Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

Vol. 28

TOPICS IN MARKOV CHAIN

(上)

近 藤 亮 司　大 島 洋 一
渡 辺 毅

1 9 6 8

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

まえがき

このノートは，１９６６年１１月に「マルコフ過程のポテンシャル核と境界」の題で行われた数理研シンポジウムにおける報告の中から,いくつかについてその後の発展も合せてまとめたものである。もともと我国では離散パラメータの Markov chain や,その特別なクラスとしての乱歩に関する研究者の層が薄く，この方向の研究発表や紹介が行われる機会は少なかった。しかし世界的に見ると,（主としてアメリカで）最近数年間の間に Spitzer の乱歩の研究，Kemeny-Snell やOrey による recurrent potential theory，Feller-Orey による１次元 renewal theorem の最終結果，Port による capacityの研究のような重要な仕事が現われており，シンポジウムではこれらの紹介と，合せて新らしい研究テーマを開発することが目標とされた。このような主旨のもとに以下のような講演が行われた。

1. 序論：渡辺　毅
2. 容量に関連した極限定理：竹内順治
3. 有界領域における反射壁 Brown 運動：福島正俊
4. Renewal theorem ：田中　茂，神田　護
5. Dirichlet 空間と generalized Laplacian ：伊藤正之
6. 再帰 Markov 連鎖のポテンシャル核と境界：大島洋一，近藤亮司

シンポジウム以後約２年たった現在，当初の目標が十分達成されたかどうかについて，筆者達に自信はない。しかし2,3,6の報告に関しては，それ自身および関連するテーマについて，その間に可成りの進歩が見られた。この意味で，シンポジウムは少くとも筆者達には有意義なものであった。

上巻では，報告１および６に関連した内容をとりあげる。第Ｉ部は報告１を整理したもので，離散パラメータの Markov chain に関する現状の survey である。重要と思われるトピックや問題点は，筆者の知る限り，すべて網羅したつもりである。第Ⅱ部では potential kernel を特徴づける問題を扱う。Transient な場合は Meyer によって完全な特徴づけがえられているので，前半でそれを紹介する。後半では recurrent chainのweak potential operator について，主として Orey と筆者の研究を紹介する。その完全な特徴づけは現在のところ未解決である。第Ⅲ部のうち，上巻では主として approximate chain の構成のみを論ずる。Hunt の原論文では，構成について簡単な方針を示しているだけであるが，実際に完全な証明をつけるとかなり長くなる。しかし構成定理は境界理論の基礎をなすものであるから，丁寧に証明を述べた。

下巻では，第Ⅲ部の後半として境界理論を，第Ⅳ部において capacity に関する Port の研究を報告する予定である。

なお部毎に記号が若干異なっている点について不満に思われる方もあろうが，全体を統一することにすると膨大な記号群が必要となってかえって分りにくくなるし，文献を参考にされる場合にも不便であると考えて，無理な統一は行わなかった。

（１９６８.９.３０　渡辺　毅）

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

Topics in Markov chains (上)

目 次

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

凡　　例

1. 括弧〔　〕をしばしばつぎのように用いる。たとえば"関数 f が(1.5)〔(1.6);(1.7)〕をみたすとき，f は superregular 〔subregular ; regular〕と呼ばれる。" このような場合には，(1.5) ⟶ superregular，(1.6) ⟶ subregular，(1.7) ⟶ regular のように対応させて読めばよい。

2. 定理，補題，式番号などはすべて§単位につけられている。同じ部の中で引用するときは"定理 3.1"，"(3.2)式" などのように引用する。他の部から引用するときは，"第Ⅱ部の定理 3.1"などのように引用する。

3. 各頁の肩の数字は部および，部内の頁を表わす。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

第　I　部

総　　論

渡　辺　　毅

離散パラメータのMarkov chain に関するいくつかの研究テーマについて概略と問題点を述べる。これらのテーマの大部分は，第II部以降の各論のところで詳しく論じられるので，なるべく重複しないようにここでは歴史的な経過や各論でとりあげられている問題の意味をあきらかにするようにつとめた。なお文献表には研究の手引きのために，直接本論と関係のない文献もおさめた。

Markov chain に関する問題は，大別して連続パラメータのchainに固有な問題(注)と，本質的にパラメータが連続的であるか離散的であるかによらない問題がある。そして後者の型の問題では，通常離散パラメータのMarkov chain の方が扱い易いし，離散パラメータについて結果がえられれば，連続パラメータにおけるその類似を求めることはそれ程難しくない。またMarkov chain の特別なクラスについて深い結果を導くことも重要である。このような例で最も成功したのはSpitzer による乱歩の系統的な研究〔35〕であろう。第II部以降において乱歩について触れる機会が少ないので，総論では乱歩に関連した事項は比較的詳しく説明するようにした。

なお，Markov chain に関する標準的な教科書としてChung〔3〕，Jeller〔7〕Kemeny-Snell-Knapp〔18〕，Spitzer〔35〕をあげておこう。

(注) たとえば，Kolmogorov方程式の境界条件，instantaneous state を含むMarkov chain, transition functionの微分可能性など。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

§1 基本的な諸概念

Sを可算（あるいは有限）集合とする。Sを状態空間，Sの各点を状態とよぶことにする。関数 $P(x,y)$，$x,y\in S$，が非負でsub-Markov性（あるいはsubstochastic性）

$$(1.1)\qquad \sum_{y\in S} P(x,y) \leqq 1, \qquad x\in S$$

を満足するとき，S上のtransition functionといわれる。とくに（1.1）において等号が成り立つならば，Markov的（あるいはstochastic，あるいはconservative）であるという。$P(x,y)$ はxに関しては点関数と考えるが，yに関しては測度と考える。そこでSの部分集合Eにたいして

$$(1.2)\qquad P(x,E)=\sum_{y\in E} P(x,y)$$

と表わすことにしよう。S上の関数f〔測度μ〕にたいし，関数Pf〔測度μP〕をつぎの式で定義する：

$$(1.3)\qquad \begin{cases} Pf(x)=\sum_{y\in S} P(x,y)\,f(y)^{\text{(注)}}, \\ \mu P(y)=\sum_{y\in S}\mu(x)\,P(x,y) \ . \end{cases}$$

n-step transition function $P^n(x,y)$ を

$$(1.4)\qquad \begin{cases} P^0(x,y)=\delta(x,y)=\begin{cases}1 & (x=y)\\ 0 & (x\neq y)\end{cases} \\ P^n(x,y)=\sum_z P^{n-1}(x,z)\,P(z,y) \end{cases}$$

によって定まる。P^nがtransition functionになること，

$P^n(x,y)=P^{n-j}P^j(x,y)=\sum_z P^{n-j}(x,z)\,P^j(z,y)$，$0\leqq j\leqq n$，であることはあきらかであろう。

S上の関数f(x)にたいしてつぎのような条件を考えよう：すべての$x\in S$にたいして

$$(1.5)\qquad -\infty< f(x) \leqq\infty, \qquad Pf(x)\leqq f(x),$$

(注) 右辺の収束は絶対収束（あるいはLebesgue積分）の意味にとる。したがって$Pf(x)$がwell-definedであるためには，$\sum_y P(x,y)(f\vee 0)(y)$ と$\sum_y P(x,y)(f\wedge 0)(y)$の少くとも一方が有限であることが必要十分である。また$Pf(x)$が有限なことと，$P|f|(x)$が有限なことは同等である。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

(1.6) $-\infty \leqq f(x) < \infty$, $\quad Pf(x) \geqq f(x)$,

(1.7) $-\infty < f(x) < \infty$, $\quad Pf(x) = f(x)$.

関数 f が (1.5) 〔(1.6) ; (1.7)〕をみたすとき，f は（Pに関して）superregular 〔subregular ; regular〕であるとよばれる。これはDoob〔5〕による名称であるが，調和関数論の用語を借りて，（Pに関して）優調和〔劣調和；調和〕であるとよぶこともある。S上の集合関数（非負を仮定しない）μ についても同じように superregular 〔subreguler ; reguler〕の概念が定義される。

上のような f や μ の特殊なクラスで別の名称で呼ばれるものがあり，その方が普通に用いられているので，ここでもそれらの用語を用いることにしよう。非負の superregular な関数〔測度〕はHunt〔10〕にしたがって excessive であると呼ばれる(注1)。また非負の regular な測度は（Pの）不変測度とよばれる。

Sの部分集合Cが条件

$$P(x, S-C) = 0, \qquad \forall x \in C$$

を満足するならば，Cは closed であるという。S自身が minimal closed（closed な真部分集合を含まない）ならば，transition function $P(x, y)$ は既約であるとよばれる。Pが既約であることと，任意の $x, y \in S$ にたいし整数 n ($\geqq 0$) が存在して $P^n(x, y) > 0$ が成り立つこととは同等である(注2)。

状態 x の分類は Markov chain における基本的な事項の1つである。状態 x は

(1.8) $$\sum_{n \geqq 0} P^n(x, x) < \infty$$

であるか

(1.9) $$\sum_{n \geqq 0} P^n(x, x) = \infty$$

であるかにしたがって，transient あるいは recurrent であると呼ばれる。すべての状態が transient 〔recurrent〕であるとき，P（あるいはそれに対応する Markov chain）が transient 〔recurrent〕であるという。Recurrent な transition function はかならず Markov 的であるが，逆は正しくない。

状態 x における n－step の再帰確率 $F^n(x)$ を漸化式

$$P^n(x, x) = \sum_{j=1}^{n} F^j(x) P^{n-j}(x, x), \qquad n \geqq 1$$

(注1) excessive 測度では，$\mu(x) < \infty$ を仮定するのが普通である。

(注2) この節で引用なしに述べる結果は，すべて Feller〔7 ; volume 1〕に証明がでている。

によって定めることができる。xがrecurrentであることと

$$\sum_{j=1}^{\infty} F^{j}(x)=1$$

は同等である。Recurrentな状態xの平均再帰時間

$$(1.10)\qquad m(x)=\sum_{j=1}^{\infty} jF^{j}(x)$$

が有限のときxはpositive，∞のときnullであるという。第Ⅱ部において，Pを推移確率にもつMarkov chainの言葉で同じ分類を与える。用語の意味から考えると，その方が一層自然な定義である。

状態xが周期的であるというのは，1より大きな整数tで

(1.11)「$P^{n}(x,y)>0$であるのは，nがtの倍数のときに限る」

という性質をもつものが存在することである。このようなtの最大数を周期(period あるいはspan)という。周期的でない状態を非周期的といい，その周期を1と定める。

(a) Pが既約ならば，すべての状態は同じ周期と型(transient，positive recurrent，null recurrentのいずれか1つ)をもつ。

状態xから状態yへのn－stepの到達確率$F^{n}(x,y)$は漸化式

$$P^{n}(x,y)=\sum_{j=1}^{n} F^{j}(x,y)P^{n-j}(y,y),\quad n\geqq 1$$

で定められる。xからyへの全到達確率は

$$F(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} F^{n}(x,y)$$

である。

xがrecurrentで$F(x,y)>0$としよう。(a)によってyもrecurrentであるが，さらに

$$F(x,y)=F(y,x)=1$$

が成り立つ。

(b) Pが既約なrecurrent transition functionならば，不変測度μが定数倍を除いて唯1つ存在し，すべてのxについて$\mu(x)>0$である。さらに，Pがpositive recurrentであること，$\mu(S)<\infty$であることは同等である。(第Ⅱ部，定理5.3)

Pのエルゴード性(注)に関しては，Kolmogorov [23] およびFeller [7；volume 1]

(注) ここではP^{n}の極限的性質という程度の意味に理解してもらってよい。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

によるつぎの古典的な結果がよく知られている。既約，recurrent かつ非周期的なPを考える。Pがpositiveならば，(b)によっては不変確率測度μが唯1つ存在するが，これは平均再帰時間(1.10)を用いて

$$(1.12)\qquad \mu(x)\ \frac{1}{m(x)}$$

と表わされる。このとき任意の確率測度νにたいして

$$\nu P^{n}(y)\longrightarrow\mu(y)\qquad(n\to\infty)$$

である。Pがnull であれば，任意の確率測度νにたいして

$$\nu P^{n}(y)\longrightarrow 0\qquad(n\to\infty)$$

である。

最近Orey〔30〕はKolmogorovの結果を以下の形に精密化したが，これは確率論的な意味の上からも興味のある精密化になっている。一般に有符号測度μの全変動を

$$\|\mu\|=\sum\ |\mu(x)|$$

によって表わす

(c) Pが既約，recurrentかつ非周期的ならば，S上の任意の確率測度μ，νにたいして

$$(1.13)\qquad \|(\mu-\nu)P^{n}\|\longrightarrow 0$$

Oreyはこの結果から，((1.12)を除いて)Kolmogorov-Fellerの結果を導いている。(c)のもっと確率論的な証明がBlackwell－Friedman〔2〕によって与えられている。(1.13)はtransientな場合にも意味のある条件である。それは一般にPに対応するMarkov chain が trivial tail σ－field をもつことと同等である。あるいは

$$(1.14)\qquad Pu(n+1)=u(n,x),\quad x\in S,\quad n=0,1,\cdots$$

の有界な解が定数に限ることとも同等である。

乱歩(random walk)はMarkov chain の重要なクラスである。この場合の状態空間Sはd次元Euclid空間の整数格子点の集合R^{d}である。R^{d}上Markov的なtransition functionが

$$(1.15)\qquad P(x,y)=P(0,y-x)$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

という性質を満足するとき，Pをd－次元の乱歩（あるいはそのtransition function）という。（1.15）の性質は空間的一様性とか推移不変性と呼んでもよいであろう。R^d 上の乱歩については，Spitzer の詳しい研究があり彼の本〔35〕にまとめられている。Spitzerの結果の中には，もっと一般なMarkov chainに拡張できるものがある。容量に関するPortの研究（§5で簡単な紹介を，下巻の第Ⅳ部でもう少し詳しく述べる）がその1例である。Renewal theorem（§4）についても，乱歩にたいする結果が拡張の1つの目安になるであろう（Spitzer〔36〕を参照）。

離散的な可換群の上の乱歩に関する研究としてKesten-Spitzer〔19〕をあげておこう。そこでは乱歩の性質について本質的に新らしい結果がえられているわけではないが，乱歩によって群構造がある程度決定されることを示している点で興味深い。非可換群上の乱歩は現在迄のところ全く未開拓の分野である。この場合には，（R^d の場合も含めて）可換群上の乱歩にたいする主要な研究手段であるharmonic analysisが整備されていないので，本質的に新らしい工夫が必要になるであろう。

あとで結果を述べるときに必要になるので，乱歩の非周期性の定義を与えておく。この定義は，前に述べた一般のtransition function における状態xの非周期性とは関係がないので，混乱を避けるために英語のまま用いよう。乱歩（のtransition function）Pがaperiodicであるというのは，原点から到達可能な（あるnにたいして $P^n(0,x)>0$ であるような）すべての点によって生成される群が状態空間 R^d と一致することである。Recurrentな乱歩では，それがaperiodicであることと既約であることとが同等である。もう少し強い概念としてSpitzerはstrongly aperiodic(注) という概念を導入しているが，recurrentな乱歩ではstrongly aperiodicであることと，既約かつ（前の意味で）非周期であることが同等になる。

次節以降において，transition function $P(x,y)$に関連した種々の問題をとりあげるが，これらを大雑把にかつ標語的に

「Pから導かれるある種の確率過程（広い意味のMarkov chain）の極限的な性質の研究」と理解して，そのような観点から進めたい。

(注) これはあとで使わないので定義は省略する。
Spitzer〔35；P.42〕を見よ。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

§ 2. Approximate chainによる境界理論の考え方

Transition function Pに関する問題を確率論的に研究するためには，Pの性質をなるべくよく反映するような確率過程を考えることが望ましい。このような確率過程として通常用いられるのは，時刻0においてSの各点xから出発し，過去の履歴によらないで時刻nから(n+1)への推移がP(x，y)によって記述されるような確率過程の系である。これがKolmogorov〔22〕によって導入され，のちにDynkin〔6〕やIto〔14〕によって精密に定式化されたPを推移確率にもつMarkov過程(chain)の標準的な定義である。Markov chainを用いて，Pに関する種々の量や性質が確率論的に表わされる。(注) しかしPに対応する確率過程としてDynkin流のMarkov chainを絶対視することは正しくないであろう。その典型的な1例として，この節ではHunt〔11〕が境界理論の研究に関連して導入したapproximate chainを説明する。詳しいことは才Ⅱ部で論じられる。境界理論以外にもapproximate chainが有効であるような問題があると思われる。

測度空間(Ω，$\mathcal{F}$，$\mathcal{P}$)を考える。$\mathcal{P}(\Omega)<\infty$を仮定しない。$\alpha(\omega)$は$-\infty$あるいは整数の値を取る確率変数(以下r.v.と省略する)，$\beta(\omega)$は∞あるいは整数の値を取るr.v.で，$\alpha(\omega)\leqq\beta(\omega)$とする。各$\omega\in\Omega$にたいして，Sの点列{$X_n(\omega)$；nは$\alpha(\omega)\leqq n\leqq\beta(\omega)$なる整数}が対応していて，各nにたいし$X_n(\omega)$は集合$\Omega_n=\{\alpha(\omega)\leqq n\leqq\beta(\omega)\}$で定義された(S−値)r.v.としよう。もしSの各点xにたいし$\mathcal{P}\{X_n(\omega)=x\}<\infty$ ならば，組(X，α，β)をrandom chainと呼ぶ。Random chainがつぎの性質をもつとき，P(x，y)を推移確率にもつMarkov chain(あるいはP−chain)と呼ばれる：

整数$m<n$と，Sの点$r_m\cdots r_n$が任意に与えられたとき

$$(2.1)\qquad \mathcal{P}\{\alpha(\omega)\leqq m<n\leqq\beta(\omega),\ X_j(\omega)=r_j,\ m\leqq j\leqq n\}$$
$$=\mathcal{P}\{\alpha(\omega)\leqq m<n-1\leqq\beta(\omega),\ X_j(\omega)=r_j,\ m\leqq j\leqq n-1\}P(r_{n-1},r_n)$$

μをS上の(σ−有限な)測度とする。

$$(2.2)\qquad \mathcal{P}\{X_0=y\}=\mu(y)$$

なるP−chain(X，0，β)が初期分布 (y)，推移確率P(x，y)のMarkov chainの(Kolmogorovによる)定義にほかならない。とくにμがSの点xにおけるδ−測度であるとき，基礎の(確率)測度空間を(Ω_x，F_x，$\mathcal{P}_x$)で表わす。組{(Ω_x，F_x，$\mathcal{P}_x$)，$x\in S$}が

(注) Markov chainはよく知られているし，それが必要になった所で(第Ⅱ部の§0を見よ)厳密な定義を与えるので，ここで詳しい説明はしない。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

Dynkin などによる最も普通のMarkov chainの定義である。(注)

(X, α, β) をrandom chain, $\sigma(\omega)$ を整数値あるいは±∞の値を取るr.v.としよう。

(2・3) $\Omega' = \{\omega ; \sigma(\omega)$ は整数値で $\alpha(\omega) \leqq \sigma(\omega) \leqq \beta(\omega)$ をみたす $\}$

とおく。(X, σ, β) が Ω' ($\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{P}$ もそこに制限して考えることはいう迄もない) 上のrandom chainになることはあきらかであろう。(X, σ, β) を σ だけ移動して得られるrandom chainを $(Y, 0, \gamma)$ で表わそう:

(2・4) $\gamma = \beta - \sigma$, $Y_n(\omega) = X_{n+\sigma(\omega)}(\omega)$.

もし $(Y, 0, \gamma)$ がP-chainであれば，σ は (X, α, β) をP-chainにreduceするといおう。

Random chain (X, α, β) がapproximate P-chain であるというのは，整数あるいは∞の値をとるr.v.α_j の列で，$\alpha_j \downarrow \alpha$ かつ各 α_j は (X, α, β) をP-chainにreduceするようなものが存在することである。これがHunt の定義であるが，第Ⅱ部では（そこで述べる理由から）もう少し狭い定義を与える。（第Ⅱ部の定義は，本質的にPがtransientであることを前提にしている。そしてtransientなPに対しては，Hunt の定義と同等であることが示される。）

Approximate chainと (entrance) 境界の関係を説明しよう。まずapproximate P-chain $(X, 0, \beta)$ は実はP-chain であることがわかる。つぎにapproximate P-chainを整数値（±∞を許さない）のr.v.だけ移動したrandom chain は矢張りapproximate P-chain である。したがって，通常のMarkov chain と本質的に異なるのは，$\alpha(\omega)$ が−∞になっているところである。通常のMarkov chain — ここの記号ではP-chain $(X, 0, \beta)$ は，X_0 の分布（初期分布）を与えることによって — 意的に構成される。今の場合 $X_{-\infty}(\omega)$ は定義されていないから，普通の意味の初期分布は考えられない。もし $\lim_{n\to-\infty} X_n(\omega)$ が存在するならば，それを $X_{-\infty}(\omega)$ と定義して，その分布を初期分布と考えばよいであろう。しかし，実際には（Pがrecurrentでもtransientでも）$\lim_{n\to-\infty} X_n(\omega)$ は（Sの中に）定まらないことが示されるので，この考えはそのままでは成り立たない。詳しくいうと，Pがrecurrentならば，n→−∞のとき軌道 $\{X_n(\omega)\}$ はSの中でいくらでもfluctuateする。一方Pがtransientならば，$\{X_n(\omega)\}$ は或る番号から先でSの

(注) 一般性を失わずに，(Ω_X, F_X) におけるxをおとすことができる。また種々の計算に便利なように，Ω $(=\Omega_X)$ にさらに強い条件を仮定することもできる（第Ⅱ部を見よ）。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

任意の有限部分集合の外にある。Sの無限遠点を△で表わせば，これは$\lim_{n\to-\infty} X_n(\omega)=\triangle$ということである。こうして(注)，$n\to\infty$のとき軌道$\{X_n(\omega)\}$はSの1点コンパクト化$S+\{\triangle\}$の中で収束する。簡単のために，$\alpha(\omega)=-\infty$ ($\forall\omega\in\Omega$) としよう。この場合approximate P－chain $(X,-\infty,\beta)$ の初期分布はつねに△における単位分布であるということになる。したがって，△はその上の初期分布が（何らかの妥当な意味で）approximate P－chainを（一意的に）定める集合としては一般に小さすぎるであろう。△をいくつかの（一般的に連続無限個の）点に分割し，その集合をS'で表わそう。適当なS'（entrance 境界）が存在し，$\lim_{n\to-\infty}X_n(\omega)$が$S'$のある点に収束し（それゆえ$X_{-\infty}(\omega)$の分布が定まり），逆に$S'$上の任意の分布がapproximate P－chain $(X,-\infty,\beta)$ を一意的に定まる初期分布になることを示したい，というのがHunt の境界理論の基本的な考え方である。

この考え方を具体化しよう。Pをtransientなtransition function とする。そのときPのPotential kernel $G(x,y)$（§3および第Ⅱ部）は

(2.5) $$G(x,y)=\sum_{n\geqq 0}P^n(x,y)\leqq G(y,y)=\sum_{n\geqq 0}P^n(y,y)<\infty$$

をみたす。再び簡単のために，approximate P－chain $(X,-\infty,\beta)$を考える。以下の議論において，つぎの仮定は本質的である：

(2.6) $$\mathcal{P}(\Omega)<\infty.$$

つぎに

(2.7) $$\eta(y)=E\Big\{\sum_{-\infty<n\leqq\beta} I_{\{y\}}(X_n)\Big\}$$

とおく：ただしnは整数，$I_{\{y\}}$は1点yのindicator である。$\eta(y)<\infty$を示そう。さらにηが不変測度（＝Pに関して調和なexcessive測度）であることも示そう。実際approximate P－chainの定義におけるα_jを考えると，α_jが$(X,-\infty,\beta)$をP－chainにreduceするから

(2.8) $$\eta(y)=\lim_{j\to\infty}E\Big\{\sum_{\alpha_j\leqq n\leqq\beta} I_{\{y\}}(X_n)\Big\}$$
$$=\lim_{j\to\infty}E\{G(X_{\alpha_j},y)\}\leqq\mathcal{P}(\Omega)\cdot G(y,y)<\infty.$$

(2.8)の両辺に右からPを施して，$GP=G-I$を用いると

$$\eta P(y)=\lim_{j\to\infty}E\{G(X_{\alpha_j},y)-I_{\{y\}}(X_{\alpha_j})\}.$$

$\alpha_j\to-\infty$だから$X_{\alpha_j}\to\triangle$．ゆえに　$E\{I_{\{y\}}(X_{\alpha_j})\}\to 0$．

(注)　以下の議論はPがtransientの場合である。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

さてSの無限遠点△をつぎのように分割して，entrance境界S′を定義しよう。$\xi_n \to \triangle$なるSの点列$\{\xi_n\}$が条件

「すべてのyに対して$\lim_{n\to\infty} G(\xi_n, y)$が存在する」

をみたすとき，$\{\xi_n\}$はS′の1点ξに収束すると定義する。さらにこのような2つの列$\{\xi_n\}$，$\{\eta_n\}$が同じ極限$\lim_{n\to\infty} G(\xi_n, y) = \lim_{n\to\infty} G(\eta_n, y)$，$\forall y \in S$，を定めるならば，それらは共にS′の同じ点$\xi$に収束すると定義する。$\lim_{n\to\infty} G(\xi_n, y)$を$G(\xi, y)$によって表わすことにしよう。こうして$\xi_n \to \xi \in S'$は

(2・9) $\lim_{\xi_n \to \xi} G(\xi_n, y) = G(\xi, y)$, $\forall y \in S$

と同値である。

$\eta(y) < \infty$であるから，第Ⅲ部の定理1．1によって，各yにたいし，ほとんどすべてのωについて$\lim_{j\to\infty} G(X_{\alpha_j}(\omega), y)$が存在することがわかる。このこととS′の定義から，ほとんどすべてのωにたいして $X_{-\infty}(\omega) = \lim_{j\to\infty} X_{\alpha_j}(\omega)$がS′の中に存在し，

(2・10) $\lim_{j\to\infty} G(X_{\alpha_j}(\omega), y) = G(X_{-\infty}(\omega), y)$

であることが分る。(2・10)が有界収束であることと仮定(2・6)から

$$\eta(y) = \lim_{j\to\infty} E\{G(X_{\alpha_j}, y)\} = E\{G(X_{-\infty}, y)\}.$$

S′上のr.v.$X_{-\infty}$の分布をμで表わせば，

(2・11) $\eta(y) = \int_{S'} \mu(d\xi)\, G(\xi, y)$

がえられる。

逆に，S′上の測度νが与えられたとき，それを初期分布にもつようなapproximate P-chain $(X, -\infty, \beta)$が存在するか，という問題を考えよう。実はこれに対する答はそのままでは正しくない。というのは，$X_{-\infty}$の分布μはS′のある部分集合S'_1の上に全測度がのっているので，$S' - S'_1$の上で正測度をもつようなνは決して初期分布とはなりえないからである。S'_1をS′の本質的部分と呼ぶことにしよう。さてS'_1上の(有界)測度νを任意に与えて

(2・12) $\eta(y) = \int_{S'_1} \nu(d\xi)\, G(\xi, y)$

とおこう。このηは不変測度になることが示される。Approximate chainの存在定理(第Ⅲ部，定理3・1)によれば，このηにたいして(2・7)を満足するようなapproximate P-chain $(X, -\infty, \beta)$がつねに存在する。さらにそれが条件(2・6)を満足していると仮定しよう。そのとき，前段の結果により，ηは$(X, -\infty, \beta)$の初期分布μによって(2・11)のように表わされるが，μはS'_1上に全測度をもつから

(2・13) $\eta(y) = \int_{S'_1} \mu(d\xi)\, G(\xi, y)$

がえられる。最後に$\nu = \mu$を示すことによって，上で構成した$(X, -\infty, \beta)$が求めるものであ

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

ることが分る。このような（X，$-\infty$，β）はある自然な同値関係を除いて一意的であることが示される。

表現（2・11）（あるいは（2・13））について若干の説明を補足しよう。これは，不変測度のMartin 表現定理の特別な場合である。上の議論は，approximate chainを用いることによって，（特別なηにたいしては）Martin 表現の存在とそれに表わされる測度の確率論的な意味があきらかにされることを示している。通常のMarkov chain の範囲内でこのような意味づけ（および証明）を与えることはできない。ここにapproximate chainが導入されたことの最も重要な意義が見出されるのである。（一般なη，さらにexcessive関数の表現定理が上の特別な場合に帰着される事情については，第Ⅱ部を見ていただきたい。）

注意 1. Huntの原論文〔11〕では，上に述べたような考え方ははっきりでていない。第Ⅱ部の冒頭で述べるように，Huntのapproach は若干不自然である(注)。その後Hunt〔12〕は（証明なしに），上に述べた考え方がより自然な境界理論へのapproach であることを指摘している。Hunt と独立に，筆者の1人や国田〔25〕も連続パラメータの場合の考察から同じ考えに到達していた。第Ⅱ部の後半は，これらの考えに厳密な証明をつけたものとしては最初のものであろう。

注意2. 連続パラメータの場合には，時間変更によって$-\infty$の時間を有限時間（したがって時刻0）に移すことができるので，境界理論のためにapproximate process の概念は必ずしも必要でない。この場合は時間のパラメータを$t\in(0,\infty)$とすることによって，通常のMarkov 過程の範囲の中で$t=0$において上と同じ初期分布の問題がおこる（Kunita－T. Watanabe〔25〕，Neveu〔29〕）．Branching点に関するRay の研究〔34〕，Markov過程の正則化に関するKnightの研究〔20〕，〔21〕，Kunita－T. Watanabe〔26〕なども類似の問題への異なるapproachである。

(注) Kemeny－Snell－Knapp〔18〕もHuntの原論文をそのまま踏襲している。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

§3. Recurrent chain の potential operator

Kemeny−SnellやOreyによるrecurrent chainのpotential operatorの研究，recurrentな乱歩の場合のSpitzer（およびKesten）の結果を紹介しよう。記号は自明な変更を除いて，ほぼKemeny−SnellやOrey などにしたがう。とくにkernel $G(x, y)$の意味や他の部分（§2や第II部）と異なることに注意しよう。なお最大値原理との関係については，第II部で詳しく説明するので，ここでは一切省略する。

Kemeny−Snellにしたがって

(3.1) $N(x, y)=\sum_{n\geqq 0} P^n(x, y)\leqq\infty$

と書くことにしよう。xからyへの到達確率（§1）を$F(x, y)$とすれば，つねに$N(x, y)=F(x, y)N(y, y)$が成り立つ。したがって，Pがtransientならば

(3.2) $N(x, y)<\infty$, $\forall x, y\in S$

であり，Pが既約かつrecurrentならば

(3.3) $N(x, y)=\infty$, $\forall x, y\in S$

である。

Pに関するpotential論の出発点として，Poisson方程式

(3.4) $(P-I)u=f$

を考える。fの適当な族Cの上で定義されたoperator Aが

(3.5) 「すべての$f\in C$にたいして，$u=Af$は(3.4)の解である」

という性質をもつとき，AをP（とC）にassociateした1つのpotential operatorと考えることは自然であろう。関数族Cの最も通常の選び方は，finite supportの関数の全体Mであろう。この場合には，Sの各点yのindicator $I_{\{y\}}$がMに含まれるから，$A(x, y)=AI_{\{y\}}(x)$によって定まるkernel（非負とは限らない）が

(3.6) $(P-I)A=I$

の解であるといっても同じことである。このようなpotential operator（=kernel）をstrong potential operator（=kernel）と呼ぼう。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

Pがtransientの場合には，A=−Nが1つのstrong potential kernel を定める。Nに関するpotential論は一般のMarkov過程にたいしてもよく研究されている（Hunt〔10〕）。Chainの場合の主要な結果，とくに最大値原理に関連する事項は第II部の第1章で詳しく論じられる。

一方Pがrecurrentの場合には，Nがpotential kernel になりえないことは明らかである。Kemeny−Snell〔18〕は(注)，古典的なpotential論におけるFrostmanの研究からヒントをえて，あとで述べるnormalという条件の下でN（x，y）の有限部分の収束を示し，このkernelに関するpotential論を展開した。その後Orey〔31〕はKemeny−Snellのkernelを抽象化してweak potential operator の概念を導入し，Kemeny−Snellのpotential論が任意のrecurrent Markov chainにたいして成り立つことを示した。

以下Pは既約かつrecurrentなtransition function としよう。§1の（b）によって，不変測度μが定数倍を除いて唯1つ存在する。$\sum \mu(x)\,|f(x)|$が有限で

$$\sum \mu(x) f(x)=0$$

をみたす関数fをnull chargeと呼ぶ。Finite supportのnull chargeの全体を$\mathbb{N}$で表わす。前に定義した$\mathbb{C}$が$\mathbb{N}$であるとき，対応するAをweak potential operatorという：

(3.7)　$(P-I)Af=f \quad , \quad f\in\mathbb{N}$

Strong potential operatorが1つのweak potential operator を定めることは自明である。

Oreyはつぎの結果を証明した。

(a) 任意の既約かつrecurrentなPにたいして

(3.8)　「すべての$f\in\mathbb{N}$にたいしてAfは有界である」

という附加条件をみたすweak potential operator Aが存在する。Aを定めるkernelの一般形は

(注) Kemeny−Snell の原論文は〔16〕である。その後の結果も含めて，彼らの研究の大部分は〔18〕にまとめられているので，以下とくに断わらない限り，Kemeny−Snellといえば〔18〕のことと考えてよい。

