました。 ただし，講義で行なわれた叙述の順序は一切変えることなく，内容そのものもできるだけ先生の肉声を忠実に再現するように努めました。 またある時，私は講義の内容が解らなくなって先生のノートを借りたことがありますが，この講義録にはその時の先生の自筆ノートの縮小コピーが掲載されています。 さらに付録として，東京大学を定年退官される前年の１９７６年に，「確率論を語る－回顧と展望－」と題して「数学若手の会」の会合で話された講演記録を掲載しました。

書き上げた原稿を見直す過程では，櫃田倍之氏，十時東生氏および広島確率論セミナーの方々にはお世話になりました。 また，「数学若手の会」の方々には講演記録の転載を快諾していただきました。 本来は，全く私的なノートにすぎなかったこの講義録を Seminar on Probability として刊行することを勧めていただいた確率論セミナーの方々に感謝します。

１９８８年１２月　　松本にて

井　上　和　行