Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 19

田 中 洋. 長谷川 実

確 率 微 分 方 程 式

1 9 6 4

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

まえがき

マルコフ過程 x_t に対して Lévy はその differential δx_t を t と x_t とによってきまるある加法過程の differential に等しいと考えて確率微分方程式を得た。その後伊藤氏[15]により，確率微分方程式は Brown 運動更には加法過程をもとにし新しいマルコフ過程の path を構成する方法となった。マルコフ過程の構成法としてはこのほかに time change や multiplicative functional 等による変換の方法がある。これらは変換可能なマルコフ過程のクラスの中では一般的な議論が出来るがそのクラスは制限されている。確率微分方程式を用いて構成出来るマルコフ過程のクラスは一般的ではあるが普通は係数の滑らかさに関する條件がなくては議論出来ない。このノートでは係数の滑らかさの程度に注意しながら，Brown 運動をもとにしたときの確率微分方程式を取扱う。１章では確率積分，微分についてのべる。２章で伊藤氏の結果および係数が parameter を含む場合や充分滑らかな場合の Blagoveščensky-Freidlin [1] の結果をのべる。３章では係数が単に連続の場合の解の存在について Skorokhod の研究[32]についてのべる。この場合には一般には解の一意でなく，マルコフ過程にならないような解も存在し得る。一般に係数が連続だけのときマルコフ過程になるような解の存在をたしかめることは出来ていない。尚係数がある種の不連続性をもつ場合にも Girsanov の研究[10]がある。４章は drift の変換で，この部分では係数の滑らかさは影響しない。主に multiplicative functional の一般的な形についてのべた。以上のほかに，一般の確率積分に関しては本尾・渡辺信三氏の研究，Courrége [3] があり，境界條件を考慮した場合には池田氏[13]，Skorokhod [31] 等があるが，ふれることが出来なかった。

校正その他で九州大学の確率論セミナーの諸氏に大いにお世話になった。深く感謝の意を表したい。

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

目次

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

凡　例

定理の番号には章の番号はつけない．定理3.2というときは同じ章の§3の2番目の定理である．他の章の定理を引用するときはその章を明示する。式の番号，引用についても同じである．

４章の§2－§5においてのみ*Brown*運動 ξ_t は函数空間の上で表わしたものとし Ω のかわりにWとかく．その他のところでは１章と同じである。

集合Aへの*hitting time* σ_A とかく．

４章の§2－§5においてしばしばDで*additive*, *excessive*, ポテンシャル等の言い方をするが，それは ξ_t を σ_{D^c} で殺して出来るマルコフ過程についての意味とする．

２つの*additive functionals* が集合$B(\subset R^d)$の上で一致するということは $t<\sigma_{B^c}$ において一致するという意味である。

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

確 率 微 分 方 程 式

1 章　確率積分と確率微分

§1 確 率 積 分

この節では，始めに一般な確率積分の定義を述べ，次にこれから導かれる基本的な性質を挙げることにする。主として *Meyer* の論文[24,25], *Doob*; *Stochastic Processes* [4]と *Itô*; *Tata Note on Stochastic Processes* [18]よりまとめた。

1.1. *Supermartingale*

○ *supermartingale* の定義

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を基礎の確率空間とする. 即ち Ω はある集合, $\mathcal{B}$ は Ω の部分集合から成る *Borel field*, P は $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率測度とする。

実数値確率過程 $\{x_t, t \geqq 0\}$ が *supermartingale* であるとは

(i)　$E\{|x_t|\} < +\infty \qquad (t \geqq 0)$,

(ii)　*Borel field* $\mathcal{F}_t$ $(\subset \mathcal{B})$ が存在して

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \qquad (s < t) ,$$

(iii)　x_t は $\mathcal{F}_t$ に関して可測　$(t \geqq 0)$,

(iv)　$E\{x_t | \mathcal{F}_s\} \leqq x_s \quad a.e. \quad (s < t)$.

以上の4条件を満すことである。(iv) において，時に等号が成り立つとき，この $\{x_t, t \geqq 0\}$ は *martingale* であるという。

注意　$\mathcal{B}$ は P に関して *completion* されているとし，また $\mathcal{F}_t$ は P 測度 0 の $\mathcal{B}$ 集合を全て含むとする。以下 $\mathcal{F}_t$ は確率過程 $\{x_t\}$ によらずに固定しておく。

○ *potential* の定義

非負，右連続な *supermartingale* $\{x_t, t \geqq 0\}$ が

$$\lim_{t\to\infty} x_t = 0 \qquad a.e.$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

を満すとき，$potential$ であるという。

補題1.1 $\{x_t, t \geqq 0\}$ が右連続な $supermartingale$ であるとする．このとき，(iv) は

(iv′) $E\{x_t \mid \mathcal{F}_{s+}\} \leqq x_s$ a.e. $(s < t)$

と置き換えることが出来る．

証明 $s_n \downarrow s$ を満す任意の列 $\{s_n\}$ をとる．(iv) より，$s_n < s+t$ に対して

$$\int_A x_{s+t}\, dP \leqq \int_A x_{s_n}\, dP \qquad (A \in \mathcal{F}_{s+})$$

ここで $sample$ が右連続であるから，$x_{s_n} \to x_s$，しかも（Doob; [ ] Theorem 4.2S p.329）によって，x_{s_n} は uniformly integrable in n であるから，積分と極限操作が交換出来て

$$\int_A x_{s+t}\, dP \leqq \int_A x_s\, dP \qquad (A \in \mathcal{F}_{s+})$$

（証明終）

この補題1により，$sample$ が右連続な $supermartingale$ $\{x_t, \mathcal{F}_t, t \geqq 0\}$ を問題にするとき，必要ならば，$\{x_t, \mathcal{F}_{t+}, t \geqq 0\}$ で置き換えて取り扱うことにする。

補題1.2 $\{x_t, t \geqq 0\}$ を，$E\{x_t\}$ が t-右連続な $supermartingale$ とする．このとき，右連続な $supermartingale$ $\{y_t, t \geqq 0\}$ が存在して

$$P\{x_t \neq y_t\} = 0 \qquad (t \geqq 0)$$

を満たす．$\{y_t\}$ を $\{x_t\}$ の右連続な $version$ という。

証明

$$y_t(\omega) = x_{t+}(\omega) = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s:\text{有理数}}} x_s(\omega) \qquad \text{if } \omega \in \Omega_t$$

$$= 0 \qquad \text{if } \omega \notin \Omega_t$$

$$\Omega_t = \{\omega : \lim_{s \downarrow t\ s:\text{有理数}} x_s(\omega) \text{ が存在する}\}$$

とおく．このとき，$P\{\Omega_t^c\} = 0$ (*)．$\{y_t, \mathcal{F}_{t+}, t \geqq 0\}$ を考えると，$supermartingale$ となるための条件 (i), (ii), (iii) は容易に示すことが出来る．しかも補題1.1の証明と同様に

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$\int_A y_t\, dP = \lim_{s \downarrow t} \int_A x_s\, dP \leqq \int_A x_t\, dP \qquad (A \in \mathcal{F}_t) \qquad (**)$$

が成り立つから，$\{y_t, \mathcal{F}_{t+}, t \geqq 0\}$ は右連続な supermartingale である．ここで (*), (**) に（Doob; [ ] Theorem 4.2S, p. 329）を使った．次に (**) において任意の $t \geqq 0$ に対して $A = (x_{t+} > x_t)$ とおくと

$$y_t \leqq x_t \quad a.e. \quad (t \geqq 0)$$

を得る．ここで等号が成り立つことは，$E\{x_t\}$ が右連続なことに注意すればよい．

（証明終）

○ Stopping time の定義

Ω 上の非負な確率変数 $\sigma(\omega)$ が任意の $t \geqq 0$ に対して

$$\{\sigma(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t$$

を満たすとき，$\sigma(\omega)$ を stopping time という。集合族 $\mathcal{F}_\sigma$ を

$$\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{B}\{A;\ A \in \mathcal{B},\ A \cap (\sigma < t) \in \mathcal{F}_t \ (t \geqq 0)\}$$

と定義する．ここで $\mathcal{B}\{A; -\}$ は (−) を満たす A 全体の作る Borel field を表わす．また，$x_\sigma(\omega)$ を

$$\begin{aligned} x_\sigma(\omega) &= x_{\sigma(\omega)}(\omega) && \omega \in \{\sigma(\omega) < +\infty\} \\ &= \infty && \omega \in \{\sigma(\omega) = +\infty\} \end{aligned}$$