(3.9) $A(x,y)=-{}^{C}N(x,y)+h(x)\mu(y)+\pi(y)$

の形で与えられる。

式(3.9)に表われる諸量の意味を説明しよう。$h(x)$は任意の有限値関数，$\pi(y)$は任意の有符号測度である。Sの任意の点Cを固定し

$$
\begin{aligned}
{}^{C}P(x,y) &= P(x,y) && (x\neq C,\ y\neq C\text{のとき})\\
&= 0 && (x\text{または}y=C\text{のとき})
\end{aligned}
$$

と定義する(注)。${}^{C}P(x,y)$がtransient transition functionになることは容易に示されるので，対応するNは

(3.10) ${}^{C}N(x,y)=\sum_{n\geqq 0}{}^{C}P^{n}(x,y)<\infty$, ${}^{C}N(C,C)=0$

をみたす。これが(3.9)の右辺に表われるkernelである。

関数fにたいして

(3.11) $g(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P^{k}f(x)$

が存在して有限であるとき，gをpotential，fをそのchargeと呼ぼう。－gがPoisson方程式(3.4)の解になっていることは容易に示される。(3.3)によって，非負関数は($f=0$を除いて)chargeになりえないが，もっと強くpotentialのchargeはnull chargeでなければならないことが分る〔18；p.244〕(注)。逆にすべての$f\in\mathbb{N}$がpotentialのchargeであれば，(3.11)によって1つのweak potential operatorが定まるが，$\sum_{k=0}^{n}P^{k}(x,y)$ ($n\to\infty$)の有限部分を取り出すという考え方で具体的にそのkernelを求めたい。これがKemeny-Snellの考え方である。

(3.10)で定義されるkernel ${}^{C}N$を考えてみよう。$-{}^{C}N$がweak potential operatorであるから

$$(I-P)\,{}^{C}Nf=f,\qquad f\in\mathbb{N}.$$

したがって，$f\in\mathbb{N}$ならば

(3.12) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}P^{k}f=\lim_{n\to\infty}(I-P^{n+1})\,{}^{C}Nf={}^{C}Nf-\lim_{n\to\infty}P^{n+1}({}^{C}Nf)$

ゆえに$f\in\mathbb{N}$がpotentialのchargeであるための必要十分条件は

(注) ${}^{C}P$の定義はOreyと異なる。Oreyの定義は，${}^{C}P(x,y)=P(x,y)$ ($y\neq C$のとき)，$=0$ ($y=C$のとき)である。

(注) これはrecurrent chainのpotential operator Aの定義域として$\mathbb{N}$を考えるのが自然であることの1つの理由を説明している。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

(3.13) $\underset{n\to\infty}{lim}P^n({}^C\mathrm{N}f)$

が存在して有限なことであり，このときfのpotentialは

(3.14) $g={}^C\mathrm{N}f-\lim_{n\to\infty}P^{n+1}({}^C\mathrm{N}f)$

によって与えられる(注)。

すべての$f\in M$にたいして，極限(3.13)が存在するとき，Pはright normalであると定義しよう。$f\in M$のとき，極限関数(3.13)は有界調和関数になるから実は定数である。このことから，right normalの定義はもう少しゆるいつぎの条件でおきかえてもよいことが分る："適当なx_0とすべてのyについて，極限

(3.15) ${}^C\nu(y)=\lim_{n\to\infty}P^n({}^C\mathrm{N})(x_0,y)$

が存在する。" ${}^CP(x,y)$に関するxからyへの到達確率を${}^CF(x,y)$とおけば，(3.15)の存在は

(3.16) ${}^C\lambda(y)=\lim_{n\to\infty}P^n({}^CF)(x_0,y)$

の存在と同等である。

(b) (Kemeny–Snell) Pがright normalならば，1つのweak potential kernelが

(3.17) $G(x,y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}[P^k(x,x)\dfrac{\mu(y)}{\mu(x)}-P^k(x,y)]$

によって定まる。これは(a)における附帯条件(3.8)をみたしている。

証明はOreyの結果(a)を用いて第II部，§7で与えるが，normalという条件とkernel $G(x,y)$の関係をあきらかにするために，Kemeny–Snellの証明を簡単に紹介しよう。Right normalならば，もちろん$f\in N$にたいして(3.13)が存在するから，$f\in N$はpotentialのchargeであり

$$N\ni f\to -g=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-P^k)f$$

なる対応によってweak potential operatorが定まる。(3.14)の脚注によってこれは(3.8)をみたしている。したがって，(3.17)の右辺が有限な値に収束することが示されれば，$f\in N$のとき

$$Gf=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}[\frac{P^k(x,x)}{\mu(x)}\sum\mu(y)f(y)-\sum P^k(x,y)f(y)]$$

(注) これからgは有界であることが分る。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-P^k)f=-g$$

をえて，証明が終る。（3.17）の収束を示すために

$$f(z)=\begin{cases}\mu(y)/\mu(x) & (z=x\text{のとき})\\ -1 & (z=y\text{のとき})\\ 0 & (\text{それ以外のとき})\end{cases}$$

を考えると，$f\in\mathbb{N}$で

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}P^k f(y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[P^k(x,x)\frac{\mu(y)}{\mu(x)}-P^k(x,y)\right]=G(x,y)$$

はfをchargeとするpotentialにほかならない。

Positiveかつ非周期的(注)なPがright normaであることは容易に示される。実際μをPの不変確率測度とすれば

$$^{C}\lambda(y)=\lim_{n\to\infty}P^n(^{C}F)(x_0,y)=\mu^{C}F(y)$$

である。Normalでない例はKemeny−SnellとOrey によって与えられている。Recurrentな乱歩はnull recurrentなtransition function の典型的なものであるが，そのnormalityは特別な場合（有限分散の場合）をKemeny−Snell〔40〕が証明し，Spitzer（およびKesten）が完全に解決した。Recurrent な乱歩の不変測度は$\mu(y)=1$，$\forall y\in S$，であること，さらに$P^n(x,x)=P^n(0,0)$ に注意しよう。

(c) Spitzer〔35〕（およびKesten）〔19〕。PをR^d あるいはもっと一般に可算無限な可換群の上のrecurrent かつaperiodicな乱歩とする。そのときPはright normalであって，対応するKemeny−Snellのpotential kernel

$$G(x,y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[P^k(0,0)-P^k(x,y)\right] \tag{3.18}$$

はstrong potential kernelにもなっている。

上の結果はOreyやKemeny−Snellのpotential論よりもずっと深いことを述べている。この結果がどの程度広いMarkov chain について成り立つかという問題は今のところ全く未解決である。具体的にどのような問題があるかを以下で説明しよう。

(注) 〔18〕の用語ではergodic.

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

不変測度μを用いて，Pのdual transition function $\hat{P}$を

$$(3.19)\quad \hat{P}(x,y)=\frac{\mu(y)P(y,x)}{\mu(x)}$$

によって定義する。$\hat{P}$もμを不変測度にもつ既約かつrecurrentなtransition function である。Pと$\hat{P}$が共にright normalであるとき，Pはnormalであるといおう。いま

$$(3.20)\quad C(x,y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}[P^k(y,y)-P^k(x,y)],$$

$$(3.21)\quad K(x,y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}[P^k(c,c)\frac{\mu(y)}{\mu(c)}-P^k(x,y)]$$

とおけば，$\hat{G}(x,y)=\mu(y)C(y,x)/\mu(x)$および

$$(3.22)\quad K(x,y)=G(x,y)+[C(x,c)-G(x,c)]\frac{\mu(y)}{\mu(c)}$$

が成り立つ。したがって，PがnormalならC(x,y)もG(x,y)も存在する。Pがpositiveかつ非周期的ならば，$\hat{P}$も同じ性質をもつので，normalである。Recurrentな乱歩もnormalでG=C(=K)をみたしている。Kemeny−Snellはこのようなnormal transition functionにたいしては，乱歩のpotential 論に類似の多くの結果が導かれることを示している。その1つとしてつぎの結果が成り立つ(注)。

(d) PがnormalなNull transition functionで，G=C(=K)をみたすならば，これらのkernelは

$$(3.23)\quad G(x,y)\geqq 0,\quad G(x,x)=0$$

をみたすstrong potential kernelである。

証明はkernel Kについて，Spitzer〔35；p．138−9〕と同じようにすればよい。

PositiveなPにたいして，上の結果(d)は一般に（おそらくつねに）成り立たない。もっと強く，strong potential kernelは存在しないことが予想される。これはSが有限状態空間なら自明であるが，可算空間であってもpositiveなPにたいしては有限空間と類似の性質が保存されることが多いからである。実際，Pがpositiveかつ非周期的でμがその不変確率測度なら

(注) Kemeny−Snell はこの事実を直接には述べていないようである。彼らの結果に含まれているかどうか，筆者には分らない。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$(P-I)C(x,y)=\delta(x,y)-\mu(y)$$

が示されているので〔18；p.264〕，(d)は成り立たない。

問題1. RecurrentなPが，(3.8)および

(3.24) $A(x,y)\geqq 0$, $A(x,x)=0$

をみたすstrong potential kernelをもてば，実はPはnormalなnull transition function でG＝C(K)が成り立たないか？

実はこの問は大胆すぎてこのままで成り立つとは思えない。Kemeny−Snell〔17；p.512〕はCがstrong potential kernelになるための1つの十分条件をMartin境界の言葉で与えており，その仮定は境界に関するものであるために簡単に問題1を否定する例題を与えることは難しいが，G＝Cという結論とは独立な十分条件のように思われる。しかし若干修正した形の結果がえられることは期待できる。上の問におけるA(x, y)は一般に一意的ではない。具体的な例はSpitzer〔35；p.372〕が与えており，一般的な特徴づけはMartion境界を用いてOreyが与えている。

問題2. Normalなrecurrent null transition function の分り易い判定条件を求めること。とくに乱歩のnormalityの証明を簡単にすること。

現在までに知られているnormalなnull transition functionの広いクラスとしては乱歩があるだけである。Spitzer〔35〕の証明は可成り複雑なものであるしいくつかの場合に分けてそれぞれの特殊性にもとづいた証明を与えているのでそのまま一般化することは難しい。乱歩に限ってもっと見通しのよい証明を得るだけでも意味があるし，乱歩を含むもっと広いクラスについて簡単な判定条件がえられるならば一層好ましい。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

§4. E^d上の乱歩とrenewal theorem

PをR^d上の乱歩，Aを空間的一様性（$A(x, y)=A(x-y, 0)$）をみたすstrong potential kernel としよう。そのとき，$P(0, y)=F(y)$，$A(0, y)=E(y)$ $\delta(y)=\delta(0, y)$とおけば，Poisson 方程式（3.6）は

(4.1) $\quad (F-\delta) * E=\delta$

に帰着する。ただし記号＊はconvolutionを表わす：$F * G(x)=\sum_y F(x-y)\, G(y)$.
さらに

(4.2) $$U(y)=\sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(y) \leqq \infty$$

と定義しよう。ここでF^{*n}はFのn回convolutionを表わす。§3の記号で$U(y)=N(0, y)$である。

R^d上の確率測度Fを任意に与えることによって，乱歩Pが

$$P(x, y)=F(y-x)$$

によって1つ定まるから，“Pがtransient,・・・”という代りに“Fがtransient,・・・”などと呼んでもよいであろう。たとえば，Fが（Spitzerの意味で）aperiodicであることは，つぎのようなtが存在しないことと同等である。：整数$t>1$が存在して

(4.3) $U(y)>0$となるのは，yがtの整数倍のときに限る。

ここで，可算空間上のMarkov chain から多少はなれることになるが，d−次元Euclid空間E^d上の乱歩とHerzによるgeneralized Laplacian について簡単に説明しよう。E^dは可算空間ではないが，R^dのときと同じように，その上のtransition function，あるいはもっと制限して乱歩（のtransition function）を考えることができる。FをE^d上の確率測度としよう。E^dの部分集合Aにたいし，$A-y$は$\{z \mid z=x-y, x \in A\}$という集合を表わすことにする。2つのRadon測度F，Gのconvolutionは

$$F * G(A)=\int_{E^d} F(A-y)\, G(dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

によって定義される。

(4.4) $P(x, A) = F(A - x)$

によって E^d 上の乱歩が定まるが，簡単のためにPは表面にださないでFだけを用いることにしよう。R^d のときと同じように

(4.5) $$U(A) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(A) \leqq \infty$$

とおく，F（あるいはP）のaperiodicity（Feller〔7；volume II〕の用語ではnon-arithmetic）は，(4.5) で定義されたUにたいして，(4.3) をみたすような実数 $t>0$ が存在しないこととして定義される。これは

(4.6) $(F - \delta) * h = 0$

の有界な解が定数に限ることと同等である。以下の議論ではつねにFがaperiodicであることを仮定しよう。そのときつぎの2つの場合だけがおこる。

(i) 任意の有界集合にたいして，$U(A) < \infty$。

(ii) 任意の開集合にたいして，$U(A) = \infty$。

(i) の場合にFはtransient，(ii) の場合にrecurrentと呼ぶことにする。Transientな場合に，$E(A) = -U(A)$ が

(4.7) $(F - \delta) * E = \delta$

の解になっていることは R^d の場合と同様である。Recurrentな場合に (4.7) の解，すなわちFから定まる乱歩のstrong potential operatorを求める問題は本質的に未解決である。部分的な結果としては，Herz〔9〕によってつぎのことが知られている。(4.7) を超関数に関する方程式と考える。もし (4.7) が緩増加な超関数の空間 $(\mathcal{S}')$ の中に解をもてば，或る意見でregularな解 $E_0 \in (\mathcal{S}')$ がSpitzerのkernelに類似の形で求められる。しかし E_0 が測度であるかどうかは知られていない。

$D = F - \delta$ をSchwartzの超関数と考えたとき，次の性質をもっていることは明らかである：test関数 $f \in (\mathcal{D})$ が原点で最大値をもてば，

(4.8) $\langle D, f \rangle \leqq 0$.

一般に (4.8) をみたすような $D \in (\mathcal{D}')$ をHerzはgeneralized Laplacianと呼んでいる。HerzはDの標準形（Lévy-Khintchine分解）を導いているが，それは確率論的に見ると，Dが連続パラメータの時間的に一様な加法過程の生成作用素であることにほかならない。

Herzは方程式

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

(4.9) $D * E = \delta$

の解として定まるpotential operatorについて，その存在や性質を調べている。

Erdös-Feller-Pollard 〔41〕による古典的なrenewal theoremはつぎのように述べられる。

(a) FがR^1の非負の部分に全測度をもつaperiodicな確率測度で，μをその平均値（存在しないときは$\mu=\infty$）とすれば，

(4.10) $U(x) \to \mu^{-1}$, $x \to \infty$.

その後この結果は種々の形に拡張され，それらは一括してRenewal theoryと呼ばれている。以下に述べる両側renewal theoremの最終的な結果はFeller-Orey 〔8〕によるものである。平均値有限の場合はBlackwell 〔4〕が以前に証明している。Feller-Oreyの証明はFourier変換を用いるが，Feller 〔7；volume II〕はUのpotential-operatorとしての性質（最大値原理）を利用する初等的な証明を考案した。Herz 〔9〕はその手法を徹底させて，Fellerの証明の一部をもっと分り易くしている。

(b) FをR^1上のaperiodicかつtransientな確率測度，μをその平均値（存在しない場合は$\mu=\infty$）とする。もし$\mu>0$ならば(注)

(4.11) $\lim_{x\to\infty} U(x) = \mu^{-1}$, $\lim_{x\to-\infty} U(x) = 0$

(c) FをE^1上のaperiodicかつtransientな確率測度，μをその平均値（存在しない場合は$\mu=\infty$）とする。もし$\mu>0$ならば，長さlの任意の有限区間Iにたいして

(4.12) $\lim_{x\to\infty} U(I+x) = l\,\mu^{-1}$, $\lim_{x\to-\infty} U(I+x) = 0.$

d≧2の場合には，Chung 〔42〕とSpitzer 〔35〕によって次の結果が知られている。

(d) FがR^d（d≧2）上のaperiodicかつtransientな確率測度ならば，

(4.13) $\lim_{|x|\to\infty} U(x) = 0.$

上に述べたrenewal theoremsは，R^dあるいはE^d上のaperiodicかつtransi−

(注) R^1上のtransientな乱歩が有限な平均値をもてば，$\mu>0$または$\mu<0$.

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

entな乱歩のpotential kernel Uの極限的な性質に関するものであるが，recurrentな乱歩のpotential kernelについても同様の問題が考えられる。Spitzerのpotential kernel (3.18) のrenewal theoremがSpitzer〔35；p. 358〕によって得られている。Herzはrecurrentなgeneralized Laplacianにたいするregularなpotential超関数$E_0 \in (\mathcal{S}')$について類似の結果を得ている。

乱歩のpotential kernel やそのrenewal theorem は境界理論と関係がある。(Spitzer〔35〕, Kesten〔39〕). Renewal theorem をもっと一般なMarkov chain に拡張する試みについては，Spitzer〔36〕を参照されたい。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

§5. Capacity

Transientなtransition function Pと，(Pに関する) excessive測度ηが与えられているとする。第Ⅱ部の定理3.1によって

$$(5.1)\qquad \eta(y)=E\left\{\sum_{\alpha\leqq n\leqq\beta} I_{\{y\}}(X_n)\right\}$$

をみたすapproximate P-chain(X,α,β)が存在する。Sの部分集合Eにたいし，Eへのhitting timeをσ^Eで表わそう。Pおよびηに関するEのcapacityを

$$(5.2)\qquad C(E)=P\left\{\sigma^E<+\infty\right\}$$

によって定義する。この定義は，確率論の立場からは通常の定義より好ましいと考えられる。(1)通常の定義との同等性，(2)上の定義からcapacityの基本性質が容易に導かれること，および(3)capacityに関連した典型的な極限定理について説明しよう。

まずKemeny-Snell〔18；p.p. 203-208〕にしたがって，有限集合E(注)のcapacityの通常の定義を述べる。Pのpotential kernelを§2のようにG(x, y)によって表わす。gがpotential Gfで，E上で1，さらにそのcharge $f\geqq 0$のsupportがEに含まれるとき，gを平衡potential，fを平衡chargeという。Eが有限集合であることから，gおよびfが唯一つ存在することが分る（証明はすぐ下で与える）。これをv^Eおよびe^Eで表わそう。(P, η)に関するEのcapacityは

$$(5.3)\qquad C(E)=\sum_{x\in S}\eta(x)\,e^E(x)=\sum_{x\in E}\eta(x)\,e^E(x)$$

によって定義される。

$(Y,0,\zeta)$が初期分布μのP-chainのとき，その測度をP_μで表わす。$\mu=\delta_{\{x\}}$のときはP_xで表わす。$\{Y_n\}$に関するEへのhitting timeをτ^E，P_xで測ったY_{τ^E}の分布を$H^E(x,B)$と書く：

$$H^E f(x)=E_x\left\{f(Y_{\tau^E})\right\}.$$

一般にpotential gのcharge fのsupportがEに含まれるならば，

(注) 〔18〕ではもう少し一般の集合（平衡集合）について定義しているが，簡単のために有限集合を考える。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$H^E g(x)=H^E Gf(x)=E_x\{Gf(Y_{\tau^E})\}$$
$$=E_x\{\sum_{n\geqq 0}P^n f(Y_{\tau^E})\}$$
$$=E_x\{\sum_{n\geqq 0}f(Y_{\tau^E+n})\}=E_x\{\sum_{n\geqq\tau^E}f(Y_n)\}$$
$$=E_x\{\sum_{n\geqq 0}f(Y_n)\}=Gf(x)=g(x),$$

ここで$n<\tau^E$ならば$f(Y_n)=0$であることを用いた。ゆえに平衡potentialの定義から

(5.4) $$v^E(x)=H^E v^E(x)=H^E 1(x)=P_x\{\tau^E<\infty\},$$

(5.5) $$e^E(x)=v^E(x)-Pv^E(x)$$
$$=P_x\{\tau^E<\infty\}-P_x\{\tau^E(\theta\circ\omega)<\infty\}$$
$$=P_x\{Y_0\in E,\ Y_n\notin E,\ n\geqq 1\}.$$

すなわち$v^E(x)$は(Y, P_x)に関する集合Eへの到達確率，$e^E(x)$は集合Eからのescape probability を表わす。$P^n v^E(x)=P_x\{\tau^E(\theta^n\circ\omega)<\infty\}\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$(注) であることに注意すれば，上の議論は$v^E$, e^E の存在も示している。(a) Eが有限集合のとき，定義(5.2)と(5.3)は同等である。

(X,α,β)に関するEのlast exit timeをγ^Eで表わす：$\gamma^E=\max\{n\mid X_n\in E\}$ Pがtransientなことから，a.e.(P)である番号以後$X_n\notin E$であることが示されるので，$\{\sigma^E<\infty\}=\{\gamma^E<\infty\}$ a.e.(P)が成り立つ。したがって

(5.6) $$C(E)=P\{\gamma^E<\infty\}.$$

ところが

(5.7) $$\{\gamma^E<\infty\}=\sum_{\alpha\leqq n\leqq\beta}\{\gamma^E=n\}$$
$$=\sum_{\alpha\leqq n\leqq\beta}\{X_n\in E,\ X_{n+k}\notin E,\ k\geqq 1\}$$

であるから，approximate chainの定義におけるα_jを考えると

$$P\{\gamma^E<\infty\}=E\{\sum_{\alpha\leqq n\leqq\beta}I_E(X_n)\prod_{k\geqq 1}I_{S-E}(X_{n+k})\}$$
$$=\lim_{j\to\infty}E\{\sum_{\alpha_j\leqq n\leqq\beta}I_E(X_n)\prod_{k\geqq 1}I_{S-E}(X_{n+k})\}.$$

(注) Eが無限集合のときは一般にこのことは正しくない。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

α_j は (X, α, β) を初期分布 $\mu_j = \{X_{\alpha_j} \in \cdot\}$ の P−chain $(Y, 0, \zeta)$ に reduce するから

$$E\{\sum_{\alpha_j \leqq n \leqq \beta} I_E(X_n) \prod_{k \geqq 1} I_{S-E}(X_{n+k})\}$$
$$= E_{\mu_j}\{\sum_{n \geqq 0} I_E(Y_n) \prod_{k \geqq 1} I_{S-E}(Y_{n+k})\}$$
$$= E_{\mu_j}\{\sum_{n \geqq 0} P_{Y_n}\{Y_0 \in E, Y_k \notin E, k \geqq 1\}\}$$
$$= E_{\mu_j}\{\sum_{n \leqq 0} e^E(Y_n)\} = E\{\sum_{\alpha_j \leqq n \leqq \beta} e^E(X_n)\}.$$

ゆえに

$$P\{\tau^E < \infty\} = \lim_{j \to \infty} E\{\sum_{\alpha_j \leqq n \leqq \beta} e^E(X_n)\}$$
$$= E\{\sum_{\alpha \leqq n \leqq \beta} e^E(X_n)\} = \sum_{x \in S} \eta(x)\, e^E(x)$$

をえて，(5.2) と (5.3) が一致することが分る。

Capacityの基本的な諸性質はKemeny− Snell〔18；p.p.203−208〕に詳しく説明されているが，(5.2) を用いれば，((5.3) を用いるよりも) 直接かつ容易に導かれる。

C (E) はChoquet capacityである，すなわち

(5.8) $\qquad E_n \uparrow E$ ならば，$C(E_n) \uparrow C(E)$

および

(5.9) $\qquad C(E \cup F) + C(E \cap F) \leqq C(E) + C(F)$.

(5.8) は $\{\sigma^{E_n} < \infty\} \uparrow \{\sigma^E < \infty\}$ から明らかである。(5.9) を示すために $\widetilde{E} = \{\sigma^E < \infty\}$ と表わそう。$\widetilde{E \cup F} = \widetilde{E} \cup \widetilde{F}$，$\widetilde{E} \cap \widetilde{F} \supset \widetilde{E \cap F}$ を用いて

$$C(E \cup F) - C(E) = P\{\widetilde{E \cup F}\} - P\{\widetilde{E}\}$$
$$= P\{\widetilde{E} \cup \widetilde{F} - \widetilde{E}\} = P\{\widetilde{F} - \widetilde{E} \cap \widetilde{F}\}$$
$$\leqq P\{\widetilde{F}\} - P\{\widetilde{E \cap F}\} = C(F) - C(\widetilde{E \cap F}).$$

同じようにC (E) がalternating of order ∞であること，すなわち

(5.10) $$C(E_1 \cap \cdots \cap E_n) \leqq \sum_i C(E_i) - \sum_{i<j} C(E_i \cup E_j) + \sum_{i<j<k} C(E_i \cup E_j \cup E_k) - \cdots - (-1)^n C(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$$

であることも導かれる。

今述べた議論は一般な状態空間をもつ連続パラメータのMarkov 過程についても（証明の技術

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

的な点は別として）そのまま成り立つ。１つの例として３次元Euclid空間E^3上のNewton capacityを考えよう。ηをE^3上のLebesgue 測度とすれば，それはE^3上のBrown運動のtransition function $P(t,x,dy)$に関しexcessive（実は不変）測度である。

$$\eta(B)=E\left\{\int_\alpha^\beta I_B(X_t)\,dt\right\}\quad,\quad B\subset E^3$$

をみたすapproxcimate Brown運動(X,α,β)を考える。$\{X_t\}$に関するBへのhitting timeをσ^Bとすれば，E^3上のNewton capacity $C(B)$は$P\{\sigma^B<\infty\}$に一致する(注1)。したがって，$C(B)$がChoquet capacityであることはMarkov chainの場合と同様に示されるから，Borel集合Bがcapacitable であることが分る。

つぎにηに関するPのdual transition function

$$(5.11)\qquad \hat{P}(x,y)=\frac{\eta(y)P(y,x)}{\eta(x)}$$

を考える。$\hat{P}$とηに関するEのcapacityを$\hat{C}(E)$で表わす。

(C) Eが有限集合のとき

$$(5.12)\qquad C(E)=\hat{C}(E).$$

実際，第Ⅱ部の§４で示すように，(X,α,β)のreversed chain $(\hat{X},\hat{\alpha},\hat{\beta})$をを考えると，それはapproximate $\hat{P}$−chainで

$$\eta(y)=E\left\{\sum_{\hat{\alpha}\le n\le\hat{\beta}}' I_{\{y\}}(\hat{X}_n)\right\}$$

であるから，$\{\hat{X}_n\}$に関するEへのhitting timeを$\hat{\sigma}^E$とすれば

$$\hat{C}(E)=P\{\hat{\sigma}^E<\infty\}.$$

ところが，$\sigma^E=\tau^E$であるから(5.6)により$C(E)=\hat{C}(E)$はあきらかである。

Capacity $C(E)$ を含むエルゴード型の極限定理については，最近S.Portが一連の精力的な仕事をしている(注2)。これはSpitzer〔35〕がrandom walkについて得た結果を，一般のMarkov chain に拡張したものであるが，前述のapproximate P−chai

---

(注1) $C(B)$の通常の定義は，Kemeny−Snell〔18；p.172〕を見よ。

(注2) 代表的なものとして〔32〕，〔33〕をあげておくが，その他にもたくさんあるので，Mathematical Review等で調べるとよい。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

を用いて，それらを整理することは興味があるかも知れない。下巻でやや詳しく紹介する予定であるが，ここでは典型的なものを1つだけ証明しよう。

測度ηが不変測度であるとしよう(注)。P−chain $(Y, 0, \zeta)$ に関して，集合Eへの正のhitting timeをτ_1^E，$\hat{P}$−chain $(\hat{Y}, 0, \hat{\zeta})$ に関して集合EからEへの回帰時間を$\hat{\tau}_E^E$ で表わそう；

(5.13) $\quad \tau_1^E = \min\{ n \mid Y_n \in E,\ n \geqq 1 \}$

(5.14) $\quad \tau_E^E = \min\{ n \mid \hat{Y}_0 \in E,\ \hat{Y}_n \in E,\ n \geqq 1 \}$

(5.15) $\quad e_n(E) = \sum_{x \in S} \eta(x) P_x\{ \tau_1^E = n \}$

$$= \sum_{x \in S} \eta(y) \hat{P}_y\{ \hat{\tau}_E^E \geqq n \}$$

と置く。ここで$\hat{P}_y$は初期分布$\delta_{\{y\}}$なる$\hat{P}$− chain の測度を表わす。

(d) (5.15) の定義における等号を証明しよう。

Approximate P−chain (X, α, β) においてkから先の集合Eへのhitting timeをσ_k^E，reversed chain $(\hat{X}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ においてkから最の回帰時間を$\hat{\sigma}_{E,k}^E$ で表わそう：

(5.16) $\quad \sigma_k^E = \min\{ n \mid X_n \in E,\ n \geqq k \}$,

(5.17) $\quad \sigma_{E,k}^E = \min\{ n \mid \hat{X}_k \in E,\ \hat{X}_n \in E,\ n > k \}$.

そのとき，(5.7) に続く議論と同様にしてつぎのことが分る。

$\{ \sigma_{k+1}^E = n+k+1 \}$のindicatorを$I_k$で表わせば

$$\sum_{x \in S} \eta(x) P_x\{ \tau_1^E = n \} = E\Big[\sum_{\alpha \leqq k \leqq \beta} P_{X_k}\{ \tau_1^E = n \} \Big]$$

$$= E\Big\{ \sum_{\alpha \leqq k \leqq \beta} I_k \Big\}$$

同様に$\{ \hat{\sigma}_{E,k}^E \geqq n+k \}$の indicatorを$J_k$とすれば，

$$\sum_{y \in S} \eta(y) \hat{P}_y\{ \tau_E^E \geqq n \} = E\Big[\sum_{\alpha \leqq k \leqq \beta} \hat{P}_{X_k}\{ \tau_E^E \geqq n \} \Big]$$

$$= E\Big\{ \sum_{\alpha \leqq k \leqq \beta} J_k \Big\}.$$

ところが$\{ \sigma_{k+1}^E = n+k+1 \} = \{ \hat{\sigma}_{E,-(n+k+1)}^E \geqq -(k+1) \}$ すなわち$I_k = J_{-(k+n)}$だから，

$$\sum_{\alpha \leqq k \leqq \beta} I_k = \sum_{\alpha \leqq k \leqq \beta} J_k \quad .$$

(注) ηはexcessive測度でよいと思われるが，詳しくcheckしていないので，Portの仮定にしたがっておく。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

ゆえに(5.15)の第2式と第3式の等号が証明された。

Eを有限集合，$\hat{P}$−chain$(\hat{Y},\hat{P}_y)$に関するEからのescape probabilityを$\hat{e}^E$ reversed chain$(\hat{X},\hat{\alpha},\hat{\beta})$のlast exit timeを$\hat{\gamma}^E$とすれば，(5.15)の後半の式から

$$(5.18)\qquad \lim_{n\to\infty} e_n(E)=\sum_{y\in S}\eta(y)\hat{P}_y\{\hat{\tau}_E^E=\infty\}$$
$$=\sum_{y\in S}\eta(y)\hat{e}^E(y)=P\{\hat{\gamma}^E<\infty\}$$
$$=P\{\sigma^E<\infty\}=C(E)\ .$$

したがって

$$(5.19)\qquad \mathcal{E}_n(E)=\sum_{k=1}^{n} e_n(E)$$

とおけば

$$(5.20)\qquad \lim\frac{\mathcal{E}_n(E)}{n}=C(E)\ .$$

Port〔32〕は(5.20)に対応する強法則(エルゴード型定理)をつぎのように導いている。P−chainの族$(Y^{(j)},0,\varsigma^{(j)})$，$j=1,2,\cdots$，が以下の条件(a)，(b)をみたすように与えられているとき，平衡過程であると呼ぼう。これはDerman〔4〕によって導入された概念であるが，その存在や性質についてはPort〔43〕の研究がある。

(i) Sの各状態xに対し，$Y_1^{(j)}=x$であるようなjの個数を$A_0(x)$とすれば，$\{A_0(x),x\in S\}$は互に独立で，その各々は平均$\eta(x)$のPoisson分布にしたがっている。

(ii) $Y_0^{(j)}$，$j=1,2,\cdots$，によって生成されるσ−fieldを$\mathfrak{F}_0$とするとき，$(Y^{(j)},0,\varsigma^{(j)})$，$j=1,2,\cdots$，は条件$\mathfrak{F}_0$の下で独立である。すなわち

$$(5.21)\qquad P\Big[\bigcap_{j=1}^{n}\{Y_1^{(j)}\in E_1^{(j)},\cdots,Y_k^{(j)}\in E_k^{(j)}\}\,\Big|\,\mathfrak{F}_0\Big]$$
$$=\prod_{j=1}^{n}P\{Y_1^{(j)}\in E_1^{(j)},\cdots,Y_k^{(j)}\in E_k^{(j)}\,|\,\mathfrak{F}_0\}$$

が任意のn，k，$E_\ell^{(j)}\subset S$にたいして成立する。さらに
$P\{Y_1^{(j)}\in E_1^{(j)},\cdots,Y_k^{(j)}\in E_k^{(j)}\,|\,\mathfrak{F}_0\}$は$Y_0^{(j)}$のみに関係する。

$(Y_0^{(j)},0,\varsigma^{(j)})$に関するEへの正のhitting timeを$\tau_1^{(j),E}$とし，$\tau^{(j),E}=n$であるようなjの個数を$I_n$，$N_n=\sum_{k=1}^{n} I_k$とする。そのとき(e)

$$(5.22)\qquad E\{I_n\}=e_n(E)\ ,\quad E\{N_n\}=\mathcal{E}_n(E)$$

である。更にa.e.で

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

(5.23) $$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{n}=C(E)$$

が成り立つ（証明は〔32〕を見よ）。

これは乱歩におけるSpitzer の次の結果と比較してよいであろう。$(Y, 0, \varsigma)$ を原点から出発するtransientな乱歩とする。η は R^d 上の一様測度を取るものとする。$E_n=\bigcup_{j=0}^{n}\{x \mid x-Y_j \in E\}$，$E_n$ の点の個数を $|E_n|$ で表わせば，a.e.で

(5.24) $$\lim_{n\to\infty}\frac{|E_n|}{n}=C(E) .$$

Spitzer〔44〕は（5,24）に類似の結果をBrown運動（C(E)はNewton capacity）について得ている。

この他capacityに関連する問題では，Wiener test, recurrent setのこと等があるが，Itô - McKean〔15〕，Lamperti〔27〕，Spitzer〔35〕等を見ていただきたい。

Recurrentなtransition functionとexcessive（＝不変）測度に関するcapacityについては，Kemeny - Snell〔18〕，Spitzer〔35〕，Port〔35〕等の研究がある。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

文 献.

(1) D. Blackwell: Extension of a renewal theorem. Pacific J. Math. 3,315-320(1953).

(2) D. Blackwell and D.Freedman; The tail σ-field of a Markov chain and a theorem of Orey. Ann. Math. Stat. 35, 1291-1295 (1964).

(3) K.L. Chung: Markov chains with stationary transition probabilities. J. Springer, Berlin, 1960.

(4) C. Derman: Some contributions to the theory of denumerable Markov chain. Trans. Amer. Math. Soc. 79, 541-555(1955).

(5) J. L. Doob: Probability methods applied to the first boundary valur problem. Proc. Third Berkeley Sympo. on Math. Stat. Probability II, 49-80 (1954-55).

(6) E.B. Dynkin: Foundations of the theory of Markov processes (English translation). Pergamon Press, London, 1961.

(7) W. Feller: An introduction to probability theory and its applications. volume I (2nd ed.), volume II. J. Wiley, New York, 1957, 1966.

(8) W. Feller and S. Orey: A renewal theorem. J. Math. and Mech. 10, 619-624 (1961).

(9) C.S. Herz: Les theoremes de renouvellement. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15, 169-188 (1965).

10) G.A. Hunt: Markoff processes and potentials, I, II. Illinois J. Math. 1, 44-93, 316-369(1957).

11) G. A. Hunt: Markoff chains and Martion boundaries. Illinois J. Math. 4, 313-340 (1960).

12) G. A. Hunt: Transformation of Markoff processes. Proc. Int. Congress of Math. (Stockholm), 531-535 (1962).

13) G. A. Hunt: La théorie du potentiel et les processus récurrents. Ann. Inst. Fourier, Grenbble, 15, 3-12(1965).

(14) K. Itô: Lectures on stochastic processes. Tata Institute, Bombay, 1961.

(15) K. Itô and H. P. Mekean, Jr.,: Potentials and the random walk. Illinois J. Math. 4, 119-132 (1960).

(16) J. G. Kemeny and J. L. Snell: Potentials for denumerabl Markov chains. J. Math. Anal. Appl. 3, 196-260(1961).

(17) J. G. Kemeny and J. L. Snell: Boundary theory for recurrent Markov chains. Trans. Amer. Math. Soc. 106, 455-520 (1963).

(18) J. G. Kemeny, J. L. Seell and A. W. Knapp: Denumerable Markov chains, Von Nostrand, Princeton, N. J., 1966.

(19) H. Kesten and F. Spitzer: Random walk on countably infi abelian groups. Acta Math. 114, 237-265(1965).

(20) F. Knight: Markov processes on an entrance boundary. Illinois J. Math. 7, 322-335(1963).

(21) F. Knight: Note on regularization of Markov processes. Illinois J. Math. 9,548-552(1965).

(22) A.N. Kolmogorov: Uder die analytischen Methoden in die Wahrscheinlich-heitsrechnung. Math. Ann. 104, 415-458 (1931).

(23) A. N. Kolmogorov: Arfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten unendlich vielen möglichen Zuständer Math. Sbornil, n. Ser. 1,607-610 (1936), Bull. Univ. Moscow, 3, 1-15(1937) (Russian).

(24) R. Kondo: On weak potential optenial operators for recurrent Markov chains with continuous parameters. Osaka J. Math. 4, 327-344(1967).

(25) H. Kunita and T, Watanabe: On certain reversed processes and their applications to potential theory and boundary theory. J. Math. Mech. 15, 393-434(1966).

(26) H. Kunita and T. Watanabe: Some theorems concerning resolvents over locally compact spaces. Proc. Fifth Berkeley Symp. on Math. Stat. Probability, II, Part 2,

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

131-164(1967).

27) J. Lamperti: Wiener's test and Markov chains. J. Math. Anal. Appl. 6,58-66(1963).

28) P. A. Meyer: Caracterization des noyau potentiels des semi-groupes discrets. Ann. Inst, Fourier, Grenoble, 16, 225-246(1966).

29) J. Neveu: Une généralisation des processus a accroissemen positifs independents. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 25,37-61(1961).

30) S. Orey: An ergodic theorem for Markov chains. Z. Wahrscheinlichheits theorie , 1, 174-176(1962).

31) S. Orey: Potential kernels for recurrent Markov chains. J. Math. Anal. Appl. 8, 104-132(1964).

32) S. Port: Limit theorems involving capacities. J. Math. Mech. 15, 805-832 (1966).

33) S. Port: Limit theorems involving capacities for recurrent Markov chains. J. Math. Anal. Appl. 12, 555-569(1965).

34) D. Ray: Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes. Ann. Math. 70, 43-78 (1965).

35) F. Spitzer: Principles of random walk, Van Nostrand, Princeton, N. J. (1964).

36) F. Spitzer: Renewel theorem for Markov chains. Proc. Fifth Berkeley Sympo. on Math. Stat. Probability, II, Part 2, 3ii-320(1967).

38) L. Takeuchi: A limit theorem involving capacity for recurrent stable processes, to appear.

39* H. Kesten: The Martin boundary of recurrent random walks on countable groups. Proc. Fifth Berkeley Sympo. on Math. Stat. Probability, II, Part 2, 51-74(1967).

40) J. G. Kemeny and J. L. Snell: On Markov chain potentials. Ann. Math. Stat. 32, 709-715(1961).

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

(41) P. Erdös, W, Feller and H. Pollard: A theorem on rower series, Bull. Amer. Math. Soc. 55, 201-204(1945)

(42) K. L. Chung: On the renewal theorem in higher demensions Skand. Aktuarietidskrift 35, 188-194(1952).

(43) S. Port: Equilibrium processes, Trans. Amer. Math. Soc. 124, 168-184(1966).

(44) F. Spitzer: Electrostatic capacity, heat flow, and Brownian notioh, Z, Wahrscheiblichkeits theorie 3, 110-121 (1964).

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

第 II 部

MARKOV CHAIN の POTENTIAL KERNEL

近 藤 亮 司

Markov 過程と potential 論との関係は，Hunt の有名な論文〔3〕以来多くの人達によって研究され，その後解明されたことも少くない。このノートでは最も簡単な Markov過程（のクラス）である離散パラメータのMarkov chainについて，その potential kernel と最大値原理の関係について調べる。最初の一般的準備の節を別にすると，大きく2つの部分に分けて，第1章では transient chainの potential kernelについて，第2章ではrecurrent chainのpotential kernel（この場合にはoperatorという方がより適切であるが）について考察する。第1章は主としてMeyer〔8〕の，第2章はOrey〔10〕の結果を筆者の考えを交えて解説したものである。それぞれの章の終り（§4および§8）に未解決の問題と，それらについて部分的に分ったことなどが書いてある。

§0. 準 備

Sを可算集合とし，その元をx，y,…で表わす。S×S上で定義された実数値関数をkernelという。K（x，y）がkernelであるとき，写像：x→K（x，y）を関数，y→K（x，y）を測度と考える。一般に関数をf，g，…で表わし，測度をμ，ν，…で表わす。

kf は $Kf(x) = \Sigma_{y\in S} K(x,y)f(y)$ なる関数，

μK は $\mu K(y) = \Sigma_{x\in S}\mu(x)K(x,y)$ なる測度，

KH は $KH(x,y) = \Sigma_{z\in S}K(x,z)H(z,y)$ なるkernel，

$\langle\mu,f\rangle = \Sigma_{x\in S}\mu(x)f(x)$，

$f\otimes\mu$ は $f\otimes\mu(x,y) = f(x)\mu(y)$ なるkernel

を表わすことにする。I は $I(x,y)=0$　$(x\neq y)$，$=1$　$(x=y)$ というkernel，又は恒等写像を表わすことにし，集合Aのindicatorを I_A と書く。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

Ⅱ－２

(0.1)　　$K(x, y) \geqq 0$, $\Sigma_{y \in S}\ K(x, y) \leqq 1$

をみたすkernelをsub−Markov kernel,(注1) 第２の式で等号が成り立つとき Markov kernel(注2) と呼ぶ。大小関係および収束は，すべて各点毎の意味とする。

S上にsub−Markov kernel Pが与えられたとき，S上にMarkov chain Xを構成して，その推移確率が$P(x, y)$であるように出来ることはよく知られている。Markov chainを$X=(\Omega, \mathcal{M}, (X_n)_{n\geqq 0}, (\theta_n)_{n\geqq 0}, (P_x)_{x\in S_\triangle})$によって表わす。(注3) 念のためそれ等の記号を説明しておこう。$S_\triangle = S\cup\{\triangle\}$ $(\triangle \notin S)$; $n=0, 1, 2, \cdots$; $(\Omega, \mathcal{M})$は可測空間；$(X_n)_{n\geqq 0}$は$S_\triangle$の中に値をとる$(\Omega, \mathcal{M})$上の確率変数列；"$X_n(\omega)=\triangle$であれば，すべての$m\geqq n$に対し$X_m(\omega)=\triangle$" という条件がすべての$\omega\in\Omega$にたいしてみたされる。

$X_0, X_1, \cdots X_n$ $[X_0, X_1, \cdots]$ を可測にする最小のσ−field をB_n $[B_\infty]$で表わす。$(\theta_n)_{n\geqq 0}$はΩからΩへの写像の列で，$X_m(\theta_n\omega)=X_{n+m}(\omega)$をみたすものとする。従って，$\theta_n^{-1}(B_m)\subseteqq B_{n+m}$となり，特に$(\Omega, B_\infty)$から$(\Omega, B_\infty)$への写像として$\theta_n$は可測である。$(P_x)_{x\in S_\triangle}$は$(\Omega, \mathcal{M})$上の確率測度の族で，$P_x(X_0=x)=1$がすべての$x\in S_\triangle$に対して成り立っているとする。XがMarkov chainであるというのは，任意の有界B_∞−可測関数Φ，$\Lambda\in B_n$，$x\in S_\triangle$に対し，Markov性と呼ばれる性質；

(M)　　$E_x(\Phi\circ\theta_n ; \Lambda) = E_x(E_{X_n}(\Phi) : \Lambda)$

をみたすことである，ただし$\Phi\circ\theta_n(\omega)=\Phi(\theta_n\omega)$.

記述を簡単にするために，すべての$\omega\in\Omega$に対し，$X_\infty(\omega)=\triangle$，$\theta_\infty(\omega)=\omega_\triangle$と定めておく。ただし，$\omega_\triangle$は$X_n(\omega_\triangle)=\triangle$がすべての$n\geqq 0$に対して成り立つ元で，最初から$\Omega$に含まれているとしてよい。また$\tau=\tau(\omega)$が$\Omega$で定義され，$\{0, 1, 2, \cdots, \infty\}$の値をとる関数のとき，$X_{\tau(\omega)}(\omega)$ $[\theta_{\tau(\omega)}(\omega)]$で定義される$\Omega$から$S_\triangle$ $[\Omega$から$\Omega]$への写像をX_τ, θ_τと表わす。特にτが

(M.T.)　　$\{\tau\leqq n\}\in B_n$　　$(\forall n\geqq 0)$

をみたすとき，Markov timeという。このとき

(注1) 第Ⅰ部でtransition functionと呼んだものである。

(注2) 第Ⅰ部ではMarkov的なtransition functionと呼んだ。

(注3) 第Ⅰ部あるいは第Ⅱ部の定義と若干異なるが，ここで述べる定義もMarkov過程論では慣用のものであるから，両者の名称を殊更区別する必要はないであろう。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$B_\tau = \{\Lambda ; \Lambda \in B_\infty,\ \Lambda \cap \{\tau \leqq n\} \in B_n \quad \forall n \geqq 0\}$$

はB_∞のσ－subfield である。すべてのMarkov chain は強Markov性をもつ。即ち，任意の有界B_∞－可測関数Φ，Markov time τ，$\Lambda \in B_\tau$，$x \in S_\triangle$に対し，

$$(\mathrm{M}') \qquad E_x(\Phi \circ \theta_\tau : \Lambda) = E_x(E_{X_\tau}(\Phi) ; \Lambda)$$

が成立する。

Markov time として重要なのは到達時間である。それは$E \subseteqq S_\triangle$に対し，

$$(0.2) \qquad \sigma^E = \begin{cases} \inf\{n \geqq 0,\ X_n \in E\} \\ \infty \quad (\text{上のような}\ n\ \text{が存在しないとき}) \end{cases}$$

によって定義される。$\tau(\omega)$をMarkov time として，$\sigma^E_\tau = \tau + \sigma^E \circ \theta_\tau$ という記号も用いる。これは時刻$\tau(\omega)$以後初めてEに到達する時間を示すMarkov timeである。特に$E = \{x\}$ ($x \in S_\triangle$) のときには，$\sigma^{\{x\}}$，$\sigma^{\{x\}}_\tau$ の代りにσ^x，σ^x_τ と書くことにする。$\zeta = \sigma^\triangle$ は，Xの<u>life time</u> と呼ばれる。

これも念のためSの点の分類にふれておく（第I部，§1参照）。

$x \in S$とすると，

xが recurrent $\overset{(\text{定義})}{\Longleftrightarrow}$ $P_x(\sigma^x_1 < \infty) = 1$

xが transient $\Longleftrightarrow$ $P_x(\sigma^x_1 < \infty) < 1$

であり，recurrent なxにたいし，

xがpositive $\Longleftrightarrow$ $E_x(\sigma^x_1) < \infty$

xがnull $\Longleftrightarrow$ $E_x(\sigma^x_1) = \infty$

である。またx，$y \in S$，$P_x(\sigma^y < \infty) > 0$のとき，$x$がrecurrent〔positive recurrent〕であり，$P_x(\sigma^y < \infty) = 1$および$P_y(\sigma^x < \infty) = 1$〔$E_x(\sigma^y) < \infty$および$E_y(\sigma^x) < \infty$〕が成り立つ。従って，すべての$x$，$y \in S$に対し$P_x(\sigma^y < \infty) > 0$であるようなMarkov chain において，すべての状態$x \in S$は同じ型である。

PをS上のsub-Markov kernelとする。S上の非負関数hが $Ph \leqq h$ をみたすならば，（Pに関して）<u>excessive</u> といわれる。[註] Pに対するMarkov chain をXとすれば，これは

$$(0.3) \qquad E_x(h(X_1) ; 1 < \zeta) \leqq h(x) \quad (\forall x \in S)$$

と同値であり，更に$h(\triangle) = 0$とおくと，

註 以下において有限値のexcessive 関数のみを考える。今後このことをいちいち断らない。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

II－4
$E_x(h(X_1)\leqq h(x)$ 　 $(\forall x\in S)$
とも同値である。

定理0.1．hをexcessive関数，τをMarkov timeとすると

(0.4) 　 $E_x(h(X_\tau);\tau<\zeta)\leqq h(x)$ 　 $(\forall x\in S)$

が成り立つ。

証明 　 $h(\triangle)=0$とおいて$E_x(h(X_\tau))\leqq h(x)$を示せばよい。$n\geqq 1$とすれば

$E_x(h(X_{\tau\wedge n}))$

$=E_x(h(X_\tau);\tau\leqq n-1)+E_x(h(X_n);\tau>n-1)$．

ところで

$E_x(h(X_n);\tau>n-1)=E_x(h(X_1\circ\theta_{n-1});\tau>n-1)$

$=E_x(E_{X_{n-1}}(h(X_1);\tau>n-1)\leqq E_x(h(X_{n-1});\tau>n-1)$。

故に，

$E_x(h(X_{\tau\wedge n}))\leqq E_x(h(X_\tau);\tau\leqq n-1)+E_x(h(X_{n-1});\tau>n-1)$

$=E_x(h(X_{\tau\wedge(n-1)}))$。

このことから，帰納的に

$E_x(h(X_{\tau\wedge n})\leqq h(x)$

が得られるから，$n\uparrow\infty$として定理が証明される。（終）

$E\subsetneqq S$のとき

(0.5) 　 $H^E(x,y)=P_x(X_{\sigma_E}=y;\sigma^E<\zeta)$

で定義されるkernel H^EをEの調和測度という。$H^E(x,\cdot)$はEにsupportが含まれる測度で，$x\notin E$であれば$PH^E(x,y)=H^E(x,y)$である。

系 　 hをexcessive，$E\subseteqq S$とすれば，H^EhはE上でhより大なexcessive関数であり，またそのようなexcessive関数の中で最小である。

何となれば，定理において$\tau=\sigma_1^E$とすると

$PH^Eh(x)=E_x(h(X_{\sigma_1^E});\sigma_1^E<\zeta)\leqq h(x)$ 　 $(x\in S)$

が成り立つ。従って，$x\in E$ならば

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$PH^E h(x) \leqq h(x) = H^E h(x)$

であり，$x \notin E$ならば

$PH^E h(x) = H^E h(x)$

で，いづれにしろ$PH^E h \leqq H^E h$である。即ち，$H^E h$はE上でhより大（実は等しい）excessive 関数である。また，gをE上でhより大なexcessive 関数とすると，

$$g(x) \geqq E_x(g(X_{\sigma_E}); \sigma^E < \zeta)$$
$$\geqq E_x(h(X_{\sigma_E}); \sigma^E < \zeta) = H^E h(x)$$

が成り立つ。

$H^E h$のことをhのE上へのréduiteという。

S上の関数hが

(0.6) $\quad P|h| < \infty$，かつ $Ph = h$

をみたすならば，（Pに関して）調和であるといわれる。

定理 0.2．　hが調和で，τが

(0.7) $\quad E_x(\sum_{0 \leqq n < \tau} |h(X_n)|; \tau < \zeta) < \infty \quad (\forall x \in S)$

なるMarkov time であれば

(0.8) $\quad E_x(h(X_\tau); \tau < \zeta) = h(x) \quad (\forall x \in S)$

が成り立つ。

証明　$h(\Delta) = 0$として，$E_x(h(X_\tau)) = h(x)$を示す。

仮定から，級数

$$\sum_{n \geqq 1} E_x(h(X_n); \tau > n-1) \quad \text{および}$$
$$\sum_{n \geqq 1} E_x(h(X_n); \tau > n)$$

は共に絶対収束である。故に

$$E_x(h(X_\tau)) = \sum_{n=0}^{\infty} E_x(h(X_\tau); \tau = n)$$
$$= E_x(h(X_0); \tau = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} E_x(h(X_n); \tau > n-1)$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} E_x(h(X_n); \tau > n)$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$= E_x(h(X_0);\tau=0) + \sum_{n=1}^{\infty} E_x(h(X_{n-1});\tau>n-1) - \sum_{n=1}^{\infty} E_x(h(X_n);\tau>n)$$

$$= E_x(h(X_0);\tau=0) + E_x(h(X_0);\tau>0)$$

$$= E_x(h(X_0)) = h(x)。$$ （終）

第１章　Transient chain

PをS上のsub-Markov kernelとし，

(T)　$G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, y) < \infty$　$(\forall x, y \in S)$

とする。Pに対するMarkov chainをXとすれば，すべての$x \in S$はtransient stateである。GをXの（またはPの）potential kernelと呼ぶ。また$G|f|$が有限なときGfをfのpotential，fをchargeという。$PG=G-I$であるから，もし$f \geqq 0$であれば$PGf \leqq Gf$となるのでGfはexcessiveである。この章では最初Markov chainがあったとして，そのpotentialやexcessive関数の性質を述べ，Gのみたすべき最大値原理を調べる。後半では，最大値原理をみたすGが与えられたとき，Markov chainを構成する問題を考える。

§1. Excessive関数とpotential

PをSub-Markov kernel，XをPに対するtransient chain，Gをpotential kernelとする。

定理 1.1. Excessive関数hがある非負函数fのpotentialであるための必要充分条件は，

(1.1)　$\lim_{n\to\infty} P^n h = 0$

である。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

証明　$h=Gf$ $(f\geqq 0)$ とする。 $\Sigma_{n\geqq 0} P^n |f| = G|f|$ は有限で

$$P^n h = \Sigma_{m\geqq n} P^m f$$

であるから $\lim_{n\to\infty} P^n h = 0$。 逆に，$h$を excessive 関数として，（1.1）がみたされているとする。 $f=h-Ph$ とおくと，$f\geqq 0$で $\Sigma_{k=0}^{n} P^k f = h - P^{n+1} h$ である。従って，（1.1）を考慮すれば

$\Sigma_{n=0}^{\infty} P^n f = Gf = h$ を得る。　　　　（終）

系1.　hを excessive とする。hが非負関数の potential であるためには，$0\leqq g\leqq h$をみたす調和関数gが0に限ることが必要充分である。

系2.　（Riesz 分解）　hを excessive 関数とすると，$f\geqq 0$および非負調和関数gがあって，

（1.2）　　$h = Gf + g$

と書ける。この分解は唯一通りである。

次の定理は Meyer による。

定理 1. 2.　hを excessive 関数とする。hが非負関数の potential であるための必要充分条件は，$B_n \downarrow \phi$なる任意のSの部分集合列に対し

（1.3）　　$\lim_{n\to\infty} H^{B_n} h = 0$

が成り立つことである。

証明　（必要性）$B_n \downarrow \phi$とする。réduite の定義から，$h\geqq H^{B_1} h \geqq H^{B_2} h \geqq \cdots \geqq 0$ が成り立つので，$g = \lim_{n\to\infty} H^{B_n} h$が存在し，Lebesgue の定理で

$$Pg = \lim_{n\to\infty} PH^{B_n} h$$

が成立する。$B_n \downarrow \phi$であるから，任意の$x \in S$に対しある番号n_0があって，$n\geqq n_0$ ならば $PH^{B_n}h(x) = H^{B_n} h(x)$ が成り立つ。従って

$$Pg(x) = \lim_{n\to\infty} PH^{B_n} h(x) = \lim_{n\to\infty} H^{B_n} h(x) = g(x) \;:$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

gは$0\leqq g\leqq h$をみたす調和関数である。hは potential であるから定理1.1の系1により$g=0$。

（充分性）hが potential でなければ，$B_n\downarrow\phi$で（1.3）の成り立たないものがあることをいえばよい。hが potential でないので，$0\leqq g\leqq h$をみたし恒等的に0ではない調和関数gが存在する。

$\{A_n\}$を$A_n\uparrow S$なる有限集合列とし，$C_n=\{x;g(x)\leqq n\}$とする。$C_n\uparrow S$であるから，$B_n=S\setminus(A_n\cap C_n)$とおくと，$B_n\downarrow\phi$である。所で

$$E_x\left(\Sigma_{0\leqq m<\sigma^{B_n}}\, g(X_m)\right)$$
$$\leqq nE_x(\sigma^{B_n})$$
$$\leqq nG(I_{A_n})(x)<\infty$$

であるから定理0.2により$H^{B_n}g=g$である。

従って，$H^{B_n}h\geqq H^{B_n}g=g$ となり（1.3）が成り立たない。（終）

最後に excessive 関数を potential kernel G で特徴づける定理をあげる。

定理1.3 非負関数hが excessive であるためには次の性質をもつことが必要十分である。(注)

(Q.E) $G|f|$が有限であるようなfに対し，集合$\{f>0\}$上で$Gf\leqq h$が成り立てば，S上で

（1.4）　$Gf\leqq h-f^-$

が成り立つ。

証明　hを excessive とし，$E=\{f>0\}$上で $Gf\leqq h$ が成り立っているとする。このとき，任意の$x\in S$に対して

$$Gf(x)=E_x\left(\Sigma_{0\leqq n<\zeta}f(X_n)\right)$$
$$=E_x\left(\Sigma_{0\leqq n<\sigma^E}f(X_n)\right)$$
$$+E_x\left(\Sigma_{\sigma^E\leqq n<\zeta}f(X_n)\right)$$

(注) $f^+=\max(f,0)$，$f^-=\max(-f,0)$．また（Q.E）は quasi-excessive の略のつもりである。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$= -E_x(\Sigma_{0\leqq n<\sigma^E} f^-(X_n)) + E_x(Gf(X_{\sigma^E});\sigma^E<\zeta)$$
$$\leqq -f^-(x)+E_x(h(X_{\sigma^E});\sigma^E<\zeta)$$
$$\leqq -f^-(x)+h(x)$$

が成り立つ。故に (Q.E) は必要である。

次に，hが性質 (Q.E) をもてば excessive であることを示そう。EをSの有限部分集合とし，

(1.5) $\varphi^E = E_x(h(X_{\sigma^E});\sigma^E<\zeta) - E_x(h(X_{\sigma^E_1});\sigma^E_1<\zeta)$

とおく。$x \notin E$ならば$P_x(\sigma^E=\sigma^E_1)=1$であるから，$\mathrm{supp}(\varphi^E)\subseteqq E$である。(注)

$$P^k\varphi^E(x) = E_x(h(X_{\sigma^E_k});\sigma^E_k<\zeta) - E_x(h(X_{\sigma^E_{k+1}});\sigma^E_{k+1}<\zeta)$$

であるから

$$\Sigma_{k=0}^n P^k\varphi^E(x) = E_x(h(X_{\sigma^E});\sigma^E<\zeta) - E_x(h(X_{\sigma^E_{n+1}});\sigma^E_{n+1}<\zeta)$$

である。所で$\|h\|_E=\sup_{x\in E}|h(x)|$ とおくと

$$E_x(h(X_{\sigma^E_{n+1}});\sigma^E_{n+1}<\zeta)\leqq\|h\|_E P_x(\sigma^E_{n+1}<\zeta)$$
$$\leqq\|h\|_E\Sigma_{m\geqq n+1}P_x(X_m\in E)$$

で，$\Sigma_{m\geqq 0}P_x(X_m\in E)=G(I_E)(x)<\infty$ であるから，

$\lim_{n\to\infty}E_x(h(X_{\sigma^E_{n+1}});\sigma^E_{n+1}<\zeta)=0$ である。ゆえに

$$G\varphi^E=\Sigma_{k=0}^{\infty}P^k\varphi^E=H^Eh$$

である。E上で$G\varphi^E=H^Eh=h$ であるから，特に$\{\varphi^E>0\}$上で$G\varphi^E=h$。従って，(Q.E) により，S上で $G\varphi^E\leqq h-(\varphi^E)^-$である。特にE上では $h=G\varphi^E\leqq h-(\varphi^E)^-$

(注) $\mathrm{supp}(f)=\{x;f\neq 0\}$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

であるから $(\varphi^E)^- = 0$。このことは $\varphi^E \geqq 0$ であることを意味する。従って $G\varphi^E$，即ち $H^E h$ は excessive であることが分る。又 F が E を含む有限集合ならば，E 上で $H^E h = G\varphi^E = H^F h$。 $H^F h$ は excessive で性質 (Q.E) をもつから，S 上で $H^E h \leqq H^F h$ である。今 $(E_n)_{n\geqq 0}$ を $E_n \uparrow S$ なる有限集合の列としよう。このとき

$$0 \leqq H^{E_1} h \leqq H^{E_2} h \leqq \cdots \leqq h, \quad H^{E_n} h \uparrow h$$

で，各 $H^{E_n} h$ は excessive である。従って

$$Ph = \lim_{n\to\infty} PH^{E_n} h \leqq \lim_{n\to\infty} H^{E_n} h = h$$

が成り立って，h も excessive である。 (終)

以上の証明から次のことが分る。

系 1. h を excessive 関数とすると，有限な support をもつ非負関数列 $(\varphi_n)_{n\geqq 1}$ を選んで

(1.6) $\mathrm{supp}(\varphi_n)$ の上では $G\varphi_n = h$，かつ S 上で $G\varphi_n \uparrow h$

とすることができる。

$h \equiv a$（a は非負定数）は excessive であるから，次の最大値原理を得る。

系 2. 定数 $a \geqq 0$ および $G|f|$ が有限な f に対し，$\{f > 0\}$ 上で $Gf \leqq a$ が成り立てば，S 上で $Gf \leqq a - f^-$ が成り立つ。

§ 2. 最大値の原理

S 上の実数値有界関数全体の集合を B と書くことにしょう。$f \in B$ に対し，$\|f\| = \sup |f|$ で norm を与えれば B は Banach 空間となる。また有限な support をもつ実数値関数全体の集合を M によって表わす。B^+〔M^+〕を B〔M〕の中の非負関数全体の集合とする。M から B への線型写像 G（S 上の kernel で，各 $y \in S$ に対し，関数：$x \to G(x, y)$ が有界といっても同じことである）が性質：

(R.M.P) 定数 $a \geqq 0$ と関数 $f \in M$ に対し，$\{f > 0\}$ 上で $Gf \leqq a$ ならば，S 上で $Gf \leqq a - f^-$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

を持っているとき，Gは強められた最大値原理(reinforced maximum principle：以後（R.M.P）と略記する）をみたすという。

前節で，もしGがtransient chainのpotential kernelであれば(R.M.P)をみたすことを知った。この節以後，(R.M.P）をみたすkernel Gが与えられたとき，どのような条件の下で，それがtransient chain の potential kernelであるかという問題を考える。

注意1.　（R.M.P）をみたすkernel G は非負kernel である。実際 $f \in M^{+}$ とすれば，$\{-f>0\}=\phi$。
従って，$a=0$として（R.M.P）の仮定がtrivial な意味でみたされるから，S上で $G(-f) \leqq -(-f)^{-}=-f^{+}$。故に $Gf \geqq f^{+} \geqq 0$ である。このことはG－Iも非負kernel であることを示している。

注意2.　（R.M.P）の叙述の中で，$f \in M$を，$G|f|$が有限なfにおきかえてよい。実際 $\{f>0\}$上で$Gf \leqq a$ とすると，$\{f^{+}>0\}$上で $Gf^{+} \leqq a+Gf^{-}$ である。従って，$0 \leqq g^{+} \leqq f^{+}$なる任意の$g^{+} \in M^{+}$について，$\{g^{+}>0\}$上で $Gg^{+} \leqq a+Gf^{-}$ となっている。$Gf^{-}=\sup\{Gg\,;\,g \in M^{+},\ 0 \leqq g \leqq f^{-}\}$であるから，$\{g^{+}>0\}$ が有限集合であることを考慮すれば，任意の $\varepsilon>0$に対し，ある$g^{-} \in M^{+}$で$0 \leqq g^{-} \leqq f^{-}$をみたすものが存在して，$\{g^{+}>0\}$上で$Gf^{-} \leqq Gg^{-}+\varepsilon$となる。
故に$\{g^{+}>0\}$上で$Gg^{+} \leqq (a+\varepsilon)+Gg^{-}$ となるので，S上で$Gg^{+} \leqq (a+\varepsilon)+Gg^{-}-g^{-}$を得る。 G－Iが非負kernel であるから，S上で$Gg^{+} \leqq (a+\varepsilon)+Gf^{-}-f^{-}$。
$g^{+} \uparrow f^{+}$ として$Gf^{+} \leqq a+\varepsilon+Gf^{-}-f^{-}$。 $\varepsilon \downarrow 0$として$Gf^{+} \leqq a+Gf^{-}-f^{-}$。
ゆえに $Gf \leqq a-f^{-}$ である。

次に述べる2つの定理は $f \in M$のpotential について述べるけれども，上と同じ注意により，$G|f|$が有限であれば成立する。

定理2.1　Gは（R.M.P）をみたす kernel，$f \in M$とする。このとき，
(a) $Gf \geqq 0$ ならば $Gf-f \geqq 0$，
(b) $Gf=0$ ならば $f=0$，
(c) $Gf \leqq 1$ ならば $Gf-f \leqq 1$，
が成り立つ。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

証明　(c)の証明は(a)と殆んど同じで，(b)は(a)からすぐ出るので(a)のみを示す。$Gf \geqq 0$とする。このとき，$\{-f>0\}$上で$G(-f) \leqq 0$であるから，S上で$G(-f) \leqq -(-f)^- = -f^+$である。従って，$Gf \geqq f^+ \geqq f$を得て，$Gf - f \geqq 0$。　　　(終)

定理2.2.　Gは（R.M.P）をみたすkernel，$f, g \in M^+$，$a \geqq 0$とする。このとき，$\{f>0\}$上で$Gf \leqq a + Gg$ならば，$\{f=0\}$上で$Gf \leqq a + Gg - g$である。

証明　$h^+ = f - f \wedge g$，$h^- = g - f \wedge g$とおくと，

$0 \leqq h^+ \leqq f$，　$0 \leqq h^- \leqq g$　かつ　$\{h^+>0\} \cap \{h^->0\} = \phi$