と定義する。

○ (D) 級の supermartingale

右連続な supermartingale $\{x_t, t \geqq 0\}$ が，ある $0 \leqq t_0 \leqq \infty$ に対して uniformly integrable in $t \in [0, t_0]$ とする．

$$\mathfrak{M}_{t_0} = \{\sigma;\ \sigma \text{ は stopping time } \ \sigma \leqq t_0\}$$

とおくとき

$$\{x_\sigma\} \text{ は uniformly integrable in } \sigma \in \mathfrak{M}_{t_0}$$

を満たすならば，$\{x_t, t \geqq 0\}$ は $[0, t_0]$ 上で (D) 級であるという。$\{x_t, t \geqq 0\}$ が，任意の $t < \infty$ に対して $[0, t]$ 上で (D) 級であるとき，locally に (D) 級であるという。$t_0 = \infty$ と取れるとき，単に (D) 級であるという。

1.2. 右連続な supermartingale に対する構成定理

○ 右連続 increasing 過程の定義

確率過程 $\{\varphi_t, t \geqq 0\}$ が次の条件を満たすとき，右連続 increasing 過程

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

であるという．

i) $\varphi_t(\omega)$ は $\mathcal{F}_t$ 可測 $(t \geqq 0)$

ii) $\varphi_0(\omega) = 0$ a.e.

iii) a.a.ω に対して，$\varphi_t(\omega)$ は t 函数として，非負，非減少，右連続な函数である．

いま，$\varphi_\infty(\omega) = \lim_{t\to\infty} \varphi_t(\omega)$ とおくとき，もし，

$$E\{\varphi_\infty(\omega)\} < +\infty$$

が成り立つならば，この右連続 *increasing* 過程 $\{\varphi_t, t \geqq 0\}$ は *integrable* であるという。

右連続 *increasing* 過程 $\{\varphi_t, t \geqq 0\}$ に対して，明らかに $\{-\varphi_t, t \geqq 0\}$ は *locally* に (D) 級の負 *supermartingale* になる。しかも *integrable* であれば (D) 級になる。

いま，$\{\varphi_t, t \geqq 0\}$ を *integrable* な右連続 *increasing* 過程とする。$[E\{\varphi_\infty | \mathcal{F}_t\}, t \geqq 0]$ は *martingale* となるから；

$$[E\{\varphi_\infty | \mathcal{F}_t\} - \varphi_t, \ t \geqq 0]$$

は，(D) 級の *potential* である．これを $\{\varphi_t, t \geqq 0\}$ から生成される *potential* という．

定理 1.1 (*Meyer*) *potential* $\{x_t\}$ が (D) 級となるための条件は $\{x_t\}$ が適当な *integrable* な右連続 *increasing* 過程で生成されることである。

証明 十分性は上に述べた．以下必要性を証明する。任意の正定数 k に対して

$$\tilde{x}_t^k = E\{x_{t+k} | \mathcal{F}_t\}$$

と $\{\tilde{x}_t^k\}$ を定義すると，これが *potential* であることは，

$$\tilde{x}_t^k \leq x_t \qquad a.e.$$

$$\begin{aligned} E\{\tilde{x}_{t+s}^k | \mathcal{F}_t\} &= E\{E\{x_{t+s+k} | \mathcal{F}_{t+s}\} | \mathcal{F}_t\} \\ &= E\{x_{t+s+k} | \mathcal{F}_t\} \\ &= E\{E\{x_{t+s+k} | \mathcal{F}_{t+k}\} | \mathcal{F}_t\} \\ &\leqq E\{x_{t+k} | \mathcal{F}_t\} = \tilde{x}_t^k \qquad a.e. \end{aligned}$$

より出る．ここで $E\{\tilde{x}_t^k\} = E\{x_{t+k}\}$ が t-右連続であるから，補題 2より $\{\tilde{x}_t^k\}$ に対する右連続な *version* が存在する。これを $p_k x_t$ と書くことにする。

自然数 n に対して

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$y_t^n(\omega) = n(x_t(\omega) - p_{\frac{1}{n}} x_t(\omega))$$

と定義する。$\{y_t^n,\ t \geqq 0\}$ は非負な$\mathcal{B}$可測函数であって，

$$y_t^n \text{ は } \mathcal{F}_t \text{ に関して可測} \qquad (t \geqq 0)$$

を満している。次に

$$\varphi_t(y^n, \omega) = \int_0^t y_s^n(\omega)\, ds$$

と定義すると，$\{\varphi_t(y^n),\ t \geqq 0\}$は右連続*increasing*過程であり，しかも*integrable*であることが，$\{x_t\}$が*potential*であることを使って，判る。この $\{\varphi_t(y^n)\}$ から生成される*potential* $\{z_t(y^n, \omega),\ t \geqq 0\}$

$$z_t(y^n, \omega) = E\{\varphi_\infty(y^n, \omega) - \varphi_t(y^n, \omega) \mid \mathcal{F}_t\}$$

が，$\{x_t\}$ で押えられ，しかも $n \to \infty$ のとき，下から x_t に L^1-*norm* の意味で近附くことを示す。$t < s$ に対して

$$\begin{aligned}
& z_t(y^n, \omega) - z_s(y^n, \omega) \\
&= E\{\varphi_s(y^n, \omega) - \varphi_t(y^n, \omega) \mid \mathcal{F}_t\} \\
&= E\{n\int_t^s (x_u(\omega) - p_{\frac{1}{n}} x_u(\omega))\, du \mid \mathcal{F}_t\} \\
&= E\{n\int_t^s (x_u(\omega) - E\{x_{u+\frac{1}{n}}(\omega) \mid \mathcal{F}_u\})\, du \mid \mathcal{F}_t\} \\
&= E\{n\int_t^s (x_u(\omega) - x_{u+\frac{1}{n}}(\omega))\, du \mid \mathcal{F}_t\} \\
&= E\{n\int_t^{t+\frac{1}{n}} x_u(\omega)\, du \mid \mathcal{F}_t\} - E\{n\int_s^{s+\frac{1}{n}} x_u(\omega)\, du \mid \mathcal{F}_t\}.
\end{aligned}$$

ここで $E\{n\int_s^{s+\frac{1}{n}} x_u(\omega)\, du \mid \mathcal{F}_t\} \geqq 0$ と

$$E\{E\{n\int_s^{s+\frac{1}{n}} x_u(\omega)\, du \mid \mathcal{F}_t\}\} \leqq E\{n\int_s^{s+\frac{1}{n}} x_u\, du\} = E\{x_s\} \underset{(s\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

とに注意すれば

$$z_t(y^n, \omega) = E\{n\int_t^{t+\frac{1}{n}} x_u(\omega)\, du \mid \mathcal{F}_t\} \leq x_t(\omega) \qquad a.e.$$

しかも $x_t(\omega)$ の右連続性を用いて，左辺は L^1-*norm* の意味で $x_t(\omega)$ に収束する。

$$z_t(y^n, \omega) = \{\varphi_\infty(y^n, \omega) \mid \mathcal{F}_t\} - \varphi_t(y^n, \omega)$$

において，次に用意する補題3によって，$\varphi_t(y^n)$が nに関して*uniformly integrable* になることを使って，次の補題14によって証明が終る。

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

<u>補題1.3</u> $\{x_t\}$を(D)級のpotentialとする。いま，非負な確率過程$\{y_t\}$が，条件

i) y_tは$\mathcal{F}_t$に関して可測　　　　$(t \geqq 0)$

ii) 次の様にして$\{y_t\}$から作られる右連続increasing過程$\{\varphi_t(y)\}$がintegrable

$$\varphi_t(\omega) = \int_0^t y_s(\omega)\,ds$$

iii) この$\{\varphi_t(y,\omega)\}$から生成されるpotential$\{z_t(y,\omega)\}$が上から$\{x_t\}$で押えられる，

を満たすならば，任意の$t \geqq 0$に対して，確率変数$\{\varphi_t(y,\omega)\}$はuniformly integrable in yを満たす。

<u>補題1.4</u> $\{x_t\}$を右連続なsupermartingaleとする。いま，$\{x_t^n\}$が右連続なsupermartingaleの列で，次のように分解されているとする。

$$x_t^n = y_t^n - \varphi_t^n$$

ここで$\{y_t^n\}$はmartingale，$\{\varphi_t^n\}$は右連続increasing過程である。この$\{x_t^n\}$が

$$\lim_{n\to\infty} E\{|x_t^n(\omega) - x_t(\omega)|\} = 0 \qquad (t \geqq 0)$$

φ_t^nがuniformly integrable in n

を満たすとするならば，$\{y_t\}$なるmartingaleと$\{\varphi_t\}$なる右連続increasing過程が存在して

$$x_t = y_t - \varphi_t$$

と書くことが出来る。

<u>補題1.3の証明</u> $\{\varphi_t(y)\}$の定義より，確率変数$\varphi_\infty(y,\omega)$がuniformly integrable in yであることを示せばよい。まず簡単な場合として，ある正定数cに対して

$$x_t(\omega) \leq c \qquad a.e. \qquad (t \geqq 0)$$

を満たす場合を考える。このとき

$$\varphi_\infty^2(y,\omega) = 2\int_0^\infty [\varphi_\infty(y,\omega) - \varphi_t(y,\omega)]\,d\varphi_t(y,\omega)$$

$$= 2\int_0^\infty [\varphi_\infty(y,\omega) - \varphi_t(y,\omega)]\,y_t(\omega)\,dt\,.$$

Fubiniの定理と次にy_tが$\mathcal{F}_t$可測であることを使うと

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$E\{\varphi_\infty^2(y,\omega)\} = 2\int_0^\infty E\{[\varphi_\infty(y,\omega)-\varphi_t(y,\omega)]\, y_t(\omega)\}\,dt$$
$$= 2\int_0^\infty E\{E\{\varphi_\infty(y,\omega)-\varphi_t(y,\omega)\,|\,\mathcal{F}_t\}\, y_t(\omega)\}\,dt$$
$$= 2\int_0^\infty E\{z_t(y,\omega)\, y_t(\omega)\}\,dt$$
$$\leq 2c\int_0^\infty E\{y_t(\omega)\}\,dt$$
$$= 2c\,E\{z_0(y,\omega)\} \leq 2c^2 .$$

ここで c は y と独立な定数であるから，任意の $t \geqq 0$ に対して，$\varphi_t(y,\omega)$ は *uniformly integrable in* y を満たす。従って，一般の場合には，条件 i)，ii)，iii) を満たす $\{y_t\}$ が以下のように分解出来ることを示せば，証明が終る．

$$y_t(\omega) = y_t^{(1,c)}(\omega) + y_t^{(2,c)}(\omega) .$$

ここで $y_t^{(i,c)}$ は条件 i)，ii)，iii) を満たす非負確率過程で，正定数 c に対して

$$\varphi_t(y^{(1,c)},\omega) \leq c \qquad a.e. \qquad (t \geqq 0)$$
$$E\{\varphi_\infty(y^{(2,c)},\omega)\} \leq \varepsilon_c \qquad a.e.,\qquad \varepsilon_c \text{ は } \{y_t\} \text{ と独立な定数}$$
$$\varepsilon_c \to 0 \quad as \quad c \to \infty$$

を満足する。これを示すために，正定数 c に対して

$$y_t^{(1,c)}(\omega) = y_t(\omega)\,x_t^c(\omega) \qquad x_t^c(\omega) = 1 \quad x_t(\omega) \leq c$$
$$\qquad\qquad = 0 \quad x_t(\omega) > c$$
$$y_t^{(2,c)}(\omega) = y_t(\omega) - y_t^{(1,c)}(\omega)$$

と定義する。まず $y_t^{(2,c)}(\omega)$ が上の条件を満たすことは，次のようにわかる。

x_t は *potential* 故

$$\sigma^c(\omega) = inf\,\{t;\ x_t(\omega) \geqq c\}$$

とおくと，σ^c は *stopping time* であって，$c \to \infty$ のとき，$\sigma^c(\omega) \to \infty$ a.e. が成り立つ故，$x_{\sigma^c} \to 0$ a.e.．よって $\{x_t\}$ が (D) 級であることを注意すれば

$$E\{x_{\sigma^c}\} \to 0 \quad as \quad c \to \infty .$$

よって（Doob; [4] p.366）によって

$$E\{\varphi_\infty(y^{(2,c)},\omega)\} = E\{\int_0^\infty y_t(\omega)\,[1-x_t^c(\omega)]\,dt\}$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$
\begin{aligned}
&\leqq E\{\int_{\sigma_c}^{\infty} y_t(\omega)\,dt\} \\
&= E\{\varphi_\infty(y,\omega)-\varphi_{\sigma_c}(y,\omega)\} \\
&= E\{E\{\varphi_\infty(y,\omega)-\varphi_{\sigma_c}(y,\omega)\mid \mathcal{F}_{\sigma_c}\}\} \\
&= E\{z_{\sigma_c}(y,\omega)\} \\
&\leqq E\{x_{\sigma_c}(\omega)\} \to 0 \qquad (c\to\infty)\ .
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
z_t(y^{(1,c)},\omega) &= E\{\varphi_\infty(y^{(1,c)},\omega)-\varphi_t(y^{(1,c)},\omega)\mid \mathcal{F}_t\} \qquad a.e. \\
&= E\{\int_t^\infty y_s(\omega)\,x_s^c(\omega)\,ds\mid \mathcal{F}_t\}\ .
\end{aligned}
$$

ここで

$$\sigma_c^t(\omega) = \inf\{s;\ s\geqq t,\ x_s(\omega)\leq c\}$$

と定義すると，σ_c^t は stopping time であって，$\{x_t\}$ の右連続性から $x_{\sigma_c^t}(\omega)\leqq c$. よって

$$
\begin{aligned}
z_t(y^{(1,c)},\omega) &\leqq E\{\int_{\sigma_c^t}^\infty y_s\,ds\mid \mathcal{F}_t\} = E\{E\{\int_{\sigma_c^t}^\infty y_s\,ds\mid \mathcal{F}_{\sigma_c^t}\}\mid \mathcal{F}_t\} \\
&= E\{z_{\sigma_c^t}\mid \mathcal{F}_t\}\leq c \qquad a.e.
\end{aligned}
$$

故に，任意の $t\geqq 0$ に対して $P(\Omega_t)=1$ を満たす $\Omega_t\in\mathcal{B}$ 上で $z_t(y^{(1,c)})\leq c$. これから，任意の有理数 $t_i\geqq 0$ に対して，$\Omega_1\in\mathcal{B}$，$P(\Omega_1)=1$ が存在して

$$z_{t_i}(y^{(1,c)})\leq c \qquad on\ \Omega_1\ .$$

z_t の右連続性から，任意の $t\geqq 0$ に対して

$$z_t(y^{(1,c)})\leq c \qquad a.e.$$

（証明終）

<u>補題14の証明</u>　φ_t^n が $L_1=\{x;\ x(\omega)$ は $\mathcal{B}$ 可測，$E\{|x(\omega)|\}<+\infty\}$ の中で n に関して uniformly integrable であるから，適当に部分列 $\{n_k(t)\}$ を選んで，ある $\varphi_t'\in L_1$ に対して

$$\lim_{k\to\infty} E\{\varphi_t^{(n_k)}f^*-\varphi_t' f^*\}=0 \qquad (f^*\in L=\{x;\ x(\omega)\ \text{は有界}\mathcal{B}\text{-可測}\})$$

を満たしている。この $\{n_k(t)\}$ に対して対角線論法を使うと，適当に部分列 $\{n_k\}$ を選んで

$$\lim_{k\to\infty} E\{\varphi_t^{(n_k)}f^*-\varphi_t' f^*\}=0 \qquad (f^*\in L),\ (t\geqq 0;\ \text{有理数})$$

とすることが出来る．任意の $t\geqq 0$ に対して，この φ_t' は $\mathcal{F}_t$ 可測であることを示す．そのために $x(\omega)\in L_1^+$ が $\mathcal{F}_t$ 可測であるための条件は，任意の $f^*\in L^+$,

☆ $\qquad E\{f^*\mid \mathcal{F}_t\}=0 \qquad a.e.$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

に対して

$$E\{xf^*\}=0$$

を満たすことであるのに注意する。必要性は，xが $\mathcal{F}_t$ 可測故

$$E\{xf^*\}=E\{xE\{f^*|\mathcal{F}_t\}\}=0$$

十分性は $g^*\in L$ に対し $f^*=g^*-E\{g^*|\mathcal{F}_t\}$ と置くと f^* は ✡ を満たすから

$$E\{xg^*\}=E\{xE\{g^*|\mathcal{F}_t\}\}$$
$$=E\{E\{x|\mathcal{F}_t\}E\{g^*|\mathcal{F}_t\}\}=E\{E\{x|\mathcal{F}_t\}g^*\},$$

$g^*\in L$ は任意であるから $x=E\{x|\mathcal{F}_t\}$ (a.e.), i.e., x は $\mathcal{F}_t$ 可測である。