である。仮定により，$\{h^+>0\}$上で$Gh^+ \leqq a + Gh^-$が成り立つから，S上で$Gh^+ \leqq a + Gh^- - h^-$，　即ち，$Gf \leqq a + Gg - (g - f \wedge g)$が成立する。$f=0$ならば$f \wedge g = 0$であるから，$\{f=0\}$上で，$Gf \leqq a + Gg - g$が成り立つ。　　　(終)

系　$a \geqq 0$，　$f, g \in M^+$として，$\{f>0\}$上で　$Gf \leqq Gg - g + a$　であれば，S上でも　$Gf \leqq Gg - g + a$　が成り立つ。

Meyerのあげている最大値原理はこの型である。

S上の非負関数hが性質：

(Q.E)　　$f \in M$に対し，$\{f>0\}$上で　$Gf \leqq h$　ならば，S上で$Gf \leqq h - f^-$

をもつならば quasi-excessive と呼ばれる。[注] もしGが transient chain の potential kernel であれば，これはhがexcessive であることと用じ意味になることは既に述べた（定理1.3）。　後で必要になるので２，３の例をあげる。

例2.1.　定数$a \geqq 0$はquasi-excessive である。これはGが（R.M.P）をみたすことと同値であるから明らかであろう。

例2.2.　$g \geqq 0$　で　Ggが有限であれば，$Gg + a$（aは非負定数）はquasi-excessive である。

実際$f \in M$に対して$\{f>0\}$上で$Gf \leqq Gg + a$とすると，$\{f^+>0\}$上で

$Gf^+ \leqq G(g+f^-) + a$　である。従って定理2.2.により$\{f^+=0\}$上で，

$Gf^+ \leqq G(g+f^-) - (g+f^-) + a$　であり，右辺は

注　Meyer の定義とは少し異なっているが，（R.M.P）をみたすkernel に対しては，この方が自然のように思われる。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$Gg+Gf^{-}-f^{-}+a$より小さいから，$\{f^{+}=0\}$上で$Gf^{+}\leqq Gg+Gf^{-}-f^{-}+a$ である。このことは，仮定と合せてS上で $Gf\leqq Gg+a-f^{-}$であることを示している。

例2.3. $g\geqq 0$，Ggが有限であれば$Gg-g$はquasi-excessive である。

実際$f\in M$に対し$\{f>0\}$上で$Gf\leqq Gg-g$とする。このことは $\{f^{+}>0\}$上で$Gf^{+}\leqq G(g+f^{-})-(g+f^{-})$を意味するので，定理2.2の系によりS上で $Gf^{+}\leqq G(g+f^{-})-(g+f^{-})$，即ち，$Gf\leqq Gg-g-f^{-}$ である。

Gがtransient chain の potential kernelである場合，任意のexcessive関数h，任意の$E\subseteqq S$に対し，réduite $H^{E}h$を定義することが出来た（定理0.1の系）。そしてそれはE上でhより大な，excessive関数の中で最小のものであった。quasi－excessive 関数に対しても同様のことがいえる。これも Meyer に負うが，Sが可算であることと，quasi－excessive 関数の定義をかえたことにより，証明はいくらか簡単になっている。

定理2.3 Gを（R.M.P）をみたすkernel とする。このとき，任意の quasi－excessive 関数h，および$E\subseteqq S$に対し，E上でhより大な(≧)quasi－excessive関数の中で最小のもの$H^{E}h$が存在する。

証明 最初に$E\subseteqq S$が有限集合のときに定理を証明しよう。Gの$E\times E$への制限をG_{E}と書けば，明らかにG_{E}はE上で（R.M.P）をみたす。従って，定理2.1(b)により，もしf_{E}がE上の関数で$G_{E}f_{E}=0$であれば$f_{E}=0$であることが分る。このことは$\det(G_{E})\neq 0$であることを意味している。故にh_{E}をhのE上への制限とすると，E上の関数φ_{E}が唯一つ存在して$h_{E}=G_{E}\varphi_{E}$となる。φ^{E}をE上ではφ_{E}に等しく，$S\setminus E$では0に等しい関数とすれば，$\mathrm{supp}(\varphi^{E})\subseteqq E$ で E上では$G\varphi^{E}=h$である。hがquasi－excessive であることを使って，定理1.3の証明と同様にすれば，$\varphi^{E}\geqq 0$かつS上で$G\varphi^{E}\leqq h$であることが分る。例2により$G\varphi^{E}$はquasi－excessive 関数で，またgがE上で$g\geqq h$なる quasi－excessive 関数であれば$\mathrm{supp}(\varphi^{E})$の上で$g\geqq G\varphi^{E}$となりS上で$g\geqq G\varphi^{E}$が成り立つ。即ち$G\varphi^{E}$はE上で$h$より大きいquasi－excessive 関数たちのうちで最小のものである。$G\varphi^{E}$を$H^{E}h$で表わすことにしよう。

次にEがSの任意の部分集合の場合を考える。$(E_{n})_{n\geqq 1}$を$E_{n}\uparrow E$ $(n\uparrow\infty)$なる有限集合の列とする。上述のことから，$\mathrm{supp}(\varphi_{n})\subseteqq E_{n}$，$\varphi_{n}\geqq 0$をみたす関数があって

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$H^{E_n} h = G\varphi_n$ であるが，hが quasi-excessive なことから，

$0 \leqq H^{E_1} h \leqq \cdots \leqq h$

が分る。従って，$\lim_{n\to\infty} H^{E_n} h$ が存在して，しかもそれは列 $(E_n)_{n\geqq 1}$ のとり方に関係しない。$H^E h = \lim_{n\to\infty} H^{E_n} h$ とおくと，これが求める関数である。実際$H^E h$は quasi-excessive である。何となれば，もし$f \in M$ に対し，$\{f>0\}$ 上で $Gf \leqq H^E h$とすれば，任意の$\varepsilon>0$に対し，ある番号n_0が定まって，$n \geqq n_0$なるすべてのnに対し，$\{f>0\}$上で$Gf \leqq H^E h \leqq H^{E_n} h + \varepsilon \leqq G\varphi_n + \varepsilon$ となる。ところが例2.2に述べたことにより，$G\varphi_n + \varepsilon$はquasi－excessiveであるから，S上で $Gf \leqq G\varphi_n + \varepsilon - f^-$を得る。$n\uparrow\infty$とした後$\varepsilon\downarrow 0$として，$Gf \leqq H^E h - f^-$がS上で成り立つことが分る。

E上で$H^E h \geqq h$（実は等号）および，もしgがE上で$g \geqq h$なる quasi-excessive 関数であれば$g \geqq H^E h$となることは明らかであろう。よって定理は証明された。（終）

$H^E h$をquasi-excessive 関数hのE上への pseudo-réduite という。Gが transient chain の potential kernel であり，hがexcessive 関数であれば，定理1.3により，これは réduite にほかならない。定理の証明の仕方からE＝Sの場合を考えて次の系を得る。

系1　hを quasi-excessive 関数とすれば $\varphi_n \in M^+$を選んで

(2.1)　$\mathrm{supp}(\varphi_n)$ 上では$G\varphi_n = h$，かつS上で $G\varphi_n \uparrow h$ $(n\uparrow\infty)$

とすることが出来る。

次のことも容易に分る。

系2　$g \geqq 0$でGgが有限，$\{g>0\} \subseteqq E$とすれば，$H^E Gg = Gg$．

$H^E Gg \geqq Gg$を証明すれば十分である。$g_n \in M^+$，$g_n \leqq g$ なるg_nをとれば，$\{g_n>0\} \subseteqq E$上で $Gg_n \leqq Gg = H^E Gg$．したがって，(Q．E) により，S上で$Gg_n \leqq H^E Gg$． $g_n \uparrow g$として $Gg \leqq H^E Gg$ がえられる。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

§3. 構成問題

われわれは§1において transient chain の potential kernel は(R.M.P)をみたすことを知った。この§では，

問題　S上に(R.M.P)をみたす kernel G が与えられたとき，ある transient な sub-Markov kernel P があって，Gはその potential kernel になっているか?。

について考える。最初に，これは無条件には成り立たないことを示す例をあげる。この例は Meyer による。

例3.1.　Sを可算集合，PをS上の Markov kernel で $G=\Sigma_{n=0}^{\infty} P^n$ が収束するものとしょう。例えば3次元の対称な random walk の transition function を考えればよい。$S_\triangle=S\cup\{\triangle\}$ ($\triangle\notin S$) として，$S_\triangle$上の関数を$f^\triangle$によって表わす。$f^\triangle$のS上への制限をf，またS上の関数fを$f(\triangle)=0$とおいて$S_\triangle$上に拡張した関数を$f_0^\triangle$によって表わすことにしよう。$S_\triangle$上のM，Bをそれぞれ$M_\triangle$，$B_\triangle$で表わす。$M_\triangle$から$B_\triangle$への線型写像$G^\triangle$を

(3.1)　$G^\triangle f^\triangle=(Gf)_0^\triangle+f^\triangle(\triangle)$

により定義する。以下，この$G^\triangle$が$S_\triangle$上で(R.M.P)をみたすが，いかなる$S_\triangle$上の transient chain の potential kernel にもならないことを示そう。

先づ$G^\triangle$が(R.M.P)をみたすことを確かめる。今$f^\triangle\in M_\triangle$に対し，$\{f^\triangle>0\}$上で$G^\triangle f^\triangle\leqq a$ (aは非負定数)が成り立っているとする。

$f^\triangle(\triangle)>0$の場合には仮定から，$f^\triangle(\triangle)\leqq 0$のときは自動的に，$f^\triangle(\triangle)\leqq a$となることが分る。故に$b=a-f^\triangle(\triangle)$とおけば，$b\geqq 0$である。従って，$\{f>0\}$上では$Gf\leqq b$となり，GはS上で(R.M.P)をみたすのでS上で$Gf\leqq b-f^-$が成り立つ。

即ちS上で$G^\triangle f^\triangle\leqq a-(f^\triangle)^-$が成立する。一方$\triangle$においては，常に

(3.2)　$f^\triangle(\triangle)\leqq a-(f^\triangle)^-(\triangle)$

であったから，(注) 結局$S_\triangle$上で$G^\triangle f^\triangle\leqq a-(f^\triangle)^-$となり，$G^\triangle$は(R.M.P)をみたすことが分った。

次に$G^\triangle$はいかなる Markov chain の potential kernel にもなり得ないことを

(注)　$a\geqq 0$と$a\geqq f^\triangle(\triangle)$から，$a\geqq(f^\triangle)^+(\triangle)$。これは(3.2)と同値である。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

示そう。もし仮に$S_\triangle$上の sub-Markov kernel $P^\triangle$で

(3.3) $$G^\triangle = \sum_{n=0}^{\infty} (P^\triangle)^n$$

となるものが存在したとする。このとき任意の$f^\triangle \in M^\triangle$に対し，

$$G^\triangle P^\triangle f^\triangle = G^\triangle f^\triangle - f^\triangle$$

が成り立つ。とくに，$f^\triangle$として$\{\triangle\}$の indicator をとり，$g^\triangle = P^\triangle f^\triangle$とおく。関係式 $G^\triangle g^\triangle = G^\triangle f^\triangle - f^\triangle$を定義に従って書き直してみると，

$$(Gg)_0^\triangle + g^\triangle(\triangle) = 1^\triangle - f^\triangle$$

となる。このことは，$Gg = 1$ であることを示しているので，定理 1.1により

$$0 = \lim_{n\to\infty} P^n Gg = \lim_{n\to\infty} P^n 1 = 1$$

という矛盾が導かれる。従って$G^\triangle$はいかなる Markov chain の potential kernel とも成り得ないことが分った。

この奇妙な例の分析は次の節に譲り，この節では，(R.M.P) をみたす kernel は，いかなる条件のもとで transient chain の potential kernel になるか．という問題を考える。

§1で分ったことは，もしGが transient chain の potential kernel であれば，それは

(N) 任意の$f \in M^+$，$B_n \downarrow \phi$ $(n\uparrow\infty)$ なる任意の列 $(B_n)_{n\geqq 1}$ に対し，

(3.4) $$\lim_{n\to\infty} H^{B_n} Gf = 0$$

という条件をみたすこと（定理 1.2の必要性の部分）であった。定理 1.3と定理 2.3によれば，条件 (N) は quasi-excessive 関数Gfに対する pseudo-réduite $H^{B_n}Gf$の条件と考えてもよいことが分る。このことは，(R. M. P)をみたすkernel Gがtransient chain の potential kernel であるためには条件 (N) が必要であることを示している。

Meyer は巧妙な方法で，これが充分条件でもあることを示しているので，それを説明する。先づ本質的に重要な一つの補題を準備する。

補題 3.1. Gは (R.M.P) および (N) をみたす kernel とする。このとき，$\varphi_n \geqq 0$，$\varphi_n \to \varphi$ $(n\uparrow\infty)$ で，しかも，ある$f \in M^+$が存在して$G\varphi_n \leqq Gf$ $(\forall n \geqq 1)$ が成り立っていれば

(3.5) $$G\varphi = \lim_{n\to\infty} G\varphi_n$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

が成立する。

証明　uをS上のすべての点で，$Gu \in \mathbb{B}^+$なる関数とする（Gが$\mathbb{M}^+$を$\mathbb{B}^+$に属することから，そのような関数は必ず存在する）。更に$m=1, 2, \cdots$に対し，$B_m=\{x; Gf(x)>mu(x)\}$とおく。明らかに$B_m \downarrow \phi$ $(m\uparrow\infty)$で，更に$\varphi_n \geqq 0$から，$\varphi_n \leqq G\varphi_n \leqq Gf$が導かれるので（定理2.1(a)），$\{\varphi_n>mu\} \subseteqq B_m$（$n, m\geqq 1$）であることも分る。故に

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{y\in\{\varphi_n>mu\}} G(x, y)\varphi_n(y) &\leqq \Sigma_{y\in B_m} G(x, y)\varphi_n(y)\\
&= G(I_{B_m}\varphi_n)(x)\\
&= H^{B_m} G(I_{B_m}\varphi_n)(x) \quad (\because \text{定理2.3の系2})\\
&\leqq H^{B_m} G\varphi_n(x) \leqq H^{B_m} Gf(x)
\end{aligned}
$$

である。従って条件（N）により，

$$\sup_{n\geqq 1} \Sigma_{y\in\{\varphi_n>mu\}} G(x, y)\varphi_n(y) \to 0 \quad (m\uparrow\infty)$$

を得る。このことは非負関数列$(\varphi_n/u)_{n\geqq 1}$が，有界測度$G(x, \circ)u(\circ)$に関し一様可積分であることを示している。従って，$\lim_{n\to\infty} G\varphi_n = G\varphi$であることが分る。（終）

定理3.1.　(Meyer)　Gは（R.M.P）をみたすkernelとする。もしGが条件（N）をみたすならば，S上のsub-Markov kernel Pが存在して

(3.6)　$$G=\Sigma_{n=0}^{\infty} P^n$$

とかける。またそのようなPは唯一つである。

証明　$\mathbb{B}_0^+=\{f; f\in\mathbb{B}^+ かつ Gf\in\mathbb{B}^+\}$とおく。

明らかに$\mathbb{M}^+ \subseteqq \mathbb{B}_0^+$である。$f\in\mathbb{M}^+$とすれば$Gf-f$は例2.3により，Gに関しquasi-excessiveである。従って，定理1.6の系1により，$\varphi_n\in\mathbb{M}^+$を選んで$G\varphi_n\uparrow Gf-f$と出来る。$G(\varphi_{n+1}-\varphi_n)\geqq 0$であるから，定理2.1(a)により，$G(\varphi_{n+1}-\varphi_n)-(\varphi_{n+1}-\varphi_n)\geqq 0$，即ち，$G\varphi_{n+1}-\varphi_{n+1}\geqq G\varphi_n-\varphi_n$である。従って$G\varphi_n-\varphi_n$も単調増加列で$Gf$により押えられるから，$\varphi_n=G\varphi_n-(G\varphi_n-\varphi_n)$は，ある関数$\varphi$に収束する。ここで$Pf=\varphi$と定義する。$G\varphi_n\leqq Gf$であるから補題3.1により，

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

(3.7) $GPf=Gf-f$

を得る。この関係は，Pfがφ_n の選び方に関係しないでGとfのみできまることをも示している（定理2.1(b)を用いよ）。 Pがsub-Markov kernelであることを示そう。

$f\leqq 1$，$f\in \mathbb{M}^+$ とする。このとき， $1\geqq f=Gf-(Gf-f)=G(f-Pf)$

が成立する。定理2.1(c)を使えば，

$1\geqq G(f-Pf)-(f-Pf) \quad =f-f+Pf=Pf$

となり，$Pf\leqq 1$であることが分る。次に a，$b\geqq 0$，f，$g\in \mathbb{M}^+$ とする。

$$\begin{aligned}&G(P(af+bg))\\&=G(af+bg)-(af+bg)\\&=a(Gf-f)+b(Gg-g)\\&=aGPf+bGPg=G(aPf+bPg)\end{aligned}$$

が成立するので，再び定理2.1(b)により，$P(af+bg)=aPf+bPg$である。以上のことからPはsub-Markov kernel であることが分る。GP，及び$G-I$は共に非負kernel であるから関係（3.7）はすべての$f\in \mathbb{B}_0^+$ に対して成立する。とくに$f\in \mathbb{M}^+$のとき，Pf，…，$P^nf\in \mathbb{B}_0^+$ であるから，すべての$n\geqq 0$に対し，$GP^{n+1}f=GP^nf-P^nf$が成立する。従って，

(3.8) $\Sigma_{k=0}^{n} P^kf=Gf-GP^{n+1}f\leqq Gf$

となり，$\Sigma_{k=0}^{\infty} P^kf$ は収束する。従って$P^kf\to 0$ ($n\uparrow\infty$) となる。$GP^nf\leqq Gf$ ($\forall n\geqq 1$) であるから，再び補題3.1により，$\lim_{n\to\infty} GP^nf=0$となることが分る。結局任意の$f$ $\mathbb{M}^+$に対して，

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} P^nf=Gf$$

が成り立ち，これはGがPのpotential kernel であることを示している。一意性は$GPf=Gf-f$より明らかで，定理は完全に証明された。 (終)

この節の最初にあげた例をpseudo-reduiteを通して眺めると次のような事情になっている。S上でGに関するpseudo-réduite (=rednite)をH^E，$S_\triangle$上で$G^\triangle$に関するpseudo-réduite を$H_\triangle^E$で表わすことにすると，$E\subseteqq S$，$f^\triangle$ $M_\triangle^+$に対して，

$$H_\triangle^E G^\triangle f^\triangle=(H^EGf)\hat{}_0+f^\triangle(\triangle)\ (H^E1)\hat{}_0$$

となっている。1はS上でGについての非負関数のpotential ではないので，$B_n\downarrow\varphi$ ($n\uparrow\infty$) なるSの部分集合列 (B_n) $n\geqq 1$及びx_0 Sが存在して

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$\lim_{n\to\infty} H^{B_n} 1 (x_0) > 0$$

となる。従って$f^{\triangle}$ ($\triangle$) >0であれば，

$$\lim_{n\to\infty} H_{\triangle}^{B_n} f^{\triangle} (x_0) > 0$$

となり（N）が成り立っていない。

以上で（R.M.P）をみたすkernel Gが transient chainのpotential kernelであるための必要充分条件が分り，しかもその条件は真に必要な条件であることも分って，この節での問題は完全に解決された。ただ上述の例でも恐らく何らかの意味で元来与えられたPと余り違わないMarkov chain が対応していて，それのpotential kernel と$G^{\triangle}$が何らかの関係があるということは想像出来るので，次節で別な観点から（R.M.P）をみたすkernelを見ることにする。

§4. 補　　足

PをS上のsub-Markov kernel とする。S上のkernel Gが，もしMIをIBに写し，

(S.P)　　$(I-P)\,Gf=f$　　$(\forall f\in \mathbb{M})$

をみたすならば，強い意味のpotential kernel（以後，strong potential kernelと略称する）と呼ばれる。なお，ついでにいえば，$(I-P)\,Gf=f$がMIのある線型部分空間の元fに対してのみ成立するとき，弱い意味のpotential kernelと呼ぶ。これは，recurrent chain に対してとくに重要な概念で，次章で詳しく説明する。

Pはtransient chain を定めるsub-Markov kernelとする。 Pの今迄の意味のpotential kernelをG_0，任意のstrong potential kernel をGとしよう。

$f\in \mathbb{M}^+$ とすると，関係式

$$PGf = Gf - f \leqq Gf$$

によりGfはPに関してexcessive である。従って$\lim_{n\to\infty} P^n Gf$が存在するので，それをHfによって表わす。任意の$f\in\mathbb{M}$に対して，$Hf=Hf^+ - Hf^-$ と定義すればHはS上のkernel で

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

(4.1) $\quad Gf = G_0 f + Hf \qquad (\forall f \in \mathbb{M})$

と書けることが分る。Hは$\mathbb{M}$から$\mathbb{B}$への線型写像で，各fに対し，Hf は有界調和関数になっている。G_0に対し適当に reference 測度γをとり，SのMartin compact 化$\overline{S}$を作り，Martin の表現定理を用いるならば，

(4.2) $\quad Hf(x) = \int_{\partial S_1} K(x, \eta)\mu(f, d\eta)$

と書けるであろう。但し ∂S_1 は minimal な境界，KはMartin kernel，$\mu(f, \cdot)$ は∂S_1上の（有符号）測度でfに関し，線型になっているものである。Gは一般には（R.M.P）をみたすこともあるし，そうでない場合もある。それは（4.1）における kernel H に関係するが，より詳しくは境界に関係するであろう。このことは未だよく分っていない。

（R.M.P）をみたす kernel Gが与えられたとき，もし Gを strong potential kernel とするS上の sub-Markov kernel P が存在すれば，それは唯一つであることを証明しょう。定理2.3の証明のときと同様に，$g \in \mathbb{B}$ および有限集合Eが与えられたとき，Eに support をもつ関数φ^Eが唯一つ存在してE上で$g = G\varphi^E$となる。特に$g \geqq 0$であれば，E上で$0 \leqq G\varphi^E \leqq \|g\|$であることから，（R.M.P）によりS上で$0 \leqq G\varphi^E \leqq \|g\|$となる。従って，$E_n$を$E_n \uparrow S$ $(n \uparrow \infty)$な有限集合の列，$\varphi_n = \varphi^{E_n}$とおけば$0 \leqq G\varphi_n \leqq \|g\|$で，$G\varphi_n \to g$ $(n \uparrow \infty)$となる。今，Gを strong potential kernel とする sub-Markov kernel が2つあったとしてそれらをP，Qとする。$g \in \mathbb{B}^+$としてφ_nを$\|G\varphi_n\| \leqq \|g\|$，$G\varphi_n \to g$なる列とすれば，Lebesgue の定理により，それぞれ，

$$Pg = \lim_n PG\varphi_n, \quad Qg = \lim_n QG\varphi_n$$

となるが，

$$PG\varphi_n = G\varphi_n - \varphi_n = QG\varphi_n \qquad (n \geqq 1)$$

なので結局 $Pg = Qg$ となる。

再び例3.1をとりあげる。$S_\triangle$上の sub-Markov kernel $P^\triangle$を

$$P^\triangle(x, y) = \begin{cases} P(x, y) & x, y \in S \\ 0 & x = \triangle \text{又は} y = \triangle \end{cases}$$

により定義する。このとき，

$$G^\triangle f^\triangle = (Gf)^\triangle_0 + f^\triangle(\triangle)$$

$$P^\triangle G^\triangle f^\triangle = (Gf - f + f^\triangle(\triangle))^\triangle_0$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

であるから，

$$G^{\triangle}f^{\triangle}-P^{\triangle}G^{\triangle}f^{\triangle}=f^{\triangle}。$$

したがって，$P^{\triangle}$は，$G^{\triangle}$を1つのstrong potential kernelとして持つ$S^{\triangle}$上のsub-Markov kernelである。また，上に注意したことから，そのような性質をもつ唯一つのsub-Markov kernelである。$P^{\triangle}$に対するpotential kernelを$G^{\triangle}_{0}$で表わせば，

$$G^{\triangle}_{0}f^{\triangle}=(Gf)^{\triangle}_{0}+f^{\triangle}(\triangle)\ I^{\triangle}_{\{\triangle\}}$$

となるので$G^{\triangle}$と$G^{\triangle}_{0}$の関係は

$$G^{\triangle}f^{\triangle}-G^{\triangle}_{0}f^{\triangle}=f^{\triangle}(\triangle)\ I^{\triangle}{}_{S}$$

となる。$I^{\triangle}_{S}$は$P^{\triangle}$に関して調和である。とくにPが3次元のsimple randon walkを定めるMarkov kernelならば，Martin境界は1点で非負調和関数は定数に限る（［6；P．386］を見よ）。このような場合には，$f^{\triangle}(\triangle)\ I^{\triangle}_{S}$が分解（4.1）のHの部分のMartin表現（4.2）を与えている。こう云う立場から眺めれば，この例に対してもMarkov chainが対応していることが分る。

定理2.1と上に注意した一意性の証明をみれば，次のことは分る。

定理4.1 Gは（R.M.P）をみたすkernelとする。このときGをstrong potential kernelとするsub-Markov kernel Pが存在するためには，各$g\in \mathbb{B}$に対し，$f_n\in \mathbb{M}$，$\sup_n\|Gf_n\|<\infty$，$Gf_n\to g\ (n\uparrow\infty)$なる列を選べば，$\lim_{n\to\infty} f_n=f$が存在し，その$f$は列$(f_n)_{n\geq 1}$の選び方に関係しないことが必要充分である。

最後に2，3の注意をしておく。Gが（R.M.P）をみたすとき，$(E_n)_{n\geqq 1}$を$E_n\uparrow S$なる任意の有限集合列とすれば，$f\in \mathbb{M}^{+}$に対し$\lim_{n\to\infty} H^{E_n^c}Gf$が存在し，$(E_n)_{n\geqq 1}$の選び方に関係しない。$f\in \mathbb{M}$に対し$HGf=\lim_{n\to\infty}(H^{E_n^c}Gf^{+}-H^{E_n^c}Gf^{-})$とおき，

$$\hat{G}f=Gf-HGf$$

と定義すれば$\hat{G}$は再び（R.M.P）をみたすことが証明出来る。例3.1のときには$\hat{G}^{\triangle}=G^{\triangle}_{0}$となって，$\hat{G}^{\triangle}$は条件（N）をみたし，$\hat{G}^{\triangle}$をpotential kernelとするtransient chainが丁度$P^{\triangle}$になっていることが確かめられる。このことがどの程度一般性のあることか

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

も，未だよく分っていない。

完全最大値原理をみたすkernel と sub−Markov resolventの対応関係を，この章で扱った立場から調べることは興味があるが，その方には未解決な問題が更に多い（近藤〔13〕参照）。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

第2章　Recurrent chain

この章では，S上のsub-Markov kernel Pで

$$(\mathrm{R})\qquad \Sigma_{n=0}^{\infty} P^{n}(x, y)=\infty \qquad (\forall x, y \in S)$$

をみたすものを考察の対象とする。仮定（R）の下では，必然的にPはMarkov kernelである。また対応するMarkov chain X は既約なrecurrent chainである。したがって，すべてのx，$y \in S$に対し，$P_x(\sigma_y<\infty)=1$が成り立つ（§0および§5を見よ）。

条件（R）は，transient chainに対するときのように$G=\Sigma_{n=0}^{\infty} P^{n}$としてpotential kernelを定義出来ないことを示している。従ってrecurrent chainに対しては，何をもってpotentialと考えるかが第一の問題である。後で証明するように，Pが（R）をみたすならば，S上いたる所正で$\mu P=\mu$をみたす測度，即ち不変測度が，定数倍を除いて唯一つ存在する。Kemeny-Snell〔4〕は，S上の函数fに対し，もし

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty} \Sigma_{\kappa=0}^{n} P^{k} f=g$$

が存在して有限なとき，それをfのpotentialと定義している。簡単のために$f \in$ M とすると，もし（*）が存在して有限なら，$<\mu, f>=0$でなければならないことが証明出来る。$f \in$ M で$<\mu, f>=0$となる関数をnull charge，null chargeの全体をNで表わす。このとき，逆にnull charge f に対して常に（*）の極限が存在するか，という問題を生ずる。これは反例が知られている（Orey〔9〕，Kemeny-Snell〔5；P.311〕）。しかし，すべての$f \in$ Nに対し（*）の極限が存在するようなrecurrent chainは興味があり，かつ重要なclassと考えられる。これはKemeny-Snellによりnormal chain（詳しくはright normal chain）と呼ばれている。Markov chainがnormalであることの特徴づけは完全には出来ていないようであるが，（このことについては〔5〕参照）少くとも，positive recurrent chainとrandom walkはnomalであることは知られている（〔11〕）。このノートではその問題については，余り深くはふれない。一方Orey〔10〕は弱い意味のpotential kernelという概念を導入した。それはいかなるrecurrent processに対しても定義出来，不変測度と組にすればMarkov chainを完全に決定することが分る。また，transient chainの場合と類似な最大値

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

原理をみたすのでこの観点から眺めても面白い所がある。このノートではOreyの立場のpotential 論を考えたい。

注意　§5-7の結果の連続パラメータにおける類似については，近藤〔12〕を見よ。

§5. Recurrent chain と不変測度

Pは(R)をみたすS上のMarkov kernel，XはPに対応するMarkov chainとする。

補題5.1　Markov timeの列 $(\sigma_n)_{n\geqq 0}$ を

(5.1)　$\sigma_0=0,\quad \sigma_n=\sigma_{n-1}+\sigma_1^x\circ\theta_{\sigma_{n-1}}\quad (n\geqq 1)$

によって定義する。このとき P_x - 測度1で

$$\sigma_0=0<\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\infty,$$

かつ

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\infty$$

が成り立つ。

証明　$P_x(\sigma_n\geqq n)=1$ であるから，$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\infty$ は明らか．また $\sigma_n<\infty$ なら $\sigma_{n+1}\geqq\sigma_n+1$ であるから，結局 $P_x(\sigma_n<\infty)=1$ のみを示せばよい。$s\in(0.1)$，$G_s=\Sigma_{n=0}^{\infty}(sP)^n$ とおく。

$$G_s(x,x)=E_x(\Sigma_{0\leqq n<\infty}s^n I_{\{x\}}(X_n))$$

$$=E_x(\Sigma_{0\leqq n<\sigma_1^x}s^n I_{\{x\}}(X_n))$$

$$+E_x(s^{\sigma_1^x}E_{X_{\sigma_1^x}}(\Sigma_{0\leqq n<\infty}s^n I_{\{x\}}(X_n));\ \sigma_1^x<\infty)$$

$$=1+G_s(x,x)E_x(s^{\sigma_1^x};\ \sigma_1^x<\infty)。$$

従って

$$G_s(x,x)=1/(1-E_x(s^{\sigma_1^x};\ \sigma_1^x<\infty))$$

となり，$\lim_{s\uparrow 1}G_s(x,x)=\infty$ より $\lim_{s\uparrow 1}E_x(s^{\sigma_1^x}:\sigma_1^x<\infty)=P_x(\sigma_1^x<)=1$ を得る。$n\geqq 1$ に対しては　$P_x(\sigma_n<\infty)=[P_x(\sigma_1^x<\infty)]^n=1$。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

補題5.2. $P_x(\sigma^y<\sigma_1^x)>0$。

証明 $x\neq y$としてよい。$P_x(\sigma^y<\sigma_1^x)=0$なら$P_x(\sigma^y>\sigma_1^x)=1$である。$(\sigma_n)_{n\geqq 0}$を補題5.1の列とすると，$P_x(\sigma^y>\sigma_n)=P_x(\sigma^y>\sigma_1^x)^n=1$。このことから$P_x(\sigma^y=\infty)=\lim_{n\to\infty}P_x(\sigma^y>\sigma_n)=1$を得るが，これは$\sum_{n=0}^{\infty}P^n(x,y)=0$を意味して(R)と矛盾する。

補題5.3. $P_x(\sigma^y<\infty)=1$ $(\forall, x, y\in S)$。

証明 $x\neq y$としてよい。$(\sigma_n)_{n\geqq 0}$を補題5.1の列とすれば，補題5.1と5.2により

$$
\begin{aligned}
&P_x(\sigma^y<\infty)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}P_x(\sigma_n<\sigma^y<\sigma_{n+1})\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}P_x(\sigma_n<\sigma^y,\ \sigma^y\circ\theta_{\sigma_n}<\sigma_1^x\circ\theta_{\sigma_n})\\
&=P_x(\sigma^y<\sigma_1^x)\sum_{n=0}^{\infty}[P_x(\sigma_1^x<\sigma^y)]^n\\
&=P_x(\sigma^y<\sigma_1^x)/(1-P_x(\sigma_1^x<\sigma^y))\\
&=1。
\end{aligned}
$$

定理5.1. Excessive 関数は定数に限る。

証明 hをexcessive 関数，x，yをSの任意の2点とする。定理0.1及び補題5.3により

$$h(y)=E_x(h(X_{\sigma^y}))\leqq h(x)。$$

x，yを交換すれば$h(x)\leqq h(y)$となるので，結局hは定数である。

定理5.2. $c\in S$とする。このとき，任意のx，yに対し，

(5.2) $E_x(\sum_{0\leqq n<\sigma^c}I_{\{y\}}(X_n))<\infty$

である。

証明 $y\neq c$のときを示せば充分である。

$$
\begin{aligned}
&E_x(\sum_{0\leqq n<\sigma^c}I_{\{y\}}(X_n))\\
&=E_x(\sum_{\sigma^y\leqq n<\sigma^y+\sigma^c\circ\theta_{\sigma^y}}I_y(X_n);\ \sigma^y<\sigma^c)
\end{aligned}
$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$=P_x(\sigma^y<\sigma^c)\,E_y(\Sigma_{0\leqq n<\sigma^c} I_{\{y\}}(X_n))$$

$$\leqq E_y(\Sigma_{0\leqq n<\sigma^c} I_{\{y\}}(X_n))$$

であるから，

$$E_y(\Sigma_{0\leqq n<\sigma^c} I_{\{y\}}(X_n))<\infty$$

をいえばよい。$(\sigma_n)_{n\geqq 0}$を

$$\sigma_0=0,\quad \sigma_n=\sigma_{n-1}+\sigma_1^y\circ\theta_{\sigma_{n-1}}\qquad(n\geqq 1)$$

により定義すれば

$$E_y(\Sigma_{0\leqq n<\sigma^c} I_{\{y\}}(X_n))$$

$$=\Sigma_{k=0}^{\infty} E_y(\Sigma_{0\leqq n<\sigma^c} I_{\{y\}}(X_n);\sigma_k<\sigma^c<\sigma_{k+1})$$

$$=\Sigma_{k=0}^{\infty}(k+1)\,P_y(\sigma_k<\sigma^c<\sigma_{k+1})$$

$$=P_y(\sigma^c<\sigma_1^y)\,\Sigma_{k=0}^{\infty}(k+1)\,[P_y(\sigma_1^y<\sigma^c)]^k$$

$$=P_y(\sigma^c<\sigma_1^y)/[1-P_y(\sigma_1^y<\sigma^c)]^2$$

$$=1/[1-P_y(\sigma_1^y<\sigma^c)]<\infty$$

を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（終）

定理5.2は次のことを意味している。Pに対するMarkov chain を$X=(\Omega,\mathfrak{M},(X_n)_{n\geqq 0},(\theta_n)_{n\geqq 0},(P_x)_{x\in S_\triangle})$ とするとき，

$${}^cS=S-\{c\},\quad {}^cS_\triangle=S_\triangle-\{c\},$$

$${}^cX_n(\omega)=X_n(\omega),\quad {}^c\theta_n(\omega)=\theta_n(\omega)\qquad(n<\sigma^c(\omega)\text{のとき})$$

$${}^cX_n(\omega)=\triangle,\qquad {}^c\theta_n(\omega)=\omega_\triangle\qquad(n\geqq\sigma^c(\omega)\text{のとき})$$

とおくと，Markov chain ${}^cX=(\Omega,\mathfrak{M},({}^cX_n)_{n\geqq 0},({}^c\theta_n)_{n\geqq 0},(P_x)_{x\in {}^cS_\triangle})$は ${}^cS_\triangle$ 上の transient chain である。その potential kernel を${}^cG$とかけば

(5.3)　　${}^cG(x,y)=E_x(\Sigma_{0\leqq n<\sigma^c} I_{\{y\}}(X_n))$

となる。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

定理5.3. Pは(R)をみたすMarkov kernel とする。

a) S上いたる所正で$\mu P=\mu$をみたす測度(不変測度)μが存在する。

b) その様な測度は定数倍を除いて唯一つである。

c) Pに対するMarkov chain が positive recurrent であるためには不変測度が有界測度であることが必要充分である。

証明 a) $c\in S$を1つ固定し，μを

(5.4) $$\mu(y)=E_c(\Sigma_{0\leqq n<\sigma_1^c} I_{\{y\}}(X_n))$$

によって定義する。先ずすべての$y\in S$に対し，$0<\mu(y)<\infty$であることを示す。$\mu(c)=1$であるから，$y\neq c$のときに示せばよい。これは

$$\mu(y)=E_c(\Sigma_{\sigma^y\leqq n<\sigma_1^c} I_{\{y\}}(X_n);\sigma^y<\sigma_1^c)$$
$$=P_c(\sigma^y<\sigma_1^c)\,{}^cG(y,y),$$

および補題5.2，定理5.2 より明らかである。次に$\mu P=\mu$を示そう。任意のyについて

$$\mu P(y)=E_c(\Sigma_{0\leqq n<\sigma_1^c} E_{X_n}(I_{\{y\}}(X_1)))$$
$$=E_c(\Sigma_{0\leqq n<\sigma_1^c} I_{\{y\}}(X_{n+1}))$$
$$=E_c(\Sigma_{0\leqq n<\sigma_1^c} I_{\{y\}}(X_n))$$
$$+E_c(I_{\{y\}}(X_{\sigma_1^c}))-E_c(I_{\{y\}}(X_0))$$
$$=\mu(y)$$

であるから，μは一つの不変測度である。

(b) μ，νを2つの不変測度とする。このときS上のkernel $\hat{P}$を$\hat{P}(x,y)=\mu(y)P(y,x)/\mu(x)$で定義すれば$\hat{P}$もS上のMarkov kernelで(R)をみたすことが容易に分る。又$\hat{f}(x)=\nu(x)/\mu(x)$により定義される関数は$\hat{P}$に関して excessive である。従って定理5.1より$\hat{f}$は定数，ゆえにνはμの定数倍である。

(c) 不変測度を(5.4)で定義し，それをμとする。このとき，$<\mu,1>=E_c(\sigma_1^c)$であるから$E_c(\sigma_1^c)$が有限なことと$<\mu,1>$が有限なことは同値である(§0参照)。

(終)

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

§6. Weak potential operator

Pは(R)をみたすS上のMarkov kernelとする。これを以後簡単にrecurrentなMarkov kernelと呼ぶ。定理5.3によれば，不変測度が定数倍を除いて唯一つ存在するので，その1つをμとする。また，前に述べたように，$\mathbb{N} = \{ f ; \in \mathbb{M}, <\mu, f> = 0 \}$とおく。$\mathbb{N}$は勿論不変測度の選び方に関係しない。

$\mathbb{N}$から$\mathbb{B}$への線型写像Gが

(W.P)　　$(I-P)\,Gf = f$　　　　$(\forall f \in \mathbb{N})$

をみたすとき，Gを（Pに関する）弱い意味のpotential operator（以後，単にweak potential operatorと略称する)という。又S上のkernel Gがoperatorとして，weak potential operatorとなっているとき，weak potential kernelと呼ぶ。$\mathbb{N}$の$\mathbb{M}$に対する余次元（商空間$\mathbb{M}/\mathbb{N}$の次元）は1なので，異なるweak potential kernelが同じweak potential operatorを定義することがあり得る。先づ次のことを証明しょう。

定理6.1. 任意のrecurrent chain Pに関し，weak potential operatorが存在し，しかも$\mathbb{N}$上の線型汎関数の差を除けば唯一通りに定まる。

証明　Pに対するMarkov chainをXとする。定理5.2によれば，$c \in S$を固定するとき

$$(6.1)\qquad {}^{c}G(x, y) = E_x\left(\Sigma_{0 \leqq n < \sigma^c} I_{\{y\}}(X_n)\right)$$

はすべての$x, y \in S$に対し有限で，それはXをcで殺したMarkov chain ${}^{c}X$のpotential kernelである。${}^{c}G$がPに関する1つのweak potential kernelであることを示そう。実際

$$\begin{aligned}
&P\,{}^{c}G(x, y)\\
&= E_x\left(E_{X_1}\left(\Sigma_{0 \leqq n < \sigma^c} I_{\{y\}}(X_n)\right)\right)\\
&= E_x\left(\Sigma_{1 \leqq n < \sigma_1^c} I_{\{y\}}(X_n)\right)\\
&= E_x\left(\Sigma_{0 \leqq n < \sigma^c} I_{\{y\}}(X_n)\right)\\
&\quad + E_x\left(\Sigma_{\sigma^c \leqq n < \sigma_1^c} I_{\{y\}}(X_n) ; \sigma^c < \sigma_1^c\right)\\
&\quad - E_x\left(I_{\{y\}}(X_0)\right)
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

ところで右辺において

$$E_x(\Sigma_{0\leqq n<\sigma^c} I_{\{y\}}(X_n)) = {}^cG(x, y)$$

$$E_x(I_{\{y\}}(X_0)) = I(x, y)$$

であり，また，$\{\sigma^c<\sigma_1^c\}\subseteqq\{X_0=c\}$ に注意すれば，

$$E_x(\Sigma_{\sigma^c\leqq n<\sigma_1^c} I_{\{y\}}(X_n)\ ;\ \sigma^c<\sigma_1^c)$$

$$=E_x(\Sigma_{0\leqq n<\sigma_1^c} I_{\{y\}}(X_n)\ ;\ X_0=c)$$

$$=I_{\{c\}}(x)\,E_c(\Sigma_{0\leqq n<\sigma_1^c} I_{\{y\}}(X_n))。$$

定理5.3により

$$\nu(y)=E_c(\Sigma_{0\leqq n<\sigma_1^c} I_{\{y\}}(X_n))$$

は $\nu(c)=1$ をみたす不変測度になっている。一意性により，$\nu(y)=\mu(y)/\mu(c)$ であるから結局

$$P\,{}^cG(x, y)$$
$$={}^cG(x, y)+I_{\{c\}}(x)\,\mu(y)/\mu(c)-I(x, y)$$

となる。従って

(6.2) $\quad (I-P)\,{}^cG=I-I_{\{c\}}\otimes\mu/\mu(c)$

であることが分る。特に $f\in \mathbb{N}$ ならば

$$(I-P)\,{}^cGf=f-\langle\mu, f\rangle\circ I_{\{c\}}/\mu(c)$$
$$=f$$

となるので ${}^cG$は１つの weak potential kernelである。次にGを任意の weak potential operator とする。$f\in\mathbb{N}$に対し，$g=Gf$ とおけば$g\in\mathbb{B}$で，(W.P)により $(I-P)g=f$をみたす。従って，Dynkin の公式（補題6.1）により

$$Gf(x)-Gf(c)$$
$$=Gf(x)-E_x(Gf(X_{\sigma^c}))$$
$$=E_x(\Sigma_{0\leqq n<\sigma^c}f(X_n))$$
$$={}^cGf(x)$$

となる。$f\in\mathbb{N}$ に$Gf(c)$を対応させる写像を$\ell(f)$ とかけばそれは$\mathbb{N}$上の線型汎関数で，

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

(6.3)　$Gf={}^cGf+\ell(f)$,　$\ell(f)=Gf(c)$　　　$(\forall f\in \mathbb{N})$

とかける。このことは，weak potential operator が $\mathbb{N}$ 上の線型汎関数の差を除いて一意的であることを示している。　(終)

系　(Orey)　S上のkernel G がweak potential kernel であるための必要充分条件は，S上の関数 h，S上の測度 π があって，

(6.4)　$G={}^cG+h\otimes\mu+1\otimes\pi$

と書けることである。

実際Gが(6.4)の形をしていれば $f\in\mathbb{N}$ に対し，

$$Gf={}^cGf+\langle\pi, f\rangle$$

とかけ，$\langle\pi, f\rangle$ は $\mathbb{N}$ 上の線型汎関数なのでGは1つのweak potential kernel である。逆にGが1つのweak potential kernelとすれば，定理により(6.3)のように表わされる。${}^c\mathbb{M}=\{{}^cf;\ {}^cf\in\mathbb{M},\ {}^cf(c)=0\}$ とおき ${}^c\mathbb{M}$ から $\mathbb{N}$ への写像 ${}^cL$ を

(6.5)　$${}^cL({}^cf)(x)=\begin{cases}{}^cf(x) & x\in S\setminus\{c\}\\ -\langle\mu, {}^cf\rangle/\mu(c) & x=c\end{cases}$$

により定義すれば，${}^cL$ は ${}^c\mathbb{M}$ から $\mathbb{N}$ への(代数的)同型対応である。${}^cf\in{}^c\mathbb{M}$ に対し，${}^c\ell({}^cf)=\ell({}^cL\,{}^cf)$ とおくと，${}^c\ell$ は ${}^c\mathbb{M}$ 上の線型汎関数である。$I_{\{c\}}$ と ${}^c\mathbb{M}$ で $I_{\{c\}}$ で張られる線型空間を $[I_{\{c\}}]$ と書くと，$\mathbb{M}=[I_{\{c\}}]\oplus{}^c\mathbb{M}$ (代数的直和)である。従って ${}^c\ell$ の $\mathbb{M}$ 上への線型汎関数としての拡張 $\bar{\ell}$ は $\bar{\ell}(I_{\{c\}})$ の値をきめれば一意的に定まる。簡単にするため $\bar{\ell}(I_{\{c\}})=0$ なる拡張を考えると，これはS上の測度で $\{c\}$ の測度が0であるものと一対一に対応する。このような測度を π とすれば，$\bar{\ell}(f)={}^c\ell({}^cL^{-1}f)=\langle\pi, f\rangle$ とかける。今 $y\neq c$ に対し

(6.6)　$$e_y(x)=\begin{cases}1 & (x=y)\\ -\dfrac{\mu(y)}{\mu(c)} & (x=c)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

とおくと，$e_y\in\mathbb{N}$ で，$Ge_y={}^cGe_y+\ell(e_y)$ より，

$$G(x, y)={}^cG(x, y)+G(x, c)\mu(y)/\mu(c)+\pi(y)$$

を得る。これは明らかに $y=c$ のときも成立する(${}^cG(x, c)=0$, $\pi(c)=0$ だから)。従って $h(x)=G(x, c)/\mu(c)$ とおくと，

$$G={}^cG+h\otimes\mu+1\otimes\pi$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

の形になる。

注意　weak potential kernel G の表現 (6.4) において，h，π のとり方は唯一通りではないが，π (c) の値を1つきめれば，h と π は唯一通りにきまる。

次にPは不変測度 μ と weak potential operator G の組により，唯一通りにきまることを示そう。

定理6.2.　$P(\widetilde{P})$ をS上の recurrent な Markov kernel，$\mu(\widetilde{\mu})$ を不変測度，$Nl(\widetilde{Nl})$ を null charge の空間，$G(\widetilde{G})$ を weak potential operator とする。このとき，もし

(6.7)　$\widetilde{\mu}=k\mu$ (k は正定数，従って $Nl=\widetilde{Nl}$)

かつ

(6.8)　$\widetilde{G}f=Gf+\ell(f)$ (ℓ は Nl 上の線型汎関数)

であれば $P=\widetilde{P}$ が成り立つ。

証明　P，$\widetilde{P}$ に対応する Markov chain をそれぞれ X，$\widetilde{X}$ とする。$c\in S$ を1つ固定し，${}^cS=S\setminus\{c\}$ とおく。X，$\widetilde{X}$ を c で殺した ${}^cS$ 上の Markov chain をそれぞれ ${}^cX$，${}^c\widetilde{X}$ とおき，それらの transition function を ${}^cP$，${}^c\widetilde{P}$，potential kernel を ${}^cG$，${}^c\widetilde{G}$ とかく。$y\in{}^cS$ とし，θ_y を (6.6) 式によって導入した関数とすれば，$x\in{}^cS$ のとき

$$
\begin{aligned}
{}^cG(x,y)&=E_x\left(\Sigma_{0\leqq n<\sigma^c}\,\theta_y(X_n)\right)\\
&=G\theta_y(x)-G\theta_y(c)\\
&=\widetilde{G}\theta_y(x)-\widetilde{G}\theta_y(c)\\
&={}^c\widetilde{G}(x,y)
\end{aligned}
$$

が成立する。${}^cG$ は ${}^cS$ 上で (R.M.P) をみたし，${}^c\widetilde{P}$ にたいしても strong potential kernel になっている (${}^cG={}^c\widetilde{G}$) から，§4で示した一意性の結果によって ${}^cP={}^c\widetilde{P}$ でなければならない。従って $x, y\in{}^cS$ のとき $P(x,y)={}^cP(x,y)={}^c\widetilde{P}(x,y)=\widetilde{P}(x,y)$ であることが分る。また $x\in{}^cS$ のとき $P(x,c)=1-PI_{{}^cS}(x)=1-\widetilde{P}I_{{}^cS}(x)=\widetilde{P}(x,c)$。更に $y\in{}^cS$ とすると，$\mu P=\mu$，$\widetilde{\mu}\widetilde{P}=\widetilde{\mu}$，$\widetilde{\mu}=k\mu$ に注意して，

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$P(c, y) = [\mu(y) - \Sigma_{x \in c_S} \mu(x) P(x, y)]/\mu(c)$$
$$= [\tilde{\mu}(y) - \Sigma_{x \in c_S} \tilde{\mu}(x) \tilde{P}(x, y)]/\tilde{\mu}(c)$$
$$= \tilde{P}(c, y)。$$

最後に

$$P(c, c) = 1 - \Sigma_{y \in c_S} P(x, y)$$
$$= \tilde{P}(c, c)$$

により結局 $P = \tilde{P}$ が分った，（終）

注意　この一意性の証明は後で導入する $(\lambda_E)_{E \in \mathfrak{F}}$ という system を用いれば，もっと見通しよく，きれいに出来る。

次に weak potential kernel のみたす最大値原理について述べるが，その前に Dynkin の公式を証明しておく。Pを recurrent な Markov kernel，対応する Markov chain を X とする。

補題 6.1.（Dynkin の公式）$f \in \mathbb{M}$，$g \in \mathbb{B}$ が方程式

(6.9)　$(I - P)g = f$

をみたすならば，

(6.10)　$P_x(\tau < \infty) = 1$，$E_x(\Sigma_{0 \leqq n < \tau} |f(X_n)|) < \infty$

をみたす任意の Markov time τ に対して，

(6.11)　$g(x) - E_x(g(X_\tau)) = E_x(\Sigma_{0 \leqq n < \tau} f(X_n))$

が成り立つ。

証明　$0 < s < 1$ に対し $G_s = \Sigma_{n=0}^{\infty} (sP)^n$ とおく。(6.9) から $g - P^{n+1} g = \Sigma_{k=0}^{n} P^k f$ が成立するので，両辺に s^n をかけ和をとって，

(6.12)　$g = s G_s f + (1 - s) G_s g$

が成り立つことが分る。

従って

$$g(x) = sG_s f(x) + (1 - s) G_s g(x)$$
$$= s E_x(\Sigma_{0 \leqq n < \tau} s^n f(X_n))$$
$$+ (1 - s) E_x(\Sigma_{0 \leqq n < \tau} s^n g(X_n))$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$+E_x[s^\tau(sG_sf(X_\tau)+(1-s)G_sg(X_\tau))]$$

となる。

(6.10)によって，右辺第1項は

$$\lim_{s\uparrow 1} s\,E_x(\Sigma_{0\leqq n<\tau} s^n f(X_n)) = E_x(\Sigma_{0\leqq n<\tau} f(X_n))。$$

第2項は

$$|(1-s)E_x(\Sigma_{0\leqq n<\tau} s^n g(X_n))|$$

$$\leqq(1-s)\|g\|E_x(\Sigma_{0\leqq n<\tau} s^n)$$

$$\leqq\|g\|(1-E_x(s^\tau))\rightarrow 0 \qquad (s\uparrow 1)$$

(6.12)によって，第3項は$E_x(s^\tau g(X_\tau))$に等しく，$s\uparrow 1$のとき$E_x(g(X_\tau))$に近づく。従って，結局

$$g(x)=E_x(\Sigma_{0\leqq n<\tau} f(X_n))+E_x(g(X_\tau))$$

となり，補題が証明された。 (終)

weak potential operatorに対する次の形の最大値原理を再帰的な(R.M.P)という意味でかりに(R.R.M.P)と名づける。

定理6.3. Pをrecurrentなsub-Markov kernelとし，null chargeの空間をNl，weak potential operatorをGとする。このとき，

(R. R. M. P) $f\in$ Nlと実数aに対し，

$\{f>0\}\neq\phi$上で $Gf\leqq a$ であれば，S上で

(6.13) $Gf\leqq a-f^-$

が成り立つ。

証明 $E=\{f>0\}$とおく。補題5.3により$P_x(\sigma^E<\infty)=1$，定理5.2より$E_x(\Sigma_{0\leqq n<\sigma^E}|f(X_n)|)<\infty$であることが分る。従って$g=Gf\in$ IBに注意して，Dynkinの公式を用いれば

$$Gf(x)=E_x(\Sigma_{0\leqq n<\sigma^E} f(X_n))$$
$$+E_x(Gf(X_{\sigma^E}))$$
$$\leqq -f^-(x)+a$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

となる。 (終)

系 $\mathrm{supp}(f) \neq \phi$ の上で Gf は定数ではありえない。

何となれば，$\mathrm{supp}(f) \neq \phi$ 上で $Gf = a$ とする。$f \in \mathbb{N}$ であるから，$\{f > 0\} \neq \phi$。したがって（R.R.M.P）により，S上で $Gf \leqq a - f^-$ が成り立つが，特に $\mathrm{supp}(f)$ 上で $a = Gf \leqq a - f^-$。このことは $f^- = 0$ であることを示している。$f \in \mathbb{N}$ にたいして $\mathrm{supp}(f) \neq \phi$ かつ $f^- = 0$ であることは不可能である。

§7. Normal chain の1つの特徴づけ。

Pを recurrent な Markov kernel とし，不変測度を μ，null charge の空間を $\mathbb{N}$ とする。Eを空でない有限集合とし，次の記号を用いることにしょう。

f_E 関数 f のE上への制限

ν_E 測度 ν のE上への制限

$\mathbb{B}^E = \{ f \in \mathbb{B} \; ; \; \mathrm{supp}(f) \subseteqq E \}$

$\mathbb{B}_E = \{ f_E \; ; \; f \in \mathbb{B} \}$

$\mathbb{N}^E = \mathbb{N} \cap \mathbb{B}^E$ 。

またSのすべての空でない有限部分集合の集まりを $\mathfrak{F}$ によって表わす。GがPの weak potential operator であるとき，Gf を $f \in \mathbb{N}$ の weak potential と呼ぶことにする。

定理 7.1. Gを weak potential operator とする。この時，各 $E \in \mathfrak{F}$ に対し，E上の（有符号）測度 λ_E で

(λ.1) $\langle \lambda_E, 1_E \rangle = 1$,

(λ.2) $\langle \lambda_E, Gf^E \rangle = 0 \quad (\forall f^E \in \mathbb{N}^E)$

をみたすものが唯一つ存在する。

証明 $\mathbb{N}^E$ から $\mathbb{B}_E$ への線型写像 G^E を

(7.1) $G_E f^E = (Gf^E)_E$

により定義する。もし $G_E f^E = 0$ ならば，定理6.3の系により $f^E = 0$ となる。このこと

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

は $\dim N|^E = \dim G_E(N|^E)$ を意味している。明らかに，$\dim N|^E = (\dim \mathbb{B}^E) - 1$ であるから，これは $\dim(\mathbb{B}_E / G_E(N|^E)) = 1$ を示している。従って $\mathbb{B}_E$ 上の線型汎関数 ℓ_E が存在して，

$$G_E(N|^E) = \{ f_E ; \ell_E(f_E) = 0 \}$$

と書ける。再び定理6.3の系を用いれば $1_E \notin G_E(N|^E)$ が分る。従って $\mathbb{B}_E = [1_E] \oplus G_E(N|^E)$ となり，ℓ_E は $\ell_E(1_E)$ を与えれば一通りにきまる。$\ell_E(1_E) = 1$ とする。$y \in E$ に対し，$\lambda_E(y) = \ell_E((I_{\{y\}})_E)$ とおけば $\ell_E(f_E) = \langle \lambda_E, f_E \rangle$ であるから，λ_E は $(\lambda.1)$，$(\lambda.2)$ をみたす。唯一通りにきまることは上の注意から明らかであろう。 (終)

$(\lambda_E)_{E \in \mathfrak{F}}$ を用いて weak potential Gf の性質をいくつか導き出すことが出来る。そのために2，3の準備をする。S上の関数 h は，$x \in E\ (\subseteq S)$ に対し，$P|h|(x) < \infty$ で，$Ph(x) = h(x)$ であるとき E上で調和と云われる。

定理7.2. (調和関数の最小値の原理) $E \in \mathfrak{F}$ とし，S上で負の値をとらない関数 h が $E^c = S \setminus E$ 上で調和ならば

(7.2) $$h \geq \min_{x \in E} h(x)$$

が成立する。

証明 $x \notin E$ ならば仮定により

$$h(x) = Ph(x)$$
$$= E_x(h(X_1); 1 < \sigma^E) + E_x(h(X_1); \sigma^E = 1)$$

が成立する。従って，$n \geq 2$ のとき，$\forall x \in S$ に対し

$$E_x(h(X_{n-1}); n-1 < \sigma^E) - E_x(h(X_n); n < \sigma^E)$$
$$= E_x(h(X_{n-1}); n-1 < \sigma^E) - E_x(E_{X_{n-1}}(h(X_1); 1 < \sigma^E); n-1 < \sigma^E)$$
$$= E_x(E_{X_{n-1}}(h(X_1); \sigma^E = 1); n-1 < \sigma^E)$$
$$= E_x(h(X_{\sigma^E}); \sigma^E = n)$$

を得る。このことから

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$h(x)=\Sigma_{k=1}^{n} E_x(h(X_{\sigma^E});\sigma^E=k)+E_x(h(X_n);n<\sigma^E)$$

$$\geqq \Sigma_{k=1}^{n} E_x(h(X_{\sigma^E});\sigma^E=k)$$

が得られるが，nは任意なので

$$h(x)\geqq \Sigma_{k=1}^{\infty} E_x(h(X_{\sigma^E});\sigma^E=k)$$

$$=E_x(h(X_{\sigma^E}))$$

$$\geqq \min_{y\in E} h(y)$$

となり，定理が証明された。（終）

系1. 有界関数hが$E\in\mathfrak{F}$の外で調和ならば

(7.3) $\min_{x\in E} h(x)\leqq h\leqq \max_{x\in E} h(x)$

系2. （外部Dirichlet 問題）

$E\in\mathfrak{F}$，$f_E\in \mathbb{B}_E$とすると，$g=H^E f_E$は，外部Dirichlet 問題

(7.4) $(I-P)g=0$ （E^c上），

(7.5) $g=f_E$ （E上）

の唯一つの有界な解である。

定理7.3. $g\in\mathbb{B}$がある$f^E\in \mathbb{N}^E$（$E\in\mathfrak{F}$）のweak potential であるための必要充分条件は，（i）$<\lambda_E, g_E>=0$ および （ii） E^cで調和，が成り立つことである。

証明 必要性は明らかであるから充分性を示す。gが（i），（ii）をみたす関数であるとする。先づ（i）により，$g_E\in G_E(\mathbb{N}^E)$であるから，$f^E\in \mathbb{N}^E$が唯一つ存在して，$g_E=G_E f^E$とかける。$h=g-Gf^E$とおくと，hも有界で，E上では$h=0$，E^c上では，$Ph=Pg-PGf^E=g-Gf^E=h$となるから，調和である。従って前定理の系1により$h=0$，即ち$g=Gf^E$がいえた。（終）

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

系　E ∈ F の外で調和な有界関数gに対し，$f^{E} \in \mathbb{N}^{E}$ が唯一通りに定まって

$$g = Gf^{E} + \langle \lambda_{E},\ g_{E} \rangle \tag{7.6}$$

と書ける。特に任意の関数$g \in \mathbb{B}$ に対し，$f^{E} \in \mathbb{N}^{E}$ が唯一通りに定まって，

$$H^{E} g = Gf^{E} + \langle \lambda_{E},\ g_{E} \rangle \tag{7.7}$$

と書ける。

定理 7.4.　Gを recurrent なMarkov kernel Pのweak potential operator とする。このとき

(a)　$\forall f \in \mathbb{N}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} P^{n} Gf$ が存在するためには，$\forall g \in \mathbb{B}$，$\forall E \in \mathfrak{F}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} P^{n} H^{E} g$ が存在することが必要かつ充分である。

(b)　$\forall f \in \mathbb{N}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} P^{n} Gf = 0$ であるためには，$\forall g \in \mathbb{B}$，$\forall E \in \mathfrak{F}$に対し，

$$\lim_{n\to\infty} P^{n} H^{E} g = \langle \lambda_{E},\ g_{E} \rangle$$

となることが必要充分である。

証明　(a)（必要性）．$g \in \mathbb{B}$，$E \in \mathfrak{F}$ とすれば，定理 7.3の系により，

$$H^{E} g = Gf^{E} + \langle \lambda_{E},\ g_{E} \rangle \qquad (f^{E} \in \mathbb{N}^{E})$$

と書ける。従って

$$P^{n} H^{E} g = P^{n} Gf^{E} + \langle \lambda_{E},\ g_{E} \rangle$$

となるから，もし $\lim_{n\to\infty} P^{n} Gf^{E}$ が存在すれば，$\lim_{n\to\infty} P^{n} H^{E} g$ が存在する。

（充分性）。　$g = Gf$，$f \in \mathbb{N}^{E}$ とする。このとき $g \in \mathbb{B}$ で $H^{E} g = g$ (注) が成立

(注)　これは定理 7.2の証明に含まれている。あるいは Dynkin の公式（補題6.1）からも容易に示される。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

立するので，$\lim_{n\to\infty} P^n H^E g$ が存在すれば，$\lim_{n\to\infty} P^n G f$ が存在する。これらの証明を見れば，（b）の証明も明らかであろう。

注意　（a）の後半の条件はweak potential operator G とは無関係でPだけに関する条件である。

既約かつrecurrent な Markov kernel P が次の性質：$\forall f \in \mathbb{N}$ に対し，

（7.8）　$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=0}^{n} P^k f$ が存在する，

をもつとき normal と呼ばれる。次の系normal ということの1つの特徴づけになっていて，Kemeny−Snell〔4〕と Orey〔10〕の与えたものである。

系1　Pがnormal であるための必要充分条件は，$\forall g \in \mathbb{B}$，$\forall E \in \mathfrak{F}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} P^n H^E g$ が存在することである。

このことは次のようにすれば分る。c　S とすれば，${}^cG$ は1つのweak potential kernel であることは既に分っている。従って，定理の（a）により，$\forall f \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} P^n\ {}^cG f$$

が存在することと，$\forall g \in \mathbb{B}$，$\forall E \in \mathfrak{F}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} P^n H^E g$$

が存在することは同値である。所で ${}^cG$ は（W．P）をみたすので，

$${}^cG f - P^n\ {}^cG f = \Sigma_{k=0}^{n-1}\ P^k f$$

がすべての $f \in \mathbb{N}$，すべての $n \geqq 1$ に対し成立している。従って，$\lim_{n\to\infty} P^{n\,c}G f$ がすべての $f \in \mathbb{N}$ に対し，存在することと（その極限は必然的に有界関数である），$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=0}^{n} P^k f$ がすべての $f \in \mathbb{N}$ に対して存在する（このとき必ず有界になる）ことは同値である。

Pが normal であるとき，

（7.9）　$G_0 f = \lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=0}^{n}\ P^k f$　　（$f \in \mathbb{N}$）

により定義される作用素 G_0 は，明らかに，$\mathbb{N}$ から $\mathbb{B}$ への線型写像で（W．P）をみたす。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

従って，1つのweak potential operator を定義する。このとき，$\lim_{n\to\infty} P^n G_0 f = 0$ （$\forall f \in \mathbb{N}$）となるので，定理の（b）により，G_0 に対するsystem $(\lambda_E)_{E\in\mathfrak{F}}$ は $<\lambda_E, g_E> = \lim_{n\to\infty} P^n H^E g$ によって特徴づけられる。従って λ_E は E上の確率測度となり，いくらか確率論的な意味も分るが，一般の場合には余りよく分らない量で，もう少し詳しく調べられる必要がある。特にPが ergodic （positive で非周期的）のときには，$\lim_{n\to\infty} P^n(x, y)$ が存在してそれは x に無関係になり，$\mu(y) = \lim_{n\to\infty} P^n(x, y)$ で定義される測度 μ は，不変確率測度であることが知られている。このときは，$\forall g \in \mathbb{B}$，$\forall E \in \mathfrak{F}$ に対し，$<\lambda_E, g_E> = \lim_{n\to\infty} P^n H^E g = <\mu H^E, g>$ が容易に示される。従って，μを初期分布とする Markov chain を考えれば，

$$\lambda_E(y) = P_\mu(X_{\sigma_E} = y) \qquad (y \in E)$$

となる。

系2. Pが normal であるための必要充分条件は $\forall x, y \in S$ に対し，

$$(7.10) \qquad A(x, y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left[P^k(x, y) - P^k(x, y)\frac{\mu(y)}{\mu(x)} \right]$$

が存在することで，このときAは1つの weak potential kernel である。

実際 $x \neq y$ として

$$f_y(z) = \begin{cases} 1 & (z = y) \\ -\dfrac{\mu(y)}{\mu(x)} & (z = x) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおくと，$f_y \in \mathbb{N}$ で，もし P が normal であれば

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} P^k f_y(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left[P^k(x, y) - P^k(x, x)\frac{\mu(y)}{\mu(x)} \right]$$

$$= A(x, y)$$

が存在する。（$x=y$のときは明らか）。逆にAが存在したとすれば任意の$f \in N$に対し，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} P^k f(x)$$

$$= \lim \sum_{k=0}^{n} \sum_{y\in S} \left[P^k(x, y) - P^k(x, y)\frac{\mu(y)}{\mu(x)} \right] f(y)$$

$$= Af(x)$$

となり，Pはnormalで$G_0 f = Af$（$\forall f \in N$）となる。Kemeny−Snellはnormalという条件をAが存在すると云う形で導入し，Aをpotential kernelと呼んだが，吾々の見方からしても，それは自然なものである。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