この注意によって φ'_t は $\mathcal{F}_t$ 可測である。しかも，任意の有理数 $s<t$ に対して，

$$\varphi'_t(\omega)-\varphi'_s(\omega)\geqq 0 \qquad a.e.$$

を満たすことは，対応する

$$\int_B(\varphi_t^{n_k}-\varphi_s^{n_k})\,dP\geqq 0 \qquad (B\in\mathcal{B})$$

より，$k\to\infty$ として出る。

$x_t^n\to x_t$ in L_1-norm より $\{y'_t\}$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty}E\{y_t^{n_k}f^*-y'_tf^*\}=0 \qquad (f^*\in L)\ (t\geqq 0;\ 有理数)$$

が成り立ち，しかも $\{y'_t,\ t\geqq 0;有理数\}$ が martingale であることはわかる。よって補題2を用いて，右連続な martingale $\{y_t,\ t\geqq 0\}$ が存在して

$$y_t=y'_t \qquad a.e. \qquad (t\geqq 0;\ 有理数)$$

を満たす。更に任意の $t\geqq 0$ に対して

$$\varphi_t=x_t+y_t$$

と定義すると，$\{\varphi_t\}$ は右連続 increasing 過程になる（必要ならば，P-測度 0 の ω 集合の上で修正をする）。

定理1.1は次のように locally に (D) 級の右連続な supermartingale に対してまで拡張される。

<u>定理1.2 (Meyer)</u>　右連続な supermartingale $\{x_t\}$ が locally に (D) 級であるための条件は

$$x_t=y_t-\varphi_t$$

と書けることである。ここで $\{y_t\}$ は martingale，$\{\varphi_t\}$ は右連続 in-

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

creasing過程である.

証明　必要性は明らか。十分性を示す．自然数nに対して $\{x_t^n\}$ を次のように定義する．

$$x_t^n(\omega) = x_t(\omega) \qquad 0 \leq t \leq n$$
$$= x_n(\omega) \qquad n < t$$

この定義から $\{x_t^n\}$ は(D)級の右連続なsupermartingale となり，

$$x_t^n = E\{x_\infty^n \mid \mathcal{F}_t\} + (x_t^n - E\{x_\infty^n \mid \mathcal{F}_t\})$$

とおくと，$\tilde{x}_t^n - E\{x_\infty^n \mid \mathcal{F}_t\}$ は(D)級の右連続なpotentialとなって，定理1が使えて

$$x_t^n = y_t^n - \varphi_t^n$$

と書ける。ここで $\{y_t^n\}$ はmartingale; $\{\varphi_t^n\}$ は右連続increasing過程である。この表現において

$$\varphi_t^n = \int_0^t y_s^n ds = \int_0^t n(\tilde{x}_s - E\{\tilde{x}_{s+\frac{1}{n}} \mid \mathcal{F}_s\})ds$$

より，φ_t^n は $[0, t+\frac{1}{n}]$ 区間における x_t^n の値にのみ関係している。よって $n \to +\infty$ とするとき，φ_t^n は，問題とする区間 $[0, t]$ を越したnについては φ_t^n の値は変らない。よって補題1.4が使えて

$$x_t = y_t - \varphi_t$$

と書ける。ここで $\{y_t\}$ はmartingale, $\{\varphi_t\}$ は右連続increasing過程である．

（証明終）

次に1.3に必要な補題を用意しておく．

補題1.5　potential $\{y_t\}$ が(D)級であるための条件は，$\sigma_n \to \infty$ (a.e.)を満たす任意のstopping timeの列 $\{\sigma_n\}$に対して

$$\lim_{n\to\infty} E\{y_{\sigma_n}\} = 0$$

を満たすことである．

証明　必要性は明らか。十分性を証明するには

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\{y_\sigma > N\}} y_\sigma \, dP = 0 \qquad uniformly \ in \ \sigma \in \mathfrak{M}_\infty$$

を示せばよい。そのために

$$\sigma_n = \inf\{t;\ y_t \in [n, \infty]\}$$

を定義すると，σ_n はstopping timeであり，$\{y_t\}$ はt-有限区間では a.a.

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

ω について有界なことから

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty \qquad (a.e.)$$

従って

$$\lim_{n\to\infty} E\{y_{\sigma_n}\} = 0$$

が成り立っている。そこで stopping time σ_n' を

$$\begin{aligned} \sigma_n'(\omega) &= \infty \qquad && \text{if} \quad \sigma(\omega) < \sigma_n(\omega) \\ &= \sigma(\omega) && \text{if} \quad \sigma(\omega) \geqq \sigma_n(\omega) \end{aligned}$$

と定義して，$\sigma_n' \geqq \sigma_n$ に注意すると

$$\int_{\{y_\sigma > N\}} y_\sigma \, dP \leqq E\{y_{\sigma_N'}\} \leqq E\{y_{\sigma_N}\} \to 0 \qquad (N \to \infty)$$

（証明終）

1.3. ２乗可積分な martingale に対する確率積分

定理1.3（Meyer）　$\{x_t\}$ を $E\{x_t^2\} < +\infty$ を満たす martingale とする。このとき，右連続 increasing 過程 $\{\varphi_t\}$ を

$$E\{(x_t - x_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\} = E\{\varphi_t - \varphi_s \mid \mathcal{F}_s\} \qquad (s < t)$$

を満たすように取ることが出来る。

証明　この定理において

$$\sup_t E\{x_t^2\} < +\infty$$

と仮定しても，一般性を失わないことに注意する。何となれば，もし，ある $0 < a < +\infty$ に対して区間 $[0, a]$ で上の定理が解けたとする，即ち，右連続 increasing過程 $\{\tilde{\varphi}_t^0\}$ がとれて

$$E\{(x_t - x_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\} = E\{\tilde{\varphi}_t^0 - \tilde{\varphi}_s^0 \mid \mathcal{F}_s\} \qquad (0 \leqq s < t \leqq a)$$

を満たすとする。これから $[a, 2a]$ 上で同様に $\tilde{\varphi}_t^1, \cdots, [na, (n+1)a]$ 上で $\tilde{\varphi}_t^n$ を得る。

$$\begin{aligned} \varphi_t^n &= \tilde{\varphi}_t^n \qquad && t \in [na, (n+1)a] \\ &= \tilde{\varphi}_{(n+1)a}^n && t \in [(n+1)a, \infty) \end{aligned}$$

として，$\varphi_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_t^j$ と定義すれば，これが求める右連続 increasing 過程になる。よってある区間 $[0, a]$ で問題を論ずればよい。x_t の右連続性から，ある区間 $[0, a]$ が存在して，そこでは，$\sup_t E\{x_t^2\} < +\infty$ と仮定してよい。しかも時間を $[0, \infty]$ に1対1に対応させ得る。

$$y_t = E\{(x_\infty - x_t)^2 \mid \mathcal{F}_t\}$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

とおく．任意の $s<t$ に対して，$\{x_t\}$ の直交性から

$$E\{(x_\infty-x_s)^2|\mathcal{F}_t\}=E\{(x_\infty-x_t)^2|\mathcal{F}_t\}+E\{(x_t-x_s)^2|\mathcal{F}_t\}$$

よって条件附確率の性質により

$$E\{(x_\infty-x_s)^2|\mathcal{F}_u\}=E\{(x_\infty-x_t)^2|\mathcal{F}_u\}+E\{(x_t-x_s)^2|\mathcal{F}_u\} \quad (u<t)$$

この等式において $u=s$ とすれば

$$y_s=E\{(x_\infty-x_s)^2|\mathcal{F}_s\}\geqq E\{(x_\infty-x_t)^2|\mathcal{F}_s\}=E\{y_t|\mathcal{F}_s\}$$

故に $\{y_t\}$ は *supermartingale* である。しかも（Doob; [4] Theorem 4.2）によれば x_t は L^2-右連続であるから，$E\{y_t\}$ は右連続であって，補題2によって y_t の右連続な *version* が存在する。また（Doob; [4] Theorem 4.1.(iii)）によると，$\sigma_n\uparrow\infty$ (a.e.) なる *stopping time* の列 $\{\sigma_n\}$ に対して，$x_\infty-x_{\sigma_n}$ は 0 に L^2-収束するから，

$$E\{y_{\sigma_n}\}=E\{(x_\infty-x_{\sigma_n})^2\}\longrightarrow 0$$

よって，補題5が使えて，$\{y_t\}$ は (D) 級の *potential* になる。定理1.1によれば，右連続 *increasing* 過程 $\{\varphi_t\}$ が存在して $\{y_t\}$ を生成している，即ち

$$y_s=E\{(x_\infty-x_s)^2|\mathcal{F}_s\}=E\{\varphi_\infty-\varphi_s|\mathcal{F}_s\}$$