§8 構成問題

Pをrecurrentな Markov kernel, 対応する Markov chain をXとする。$E\varepsilon$ に対し，S上の kernel Π^E を

(8.1) $\Pi^E(x, y)=P_x(X_{\sigma_1 E}=y)$ $(x, y\varepsilon S)$

により定義する。Π^EはMarkov kernelで，測度$\Pi^E(x, \cdot)$の suppont はEに含まれる。Π^EのE×Eへの制限をP^Eとかき，PのE上への imbedded chain と呼ぶ。確率論的に見れば，Markov timeの列$(\tau_n^E)_{n\geqq 0}$を

$$\tau_0^E=0, \quad \tau_n^E=\tau_{n-1}^E+\sigma_0^E\theta_{\tau_{n-1}^E} \quad (n\geqq 1)$$

で定義し，

$$X_n^E=X_{\tau_n^E}, \quad \theta_n^E=\theta_{\tau_n^E} \quad (n\geqq 0)$$

とおくと，

$$X^E=(\Omega.\mathscr{M}, (X_n^E)_{n\geqq 0}(\theta_n^E)_{n\geqq 0} \quad (P_x)_{x\varepsilon E})$$

がE上のMarkov chainとなり，P^Eはその transition function を表わしている。このP^E(又はX^E)も既約かつrecurrent であることは容易に確めることが出来る。

Kernel ${}^EG$ を

(8.2) ${}^EG(x, y)=E_x(\sum_{0\leqq n<\sigma_1^E} I_{\{y\}}(X_n))$

と定義すると，次の補題が成立する。

補題8.1. (Derman−Harrisの関係式) ν_EをP^Eの不変測度とすれば

(8.3) $\nu=\nu_E{}^EG$

はPの1つの不変測度である。

証明. ν_EをEの外では0とおいて，S上に拡張した測度を再びν_Eとかけば，$\nu_E P^E=\nu_E$と，$\nu^E\Pi^E=\nu^E$とは同じことと考えてよい。このとき，

$$\begin{aligned}
&\nu P(y)\\
&=\sum_{z\varepsilon S}\nu_E{}^EG(z)P(z, y)\\
&=E\nu_E(\sum_{0\leqq n<\sigma_1^E} Ex_n(I_{\{y\}}(X_1)))\\
&=E\nu_E(\sum_{0\leqq n<\sigma_1^E} I_{\{y\}}(X_{n+1}))\\
&=E\nu_E(\sum_{0\leqq n<\sigma_1^E} I_{\{y\}}(X_n))+E\nu_E(I_{\{y\}}(X_{\sigma_1^E}))-E\nu_E(I_{\{y\}}(X_0))\\
&=\nu_E{}^EG(y)+\nu_E\Pi^E(y)-\nu_E(y)\\
&=\nu(y).
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$y \in E$ に対しては $\nu(y)=\nu_E(y)>0$ であるから，$\forall y \in S$に対しても$\nu(y)>0$ であることは容易に示すことが出来る。従ってνはPの１つの不変測度である。（終）

系　μをPの一つの不変測度とすれば，μのEへの制限μ_EはP^E の一つの不変測度である。

実際ν_EをP^E の一つの不変測度とすれば，$\nu=\nu_E{}^E G$ はPの一つの不変測度でνのE上への制限がν_Eとなっている。不変測度の一意性から定数$k>0$が存在して$k\nu=\mu$ となるので$k\nu_E=\mu_E$ であることが分る。このことはμ_EがP_E の一つの不変測度であることを示している。

今度はPのnull chargeの空間N，weak potential operatorをGとする。

$E \in \mathfrak{F}$のとき，

$$N_E=\{ f_E \,;\, \text{E上の関数で，} \langle \mu_E,\ f_E \rangle=0 \}$$

とおくと，N_Eは上に示したようにP^Eに関するnull charge の空間となる。N_Eの関数はEの外で０とおくことによりS上の関数に拡張すればN_Eの関数と同一視出来る。この対応を

$$N_E \ni f_E \longleftrightarrow f^E \in N^E$$

で表わそう。そのとき$f_E \in N_E$に対し，

$$G_E f_E=(G f^E)_E$$

とおけばG_EはP^Eの一つのweak potential operatorとなる。実際，$x \in E$，$f_E \in N_E$とすればDynkinの公式により，

$$\begin{aligned} & Gf^E(x)-E_x(Gf^E(X_{\sigma_1{}^E})) \\ &= E_x\left(\textstyle\sum_{0\leqq n<\sigma_1{}^E} f^E(X_n)\right) \\ &= f^E(x) \end{aligned}$$

となり，これは

$$(I-P^E)G_E f_E=f_E$$

を示しているからである。

Imbedded chain に関する上のような知識を背景にして，今度は(R.R.M.P)をみたすGが与えられたとき，それをweak potential operatorとするMarkov chain を構成する問題を考える。問題を正確に定式化すると次のようになる。

S上いたる所正の測度μが与えられているとし，$N=N(\mu)=\{ f \,;\, f \in M,\ \langle \mu,\ f \rangle=0 \}$とおく。更にNからBへの線型写像Gが与えられていて，それが

(R.R.M.P)　$f \in N$と実数aに対し，

$\{ f>0 \} \neq \phi$ 上で　$Gf \leqq a$　ならば，S上で

(8.4)　$Gf \leqq a-f^-$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

をみたしているとする。このとき，S上のsub−Markov kernel P で，

(i) $\mu P=\mu$,

(ii) $(I-P)Gf=f$, $\forall f\in N$

をみたすものが存在するか。

この問題は未だ完全に解決されている訳ではないが，μが有界な場合には解けるので，以下それを説明しよう。

最初の間は，μは必ずしも有界ではないとしておく。記号は殆んど今迄用いて来たものを用いることにする。

<u>補題8.2. 各$E\in\mathcal{J}$に対し，E上の測度λ_Eで$<\lambda_E, 1_E>=1$，かつすべての$f^E\in N^E$に対し，$<\lambda_E, G_E f^E>=0$をみたすものが唯一つ存在する。</u>

証明は定理7.1と同じでよい。実際そのときの証明にはGが(R.R.M.P)をみたすことだけが用いられている。

$E\in\mathcal{J}$ $g\in B$に対し$h_E=g_E-<\lambda_E, g_E>$とおくと$<\lambda_E, h_E>=0$となる。従って，$f^E\in N^E$が唯一つ存在して，E上で$g-<\lambda_E, g_E>=Gf^E$をみたす。ここで

$$(8.5)\qquad \Pi^E g=Gf^E-f^E+<\lambda_E, g_E>$$

と定義しよう。明らかにΠ^EはBからBへの線型写像であるが，

<u>補題8.3. Π^EはS上のMarkov kernelで測度$\Pi^E(x,\cdot)$のsupportはEに含まれる。又$P^E=(\Pi^E)_E$とおくと$\mu_E P^E=\mu_E$が成り立つ。</u>

<u>証明</u> $g\in B^+$とする。E上で $g=Gf^E+<\lambda_E, g_E>$ ($f^E\in N^E$) であるから，f^Eのsupportの上で

$$Gf^E\geqq -<\lambda_E, g_E>$$

が成り立つ。従って，(R.R.M.P)より

$$Gf^E-(f^E)^+\geqq -<\lambda_E, g_E>$$

がS上で成立するので，

$$\Pi^E g=Gf^E-f^E+<\lambda_E, g_E>\geqq 0$$

従ってΠ^Eは非負kernelである。又E上で $1=Gf^E+<\lambda_E, 1_E>$ とすると，再び(R.R.M.P)を用いて，$f^E=0$が出る。従って，

$$\Pi^E 1=Gf^E-f^E+<\lambda_E, 1_E>=1.$$

故にMarkov kernelである。また$g\in B$がE上で0であれば，明らかに$\Pi^E g=0$である。$P^E=(\Pi^E)_E$とおく。任意の$g\in B$に対し，E上で$g=Gf^E+<\lambda_E, g_E>$ ($f^E\in N^E$) とす

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

れば,

$$
\begin{aligned}
&<\mu_E P^E, g_E> \\
&=<\mu_E, P^E g^E> =<\mu_E, g_E> - <\mu_E, f_E> \\
&=<\mu_E, g_E>
\end{aligned}
$$

となり $\mu_E P^E = \mu_E$ を得る。 (終)

補題8.4. E, F $\in \mathfrak{F}$, E$\subsetneqq$Fとする。このとき, すべての $g \in (B^E)^+$ に対し,

(8.6) $\qquad \Pi^E g \geqq \Pi^F g$

が成立する。

証明 $g \in (B^E)^+$ として, E上で

$$g = Gf^E + <\lambda_E, g_E> \qquad (f^E \in N^E)$$

とする。このとき

$$g^E = Gf^E + <\lambda_E, g_E>$$

とおくと, (R.R.M.P)を用いて, S上で $g^E \geqq 0$ であることが容易に示される。F上で,

$$g^E = Gf^E + <\lambda_F, g^E_F> \qquad (f^F \in N^F)$$

としよう。このときF上で,

$$
\begin{aligned}
G(f^E - f^E) &= <\lambda_E, g_E> - <\lambda_F, g^E_F> \\
&= \text{定数}
\end{aligned}
$$

で $f^F - f^E \in N^F$ であるから, 再び(R.R.M.P)により(定理6.3の系), $f^F = f^E$ がでる。

従って,

$$
\begin{aligned}
\Pi^F g^E &= Gf^F - f^F + <\lambda_F, g^E_F> \\
&= Gf^E - f^E + <\lambda_E, g_E> \\
&= \Pi^E g
\end{aligned}
$$

となる。$g \in (B^E)^+$, $g^E \geqq 0$ およびE上で $g^E = g$ であることから, S上で $g^E \geqq g$. したがって

$$\Pi^E g(x) = \Pi^F g^E(x) \geqq \Pi^F g(x). \qquad \text{(終)}$$

以上を準備として, 次の定理が証明出来る。

定理8.1. μ がすべての点で正な有界測度, Gが $N = N(\mu)$ からBへの線型写像で, (R.R.M.P)みたすとする。このとき, S上のMarkov kernel Pで

(i) $\mu P = \mu$,

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

(ii) $(I-P)Gf=f \qquad (\forall f \in \mathbb{N})$

をみたすものが唯一つ存在する。又このPは既約かつrecurrentである。

証明 $(E_n)_{n\geqq 1}$ を $E_n \uparrow S$ なる有限集合の列とし，Π^{E_n} を各 E_n に対し，補題8.3で定義されるMarkov kernelとする。このとき任意の $y\in S$ に対し，$y\in E_n$ であれば補題8.4により

$$\Pi^{E_n}(x,y)\geqq \Pi^{E_{n+1}}(x,y)\geqq\cdots\geqq 0$$

が成り立つ。そこで

$$P(x,y)=\lim_{n\to\infty}\Pi^{E_n}(x,y) \qquad (x,y\in S)$$

を定義する。明らかに $P(x,y)\geqq 0$ で，Fatouの補題で

$$P1(x)\leqq\lim_{n\to\infty}\Pi^{E_n}1(x)=1$$

が成り立つ．即ちPはsub-Markov kernelである。$0\leqq I_{E_n}(x)\Pi^{E_n}(x,y)\leqq 1$，$\lim_{n\to\infty} I_{E_n}(x)\Pi^{E_n}(x,y)=P(x,y)$ であるからLebesgueの定理で（μは有界測度！）

$$\begin{aligned}
&\mu P(y)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{x\in S}\mu(x)I_{E_n}(x)\Pi^{E_n}(x,y)\\
&=\lim_{n\to\infty}\mu_{E_n}P^{E_n}(y)=\mu(y)
\end{aligned}$$

を得る。即ちμはPの一つの不変測度である。$P1(x)\leqq 1$の両辺をμで積分すると，

$$<\nu,P1>=<\mu P,1>=<\mu,1>$$

であるから，μ−測度0を除き$P1(x)=1$である。所でμはいたる所正であるから，$P1=1$となる。従って，Pはμを不変測度とするMarkov kernelである。次に$(I-P)Gf=f$ $(\forall f\in\mathbb{N})$を示そう。$f\in\mathbb{N}$, $\mathrm{supp}\, f\subseteq E\in\mathfrak{F}$ とする。Gfは有界であるから，aを充分大な定数とすれば

$$g=Gf+a\geqq 0$$

と出来る。$E_n\supseteq E$とすれば

$$<\lambda_{E_n},g_{E_n}>=<\lambda_{E_n},(Gf)_{E_n}>+a=a$$

であるから，

$$g=Gf+<\lambda_{E_n},g_{E_n}> \qquad f\in\mathbb{N}^{E_n}$$

である。従って

$$\begin{aligned}
\Pi^{E_n}g&=Gf-f+<\lambda_{E_n},g_{E_n}>\\
&=g-f
\end{aligned}$$

であるがFatouの不等式で

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$Pg \leqq \lim_{n\to\infty} \Pi^{E_n} g = g - f$$

が成立する。所で

$$<\mu, Pg> = <\mu P, g> = <\mu, g>$$
$$= <\mu, g-f>$$

であるから，μ-測度0を除いて，$Pg = g-f$．即ち，S上で$Pg = g-f$が成立する。故に

$$PGf + a = Gf - f + a$$

であるから，

$$PGf = Gf - f$$

即ち（Ⅰ−Pが既約かつrecurrentであることを示そう。もつtransient state $y \in S$が存在すればすべてのxに対し

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, y) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, y) = 0, \forall x \in S.$$

このことはLebesgueの定理により

$$\mu(y) = \lim_{n\to\infty} \mu P^n(y) = 0$$

を示して矛盾である。従って，すべての$y \in S$はrecurrentである。x，$y \in S$，$x \neq y$とする。もし，すべての$n \geqq 0$に対し，$P^n(x, y) = 0$であれば，

$$f_x(z) = \begin{cases} 1 & (z = x) \\ -\dfrac{\mu(x)}{\mu(y)} & (z = y) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおくと，$f_x \in \mathbb{N}$で

$$\sum_{k=0}^{\infty} P^k(x, x)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P^k f_x(x)$$
$$= Gf_x(x) - P^{n+1} Gf_x(x)$$
$$= Gf_x(x) - Gf_x(y) - P^{n+1}[Gf_x - Gf_x(y)](x)$$

が成り立つ。所で$\{f_x < 0\} = \{y\}$で$x = y$においてGf$_x - Gf_x(y) = 0$であるから(R.R.M.P)により全空間で$Gf_x - Gf_x(y) \geqq 0$である。従って，

$$\sum_{k=0}^{n} P^k(x, x) \leqq Gf_x(x) - Gf_x(y) < \infty$$

がすべてのnに対して成立し，xがrecurrentであることに反する。故にすべてのx，$y \in S$に対し，ある$n \geqq 0$が存在して$P^n(x, y) > 0$，即ち，既約となる。

一意性は，定理6.2において既に示してある。これで定理が証明された。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

注意 一意性は$\mu P=\mu$，$(I-P)Gf=f$が分った段階で任意の$g\in B$に対し，

$$g^{E_n}=Gf^{E_n}+<\lambda_{E_n}, g_{E_n}> \qquad f^{E_n}\in N^{E_n}$$

が$\| g^{E_n}\| \leqq \| g\|$，$g^{E_n}\to g$をみたすことと，$Pg^{E_n}=Gf^{E_n}-f^{E_n}+<\lambda_{E_n}, g_{E_n}>$となることを用いても容易に出る。この証明では，Pが既約かつrecurrentであることを使う必要はない。

以上の証明法ではμが有界であることを本質的に用いているので，一般の場合には適用されない。

ただ上記の証明では，各$E\in\mathfrak{F}$に対し，E上の既約かつrecurrentなMarkov kernel P^Eが存在し，

(i) $\mu_E P^E=\mu_E$

(ii) $(I_E-P^E)G_E f_E=f_E \qquad f_E\in N_E$

$(G_E f_E=(Gf^E)_E)$

が成り立ち，従って，$E\subseteq F$とすると，P^EはP^FのE上へのimbedded chainになっていることが分る。このようなsystem(P^E) $E\in\mathfrak{F}$から，本来の問題の解Pを作り出すためには，transientのときと同様に，何かGに（R.R.M.P）以外の必要かつ充分な条件がかくされているように考えられる。これはまだ分っていない。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

文　献

〔1〕 C.A.Derman：A solution to a set of fundamental equations in Markov chains. Proc. Am. Math.Soc. 5, 332-334(1954).

〔2〕 T.E.Harris：The existence of stationary measure for certain Markov processes. Berkeley Symp. Math. Statist. Probability, Berkeley, 1956, Vol.II, 113-124.

〔3〕 G.A.Hunt：Markov processes and potentials I, II, III. Illinois J.Math. 1, 44-93, 316-369(1957); idid. 2, 151-213(1958).

〔4〕 J.G.Kemeny and J.L.Snell：Potentials for denumerable Markov chains. J.Math. Anal. Appl. 3, 196-260(1961).

〔5〕 J.G. kemeny and J.L.Snell：Boundary theory for recurrent Markov chains. Trans. Am. Math. Soc. 106, 495-520(1963).

〔6〕 J.G.kemeny, J.L.Snell and A.W.Knapp：Denumerable Markov chains. Van Nostrand Co., Inc., 1966.

〔7〕 P.A.Meyer：Probability and Potentials; Blaisdell Publishing Company, 1966.

〔8〕 P.A.Meyer：Caractérisation des noyaux potentiels des semi-groupes discrets, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 16, 225-240(1966).

〔9〕 S.Orey：Sums arising in the theory of Markov chains. Proc. Am. Math. Soc. 12, 847-856(1961).

〔10〕 S.Orey：Potential kernels for recurrent Markov chains. J. Math. Anal. Appl. 8, 104-132(1964).

〔11〕 F.L.Spitzer：Principles of Random Walk. Van Notrand Co. Inc.1964

追加：

〔12〕 R.Kondō：On weak potential operators for recurrent Markov chains with continuous parameters. Osaka J.Math. 4, 327-344(1967).

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

[13] R.Kondō: On potential kernels satisfying the complete maximum principle, to appear in Proc. Japan Acad. Sci. (1968).

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

第　Ⅲ　部

APPROXIMATE CHAINと MARTIN境界 (注)

大島洋一

Transient Markov chain の Martin境界は，解析的方法を使って，Doob〔1〕，渡辺〔7，8〕により導入された。他方Hunt〔2〕はその結果を確率論的方法を使って証明した。その証明は，初めreversed chain の議論を使ってexit 境界の結果を出して，その後再びreversed chain の議論を使って，dual としてentrance 境界の結果を導くというものである。ところが，reversed chainの議論をする場合，chainの場合は問題がないが，state が一般になると，potential kernel に対するdensity の存在に関する仮定が必要になってくる。

またHunt はapproximate chain を導入して議論しているが，その議論ではapproximate chain は本質的ではない。

そこでこのノートでは，Huntとは逆に，初めにentrance 境界の結果を導く。その場合reversed chain の議論を使わずに出来るので，無条件に一般化することができる。また，この議論ではapproximate chainが本質的な役割を果たす。その後でexit 境界の結果をreversed chain を使って，entrance境界のdualとして導く。 この場合は，一般化するためには前にのべた仮定が必要となる。

Recurrent Markov chainについて，Kemeny-Snell〔3，4〕は，それを一点0で殺したtransient chain のentrance 境界を考え，そこから種々の結果を導いている。その一つとして，normal chain の場合そのpotential kernel Gは，測度 $\lambda^{E}=\lim_{n} P^{n}H^{E}$ の，E↑Sの時の，完備化した空間における汎弱極限βにより積分表示が出来るという事を示している。このとき，βは殺す点に無関係である。同様の境界により，Orey〔6〕は非負kernel A が0に無関係な測度で積分表示できることが，AがA（0，0）＝0

(注) 上巻は第Ⅲ部の前半のみを含む．後半の境界理論の部分は下巻で論じられる。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

たる weak potential kernel であるための必要十分条件であることを示している。Kemeny-Snell, Orey のこれらの結果も approximate chain を使えば極めて自然に導びかれる。

以上述べてきたように，approximate chain は Hunt 流の境界理論においては基本的な道具である。しかし Hunt〔2〕はその構成についてごく簡単に指摘しているにすぎない。またKemeny-Snell-Knapp〔4〕の構成法は多少不自然に思える。したがって本稿の前半では approximate chain の構成を Huntの考えに沿って詳しく説明する。

以下特に断らない限り，第Ⅰ部及び第Ⅱ部と同じ記号を用いることにする。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

第１章 Approximate chain.

§1. Approximate chain の定義.

この節では，approximate chainの定義とその性質を調べておく。我々の定義はHunt〔2〕の定義より見かけ上狭いけれども，実際には同値であることが示される（定理4.1の注意を見よ）。しかし，その証明に，reversed chain の議論を使うので，それを使わないために初めから少し狭い定義とした。

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を完備な，σ－有限測度空間とする。Ωの元をωと書き，$\alpha(\omega)$，$\beta(\omega)$を$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の可測関数で，$\alpha(\omega)$ の値は $-\infty$または整数，$\beta(\omega)$ の値は$+\infty$または整数で，$\alpha(\omega) \leqq \beta(\omega)$ なるものとする。

Ωの元ωと，$\alpha(\omega) \leqq n \leqq \beta(\omega)$ なる整数nに対して，$X_n(\omega)$ がSの元として定義され，整数nを固定すれば，$X_n(\cdot)$ は $\{\omega ; \alpha(\omega) \leqq n \leqq \beta(\omega)\}$ なるΩの 部分集合上の可測関数になるとする。

また，$\Delta_{-\infty}$, $\Delta_{+\infty}$ ($\Delta_{-\infty} \neq \Delta_{+\infty}$) が共にSに属さないとし，$n < \alpha(\omega)$ 〔$n > \beta(\omega)$〕なる整数nに対しては，$X_n(\omega) = \Delta_{-\infty}$ 〔$X_n(\omega) = \Delta_{+\infty}$〕とする。

このとき，任意の整数nとSの任意の元xに対して，$P\{X_n(\omega) = x\} < +\infty$， が充たされるならば，$(X, \alpha, \beta)$ を（$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の）random chain という。

次にS上のtransition function P が与えられたとき，random chain (X, α, β)が，整数m，n $(m<n)$ とSの元x_m, x_{m+1}, ..., x_nに対して，

$$(1.1)\quad P\{X_m(\omega)=x_m, X_{m+1}(\omega)=x_{m+1}, \ldots, X_n(\omega)=x_n\}$$
$$= P\{X_m(\omega)=x_m, X_{m+1}(\omega)=x_{m+1}, \cdots, X_{n-1}(\omega)=x_{n-1}\} P(x_{n-1}, x_n)$$

を充たすならば (X, α, β) をPを transition function としてもつMarkov chain, または簡単にP－chain という。

$\sigma(\omega)$ を $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上のrandom time, 即ち，$+\infty$，または$-\infty$，または整数の値をとる可測関数とする。Random chain (X, α, β) に対して，

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$\Omega'=\{\omega\in\Omega\,;\,\alpha(\omega)\leqq\sigma(\omega)\leqq\beta(\omega),\ |\sigma(\omega)|<+\infty\},$$

とおき，Ω' の元ωに対して，$\gamma(\omega)=\beta(\omega)-\sigma(\omega)$，　$0\leqq n\leqq\gamma(\omega)$ なる整数nに対して，　$Y_n(\omega)=X_{n+\sigma(\omega)}(\omega)$　$(=X_n(\theta_\sigma\circ\omega))$ とおく。

もし，$(Y,0,\gamma)$ がΩ' 上のP-chain になるならば，σは (X,α,β) をP-chain $(Y,0,\gamma)$ にreduceするという。 P-chain $(Y,0,\gamma)$ は初期分布，即ち$Y_0(\cdot)$の分布が確率測度とは限らないという点を除けば普通の意味のMarkov chain（第Ⅰ部および第Ⅱ部参照）であるから，強Markov 性をもつ。

(X,α,β) をrandom chain，EをSの部分集合とするとき，

$$\sigma^E(\omega)=\begin{cases}\inf\{n\,;\,X_n(\omega)\in E\} & (\text{あるnに対し}X_n\in E\text{のとき})\\ +\infty & (\text{その他})\end{cases}$$

とおき (X,α,β) のEへのhitting time という。

σ^Eは明らかに　$\alpha(\omega)\leqq\sigma^E(\omega)\leqq\beta(\omega)$ なるrandom time である。

EをSの任意の有限部分集合とするとき，random chain (X,α,β) がEへのhitting time σ^EによりP-chain に reduce され，$P\{\sigma^E=-\infty\}=0$のとき，(X,α,β) をapproximate P-chain という。(注1)

補題 1.1.　(X,α,β) がapproximate P-chainになるためには，Sに増加する有限集合の列$\{E_n\}_{n\geqq1}$が存在して，(X,α,β) がすべてのnに対して，E_nへのhitting time σ_nにより(注2) P-chainに reduce され，かつ $P\{\sigma_n=-\infty\}=0$ ことが必要十分である。

証明　必要性は明らかだから十分性を示す。

$\{E_n\}_{n\geqq1}$ を条件を充たす集合列とし，EをSの任意の有限集合とすると，$E\subseteqq E_N$なる番号Nが存在する。このとき，$\sigma_N\leqq\sigma^E$ だから，

$$P\{\sigma^E=-\infty\}\leqq P\{\sigma_N=-\infty\}=0\ .$$

(注1)； Hunt〔2〕では，ほとんどすべてのωに対して$\alpha_n(\omega)>-\infty$，かつ$\alpha(\omega)$に減少するrandom timeの列$\{\alpha_n(\omega)\}_{n\geqq1}$が存在し$(X,\alpha,\beta)$ が各α_nによりP-chainにreduceされるとき，(X,α,β)をapproximate P-chainと定義している。

(注2)； 今後，approximate chainの集合Eへのhitting timeはσ^Eと書き，集合列$\{E_n\}_{n\geqq1}$に対してはσ^{E_n}の代りにσ_nと書くことにする。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$|\sigma^{E}(\omega)|<+\infty$なる$\omega$に対し，$\gamma^{E}(\omega)=\beta(\omega)-\sigma^{E}(\omega)$とおき，$0\leqq n\leqq\gamma^{E}$のとき，$Y^{E}_{n}(\omega)=X_{\sigma^{E}+n}(\omega)$とおく。また，$\sigma_{N}$によってreducされるP−chainを，$(Y^{N}, 0, \gamma_{N})$と書く。

P−chain $(Y^{N}, 0, \gamma_{N})$のEへのhitting timeをτ^{E}とおくと，$\sigma^{E}<+\infty$のとき，$\sigma_{N}<+\infty$，$\tau^{E}<+\infty$かつ，$\sigma^{E}(\omega)=\sigma_{N}(\omega)+\tau^{E}(\omega)$だから，$0\leqq m<n$なる整数$m$，$n$とSの元$x_{m}$，$x_{m+1}$，……，$x_{n}$に対して，

$$P\{Y^{E}_{m}(\omega)=x_{m},\ Y^{E}_{m+1}(\omega)=x_{m+1},\ \cdots,\ Y^{E}_{n}(\omega)=x_{n}\}$$

$$=P\{X_{\sigma^{E}+m}=x_{m},\ X_{\sigma^{E}+m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ X_{\sigma^{E}+n}=x_{n},\ |\sigma^{E}|<\infty\}$$

$$=P\{Y^{N}_{\tau^{E}+m}=x_{m},\ Y^{N}_{\tau^{E}+m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ Y^{N}_{\tau^{E}+n}=x_{n},\ \tau^{E}<\infty\}$$

（P−測度による平均を$\mathbb{E}$と書くと強Markov性と$(Y^{N}, 0, \gamma^{N})$がP−chainであることを使えば）

$$=\mathbb{E}\left[P_{Y^{N}_{\tau^{E}}}\{Y^{N}_{m}=x_{m},\ Y^{N}_{m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ Y^{N}_{n-1}=x_{n-1}\}P(x_{n-1}, x_{n});\ \tau^{E}<\infty\right]$$

（元に戻せば）

$$=P\{Y^{E}_{m}=x_{m},\ Y^{E}_{m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ Y^{E}_{n-1}=x_{n-1}\}P(x_{n-1}, x_{n}).$$

故にσ^{E}は(X, α, β)をP−chainにreduceする。　　　　（終）

次にapproximate chainの収束について調べておく。初めにsupermartingaleに関するdowncrossing numberの補題を，必要な形で求めておく。

我々の場合基礎の測度空間はσ−有限であるが，確率空間の場合と同様に，$\mathcal{B}$に含まれるσ−fieldの増加列$\{\mathcal{B}_{n}\}_{n\geqq 1}$と，各$n$に対して$\mathcal{B}_{n}$−可測な関数$X_{n}(\omega)$が与えられたとき，すべての$n$（$\geqq 1$）に対して，

(1.2)　$\mathbb{E}[|X_{n}|]<\infty$，　$\mathbb{E}[X_{n+1}\mid\mathcal{B}_{n}]\leqq X_{n}$ a.e. (P)

をみたすならば，$\{X_{n}, \mathcal{B}_{n}\}_{n\geqq 1}$は<u>supermartingale</u>であるという。(注)

<u>補題 1.2.</u>　<u>$(Y, 0, \gamma)$をP−chain，fをS上のexcessive関数とする。$f(\Delta_{+\infty})=0$</u>

(注)　我々の場合確率空間とは限ってないので，定数はsupermartingaleとは限らない。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

とおけば，すべてのnに対して，$\mathbb{E}[f(Y_n)]<+\infty$である限り，$\{f(Y_n), \mathcal{B}_n\}_{n\geq 0}$ は supermartingale である。

但し$\mathcal{B}_n=\sigma(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)$。

証明　ほとんどすべての，ω (P) に対して，

$$\mathbb{E}[f(Y_{n+1}) \mid \mathcal{B}_n] = \Sigma_{y\in s} P\{Y_{n+1}=y \mid Y_n\} f(y)$$

$$= Pf(Y_n) \leq f(Y_n)$$

（終）

補題 1.3.　$\{X_n, \mathcal{B}_n\}_{n\geq 1}$を，非負の supermartingala とする。$\mathcal{B}_1$に属するΩの部分集合の増加列$\{\Omega_j\}_{j\geq 1}$で$\cup_{j\geq 1}\Omega_j=\Omega$，$P\{\Omega_j\}<+\infty$ $(\forall j)$ なるものが存在するならば，supermartingale $\{X_n, \mathcal{B}_n\}_{n\geq 1}$による区間 $[c, d]$ の down-crossing number をϕとおくと，

$$(1.3)\qquad \mathbb{E}[\phi] \leq \frac{1}{d-c}\,\mathbb{E}[X_1]$$

をみたす。

証明　初めに，Pが確率測度の場合にいえれば十分であることを示しておく。

$P\{\Omega\}=1$の場合にいえたとすると一般の場合には，各jに対して，

$$X_n^j(\omega)=X_n(\omega) \qquad (\omega\in\Omega_j \text{ならば})$$

$$\mathcal{B}_n^j=\{A\cap\Omega_j\ ;\ A\in\mathcal{B}_n\}, \qquad \bigvee_{n\geq 1} \mathcal{B}_n^j=\mathcal{B}^j,$$

$$P^j\{A^j\}=P\{A^j\}/P\{\Omega_j\} \qquad (A^j\in\mathcal{B}^j \text{のとき})$$

とおくと，$(\Omega_j, \mathcal{B}^j, P^j)$は確率空間で，その上の$\{X_n^j, \mathcal{B}_n^j\}_{n\geq 1}$を考えると，次のことよりそれは supermartingale になる。

$n\geq 2$のとき$\mathcal{B}_{n-1}^j$の任意の元A^jをとると，$A^j=A\cap\Omega_j$ $(A\in\mathcal{B}_{n-1})$と書け，また$\Omega_j\in\mathcal{B}_{n-1}$より$A^j\in\mathcal{B}_{n-1}$だから，

$$\int_{A^j} X_n^j(\omega)\,P^j(d\omega) = \int_{A^j} X_n(\omega)\,P(d\omega)\,/\,P\{\Omega_j\}$$

$$\leq \int_{A^j} X_{n-1}(\omega)\,P(d\omega)\,/\,P\{\Omega_j\}$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$= \int_{A^j} X^j_{n-1}(\omega)\, P^j(d\omega)。$$

故に $\{ X^j_n, B^j_n \}_{n \geqq 1}$ による〔c, d〕の downcrossing number を $\phi^{(j)}(\omega)$ とおくと，$\omega \in \Omega_j$ に対しては $\phi^{(j)} = \phi$ で，$\phi^{(j)}$ に対しては，

$$\mathbb{E}^j[\phi^{(j)}] \leqq \frac{1}{d-c}\, \mathbb{E}^j[X^j_1]$$

(但し $\mathbb{E}^j[\cdot]$ は P^j による平均）だから，

$$\mathbb{E}[\phi ; \Omega_j] \leqq \frac{1}{d-c}\, \mathbb{E}[X_1 ; \Omega_j]。$$

$j \to \infty$ とすると

$$\mathbb{E}[\phi] \leqq \frac{1}{d-c}\, \mathbb{E}[X_1]$$

以上より $P\{\Omega\} = 1$ として証明する。

整数Nを任意に固定し，$\widetilde{X}_n = X_n \wedge d\ (= \min(X_n, d))$ $n = 1, 2, \cdots, N$ とおくと，$\{\widetilde{X}_n, B_n\}_{n=1,2,\ldots,N}$ は supermartingale である。