上と同称に x_t の直交性から

$$E\{(x_t-x_s)^2|\mathcal{F}_s\}=E\{\varphi_t-\varphi_s|\mathcal{F}_s\}$$

（証明終）

○ *Martingale* M 及び函数族 $\mathcal{L}_0(M)$ に対する確率積分

$M=\{x_t,\ t\geqq 0\}$ を，$E\{x_t^2\}<+\infty \quad (t\geqq 0)$ を満たす *martingale* とする．函数族 $\mathcal{L}_0(M)$ を任意の n，$a_1<a_2<\cdots<a_n$，$E\{f_{a_j}^2(\omega)\}<+\infty$ を満たす $\mathcal{F}_{a_j}$ 可測な確率変数 $f_{a_j}(\omega)$ に対して

$$\begin{aligned} f(t,\omega)&=0 && 0\leq t<a_1 \\ &=f_{a_j}(\omega) && a_j\leq t<a_{j+1} \qquad j\leq n-1 \\ &=0 && a_n\leq t \end{aligned}$$

という型の (t,ω) 函数の全体とする．まずこの $f\in\mathcal{L}_0(M)$ に対して，確率積分 $I(f,\omega)=\int_0^\infty f(t,\omega)\,dx_t$ を

$$I(f,\omega)=\sum_j f_{a_j}(\omega)\,[x(a_{j+1}-,\omega)-x(a_j,\omega)]$$

と定義する．即ち，積分 $I(f)$ を確率 1 で右辺に等しい確率変数とする．$f_j\in\mathcal{L}_0(M)$ の一次結合 f に対しても，f_j に対応する積分 $I(f_j)$ の一次結合として積分 $I(f)$ が対応する．次に $f\in\mathcal{L}_0(M)$ に対する $I(f)$ の L_2-*norm* を計算すると，

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$E\{(\int_0^\infty f(t,\omega)dx_t)^2\}=E\{\sum_j f_{a_j}^2 E\{[x(a_{j+1}-)-x(a_j)]^2|\mathcal{F}_{a_j}\}\}$$
$$=E\{\sum_j f_{a_j}^2 E\{\varphi(a_{j+1}-)-\varphi(a_j)|\mathcal{F}_{a_j}\}\}$$
$$=E\{\int_0^\infty f^2(t,\omega)d\varphi_t\}.$$

が成り立つ。函数族$\mathcal{L}_2(M)$を

$f(t,\omega)$ は (t,ω) 可測函数
$f(t,\cdot)$ は $\mathcal{F}_t$ 可測 $(t\geqq 0)$
$E\{\int_0^\infty f(t,\omega)^2 d\varphi_t\}<+\infty$

を満たす函数$f(t,\omega)$の集合とする。$\mathcal{L}_2(M)$上の$norm$ を $\|f\|_{\mathcal{L}_2(M)}=\left[E\{\int_0^\infty f(t)^2 d\varphi_t\}\right]^{\frac{1}{2}}$ で定める. $\mathcal{L}_0(M)$ に対する$I(f)$ の定義は

$$\bar{\mathcal{L}}_0(M)=\{f;\ f\text{ は }\mathcal{L}_0(M)\text{ 函数の}\|\ \|_{\mathcal{L}_2(M)}\text{極限函数}\}$$

にまで拡張される。いま, $f_n\in\mathcal{L}_0(M)$が $f_n\to f$ in $\|\ \|_{\mathcal{L}_2(M)}$を満たすとする。

$$\lim_{n,m\to\infty}\|f_m-f_n\|^2_{\mathcal{L}_2(M)}=\lim_{n,m\to\infty}\int_0^{+\infty}E\{|f_m(t,\omega)-f_n(t,\omega)|^2 g(t,\omega)\}dt=0$$

が成り立つから, $f\in\mathcal{L}_0(M)$)と$I(f)$ との対応は距離を保存することを使って

$$\lim_{n,m\to\infty}\|I(f_m)-I(f_n)\|_2^2=\lim_{n,m\to\infty}E\{|I(f_m)-I(f_n)|^2\}=0$$

が成り立つ。$\mathcal{L}_2(\Omega)$ の完備性によって $y\in\mathcal{L}_2(\Omega)$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty}\|I(f_n)-y\|_2=0$$

明らかに, この $y\in\mathcal{L}_2(\Omega)$はfにだけ関係して, f_n のとり方には無関係に確率0のΩ集合を除いて一意的に得られる。よって, $f\in\bar{\mathcal{L}}_0(M)$に対して, 確率積分$I(f)$ を, 上のようにして得られた

$$I(f,\omega)=y(\omega)$$

と定義する. 即ちこの$I(f)$ をyと確率1で等しい一つの確率変数として理解する.

$\bar{\mathcal{L}}_0(M)$が$\mathcal{L}_2(M)$の元であるような右連続な確率過程を含むことは, わかるが, これが$\mathcal{L}_2(M)$と一致するかどうかは未解決である。1.4からは M を比較的扱い易い形にして, いくつかの結果を述べる.

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

1.4. martingale M_d 及び函数族 $\mathcal{L}_2(M_d)$ に対する確率積分

以下の議論は主に Ito [18,19], Doob [4] による。

1.3.における M として次の M_d を考える. 即ち, $M_d=\{x_t,\ t\geqq 0\}$ は

(i) $E\{|x_t-x_s|^2\}<+\infty \qquad (s,t\geqq 0)$

を満たす martingale とし, しかも $dt\,dP$ 測度に関して可測な非負 (t,ω) 函数 $g(t,\omega)$ が存在して

(ii) $g(t,\omega)$ は $\mathcal{F}_t$ 可測 $\qquad (t\geqq 0)$

(iii) $E\{|x(t)-x(s)|^2|\mathcal{F}_s\}=E\{\int_s^t g(u,\omega)du\,|\,\mathcal{F}_s\}$ a.e.

が成りたつとする。これは定理3における φ_t として

$$\varphi_t(\omega)=\int_0^t g(u,\omega)\,du$$

を満たす右連続 increasing 過程が取れることを意味する。1.3.に於ける議論が $\mathcal{L}_0(M_d)$ に対してはそのまゝ適用される，(即ち$\mathcal{L}_0(M_d)=\mathcal{L}_0(M)$)。続いて $\mathcal{L}_2(M_d)$ は, $\mathcal{L}_2(M)$ と同様に

$f(t,\omega)$ は (t,ω) 可測函数

$f(t,\cdot)$ は $\mathcal{F}_t$ 可測 $\qquad (t\geqq 0)$

$E\{\int_0^\infty f(t,\omega)^2 g(t,\omega)dt\}<+\infty$

を満たす函数 $f(t,\omega)$ の集合とする。1.3 において残された問題 $\bar{\mathcal{L}}_2(M_d)\supset\mathcal{L}_2(M_d)$ 即ち確率積分 $I(f)$ が $\mathcal{L}_0(M_d)$ から $\mathcal{L}_2(M_d)$ の上にまで拡張されて定義し得ることを以下示すことにする。次の補題6は以下よく使われるので特に書き出しておく。

<u>補題1.6</u> $\varphi(\omega)$ が $\mathcal{F}_{t_0}$ に関して可測で, $\int_{t_0}^{t_2}E\{|\varphi(\omega)|g(u,\omega)\}du<+\infty$ ならば, 任意の $t_0\leq t_1<t_2$ に対して

i) $E\{|\varphi(\omega)||x_{t_2}-x_{t_1}|^2\}<+\infty$

ii) $E\{\varphi(\omega)(x_{t_2}-x_{t_1})\}=0$

iii) $E\{\varphi(\omega)|x_{t_2}-x_{t_1}|^2\}=\int_{t_1}^{t_2}E\{\varphi(\omega)g(u,\omega)\}du$

が成り立つ。

<u>証明</u> まず i) から ii), iii) を示す. Schwarz の不等式によって

$$E\{|\varphi(\omega)(x_{t_2}-x_{t_1})|^2\}\leqq E\{|\varphi(\omega)|\}\,E\{|\varphi(\omega)||x_{t_2}-x_{t_1}|^2\}<+\infty$$

$$E\{|x_{t_2}-x_{t_1}|\}\leqq E\{|x_{t_2}-x_{t_1}|^2\}^{1/2}<+\infty$$

によって, 条件附確率の定義から

$$E\{\varphi(\omega)[x(t_2)-x(t_1)]\}=E\{\varphi(\omega)E\{x(t_2)-x(t_1)|\mathcal{F}_{t_1}\}\}$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$= E\{\varphi(\omega) 0\} = 0 .$$

同様に

$$\begin{aligned} E\{\varphi(\omega)|x(t_2)-x(t_1)|^2\} &= E\{\varphi(\omega) E\{|x(t_2)-x(t_1)|^2 | \mathcal{F}_{t_1}\}\} \\ &= E\{\varphi(\omega) E\{\int_{t_1}^{t_2} g(u,\omega) du \mid \mathcal{F}_{t_1}\}\} \\ &= E\{E\{\int_{t_1}^{t_2} \varphi(\omega) g(u,\omega) du \mid \mathcal{F}_{t_1}\}\} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} E\{\varphi(\omega) g(u,\omega)\} du . \end{aligned}$$

次に i) を証明する。φの変形 φ_n を

$$\begin{aligned} \varphi_n(\omega) &= \varphi(\omega) & |\varphi(\omega)| &\le n \\ &= 0 & |\varphi(\omega)| &> n \end{aligned}$$

と定義する。 i) は φ_n に対しては成立しているので,

$$E\{|\varphi_n(\omega)||x(t_2)-x(t_1)|^2\} = \int_{t_1}^{t_2} E\{|\varphi_n(\omega)| g(u,\omega)\} du$$

ここで $n\to\infty$ とすると, *bounded convergence theorem* より i) を得る。

(証明終)

<u>定理 1.4</u> $\mathcal{L}_0(M_d)$ の $\|\ \|_{\mathcal{L}_2(M_d)}$ に関する closure を $\overline{\mathcal{L}}_0(M_d)$ と書くと

$$\overline{\mathcal{L}}_0(M_d) \supset \mathcal{L}_2(M_d)$$

<u>証明</u> まず, 任意の $f\in\mathcal{L}_2(M_d)$ に対して

$$\begin{aligned} f_n(t,\omega) &= f(t,\omega) & |f(t,\omega)| &\le n,\ t\in[a_n, b_n] \\ &= 0 & &\text{otherwise} \end{aligned}$$

但し $a_n\to 0$, $b_n\to\infty$ とすると, $f_n\to f$ in $\mathcal{L}_2(M_d)$ がわかる故, この条件を満たす $f_n\in\mathcal{L}_2(M_d)$ に対して, $f_n\in\overline{\mathcal{L}}_0(M_d)$ を示せば十分である。以下 $f\in\mathcal{L}_2(M_d)$ をこの型の函数と仮定する。このfに対しては

$$\int_{-\infty}^{\infty} E\{f(t,\omega)^2\} dt < +\infty$$

が成り立つことに注意する。いま, t 函数 $\alpha_n(t)$ を

$$\alpha_n(t) = j2^{-n} \qquad j2^{-n}\le t<(j+1)2^{-n} \qquad j=0,1,2,\cdots$$

で定義する。この $\alpha_n(t)$ によって, $f[\alpha_n(t-s)+s,\omega]$ なる $\mathcal{L}_0(M_d)$ 函数を考える。上の形の $f\in\mathcal{L}_2(M_d)$ に対して適当に s を選んで

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_f}^{b_f} E\{|f(t,\omega)-f[\alpha_n(t-s)+s,\omega]|^2\} dt = 0$$

を示す。

これを示すために, 一般に次のことが成り立つことに注意する。

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

fを有界Lebesgue可測な函数で，fのcarrierが有限区間とするならば

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+h)-f(s)|^2 ds = 0$$

何となれば，任意の$\varepsilon>0$に対して，εに関係したcarrierが有限区間な連続函数f_εが存在して，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(s)-f_\varepsilon(s)|^2 ds \leq \varepsilon^2$$

よってMinkowskiの不等式により

$$\limsup_{h\to 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+h)-f(s)|^2 ds\right]^{1/2}$$

$$\leq \limsup_{h\to 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f_\varepsilon(s+h)-f_\varepsilon(s)|^2 ds\right]^{1/2}+2\varepsilon = 2\varepsilon$$

より得る．fを$[a_f, b_f]$以外では0と$(-\infty,\infty)$に拡張しておく。この注意によって

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+h)-f(s)|^2 ds = 0 \qquad a.e.$$

がわかる。よって　任意のtに対して

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f[\alpha_n(t)+s]-f[t+s]|^2 ds = 0 \qquad a.e.$$

故に

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f[\alpha_n(t+s)]-f(t+s)|^2 ds\, dt\, dP = 0$$

よって，ある$s\in[a_f, b_f]$と部分列$\{n_j\}$が存在して

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\Omega}\int_{-\infty}^{\infty}|f[\alpha_{n_j}(t)+s]-f(t+s)|^2 dt\, dP$$

$$=\lim_{j\to\infty}\int_{\Omega}\int_{-\infty}^{\infty}|f[\alpha_{n_j}(t-s)+s]-f(t)|^2 dt\, dP = 0$$

fは$[a_f, b_f]$以外では0であるから，適当な$\alpha_n(t)$とsをとると

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b E\{|f[\alpha_n(t-s)+s]-f(t)|^2\}\, dt = 0$$

とすることが出来た．$f_n(t,\omega)=f[\alpha_n(t-s)+s,\omega]$とおく．$f_n$は$f$に$\mathcal{L}_2(dt\times dP)$-normの意味で収束しているから，$|f|$, $|f_n|\leq K$および$|f_n-f|^2 g\leq 4K^2 g$に注意するとbounded convergence theoremによって

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b E\{|f(t,\omega)-f_n(t,\omega)|^2 g(t,\omega)\}\,dt = 0$$

以上より　$\overline{\mathcal{L}}_0(\mathbb{M}_d) \supset \mathcal{L}_2(\mathbb{M}_d)$

（証明終）

1.5　$\mathbb{M}_d$, $\mathcal{L}_2(\mathbb{M}_d)$に対する確率積分から作られるmartingale

$\mathbb{M}_d$, $\mathcal{L}_2(\mathbb{M}_d)$に対して定義した積分を R^1上の Borel 集合Aに対する積分に一般化するには，被積分函数を A^c で 0とおいて，定義する。いま，$A=[0, t]$ として

$$I_f(t,\omega) = \int_0^t f(s,\omega)\,dx(s) \qquad t \geqq 0$$

について考える。$I_f(t,\cdot)$ は各 $t \geqq a$に対し，確率0のΩ集合を除いて一意的にきまるが，この自由性は，$I_f(t,\omega)$ を separable とみてよいことを示す。

<u>定理1.5</u>　　上に定義した $\{I_f(t,\omega),\ t \geqq 0\}$ は separable martingale となる。しかも　$x(t)$ の殆んどすべての sample 函数が連続ならば　$I_f(t)$ の殆んどすべての sample 函数が連続となる。

<u>証明</u>　　任意に $b>0$ を固定する。$f\in\mathcal{L}_2(\mathbb{M}_d)$に対し，$f_n\in\mathcal{L}_0(\mathbb{M}_d)$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t,\omega)-f_n(t,\omega)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{M}_d)} = 0$$

となることは定理４で示した。また，　$t\in[0, b]$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|I_{f_n}(t) - I_f(t)\|_2^2 \\
&\quad = E\{|I_{f_n}(t) - I_f(t)|^2\} \\
&\quad = \int_0^t E\{|f_n(s,\omega)-f(s,\omega)|^2 g(s,\omega)\}\,ds \\
&\quad \leqq \|f_n(s,\omega)-f(s,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{M}_d)} \to 0
\end{aligned}$$

故に

$$I_f(t) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ I_{f_n}(t)$$

しかし　$I_{f_n}(t)$ については，その定義の仕方から　任意の　$t<t_1$ に対して

$$E\{I_{f_n}(t_1)\,|\,\mathcal{F}_t\} = I_{f_n}(t) \qquad a.e.$$

が成り立つ。即ち

$$\int_\Lambda I_{f_n}(t)\,dP = \int_\Lambda I_{f_n}(t_1)\,dP \qquad (\Lambda\in\mathcal{F}_t)$$

ここで　$n\to\infty$　とすると

$$\int_\Lambda I_f(t)\,dP = \int_\Lambda I_f(t_1)\,dP \qquad (\Lambda\in\mathcal{F}_t)$$

即ち

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$E\{I_f(t_1)\mid \mathcal{F}_t\} = I_f(t) \qquad a.e.$$

が成り立つ故に $\{I_f(t),\ t \geqq 0\}$ は martingale である。

次に 連続性については $f \in \mathcal{L}_0(M_d)$ のときは $a_{j_0} \leqq t < a_{j_0+1}$ とし，$a_{j_0+1} = t$ と番号を変更すると

$$I_f(t,\omega) = \sum_{j=1}^{j_0} f_{a_j}(\omega)[x(a_{j+1}-,\omega) - x(a_j,\omega)]$$