Stopping time $\tau^0, \tau^1, \cdots \tau^N$ を次のように定義する。

$$\tau^0(\omega) = 1,$$

奇数 n $(1 \leqq n \leqq N)$ に対しては，

$$\tau^n(\omega) = \begin{cases} \min\{k \geqq \tau^{n-1} ; \widetilde{X}_k(\omega) = d\} & \text{（存在するとき）} \\ N & \text{（その他）} \end{cases},$$

偶数 n $(2 \leqq n \leqq N)$ に対しては，

$$\tau^n(\omega) = \begin{cases} \min\{k \geqq \tau^{n-1} ; \widetilde{X}_k \leqq c\} & \text{（存在するとき）} \\ N & \text{（その他）} \end{cases}.$$

$n \leqq \tau^n \leqq N$ だから $\tau^N = N$ である。

また $B_{\tau^n} = \{A ; A \cap \{\tau^n \leqq k\} \in B_k\}$ とおくと，$\{\widetilde{X}_{\tau^n}, B_{\tau^n}\}_{n=0,1,\cdots,N}$ は supermartingale である．

$$\widetilde{X}_N = \widetilde{X}_1 + (\widetilde{X}_{\tau^1} - \widetilde{X}_{\tau^0}) + (\widetilde{X}_{\tau^2} - \widetilde{X}_{\tau^1}) + \cdots + (\widetilde{X}_{\tau^N} - \widetilde{X}_{\tau^{N-1}}).$$

各項は可積分だから両辺の平均をとると，

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$\mathbb{E}[\widetilde{X}_N]=\mathbb{E}[\widetilde{X}_1]+\sum_{2\leqq n\leqq N,\ n:\text{偶数}}\mathbb{E}[\widetilde{X}_{\tau^n}-\widetilde{X}_{\tau^{n-1}}]+\sum_{1\leqq n\leqq N,\ n:\text{奇数}}\mathbb{E}[\widetilde{X}_{\tau^n}-\widetilde{X}_{\tau^{n-1}}]$$

$\{\widetilde{X}_{\tau^n},\ B_{\tau^n}\}_{0\leqq n\leqq N}$ が supermartingale であることより，右辺の第3項≦0，

$$\text{第2項}=\mathbb{E}\Big[\sum_{\substack{2\leqq n\leqq N,\ n:\text{偶数}\\ \tau^{n-1}<N,\ \widetilde{X}_{\tau^n}\leqq c}}(\widetilde{X}_{\tau^n}-\widetilde{X}_{\tau^{n-1}})\Big]+\mathbb{E}\Big[\sum_{\substack{2\leqq n\leqq N,\ n:\text{奇数}\\ \tau^{n-1}<N,\ \widetilde{X}_{\tau^n}>c}}(\widetilde{X}_{\tau^n}-\widetilde{X}_{\tau^{n-1}})\Big]$$

$\tau^{n-1}<N$ なる偶数 n に対しては $\widetilde{X}_{\tau^{n-1}}=d$，また一般に $\widetilde{X}_{\tau^n}\leqq d$ より上式の第2項≦0 であるから，$\{\widetilde{X}_n,\ B_n\}_{n=1,2,\ldots N}$ による $[c,d]$ の downcrossing number を $\widetilde{\phi}_N(\omega)$ とすると，(注)

上式 $\leqq (c-d)\ \mathbb{E}[\widetilde{\phi}_N]$

故に，　$0\leqq\mathbb{E}[\widetilde{X}_N]\leqq\mathbb{E}[\widetilde{X}_1]+(c-d)\ \mathbb{E}[\widetilde{\phi}_N]$

$$\therefore\quad \mathbb{E}[\phi_N]\leqq\frac{1}{d-c}\ \mathbb{E}[X_1]\leqq\frac{1}{d-c}\ \mathbb{E}[X_1]\ .$$

$N\to\infty$ とすれば結果が得られる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　（終）

第Ⅰ，Ⅱ部と同じように $G(x,y)=\sum_{n\geqq 0}P^n(x,y)\leqq+\infty$ とおく。

<u>定理 1.1.</u>　<u>$(X,\ \alpha,\ \beta)$ を approximate P-chain とする。</u>

(1.4)　　$\eta(x)=\mathbb{E}\Big[\sum_{\alpha\leqq n\leqq\beta}I_{\{x\}}(X_n)\Big]$，

<u>とおき，すべての $x\in S$ に対して $\eta(x)<+\infty$ とする。S上の非負関数 f が，$<\eta,\ g><+\infty$ なる非負関数 g によって，$f=Gg$ と書けるとき，ほとんどすべての ω に対して，$f(X_n(\omega))$ は，$n\downarrow\alpha(\omega)$ のとき，有限な極限値をもつ．</u>

<u>証明</u>　$\{E_j\}_{j\geqq 1}$ をSに増加する有限集合の列とすると，$(X,\ \alpha,\ \beta)$ は各 E_j への hitting time σ_j により，$\Omega_j=\{\omega\in\Omega\ ;\ |\sigma_j|<\infty\}$ 上の P-chain $(Y^j,\ 0,\ \gamma_j)$ に

(注) $\widetilde{\phi}_N(\omega)$ が $\{X_n\cdot B_n\}_{n=1,2,\ldots,N}$ による $[c,d]$ の down-crossing number にひとしいことはあきらかである。したがって $N\to\infty$ のとき，$\widetilde{\phi}_N(\omega)\to\phi(\omega)$ ．

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

reduce される。

$(Y^j, 0, \tau_j)$ の初期分布を μ_j とすると，

$$\eta(x) = \mathbb{E}[\Sigma_{\alpha \leqq n \leqq \beta} I_{\{x\}}(X_n)] \geqq \mathbb{E}[\Sigma_{\sigma_j \leqq n \leqq \beta} I_{\{x\}}(X_n) ; \Omega_j]$$

$$= \mathbb{E}[\Sigma_{0 \leqq k \leqq \tau_j} I_{\{x\}}(Y^j_n(\omega))]$$

$$= \mu_j G(x) .$$

即ち，$\eta \geqq \mu_j G$ ($\forall_j$) だから，

$$\mathbb{E}[f(Y^j_0)] = <\mu_j, f> = <\mu_j, Gg> = <\mu_j G, g>$$
$$\leqq <\eta, g> <+\infty .$$

そこで，$f(\Delta_{+\infty}) = 0$ とおくと，

$$\mathbb{E}[f(Y^j_n(\omega))] = <\mu_j P_n, f> = <\mu_j, P^n f>$$
$$\leqq <\mu_j, P^{n-1} f> \leqq \cdots \leqq <\mu_j, f>$$
$$\leqq <\eta, g> <+\infty$$

故に，補題 1.2 より，$\mathcal{B}^j_n = \sigma(Y^j_0, Y^j_1, \cdots Y^j_n)$ とおくと，$\{f(Y^j_n), \mathcal{B}^j_n\}_{n \geqq 0}$ は正の supermartingale である。

$\{f(Y^j_n), \mathcal{B}^j_n\}_{n \geqq 0}$ による $[c, d]$ の downcrossing number を $\phi^{(j)}$ とおくと，補題 1.3 より，

$$\mathbb{E}[\phi^{(j)}] \leqq \frac{1}{d-c} \mathbb{E}[f(Y^j_0)] \leqq \frac{1}{d-c} <\eta, g> <+\infty .$$

j は任意だから，$j \uparrow \infty$ とすると，$\sigma_j \downarrow \alpha$，

また $P\{\sigma_j = -\infty\} = 0$ だから，$\Omega_j \uparrow \Omega$ a.e. (P)，

$\phi(\omega)$ を $\{f(X_n)\}_{\alpha \leqq n \leqq \beta}$ による，$[c, d]$ の downcrossing number とすると，$\phi^{(j)} \uparrow \phi$ であるから，

$$\mathbb{E}[\phi] \leqq \frac{1}{d-c} <\eta, g> <+\infty .$$

いま，$P\{\limsup_{n \downarrow \alpha} f(X_n(\omega)) > \liminf_{n \downarrow \alpha} f(X_n(\omega))\} > 0$ とすると，有理数 c，d (c＜d) が存在して，

$$\mathbb{P}\{\limsup_{n\downarrow\alpha} f(X_n(\omega)) > d > c > \liminf_{n\downarrow\alpha} f(X_n(\omega))\} > 0 .$$

$\{\limsup_{n\downarrow\alpha} f(X_n(\omega)) > d > c > \liminf_{n\downarrow\alpha} f(X_n(\omega))\}$に属する$\omega$に対しては，$\phi(\omega)=\infty$だから，

$\mathbb{E}[\phi]=\infty$．これは矛盾である。

故に，$\lim_{n\downarrow\alpha} f(X_n(\omega))$ はa．e．$(\mathbb{P})$で存在する。

また，$\Omega_\infty=\{\omega ; \lim_{n\downarrow\alpha} f(X_n(\omega))=\infty\}$とおき，$P\{\Omega_\infty\}>0$と仮定すると，

$\sigma_j\downarrow\alpha$だから，$\omega\in\Omega_\infty$にたいしては，$\lim_j f(X_{\sigma_j}(\omega))=\infty$である。

故に Fatou の補題より，

$$\infty=\int_{\Omega_\infty}\lim_j f(X_{\sigma_j}(\omega))\,\mathbb{P}(d\omega) \leqq \liminf_j \int_{\Omega_\infty\cap\{|\sigma_j|<\infty\}} f(X_{\sigma_j}(\omega))P(d\omega)$$

$$\leqq \liminf_j \int_{\{|\sigma_j|<\infty\}} f(X_{\sigma_j}(\omega))\,\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\leqq \langle \eta, g\rangle < +\infty,$$

これは矛盾である。故に，$\mathbb{P}\{\Omega_\infty\}=0$．　　　　（終）

§2. Excessive測度のpotentialによる近似．

この節では，excessive 測度にたいして，第Ⅱ部定理1.3の系1に対応する結果を求める。これは第Ⅱ部の結果からそのdualとしても求めることができるが，ここではdual の議論を使わないで直接証明する。

この節を通して，Pはtransient な transition function，$(Y, 0, \gamma)$をP-chain とし，その初期分布がμのとき，$(Y, 0, \gamma)$を定義する測度を$\mathbb{P}_\mu$，特に$\mu=\delta^x$（但し$\delta^x(x)=1$，$\delta^x(y)=0$　$y\neq x$）のとき$\mathbb{P}_x$で表わす．$(Y, 0, \gamma)$の集合Eへのhitting time をτ^Eと書き，第Ⅱ部と同様に，

$$H^E(x, y)=\mathbb{P}_x\{X_{\tau^E}(\omega)=y, \tau^E<\infty\}\quad (y\in E,\ x\in S)$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$P^E(x,y)=P_x\{X_{\tau^E(\theta_1\circ\omega)}(\theta_1\circ\omega)=y,\ \tau^E(\theta_1\circ\omega)<\infty\}\ (x\in E,\ y\in E)$$

とおくと，

補題2.1.　(2.1)　$(I-P)H^E(x,y)=\begin{cases}(I-P^E)(x,y) & (x\in E,\ y\in E)\\ 0 & (x\notin E,\ y\in E)\end{cases}$

但し，$I(x,y)=\delta^x(y)$．

証明　$x\in E$，$y\in E$のときは，$H^E(x,y)=I(x,y)$だから，

$PH^E=P^E$をいえばよい．

$$P^E(x,y)=P_x\{Y_{\tau^E(\theta_1\circ\omega)}(\theta_1\circ\omega)=y,\ \tau^E(\theta_1\circ\omega)<\infty\}$$

$$=\mathbb{E}_x[P_{Y_1}\{Y_{\tau^E}=y,\ \tau^E<\infty\}]=PH^E(x,y).$$

$x\notin E$，$y\in E$のときは，$H^E=PH^E$をいえばよい。

$$H^E(x,y)=P_x\{\tau^E<\infty,Y_{\tau^E}<\infty\}=P_x\{\tau^E(\theta_1\circ\omega)<\infty,Y_{\tau^E(\theta_1\circ\omega)}(\theta_1\circ\omega)=y\}$$

$$=PH^E(x,y)$$　（終）

P^EはE上のtransition functionになるから，P^Eに対するpotential kernel をG^Eとおく。

補題2.2.　$x\in E$，$y\in E$のとき

(2.2)　$G(x,y)=G^E(x,y)$，

である。

証明　$\tau_0^E(\omega)=0$，

$\tau_1^E(\omega)=1+\tau^E(\theta_1\circ\omega)$，

$\tau_n^E(\omega)=\tau_{n-1}^E(\omega)+\tau_1^E(\theta_{\tau_{n-1}^E}\circ\omega)$　$(n\geqq 2)$

とおくと，

$$G(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}P_x\{X_n=y\}=\sum_{n=0}^{\infty}P_x\{X_{\tau_n^E}(\omega)=y\}=G^E(x,y)$$　（終）

測度μ〔関数f〕に対して，$\mu G<+\infty$〔$Gf<+\infty$〕のとき，μG〔Gf〕をpotentialといい，μ〔f〕をそのcharge という。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

補題 2.3. ηがμをchargeとするpotentialで，μのsupport即ち，$\{x\in S;\ \mu(x)>0\}$がEに含まれるとすれば，E上で，

$$(2.3)\qquad \eta(I-P)=\eta_E(I-P^E)$$

である。但し，η_E はηをEへ制限した測度．

証明　$z\in E$とすると，補題2.2より，

$$\eta(z)=\mu G(z)=\sum_{x\in E}\mu(x)G(x,z)=\sum_{x\in E}\mu(x)\,G^E(x,z)\ .$$

Pはtransient chainのtransition functionとしているから，$G<+\infty$. 故に(2.2)式より$G^E<+\infty$だから，上式の両辺に$(I-P^E)(z,y)$ $(y\in E)$を右からかけて$z\in E$について加えると和の交換ができて，

$$\eta_E(I-P^E)(y)=\mu(y)\qquad (y\in E)\ .$$

$\eta=\mu G$に$(I-P)$を右からかけると，同様に

$$\eta(I-P)(y)=\mu(y)\qquad (y\in E)\ .$$

（終）

補題 2. 4. ηをexcessive測度，EをSの有限部分集合とすると，

$$(2.4)\qquad \eta^E\leqq\eta \quad かつ \quad E上では\ \eta^E=\eta$$

なるpotential η^Eで，そのchargeのsupportがEに含まれるものが唯一つ存在する。

証明　証明を3つの段階に分けて行う。

(1)　η_EはP^{E}に関してexcessive測度である。

$y\in E$とし，η_EをEの外では0としてSまで拡張しておくと，

$$\eta_E P^E(y)=P_{\eta_E}\{Y_{\tau_1^E}=y,\ \tau_1^E<\infty\}$$

$$=P_{\eta_E}\{Y_{\tau_1^E}=y,\ \tau_1^E=1\}+P_{\eta_E}\{Y_{\tau_1^E}=y,\ \infty>\tau_1^E\geqq 2\}$$

$$P_{\eta_E}\{Y_{\tau_1^E}=y,\ \tau_1^E=1\}=P_{\eta_E}\{Y_1=y\}$$

$$P_{\eta_E}\{Y_{\tau_1^E}=y,\ 2\leqq\tau_1^E<\infty\}$$

$$=P_{\eta_E}\{Y_{\tau_1^E(\theta_1\circ\omega)}(\theta_1\circ\omega)=y,\ \infty>\tau_1^E(\theta_1\circ\omega)\geqq 1,\ \tau^E>1\}$$

$$=\mathbb{E}_{\eta_E}[P_{Y_1}\{Y_{\tau_1^E}=y,\ \infty>\tau_1^E(\omega)\geqq 1\};\ \tau^E>1]$$

$$=\sum_{x\notin E}\eta_E P(x)\,P_x\{Y_{\tau_1^E}=y,\ \tau_1^E<\infty\}\ .$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

ηはexcessive測度だから，$E^c = S - E$とおくと，

$$\eta_E P(x) \leqq \eta(x) - \eta_{E^c} P(x) .$$

そこで，$P_E(x, y) = \begin{cases} P(x, y) & (x \in E,\ y \in E) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$ ，

とおくと，

$$P_{\eta_E}\{ Y_{\tau_1^E} = y,\ \ 2 \leqq \tau_1^E < \infty \}$$

$$\leqq \sum_{x \notin E} \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_{E^c} - \eta_{E^c} P_E)(x) P_x\{ Y_{\tau_1^E} = y,\ \tau_1^E = k \}$$

$$\leqq \liminf_{n \to \infty} \sum_{x \notin E} \sum_{k=1}^{n} (\eta_{E^c} - \eta_{E^c} P_E)(x) (P_E)^{k-1} \cdot P(x, y)$$

$$= \liminf_{n \to \infty} \sum_{x \notin E} (\eta_{E^c} - \eta_{E^c} P_E^n)(x)\ P(x, y)$$

$(\infty > \eta_{E^c} \geqq \eta_{E^c} P_E \geqq \eta_{E^c} P_E^2 \geqq \cdots ,$ だから$)$

$$\leqq \eta_{E^c}\ P(y)$$

故に，

$$\eta_E P^E(y) \leqq \eta_E P(y) + \eta_{E^c} P(y) = \eta(y) .$$

(ii) そこで，$\mu^E = \begin{cases} \eta_E (I - P^E) & (E\text{上}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$ とおけば，

$\eta^E = \mu^E G$が求めるものである。

初めに(i)の記号P_Eを使って，

$${}^E G(x, y) = \begin{cases} \sum_{n \geqq 0} (P_{E^c})^n (x, y) & (x \notin E,\ y \notin E) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおくと，

(2.5) $\quad H^E G(x, y) = G(x, y) - {}^E G(x, y) \qquad (x \in S,\ y \in S)$

が成り立つ事を示しておく。

$y \in E$のときは，

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$G(x,y)=\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_{\{y\}}(Y_n)\right]=\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_{\{y\}}(Y_n)\;;\; n\geqq\tau^E\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_{Y_{\tau^E}}\left[I_{\{y\}}(Y_n)\right]\;;\;\tau^E<\infty\right]$$

$$=H^E G(x,y).$$

$y\in E$，$x\in E$のときは，明らかに成立つ。

$y\in E$，$x\notin E$のとき，

$$G(x,y)=\mathbb{E}_x\left[\sum_{n\geqq 0} I_{\{y\}}(Y_n)\;;\;n<\tau^E\right]+\mathbb{E}_x\left[\sum_{n\geqq 0} I_{\{y\}}(Y_n)\;;\;n\geqq\tau^E\right]$$

$$={}^E G(x,y)+H^E G(x,y).$$

（2.5）を使えば，

$$\eta^E(x)=(\eta_E(I-P^E))G(x) \qquad \text{（補題2.1より）}$$

$$=[\eta\{(I-P)H^E\}]G(x) \qquad \text{（Eが有限集合だから，和の交換をすると）}$$

$$=\eta\{(I-P)(H^E G)\}(x)=\eta\{(I-P)(G-{}^E G)\}(x)$$

$$=\eta(x)-\eta\{(I-P)\,{}^E G\}(x)$$

$$=\eta(x)-\{\eta(x)-\sum_{y\in E}\eta(y)P^E G(y,x)\}I_{E^c}(x).$$

故に，$x\in E$のとき，$\eta(x)=\eta^E(x)$は明らかに成立つ。また，$x\notin E$のとき，$\eta_E P(x)\leqq\eta_{E^c}(I-(P_{E^c}))(x)$ だから，

$$\sum_{y\in E}\eta(y)P^E G(y,x)\leqq\sum_{y\notin E}\eta(y)(I-P_{E^c})^E G(y,x)=\eta(x)$$ ，より，$x\notin E$ のとき，

$$\eta^E(x)\leqq\eta(x).$$

(iii) 一意性．

$\eta^E=\mu^E G$，$\tilde{\eta}^E=\tilde{\mu}^E G$ が共に補題をみたすとすると，E上では，$\eta=\eta^E=\tilde{\eta}^E$ だから，

$$\mu^E G^E=\tilde{\mu}^E G^E.$$

故に，E上で，

$$\mu^E=\mu^E(G^E(I-P^E))=(\mu^E G^E)(I-P^E)=(\tilde{\mu}^E G^E)(I-P^E)$$
$$=\tilde{\mu}^E.$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

Eの外では，$\mu^E = \widetilde{\mu}^E = 0$ （終）

補題2.5. ηをexcessive測度とすると，ηに増加するpotentialの列$\eta_n = \mu_n G$ ($n=1, 2, \ldots$)で，μ_n ($\geqq 0$) のsupportは有限集合に含まれるものが存在する。

証明　$E_1 \subset E_2 \subset \cdots$，$\bigcup_{n \geqq 1} E_n = S$なる有限集合の列をとり，$\eta$と$E_n$に対して，補題2.4できまるpotentialを$\eta_n$とすると，これが求める列の条件をみたす。

なぜならば，$m \leqq n$のとき，$H^{E_n} H^{E_m} = H^{E_m}$であり，各$E_n$は有限集合だから，和の交換ができて，

$$\eta_m = \eta\{(I-P)H^{E_m}\}G = \eta\{(I-P)H^{E_n}H^{E_m}\}G$$

$$= \eta\{(I-P)H^{E_n}\}H^{E_m}G \leqq \eta\{(I-P)H^{E_n}\}G = \eta_n,$$

より$\{\eta_n\}_{n \geqq 1}$は単調増加であり，またE_n上で$\eta_n = \eta$で，$\bigcup_{n \geqq 1} E_n = S$だから，

$\lim_{n \to \infty} \eta_n = \eta$ （終）

定理2.1. ηをexcessive測度，$\{E_n\}_{n \geqq 1}$をSに増加する有限集合の列とすると，次の5つの条件をみたす有界測度の列μ_nが唯1つ存在する．

(a) 各nに対して，μ_nのsupportはE_nに含まれる．

(b) $\mu_n G \leqq \eta$かつE_n上では$\mu_n G = \eta$．

(c) $\mu_n G \uparrow \eta$ ($n \to \infty$)．

(d) $\mu_n \to \eta(I-P)$ ($n \to \infty$)．

(e) μ_nを初期分布とするP－chain (Y, 0, γ) のE_m ($m \leqq n$) へのhitting timeをτ_mとすると，集合$\{\omega; \tau_m < \infty\}$上での$Y_{\tau_m}$の分布は$\mu_m$である．

証明　ηとE_nにより補題2.5できまるpotential η_nのchargeをμ_nとすれば，これが求める測度の条件をみたす。

(a)，(b)，(c)をみた才ことは既に示した。

(d)は関係式$\mu_n G = \mu_n GP + \mu_n$，即ち$\eta_n = \eta_n P + \mu_n$で$n \to \infty$とすると，$\eta_n \uparrow \eta$であ

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

るから，$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$が存在して，$\eta = \eta P + \mu$である。

(e)は E_n が有限集合だから和の交換をすると，

$$P_{\mu_n}\{Y_{\tau_m} = x,\ \tau_m < \infty\} = \sum_{y\in E_n} \mu_n(y)\, P_y\{Y_{\tau_m} = x,\ \tau_m < \infty\}$$

$$= \{\eta(I - P^{E_n})\}H^{E_m}(x) = \eta\{(I-P)H^{E_n}\}H^{E_m}(x)$$

$$= \eta\{(I-P)H^{E_n}H^{E_m}\}(x) = \eta\{(I-P)H^{E_m}\}(x)$$

$$= \mu_m(x)$$ （終）

系． (1.4) 式をみたす approximate P－chain (X, α, β) のSに増加する有限集合の列 $\{E_j\}_{j\geqq 1}$ の各 E_j への hitting time を σ_j とおき，$X_{\sigma_j}(\cdot)$ の分布を μ_j とすれば，μ_j は定理2.1(a)，(b)，(c)，(d)，(e)をみたす。

証明 各σ_jにより (X, α, β) はP－chain に reduce されるから，$x\in E_j$ なるxに対しては，

$$\eta(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{\sigma_j \leqq n \leqq \beta} I_{\{x\}}(X_n)\ ;\ |\sigma_j| < \infty\right]$$

$$= \mu_j G(x) = \mu_j G^{E_j}(x)$$

故に，

$$\mu_j = \eta_{E_j}(I - P^{E_j})(x)$$ （終）

§ 3. Approximate chain の構成．

この節では，transient な transition function P と excessive 測度 η が与えられたとき，

(3.1) $$\eta(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{\alpha\leqq n\leqq\beta} I_{\{x\}}(X_n)\right]$$

をみたす approximate P－chain (X, α, β) を構成する問題を考える。これは，

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

後のMartin境界の議論で，本質的役割を果たす。

初めに次のことを注意しておく。

補題3.1. (X，α，β)を(3.1)をみたすapproximate P－chainとすると，(X，α，β)を有限な値をとるrandom timeだけずらしても，その性質は変わらない。特にαの値が0，または$-\infty$となるようにずらすことができる。

証明　前半も全く同様に出来るから，後半だけをしめす。

$$\sigma(\omega)=\begin{cases}\alpha(\omega) & (\alpha(\omega)>-\infty\text{のとき})\\ 0 & (\alpha(\omega)=-\infty\text{のとき})\end{cases},$$

$\widetilde{\beta}(\omega)=\beta(\omega)-\sigma(\omega)$，　$\widetilde{\alpha}(\omega)=\alpha(\omega)-\sigma(\omega)$，

$\widetilde{\alpha}(\omega)\leqq n\leqq\widetilde{\beta}(\omega)$なる整数$n$に対して，

$\widetilde{X}_n(\omega)=X_{\sigma(\omega)+n}(\omega)$，とおくと，$(\widetilde{X},\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$は後半の条件をみたす。

$\widetilde{\alpha}=0$，または$-\infty$，は明らかになりたつ。

$(\widetilde{X},\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$がapproximate P－chainであることは，EをSの任意の有限部分集合とし，$(\widetilde{X},\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$〔$(X,\alpha,\beta)$〕のEへのhitting timeを$\widetilde{\sigma}^E$〔$\sigma^E$〕とすると，$\sigma+\widetilde{\sigma}^E=\sigma^E$であることに注意すると，整数$m$，$n$ $(0\leqq m<n)$とSの元x_m，x_{m+1}，…，x_nに対して，

$$P\{\widetilde{X}_{\widetilde{\sigma}^E+m}=x_m,\widetilde{X}_{\widetilde{\sigma}^E+m+1}=x_{m+1},\dots,\widetilde{X}_{\widetilde{\sigma}^E+n}=x_n,|\widetilde{\sigma}^E|<\infty\}$$

$$=P\{X_{\sigma^E+m}=x_m,X_{\sigma^E+m+1}=x_{m+1},\dots,X_{\sigma^E+n}=x_n,|\sigma^E|<\infty\}$$

$$=P\{X_{\sigma^E+m}=x_m,X_{\sigma^E+m+1}=x_{m+1},\dots,X_{\sigma^E+n-1}=x_{n-1},|\sigma^E|<\infty\}P(x_{n-1},x_n).$$

$$=P\{\widetilde{X}_{\widetilde{\sigma}^E+m}=x_m,\widetilde{X}_{\widetilde{\sigma}^E+m+1}=x_{m+1},\dots,\widetilde{X}_{\widetilde{\sigma}^E+n-1}=x_{n-1},|\widetilde{\sigma}^E|<\infty\}P(x_{n-1},x_n).$$

また，$x\in E$とすると，

$$\eta(x)=\mathbb{E}\left[\sum_{n\geqq0}I_{\{x\}}(X_{\sigma^E+n});|\sigma^E|<\infty\right]$$

$$=\mathbb{E}\left[\sum_{n\geqq0}I_{\{x\}}(\widetilde{X}_{\widetilde{\sigma}^E+n});|\widetilde{\sigma}^E|<\infty\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{\tilde{\alpha}\leqq n\leqq\tilde{\beta}} I_{\{x\}}(\tilde{X}_n)\right] \qquad \text{（終）}$$

次の定理で構成される approximate P－chain (X, α, β) は実は，$\alpha\leqq 0$ となっている。しかし，このことは補題3.1より，本質的ではない。

次に（3.1）式をみたし，$\tilde{\alpha}$ の値が0，または$-\infty$なる approximate P－chain $(\tilde{X}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ の有限集合Eへの hitting time を $\tilde{\sigma}^E$ とすると，$x\in E$ のとき，

$$\eta(x) = \sum_{y\in E} P\{\tilde{X}_{\tilde{\sigma}^E} = y\} G^E(y, x),$$

だから $\tilde{X}_{\tilde{\sigma}^E}$ の分布を μ^E とおくと，

$\mu^E = \eta_E(I - P^E)$ である。

また，Sに増加する有限集合の列 $\{E_j\}_{j\geqq 1}$ をとり，$(\tilde{X}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ の各 E_j への hitting time を $\tilde{\sigma}_j$ とすると，$\tilde{\sigma}_j \downarrow \tilde{\alpha}$ $(j\to\infty)$ だから，$0\leqq m\leqq n$ なる整数 m，n とSの元 x_m, x_{m+1}, $\cdots$, x_n に対して，

$$P\{\tilde{X}_m(\omega) = x_m, \tilde{X}_{m+1}(\omega) = x_{m+1}, \cdots, \tilde{X}_n = x_n, \tilde{\alpha}(\omega) = 0\}$$

$$= \lim_{y\to\infty} P\{\tilde{X}_{\tilde{\sigma}_j+m} = x_m, \tilde{X}_{\tilde{\sigma}_j+m+1} = x_{m+1}, \cdots, \tilde{X}_{\tilde{\sigma}_j+n} = x_n, \tilde{\sigma}_j = 0\}.$$

ここで，

$$\lim_{j\to\infty} P\{\tilde{X}_{\tilde{\sigma}_j+m} = x_m, \tilde{X}_{\tilde{\sigma}_j+m+1} = x_{m+1}, \cdots, \tilde{X}_{\tilde{\sigma}_j+n} = x_n, |\tilde{\sigma}_j| < \infty\}$$

$$= \lim_{j\to\infty} P\{\tilde{X}_{\tilde{\sigma}_j+m} = x_m, \tilde{X}_{\tilde{\sigma}_j+m+1} = x_{m+1}, \cdots, \tilde{X}_{\tilde{\sigma}_j+n} = x_n, \tilde{\sigma}_j = 0\}$$

$$+ \lim_{k\to\infty}\lim_{j\to\infty} P\{\tilde{X}_{\tilde{\sigma}_j+m} = x_m, \tilde{X}_{\tilde{\sigma}_j+m+1} = x_{m+1}, \cdots, \tilde{X}_{\tilde{\sigma}_j+n} = x_n, -\infty < \tilde{\sigma}_j < -k\}.$$

$x_m \in E_N$ なるNを固定すると，上式の，

$$\text{第2項} \leqq \lim_{k\to\infty}\lim_{j\to\infty} P\{\tilde{\sigma}_N \leqq \tilde{\sigma}_j + m, -\infty < \tilde{\sigma}_j < -k\}$$

$$\leqq \lim_{k\to\infty} P\{\tilde{\sigma}_N \leqq -k+m\} = P\{\tilde{\sigma}_N = -\infty\} = 0 .$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

故に，

$$\mathbb{P}\{\widetilde{X}_m(\omega)=x_m,\ \widetilde{X}_{m+1}(\omega)=x_{m+1},\ \cdots,\ \widetilde{X}_n(\omega)=x_n,\ \widetilde{\alpha}(\omega)=0\}$$

$$=\lim_{j\to\infty}\mathbb{P}\{\widetilde{X}_{\widetilde{\sigma}_j+m}=x_m,\ \widetilde{X}_{\widetilde{\sigma}_j+m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ \widetilde{X}_{\widetilde{\sigma}_j+n}=x_n,\ |\widetilde{\sigma}_j|<\infty\}$$

$$=\lim_{j\to\infty}\mathbb{P}_{\mu_j}\{Y_m=x_m,\ Y_{m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ Y_n=x_n\}$$

$$=\lim_{j\to\infty}\mu_j P^m(x_m)P(x_m,x_{m+1})\cdots P(x_{n-1},x_n)$$

（但し μ_j は $\widetilde{X}_{\widetilde{\sigma}_j}$ の分布，$(Y,0,\gamma)$ はP－chain．定理2.1系より，$\lim\mu_j=\mu$ が存在し，また $\mu_j\leqq\eta$，$\eta P^m\leqq\eta<\infty$ だから）

$$=\mu P^m(x_m)P(x_m,x_{m+1})\cdots P(x_{n-1},x_n)$$

$$=\mathbb{P}_\mu\{Y_m=x_m,\ Y_{m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ Y_n=x_n\}.$$

以上のことより，（3.1）式をみたす approximate chain を構成する場合，それを定義する測度 $\mathbb{P}$ は，Sに増加する1つの有限集合の列 $\{E_j\}_{j\geqq1}$ をとり，E_j と η により定理2.1によりきまる測度を μ_j，$\lim_{j\to\infty}\mu_j=\mu$ としたとき，

$$\mathbb{P}\{\widetilde{X}_m=x_m,\ \widetilde{X}_{m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ \widetilde{X}_n=x_n,\ \widetilde{\alpha}=0\}$$

$$=\mathbb{P}_\mu\{Y_m=x_m,\ Y_{m+1}=x_{m+1},\ \cdots\ Y_n=x_n\},$$

と定義するのが自然である。

定理3.1で構成するのは上の $(\widetilde{X},\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$ を次のようにずらしたものである。

$$\{\widetilde{\alpha}=0\}=\bigcup_{j\geqq1}\{\widetilde{\alpha}=0,\ \widetilde{\sigma}_1=\infty,\ \widetilde{\sigma}_2=\infty,\ \cdots,\ \widetilde{\sigma}_{j-1}=\infty,\ \widetilde{\sigma}_j<\infty\},$$