より明らかに $I_f(t)$ の殆んどすべての sample 函数が連続である。以下 $t \in [0, b]$ なる有限区間について連続性を示すが，これで十分である。

$f \in \mathcal{L}_2(M_d)$ に対して $f_n \in \mathcal{L}_0(M_d)$ を

$$\| f(t,\omega) - f_n(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(M_d)} \leqq \frac{1}{n^4}$$

となるようにとり

$$I_{f_n}(t,\omega) = \int_0^t f_n(s,\omega)\,dx(s)$$

ときめる。

$$I_f(t) - I_{f_n}(t) = \int_0^t [f(t) - f_n(t)]\,dx(s)$$

より $I_f(t) - I_{f_n}(t)$ は前の議論から separable martingale となる。よって，Kolmogorov の不等式の拡張を使って

$$P\{\inf_{0\leq t\leq b} |I_f(t) - I_{f_n}(t)| \geq \frac{1}{n}\} \leq n^2 E\{|I_f(b) - I_{f_n}(b)|^2\}$$

$$\leqq \frac{1}{n^2}$$

よって Borel-Cantelli の補題が使えて，確率 1 で

$$|I_f(t) - I_{f_n}(t)| < \frac{1}{n} \qquad (0 \leqq t < b)$$

が十分大きな n に対して成り立つ。即ち，確率 1 で $I_f(t)$ は $I_{f_n}(t)$ に一様収束する。よって $I_f(t)$ は $t \in [0, b]$ で連続となる。

（証明終）

1.6. Brown 運動 $\mathbb{Z}$ と函数族 $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ に対する確率積分

○ Brown 運動 $\mathbb{Z}$ と函数族 $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ の定義

d 次元 Brown 運動 $\mathbb{Z}$ とは，次の4条件を満たす確率過程 $\mathbb{Z} = \{\xi_t, \mathcal{F}_t, t \geqq 0\}$ をいう。

i) $\xi(t,\omega) = [\xi^1(t,\omega), \xi^2(t,\omega), \cdots, \xi^d(t,\omega)]$ が t について連続で，$\xi(0,\omega) = 0$.

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

ii) 任意の $t \geqq 0$ に対して Borel field $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{B}$ が存在して

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \qquad (s < t)$$

かつ $\xi(t, \cdot)$ は $\mathcal{F}_t$ 可測函数 $\qquad (t \geqq 0)$

iii) $$E\{\xi(t,\omega) \mid \mathcal{F}_s\} = \xi(s,\omega) \qquad (s < t)$$

$$E\{(\xi_t^i - \xi_s^i)(\xi_t^j - \xi_s^j) \mid \mathcal{F}_s\} = \delta_{ij}(t-s) \qquad (s < t)$$

iv) $\mathcal{F}_{t_1}$ は $\{\xi_{t_2} - \xi_{t_1}\}$ と独立である。

1.4，1.5 における M_d を Brown 運動 $\mathbb{Z}$ で置き換えて，$\mathcal{L}_0(\mathbb{Z})$，$\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ に対する確率積分を得る（簡単のため $d=1$ とする。$d>1$ のときは各成分ごとに考える）が，更にこれよりも広い函数族 $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ を定義し，その上の確率積分を定義する。

i) $f(t,\omega)$ は (t,ω) 可測

ii) $f(t,\cdot)$ は $\mathcal{F}_t$ に関して可測 $\qquad (t \geqq 0)$

iii) $\int_0^{+\infty} |f(t,\omega)|^2 dt < +\infty \qquad a.e.$

を満たす (t, ω) 函数 $f(t,\omega)$ の全体を $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ と定義する。$\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ に norm $\| \ \|_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})}$ を

$$\|f(t,\omega)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})} = E\left\{ \frac{\sqrt{\int_0^t |f(t,\omega)|^2 dt}}{1+\sqrt{\int_0^t |f(t,\omega)|^2 dt}} \right\}$$

で定義すると，$\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ は Fréchet 空間となる。明らかに $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})} \to 0$ と $\int_0^\infty |f_n - f|^2 dt \to 0$ in probability とは同等で，また Schwarz の不等式より $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ に対しては

$$\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})} \leqq \|f\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})}$$

が成り立つ。

○ $\overline{\mathcal{L}}_0(\mathbb{Z}) \supset \mathcal{L}(\mathbb{Z})$

$\mathcal{L}_0(\mathbb{Z})$ に定義した確率積分を $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ に拡張するために まず $\mathcal{L}_0(\mathbb{Z})$ の $\| \ \|_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})}$ についての closure $\overline{\mathcal{L}}_0(\mathbb{Z})$ が $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ を含むことをいう。任意の $f \in \mathcal{L}(\mathbb{Z})$ に対して有界な $f_n \in \mathcal{L}(\mathbb{Z})$ が存在して $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})} \to 0$ と出来るから，有界な $f \in \mathcal{L}(\mathbb{Z})$ に対して $f_n \in \mathcal{L}_0(\mathbb{Z})$ が存在して，$\|f_n - f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})} \to 0$ を示せば十分である。有界な $f \in \mathcal{L}(\mathbb{Z})$ は $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ に入るから $f_n \in \mathcal{L}_0(\mathbb{Z})$ が存在して $\|f - f_n\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})} \to 0$ となる。

一方，Schwarz の不等式より

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$\|f_n-f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})} \leq \int_\Omega \sqrt{\int_0^\infty |f_n-f|^2 dt}\; dP \leq \sqrt{\int_\Omega \int_0^\infty |f_n-f|^2 dt\, dP} = \|f_n-f\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})}$$

よって $\bar{\mathcal{L}}_0(\mathbb{Z}) \supset \mathcal{L}(\mathbb{Z})$.

定理1.6　$S(\Omega)$ を$\mathcal{B}$可測函数の全体として

$$\|f\|_s = \int_\Omega \frac{|f(\omega)|}{1+|f(\omega)|}\; dP$$

なる $norm$ を入れると $S(\Omega)$ は $Fréchet$ 空間になっている。このとき

$$\|I_f(\infty,\omega)\|_S \leqq 4(\|f(t,\omega)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})}^{1/3}) \qquad (f\in\mathcal{L}(\mathbb{Z}))$$

が成り立つ。

証明　$f\in\mathcal{L}_0(\mathbb{Z})$ のとき証明すれば十分。

$$\begin{aligned} f(t,\omega) &= 0 && 0\leq t<a_1 \\ &= f_{a_j}(\omega) && a_j\leq t<a_{j+1} \qquad j\leq n-1 \\ &= 0 && a_n\leq t \end{aligned}$$

とする. $x_i = \xi(a_i+1)-\xi(a_i)$, $\delta_i = a_{i+1}-a_i$, $M=\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})}$ とおく。
このとき

$$P\left\{\int_0^\infty |f(t,\omega)|^2 dt > \varepsilon^2\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon} E\left\{\int_0^\infty |f(t,\omega)|^2 dt\right\}^{1/2} \leq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} M$$

いま

$$\chi_i^{(\varepsilon)}(\omega) = \begin{cases} 1 & \sum_{j=0}^{i} f_{a_j}^2(\omega)\,\delta_j \leq \varepsilon^2 \\ 0 & \sum_{j=0}^{i} f_{a_j}^2(\omega)\,\delta_j > \varepsilon^2 \end{cases}$$

とおくと, $\chi_i^{(\varepsilon)}$ は $\mathcal{F}_{a_i}$ 可測函数である. x_i は $\mathcal{F}_{a_i}$ と独立であるから

$$E\left\{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi_i^{(\varepsilon)} f_i x_i\right)^2\right\} = \sum_{i=0}^{n-1} E\left\{\chi_i^{(\varepsilon)^2} f_i^2\right\}\delta_i = E\left\{\sum_{i=0}^{n-1} \chi_i^{(\varepsilon)} f_i^2\, \delta_i\right\}$$

一方 $\chi_i^{(\varepsilon)}$ の定義より

$$\sum_{i=0}^{n-1} \chi_i^{(\varepsilon)} f_i^2 \delta_i \leq \varepsilon^2$$

故に

$$E\left\{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi_i^{(\varepsilon)} f_i x_i\right)^2\right\} \leq \varepsilon^2$$

以上より　任意の正数ηに対して

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$P\{|\sum_{i=0}^{n-1} \chi_i^{(\varepsilon)} f_i x_i| > \eta\} \leq \frac{\varepsilon^2}{\eta^2} .$$