なるように，互に素な集合の和に表わせる。そこで

$$\widetilde{\sigma}(\omega)=\begin{cases}\widetilde{\sigma}_j(\omega), & (\omega\in\{\widetilde{\alpha}=0,\widetilde{\sigma}_1=\infty,\widetilde{\sigma}_2=\infty,\cdots,\widetilde{\sigma}_{j-1}=\infty,\widetilde{\sigma}_j<\infty\})\\ 0 & (\widetilde{\alpha}(\omega)=-\infty)\end{cases},$$

とおき，

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$\alpha(\omega)=\tilde{\alpha}(\omega)-\tilde{\sigma}(\omega)$, $\beta(\omega)=\tilde{\beta}(\omega)-\tilde{\sigma}(\omega)$,

$\alpha(\omega)\leqq n\leqq\beta(\omega)$ なる整数 n に対し，$X_n(\omega)=\tilde{X}_{\tilde{\sigma}+n}(\omega)$

とおくと (X,α,β) はapproximate P－chain である。

このとき，

$$P\{X_m=x_m,\ X_{m+1}=x_{m+1},\cdots,\ X_n=x_n,\ \alpha=-N\}$$

$$=P\{\tilde{X}_{\tilde{\sigma}+m}=x_m,\ \tilde{X}_{\tilde{\sigma}+m+1}=x_{m+1},\cdots,\ \tilde{X}_{\tilde{\sigma}+n}=x_n,\ \tilde{\alpha}=0,\ \tilde{\sigma}=N\}$$

$$=\sum_k P_\mu\{Y_{\tau_k+m}=x_m,\ Y_{\tau_k+m+1}=x_{m+1},\cdots,\ Y_{\tau_k+n}=x_n,\ \tau_{k-1}=\infty,\ \tau_k=N\}$$

但し，$(Y,0,\gamma)$ はP－chain，τ_k はP－chain $(Y,0,\gamma)$ の E_k へのhitting time とする。

$\{\alpha=-\infty\}$ に対する測度は上の事と，$P\{X_{\sigma^E}=\cdot\}=\mu^E(\cdot)$

をみたすように定義する事が必要である。

以上の事に注意して定理を証明する．これはHunt〔2〕の構成をKemeny-Snell-Knapp〔4〕に類似の計算によって，厳密に論じたものである。

定理3.1. Excessive 測度 η に対して，(3.1) をみたすapproximate P-chain (X,α,β) が存在する。

証明 次の条件 (ω.1)，(ω.2)，(ω.3) をみたす列，

$(\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n,\cdots)$ なる元の全体を Ω とし，その元を ω と書く。

(ω.1)；任意の $\omega=(\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n,\cdots)$ に対し，その各成分 $\cdots$，$x_m,x_{m+1},\cdots,x_n,\cdots$ はすべて $S\cup\{\Delta_{+\infty}\}\cup\{\Delta_{-\infty}\}$ の元であり，その少くとも1つはSに属する。

(ω.2)；$x_N=\Delta_{-\infty}$ ならば，$n\leqq N$ なるすべての整数 n に対して，$x_n=\Delta_{-\infty}$ である。

(ω.3)；$x_N=\Delta_{+\infty}$ ならば，$n\geqq N$ なるすべての整数 n に対して，$x_n=\Delta_{+\infty}$ である。

$\omega=(\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots)\in\Omega$ に対して，$X_n(\omega)=x_n$ とおき，

$\alpha(\omega)=\inf\{n;\ X_n(\omega)\in S\}$

$\beta(\omega)=\sup\{n;\ X_n(\omega)\in S\}$，

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

とおく。

Ωのcylinder set, $\{\omega\in\Omega\,;\,X_m(\omega)=x_m,\ X_{m+1}(\omega)=x_{m+1},\ \cdots,\ X_n(\omega)=x_n\}$, ($m$, nは整数, $m\leqq n$, $x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n\in S\cup\{\Delta+\infty\}\cup\{\Delta-\infty\}$)の全体より生成される$\sigma$－fieldを$\mathcal{B}$とし, 次の(3.2), (3.3)によりcylinder setに対する測度を定義する。

$x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{n-1}\in S$, $x_n\in S\cup\{\Delta+\infty\}$に対して,

(3.2) $$\mathbb{P}\{X_m=x_m,\ X_{m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ X_n=x_n\}$$

$$=\sum_{k\geqq 1}\mathbb{P}_{\mu_j}\{Y_{\tau_k+m}=x_m,\ Y_{\tau_k+m+1}=x_{m+1},\cdots,\ Y_{\tau_k+n}=x_n,\ \tau_{k-1}=\infty,\ 0\leqq\tau_k+m<\infty\}$$

(3.3) $$\mathbb{P}\{X_{m-1}=\Delta-\infty,\ X_m=x_m,\ X_{m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ X_n=x_n\}$$

$$=\sum_{k\geqq 1}\mathbb{P}_{\mu}\{Y_{\tau_k+m}=x_m,\ Y_{\tau_k+m+1}=x_{m+1},\cdots,\ Y_{\tau_k+n}=x_n,\ \tau_{k-1}=\infty,\ \tau_k+m=0\}.$$

但し(Y, 0, γ)は$\Delta+\infty$をtrapとするP－chain, 即ち$Y_0(\cdot)$の分布をνとするとき, たとえば,

$$\mathbb{P}\{Y_m=x_m,\ \cdots,\ Y_{n-1}=x_{n-1},\ Y_n=\Delta+\infty,\ \cdots,\ Y_{n+k}=\Delta+\infty\}$$
$$=\mathbb{P}_\nu\{Y_m=x_m,\cdots,Y_{n-2}=x_{n-2}\}P(x_{n-2},x_{n-1})P(x_{n-1},\Delta+\infty)$$
$$(m,\ n,\ k\geqq 0,\ \ P(x_{n-1},\Delta+\infty)=1-\sum_{x_n\in S}P(x_{n-1},x_n))$$

をみたすP－chainとする。

また, $\{E_j\}_{j\geqq 1}$はSに増加する有限集合の列で, τ_jは(Y, 0, γ)のE_jへのhitting time, μ_jはE_jとηに対して定理2.1によりきまる測度, $\mu=\lim_{j\to\infty}\mu_j$,

(3.2)においてはjは, $x_m\in E_j$なるよう十分大きくとる。

定理の証明をいくつかの段階に分けて行う。

(i) (3.2)の定義はjのとり方に無関係である。

$i<j$, $E_i\ni x_m$とする。

$$\{Y_{\tau_k+m}=x_m,\ Y_{\tau_k+m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ Y_{\tau_k+n}=x_n,\ \tau_{k-1}=\infty,\ 0\leqq\tau_k+m<\infty\}$$

に属するωに対しては,

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$\tau_k + m \geqq \tau_i$，かつ $\tau_k \geqq \tau_i$，だから

$$\mathbb{P}_{\mu_j}\{Y_{\tau_k+m}=x_m,\ Y_{\tau_k+m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ Y_{\tau_k+n}=x_n,\ \tau_{k-1}=\infty,\ 0\leqq\tau_k+m<\infty\}$$

$$=\mathbb{P}_{\mu_j}\{Y_{\tau_k(\theta_{\tau_i}\circ\omega)+m}(\theta_{\tau_i}\circ\omega)=x_m,\ Y_{\tau_k(\theta_{\tau_i}\circ\omega)+m+1}(\theta_{\tau_i}\circ\omega)=x_{m+1},\cdots,$$
$$Y_{\tau_k(\theta_{\tau_i}\circ\omega)+n}(\theta_{\tau_i}\circ\omega)=x_n,\ \tau_{k-1}(\theta_{\tau_i}\circ\omega)=\infty,\ 0\leqq\tau_k(\theta_{\tau_i}\circ\omega)+m<\infty;$$
$$\tau_i<\infty\}$$

$$=\mathbb{E}_{\mu_j}(\mathbb{P}_{Y_{\tau_i}}\{Y_{\tau_k+m}=x_m,\ Y_{\tau_k+m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ Y_{\tau_k+n}=x_n,$$
$$\tau_{k-1}=\infty,\ 0\leqq\tau_k+m<\infty\};\ \tau_i<\infty)$$

（定理2.1(ⅲ)より）

$$=\mathbb{P}_{\mu_i}\{Y_{\tau_k+m}=x_m,\ Y_{\tau_k+m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ Y_{\tau_k+n}=x_n,\ \tau_{k-1}=\infty,\ 0\leqq\tau_k+m<\infty\}.$$

(ⅱ)　consistent である。

即ち，$x_{m+1}\in S$のとき，

$$(3.4)\qquad \sum_{x_m\in S\cup\{\Delta_{-\infty}\}}\mathbb{P}\{X_m=x_m,\ X_{m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ X_n=x_n\}$$
$$=\mathbb{P}\{X_{m+1}=x_{m+1},\ X_{m+2}=x_{m+2},\ \cdots,\ X_n=x_n\},$$

かつ，$x_{n-1}\in S$のとき

$$(3.5)\qquad \sum_{x_n\in S\cup\{\Delta_{+\infty}\}}\mathbb{P}\{X_m=x_m,\ X_{m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ X_{n-1}=x_{n-1},\ X_n=x_n\}$$
$$=\mathbb{P}\{X_m=x_m,\ X_{m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ X_{n-1}=x_{n-1}\}.$$

（3.5）は定義より明らかだから，（3.4）だけを示す。(ⅰ)を使えば，

（3.4）の左辺

$$=\lim_{j\to\infty}\sum_{x_m\in E_j}\sum_k\mathbb{P}_{\mu_j}\{Y_{\tau_k+m}=x_m,\ Y_{\tau_k+m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ Y_{\tau_k+n}=x_n,$$
$$\tau_{k-1}=\infty,\ 0\leqq\tau_k+m<\infty\}+\sum_k\mathbb{P}_\mu\{Y_{\tau_k+m+1}=x_{m+1},\ \cdots,\ Y_{\tau_k+n}=x_n,$$
$$\tau_{k-1}=\infty,\ \tau_k+m+1=0\}$$

$$=\lim_j\sum_k\sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}_{\mu_j}\{\tau_k+m+1=i,\ Y_i=x_{m+1},\ Y_{i+1}=x_{m+2},\ \cdots,\ Y_{i+n-m-1}=x_n,$$
$$\tau_{k-1}=\infty\}-(*)$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$=\mathcal{P}\{X_{m+1}=x_{m+1}, X_{m+2}=x_{m+2}, \cdots, X_n=x_n\}-(*)$,

とおいたとき(*)＝0をいえばよい。

$(*)=\lim_j \sum_k \sum_{x_m \notin E_j} \sum_{i\geqq 0} \mathcal{P}_{\mu_j}\{Y_i=x_m, \cdots, Y_{i+n-m}=x_n, \tau_{k-1}=\infty, \tau_k+m=i\}$

$x_{m+1}\in E_N$ なるNをとると，kについての和はNまででよいから，

$$(*)\leqq \lim_j \sum_{k=1}^{N} \sum_{x_m \notin E_j} \sum_{i\geqq 0} \mathcal{P}_{\mu_j}\{Y_i=x_m, \cdots, Y_{i+n-m}=x_n\}$$

$$=\lim_j \sum_{k=1}^{N} \sum_{x_m \notin E_j} \sum_{i\geqq 0} \mu_j P^i(x_m) P(x_m, x_{m+1}) \cdots P(x_{n-1}, x_n)$$

$$=\sum_{k=1}^{N} \lim_j \sum_{x_m \notin E_j} \mu_j G(x_m) P(x_m, x_{m+1}) \cdots P(x_{n-1}, x_n)$$

（定理2.1(b)より，$\mu_j G\leqq \eta$ だから）

$$\leqq \sum_{k=1}^{N} \lim_j \sum_{x_m \notin E_j} \eta(x_m) P(x_m, x_{m+1}) \cdots P(x_{n-1}, x_n)$$

$$=0 \qquad (\because \eta P(x_{m+1})\leqq \eta(x_{m+1})).$$

(iii) 互に素な（3.2），（3.3）の形の集合の和に対する測度は，そのおのおのの測度の和として定義する。

$m<n$を固定したとき，$\{\omega\in\Omega; X_m=x_m, X_{m+1}=x_{m+1}, \cdots, X_n=x_n\}$，$(x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n \in S\cup\{\Delta_{-\infty}\}\cup\{\Delta_{+\infty}\}$，かつ$x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n$ の少くとも1つはSに属する）なる形の集合の可算和として表わせる集合の全体$B_{m,n}$ はσ－環であり，$\bigcup_{m,n} B_{m,n}$ は環である。$\mathcal{P}$は$B_{m,n}$上のσ－有限な測度で，$\bigvee_{m,n} B_{m,n}=B$ だから(ii)を使うと，Kolmogorov の拡張定理によって，$\mathcal{P}$ はB上のσ－有限な測度に一意に拡張される。

それを再び，$\mathcal{P}$と書くことにする。

(iv) 任意の有限集合Eに対して，$\mathcal{P}\{\sigma^E=-\infty\}=0$.

但し，σ^Eは (X, α, β) のEへのhitting time.

$$\mathcal{P}\{\sigma^E=-\infty\}=\lim_{n\to\infty}\mathcal{P}\{X_{-i}\in E;\ ^{\exists}i\geqq n\}$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$=\lim_{n}\sum_{i=n}^{\infty} P\{X_{-i}\in E,\ X_{-i+1}\notin E,\ \cdots,\ X_{-n}\notin E\}$$

$$=\lim_{n}\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{k} P_{\mu^E}\{Y_{\tau_k-i}\in E, Y_{\tau_k-i+1}\notin E,\ \cdots,\ Y_{\tau_k-n}\notin E, \tau_{k-1}=\infty, 0\leqq\tau_k-i<\infty\}$$

Eが有限集合だから，$E\subseteqq E_N$ なる番号Nが存在する。このとき，kについての和はNまででよい。また，$i\geqq n$のとき，$\{\tau_k-i\geqq 0\}\subseteqq\{\tau_k-n\geqq 0\}$だから，

$$P\{\sigma^E=-\infty\}\leqq\lim_{n}\sum_{k=1}^{N} P_{\mu^E}\{Y_{\tau_k-i}\in E\ ;\ {}^{\exists}i\geqq n,\ \tau_{k-1}=\infty,\ n\leqq\tau_k<\infty\}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\lim_{n} P_{\mu^E}\{\tau_{k-1}=\infty,\ n\leqq\tau_k<\infty\}$$

$$=0\ .$$

(V)　(X,α,β) は有限集合Eへのhitting time σ^EによりP－chainにreduceされる。

即ち，任意の有限集合Eと$x_0\in E$, $x_1,\ \cdots,\ x_n\in S$に対して，

$$P\{X_{\sigma^E}=x_0,\ X_{\sigma^E+1}=x_1,\cdots,X_{\sigma^E+n}=x_n,\ |\sigma^E|<\infty\}$$
$$=P\{X_{\sigma^E}=x_0, X_{\sigma^E+1}=x_1,\cdots,X_{\sigma^E+n-1}=x_{n-1}, |\sigma^E|<\infty\}P(x_{n-1},x_n)\ . \tag{3.6}$$

一般の場合も全く同様だから，$n=2$として証明する。また，ある番号Nに対して$E=E_N$の場合にいえば十分である。このとき$\sigma^E=\sigma^{E_N}=\sigma_N$とおく。

（3.6）の左辺を2つに分けて，

（3.6）の左辺$=P\{\alpha=-\infty,\ X_{\sigma_N}=x_0,\ X_{\sigma_N+1}=x_1,\ X_{\sigma_N+2}=x_2,\ |\sigma_N|<\infty\}$

$+P\{\alpha>-\infty,\ X_{\sigma_N}=x_0,\ X_{\sigma_N+1}=x_1,\ X_{\sigma_N+2}=x_2,\ |\sigma_N|<\infty\}$

$=(\mathrm{I})+(\mathrm{II})$,

とおく。

$$(\mathrm{II})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}P\{\alpha=-n-m, X_{-n-m}\notin E_N,\ \cdots,\ X_{-n-1}\notin E_N, X_{-n}=x_0, X_{-n+1}=x_1,$$
$$X_{-n+2}=x_2\}$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m\geq 0}\sum_{k=1}^{N}P_{\mu}\{Y_0\notin E_N,\ Y_1\notin E_N,\cdots,Y_{m-1}\notin E_N,Y_m=x_0,Y_{m+1}=x_1,Y_{m+2}=x_2,$$
$$\tau_{k-1}=\infty,\ \tau_k=n+m\}.$$

上式の｛・｝に属するωに対しては，τ_k $(=n+m)\geq\tau_N=m$だから，nについての和は非負のところだけでよい。

故にMarkov 性より，

$$(\mathrm{II})=\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}\sum_{k=1}^{N}P_{\mu}\{Y_0\notin E_N,\cdots,Y_{m-1}\notin E_N,Y_m=x_0\}P_{x_0}\{Y_1=x_1,Y_2=x_2,\tau_{k-1}=\infty,$$
$$\tau_k=n\}.$$

$$=\sum_{m\geq 0}P_{\mu}\{\tau_N=m,\ Y_m=x_0\}P(x_0,x_1)P(x_1,x_2)$$

故に，

(3.7) $(\mathrm{II})=\mu H^{E_N}(x_0)P(x_0,x_1)P(x_1,x_2)$

もとにもどせば，

(3.8) $(\mathrm{II})=P\{\alpha>-\infty,\ X_{\sigma_N}=x_0,X_{\sigma_N+1}=x_1,\ |\sigma_N|<\infty\}P(x_1,x_2)$

次に，

$$(\mathrm{I})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lim_{m\to+\infty}P\{\alpha\leq-n-m,\ X_{-n-m}\notin E_N,\cdots,X_{-n-1}\notin E_N,\ X_{-n}=x_0,$$
$$X_{-n+1}=x_1,\ X_{-n+2}=x_2\}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lim_{m}\ \lim_{j}\sum_{k=1}^{N}P_{\mu_j}\{Y_{\tau_k-n-m}\notin E_N,\cdots,Y_{\tau_k-n-1}\notin E,\ Y_{\tau_k-n}=x_0,$$
$$Y_{\tau_k-n+1}=x_1,\ Y_{\tau_k-n+2}=x_2,\ \tau_{k-1}=\infty,\ n+m\leq\tau_k<\infty\}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lim_{m}\ \lim_{j}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i\geq 0}[P_{\mu_j}\{\tau_N\leq i,\ Y_i\notin E_N,\cdots,Y_{i+m-1}\notin E_N,\ Y_{i+m}=x_0,$$
$$Y_{i+m+1}=x_1,\ Y_{i+m+2}=x_2,\ \tau_{k-1}=\infty,\ \tau_k=i+n+m\}$$
$$+P_{\mu_j}\{\tau_N>i,\ Y_i\notin E_N,\cdots,Y_{i+m-1}\notin E_N,\ Y_{i+m}=x_0,\ Y_{i+m+1}=x_1,$$
$$Y_{i+m+2}=x_2,\ \tau_{k-1}=\infty,\ \tau_k=i+n+m\}]$$

$=(\mathrm{III})+(\mathrm{IV})$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

とおく。

(Ⅲ)＝0を示す。

(Ⅲ)においては，各nに対してmを十分大きくとると，$\tau_k \geqq j$，このとき，$\tau_k(=j+n+m) \geqq j+n$

だからnについての和は非負のところだけでよい。

$$(\text{Ⅲ}) = \sum_{n\geqq 0} \lim_m \lim_j \sum_{k=1}^{N} \sum_{i\geqq 0} \sum_{\ell=0}^{i} \sum_{x\in E_N} P_{\mu_j}\{\tau_N=\ell, Y_\ell = x\} \sum_{y \notin E_N} P_x\{\tau_k \geqq i-\ell,$$

$$Y_{i-\ell}=y\} \times P_y\{Y_1 \notin E, \cdots, Y_{m-1} \notin E, Y_m = x_0\} P_{x_0}\{Y_1=x_1, Y_2=x_2,$$

$$\tau_{k-1}=\infty, \tau_k=n\}$$

$$\leqq \lim_m \lim_j \sum_{i\geqq 0} \sum_{\ell=0}^{i} \sum_{x\in E_N} \sum_{y\notin E_N} P_{\mu_j}\{\tau_N=\ell, Y_\ell=x\} P^{i-\ell}(x,y) P^m(y,x_0)$$

$$P(x_0, x_1)\, P(x_1, x_2)$$

（i，ℓについての和を交換すると）

$$\leqq \lim_m \lim_j \sum_{x\in E_N} P_{\mu_j}\{Y_{\tau_N}=x\} GP^m(x, x_0)\, P(x_0, x_1)\, P(x_1, x_2)$$

$$= \lim_m \sum_{x\in E_N} \mu_N(x)\, (GP^m)(x, x_0)\, P(x_0, x_1)\, P(x_1, x_2)$$

（xについての和は有限個でPは transient だから）

$=0$．

故に，

$$(\text{Ⅰ}) = (\text{Ⅳ}) = \sum_{n\geqq 0} \lim_m \lim_j \sum_{k=1}^{N} \sum_{i\geqq 0} P_{\mu_j}\{\tau_N=i+m, Y_{i+m}=x_0\} P_{x_0}\{Y_1=x_1, Y_2=x_2,$$

$$\tau_{k-1}=\infty, \tau_k=n\}$$

$$= \lim_m \lim_j \sum_{i\geqq 0} P_{\mu_j}\{\tau_N=i+m, Y_{i+m}=x_0\}\, P(x_0, x_1)\, P(x_1, x_2)$$

$$= \lim_m \lim_j \left[P_{\mu_j}\{Y_{\tau_N}=x_0, \tau_N<\infty\} - \sum_{i=0}^{m-1} P_{\mu_j}\{Y_{\tau_N}=x_0, \tau_N=i\} \right]$$

$$P(x_0, x_1)\, P(x_1, x_2)$$

（定理2.1(⊖)より）

$$= \left[\mu_N(x_0) - \sum_{i=0}^{\infty} \lim_j P_{\mu_j}\{Y_{\tau_N}=x_0, \tau_N=i\} \right] P(x_0, x_1)\, P(x_1, x_2) .$$

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

$$\mu_j \leqq \eta \text{かつ}, \ \mathbb{P}_{\mu_j}\{ Y_{\tau_N} = x_0, \ \tau_N = i \ \} \leqq \mu_j P^i(x_0) \leqq \eta P^i(x_0),$$

及び$\mu_j \to \mu$なる事よりLebesgue の定理を使えば，

(3.9)　$(\mathrm{I}) = [\mu_N(x_0) - \mu H^{E_N}(x_0)] \ P(x_0, x_1) P(x_1, x_2)$.

元にもどせば，

(3.10)　$(\mathrm{I}) = \mathbb{P}\{\alpha = -\infty, \ X_{\sigma_N} = x_0, \ X_{\sigma_N+1} = x_1, \ |\sigma_N| < \infty\} P(x_1, x_2)$.

(3.8)，(3.10) より (V) がいえた。

以上より，(X, α, β) は approximate P－chain であることがわかった。

(VI)　$\eta(x) = \mathbb{E}[\sum_{\alpha \leqq n \leqq \beta} I_{\{x\}}(X_n)]$ をみたす．

任意のxを固定したとき，xを含む有限集合E_Nをとると，

$$\mathbb{E}[\sum_{\alpha \leqq n \leqq \beta} I_{\{x\}}(X_n)] = \mathbb{E}[\sum_{\sigma_N \leqq n \leqq \beta} I_{\{x\}}(X_n) \ ; \ |\sigma_N| < \infty]$$

$$= \sum_{n \geqq 0} \mathbb{P}\{X_{\sigma_N+n} = x, \ |\sigma_N| < \infty, \ \alpha = -\infty\} + \sum_{n \geqq 0} \mathcal{O}\{X_{\sigma_N+n} = x, \ |\sigma_N| < \infty, \ \alpha > -\infty\}$$

((3.7)，(3.9) より)

$$= \sum_{n \geqq 0} \sum_{y \in E_N} [\mu_N(y) - \mu H^{E_N}(y)] \ P^n(y, x) + \sum_{n \geqq 0} \sum_{y \in E_N} \mu H^{E_N}(y) P^n(y, x)$$

$= \mu_N G(x)$　(定理2.1(b)より)

$= \eta(x)$.　　　　(終)

§4. Reversed chain.

この節では，Martin exit 境界の議論をする場合必要になってくるreversed chain に関する結果を証明しておく。

補題4.1.　(X, α, β) をapproximate P－chainとし，$\eta(x) = \mathbb{E}[\sum_{\alpha \leqq n \leqq \beta} I_{\{x\}}(X_n)]$ とおくとき，$\eta < +\infty$ならば，ηはexcessive 測度である。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

証明　$\{E_j\}_{j\geqq 1}$ をSに増加する有限集合の列とし，$X\sigma_j$ の分布を μ_j とすると定理2.1系より，$\eta=\lim_j \mu_j G$ だから，Fatou の補題より，

$$\eta P(x)=\sum_y(\lim_j \mu_j G)(y)P(y,x)\leqq \lim_j\inf\sum_j \mu_j G(y)P(y,x)$$

$$\leqq \lim_j \mu_j G(x)=\eta(x).$$ （終）

次に η を excessive 測度とするとき，

(4.1)　$$Q(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\eta(y)}{\eta(x)}P(y,x) & (\eta(x)>0\text{のとき})\\ 0 & (\eta(x)=0\text{のとき})\end{cases},$$

とおけば，Qは明らかに transition function である。

定理4.1.　(X,α,β) をHuntの意味のapproximate P-chain（Ⅲ-4頁の注1を見よ）とし，$\eta(x)=\mathbb{E}[\sum_{\alpha\leqq n\leqq\beta} I_{\{x\}}(X_n)]$ とおき，$\eta<+\infty$ とする。$\tilde{\alpha}(\omega)=-\beta(\omega)$，$\tilde{\beta}(\omega)=-\alpha(\omega)$，$\tilde{\alpha}(\omega)\leqq n\leqq\tilde{\beta}(\omega)$ なる整数 n に対して，$\tilde{X}_n(\omega)=X_{-n}(\omega)$ とおくと，$(\tilde{X},\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ は我々の意味で approximate Q-chain である。$(\tilde{X},\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ を (X,α,β) の reversed chain という。

証明　Eを有限集合，$(\tilde{X},\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ のEへの hitting time を $\tilde{\sigma}^E$ とし，$\gamma^E=-\tilde{\sigma}^E$ とおいて，γ^E を (X,α,β) のEからの last exit time とよぶ。

証明を3つの段階に分けて行う。

(1)　$\mathbb{P}\{\tilde{\sigma}^E=-\infty\}=0$ である。

(X,α,β) がHuntの意味で approximate P-chain だから α に減少する random time の列 $\{\alpha_n\}_{n\geqq 1}$ が存在し，各 α_n は (X,α,β) をP-chain $(X^{(n)},0,\beta_n)$ に reduce する。$(X^{(n)},0,\beta_n)$ のEからの last exit time を γ_n^E とする。

$\alpha_n<+\infty$，$\alpha_n\leqq\gamma^E$ である限り，$\gamma^E=\alpha_n+\gamma_n^E$ だから，

$$\mathbb{P}\{\gamma^E=\infty\}=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{\alpha_n+\gamma_n^E=\infty,\ \alpha_n<+\infty\}$$

（$X\alpha_n$ の分布を μ_n とすると）

$=\lim_{n\to\infty} P_{\mu_n}\{\gamma_n^E=\infty\}$ （$(X^{(n)}, 0, \beta_n)$ は transient だから）

$=0$.

(ii) $x_0, x_1, \cdots, x_j$ をSの元としたとき，

$\Lambda=\{\omega;\ X_{\gamma^E}=x_0, X_{\gamma^E-1}=x_1, \cdots, X_{\gamma^E-j}=x_j, |\gamma^E|<\infty\}$，とおけば

(4.2) $\quad P\{\Lambda\}=\eta(x_j)P(x_j,x_{j-1})\cdots P(x_1,x_0)L(x_0)$，

である。但し，

$$L(x)=\begin{cases}0 & (x\notin E\text{のとき})\\ P_x\{Y_n\notin E,\ \forall n>0\} & (x\in E\text{のとき}).\end{cases}$$

初めに $\alpha=0$，即ち (X,α,β) がP－chain $(X,0,\beta)$，であるとする。このとき $X_0(\cdot)$ の分布を μ とすれば，$\eta=\mu G$ である。

$\Lambda_m=\{\gamma^E=m\}\cap\Lambda$ とおくと，$\Lambda=\bigcup_{m\geq j}\Lambda_m$ と書ける。

$P\{\Lambda_m\}=\mu P^{m-j}(x_j)P(x_j,x_{j-1})\cdots P(x_1,x_0)L(x_0)$，

だから m について加えると，Λ_m は互に素であるから，

$$P\{\Lambda\}=(\mu G)(x_j)P(x_j,x_{j-1})\cdots P(x_1,x_0)L(x_0)$$
$$=\eta(x_j)P(x_j,x_{j-1})\cdots P(x_1,x_0)L(x_0).$$

故に（4.2）がなりたつ．

次に一般の場合，(i)の記号を使って，

$\eta_n(x)=\mathbb{E}\left[\sum_{0\leq k\leq\beta_n} I_{\{x\}}(X_k^{(n)})\right]$，

$\Lambda^{(n)}=\{\omega;\ X^{(n)}_{\gamma_n^E}=x_0, X^{(n)}_{\gamma_n^E-1}=x_1, \cdots, X^{(n)}_{\gamma_n^E-j}=x_j, |\gamma_n^E|<\infty\}$，

とおけば，上に示したことより，

(4.3) $\quad P\{\Lambda^{(n)}\}=\eta_n(x_j)P(x_j,x_{j-1})\cdots P(x_1,x_0)L(x_0)$.

$\alpha_n\downarrow\alpha$ だから n を十分大きくとると，$\alpha_n\leq\gamma^E$.

故に，$\gamma^E(\omega)<+\infty$ なる ω に対しては n を十分大きくとれば，$\gamma^E=\alpha_n+\gamma_n^E$，また(i)より $P\{\gamma^E=+\infty\}=0$ だから，$\lim_{n\to\infty}P\{\Lambda^{(n)}\}=P\{\Lambda\}$．また，$\eta_n\uparrow\eta$ だから，（4.3）に

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

おいて，$n\to\infty$とすれば（4.2）が得られる。

(iii) $\tilde{\sigma}^{E}$は$(\tilde{X},\ \tilde{\alpha},\ \tilde{\beta})$をQ－chain に reduce する。

$$\mathrm{P}\{\tilde{X}_{\tilde{\sigma}^E}=x_0,\ \tilde{X}_{\tilde{\sigma}^E+1}=x_1,\ \cdots,\ \tilde{X}_{\tilde{\sigma}^E+j}=x_j,\ |\tilde{\sigma}^E|<\infty\}$$

$$=\mathrm{P}\{X_{\gamma^E}=x_0,\ X_{\gamma^E-1}=x_1,\ \cdots,\ X_{\gamma^E-j}=x_j,\ |\gamma^E|<\infty\}$$

$$=\eta(x_j)\,P(x_j,\ x_{j-1})\cdots P(x_1,\ x_0)\,L(x_0)$$

$$=Q(x_{j-1},\ x_j)\{\eta(x_{j-1})\,P(x_{j-1},\ x_{j-2})\cdots P(x_1,\ x_0)\,L(x_0)\}$$

$$=Q(x_{j-1},\ x_j)\,\mathrm{P}\{\tilde{X}_{\tilde{\sigma}^E}=x_0,\ \tilde{X}_{\tilde{\sigma}^E+1}=x_1,\ \cdots,\ \tilde{X}_{\tilde{\sigma}^E+j-1}=x_{j-1},\ |\tilde{\sigma}^E|<\infty\}$$

（終）

注意． 定理4.1を使えば，$(X,\ \alpha,\ \beta)$がHunt の意味でapproximate P-chain であるとき，$(X,\ \alpha,\ \beta)$を$(\tilde{X},\ \tilde{\alpha},\ \tilde{\beta})$のreversed chain と考えると，$(X,\ \alpha,\ \beta)$は我々の意味でapproximate P-chain であることがわかる。

Sem. on Probab.
Vol.28 1968年
P1-109

文　献

〔1〕 J.L.Doob:Discrete potential theory and boundaries., J.Math. and Mech. 8, 433-458 (1959).

〔2〕 G.A.Hunt: Markov chains and Martin boundaries., Illinois J. Math., 4, 313-340 (1960).

〔3〕 J.G. Kemeny and J.L.Snell: Boundary theory for recurrent Markov chains., Trans. Amer. Math. Soc., 106, 495-520 (1963).

〔4〕 J.G. Kemeny, J.L.Snell and A.W. Knapp: Denumerable Markov chains., Princeton, N.J., D.Van Nostrand Co., Inc., 1966.

〔5〕 P.A. Meyer: Probability and potentials., Blaisdell Co., 1966.

〔6〕 S. Orey: Potential kernels for recurrent Markov chains., J.Math. Anal. and Appl., 8, 104-132 (1964).

〔7〕 T. Watanabe: On the theory of Martin boundaries induced by countable Markov processes., Mem. Coll. Science, Univ. Kyoto. 33, 39-108 (1960).

〔8〕 渡辺毅：可附番空間のMarkov過程から導びかれるMartin境界., Semi. on Prob. vol.1.