いま $\int_0^{+\infty} f^2 dt = \sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 \delta_i \leq \varepsilon^2$ とすると $\chi_0^{(\varepsilon)} = \chi_1^{(\varepsilon)} = \cdots = \chi_{n-1}^{(\varepsilon)} = 1$ だから

$$\sum_{i=1}^{n-1} \chi_i^{(\varepsilon)} f_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} f_i x_i = I_f(\infty)$$

に注意すると

$$\begin{aligned} & P\{|I_f(\infty)| > \eta\} \\ &= P\{|I_f(\infty)| > \eta;\ I_f(\infty) = \sum_{i=1}^{n-1} \chi_i f_i x_i\} + P\{|I_f(\infty)| > \eta :\ I_f(\infty) \neq \sum_{i=1}^{n-1} \chi_i f_i x_i\} \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{\eta^2} + P\{\int_0^\infty f^2 dt > \varepsilon^2\} \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{\eta^2} + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} M \end{aligned}$$

が成り立つ。従って

$$\begin{aligned} \|I_f\|_S = \int \frac{|I_f|}{1+|I_f|} dP &= \int_{|I_f| \leq \eta} + \int_{|I_f| > \eta} \frac{|I_f|}{1+|I_f|} dP \\ &\leq \eta + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} M + \frac{\varepsilon^2}{\eta^2} \end{aligned}$$

ここで $\varepsilon = M^{2/3}$, $\eta = \varepsilon^{1/2}$ とおくと

$$\|I_f\|_S \leq 4 (\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})})^{1/3}$$

（証明終）

○ 函数族 $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ に対する確率積分

任意の $f \in \mathcal{L}(\mathbb{Z})$ に対して $f_n \in \mathcal{L}_0(\mathbb{Z})$ を選んで $\|f - f_n\|_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})} \to 0$ と出来ることは上に述べた。しかも上の定理6によって

$$\|I_{f_m} - I_{f_n}\|_S \leq 4(\|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})})^{1/3}$$

が成り立ち, $S(\Omega)$ は *Fréchet* 空間であるから $y \in S(\Omega)$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \|I_{f_n} - y\|_S = 0$$

即ち $I_{f_n} \to y$ *in probability* となる。この $y \in S(\Omega)$ は f にだけ関係して f_n のとり方には無関係に確率 0 の Ω 集合を除いて一意的に得られる。

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{Z})$ に対して 確率積分 I_f を 上の得られた

$$I_f(\omega) = y(\omega)$$

と定義する。定理15において 任意の $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ に対する $I_f(t)$ の殆んどす

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

べての sample 函数が連続になることを示した。Brown 運動 $\mathbb{Z}$ の場合，このことは $f\in\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ に対しても成り立つことが証明できる．例えば（Itô: Tata note [18] p.p. 182-185）を参照。このことから，任意の $f\in\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ に対して，確率積分 $I_f(t,\omega)$ として，その sample 函数が連続な version を取ることにする．

注意1　$f\in\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ とおくと $\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{Z})}\leqq\|f\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})}$ を使って 1.5 で述べた積分 I_f の定義とここで述べた I_f の定義は一致する．

注意2　積分の定義の仕方から，任意の $f,g\in\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ が $\Omega_1\in\mathcal{B}$ 上で一致するならば $I_f=I_g$ a.e. on Ω_1 が成り立つことがわかる。

注意3　σ を stopping time (i.e., $\{\sigma<t\}\in\mathcal{F}_t$, $^\forall t\geqq 0$) とし，$\chi(\sigma>s)$ を $(\sigma>s)$ の indicator とすると，$f\in\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ に対し

$$I_f(\sigma\wedge t,\omega)=\int_0^t f(s,\omega)\,\chi(\sigma>s)\,d\xi_s(\omega),\quad \text{a.e.}\quad (\text{注意2による}).$$

注意4　d 次元 Brown 運動 $\xi(t,\omega)=[\xi^1(t,\omega),\xi^2(t,\omega),\cdots,\xi^d(t,\omega)]$ と d 次元 vector $f(t,\omega)=[f^1(t,\omega),f^2(t,\omega),\cdots,f^d(t,\omega)]$, $f^i(t,\omega)\in\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ に対する確率積分は次のように定義する．

$$I_f(t,\omega)=\int_0^t f(s,\omega)\,d\xi(s)=\Big[\int_0^t f^1(s,\omega)\,d\xi^1(s),\ \int_0^t f^2(s,\omega)\,d\xi^2(s),\cdots,$$

$$\int_0^t f^d(s,\omega)\,d\xi^d(s)\Big]$$

f が matrix の場合も，同様に各要素で定義する。

§2 確率微分

$\mathbb{Z}=\{\xi_t,\mathcal{F}_t,t\geqq 0\}$ を d 次元 Brown 運動とする．いま，d 次元 vector $f(t,\omega)$

$$f(t,\omega)=[f^1(t,\omega),f^2(t,\omega),\cdots,f^d(t,\omega)]\ ,\quad f^i\in\mathcal{L}(\mathbb{Z})$$

と $g(t,\omega)\in\mathcal{L}_1(\mathbb{Z})$

$$\mathcal{L}_1(\mathbb{Z})=\Big\{f;\ \begin{array}{ll} f(s,\omega) \text{ は } (s,\omega) \text{ 可測函数} & \\ f(s,\omega) \text{ は } \mathcal{F}_s \text{ に関して可測} & (s\geqq 0) \\ \int_0^t|f(s,\omega)|\,ds<+\infty & \end{array}\Big\}$$

とに対して

$$x(t,\omega)=x(0,\omega)+\int_0^t f(s,\omega)\,d\xi(s)+\int_0^t g(s,\omega)\,ds$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

が成り立つとき

$$dx(t)=\sum_{k=1}^{d} f^k d\xi^k(t)+g\,dt$$

又は簡単に

$$dx(t)=f\,d\xi+g\,dt$$

と書く.

定理2.1 (Itô)　$(x^1, x^2, \cdots, x^n, t)$ 函数 $F(x^1, x^2, \cdots, x^n, t)$ が $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 函数として2回連続微分可能，t 函数として1回連続微分可能とする。d 次元 vector $f_i=(f_i^1, f_i^2, \cdots, f_i^d)$ $f_i^j\in\mathcal{L}(z)$ と $g_i\in\mathcal{L}_1(z)$ とに対して

$$dx^i(t)=f_i\,d\xi+g_i\,dt \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$y(t)=F(x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t), t)$$

とすれば

$$dy(t)=\sum_{i=1}^{n} F_i(x_t, t)\,(f_i\,d\xi_t+g_i\,dt)$$
$$+\frac{1}{2}\Big\{\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d} F_{ij}(x_t, t)\,f_i^k f_j^k+F_{n+1}(x_t, t)\Big\}dt$$

が成り立つ。ここで

$$F_i=\frac{\partial F}{\partial x^i}\quad(1\leq i\leq n),\quad F_{n+1}=\frac{\partial F}{\partial t},\quad F_{ij}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^i\partial x^j}\quad(i, j=1, 2, \cdots, n)$$

この証明は省略する。証明について　例えば(Itô: 確率論[19]p.p. 343－349)を参照。

注意　1.6におけるBrown運動 z の定義において　条件 iv) は他の3条件 i), ii), iii) より導くことが出来ることを，上の定理7を用いて示す。

証明　任意に $s\geqq 0$ を固定する。$t\geqq s$, $A\in\mathcal{F}_s$, $B\in\mathbb{B}(R^1)$ に対して

$$E\{\chi_A\,\chi_B(\xi_t^i-\xi_s^i)\}=P\{A\}\,E\{\chi_B(\xi_t^i-\xi_s^i)\}$$

を示せばよい。$g(t, \omega)=t$ とおいて補題6を使うと

$$E\{\chi_A|\xi_t^i-\xi_s^i|^2\}=P\{A\}(t-s)$$

一方

$$E\{|\xi_t^i-\xi_s^i|^2\}=t-s$$

より

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$E\{\chi_A f(\xi_t^2-\xi_s^2)\} = P\{A\} E\{f(\xi_t^2-\xi_s^2)\}$$

が $f=$定数, x, x^2 のとき成り立つ. 定理2.1によって $t>s$ に対して

$$f(\xi_t-\xi_s)=f(0)+\int_s^t f'(\xi_u-\xi_s)\,d\xi_u+\frac{1}{2}\int_s^t f''(\xi_u-\xi_s)\,du$$

より

$$E\{\chi_A f(\xi_t-\xi_s)\}=P\{A\}f(0)+E\left\{\int_s^t \chi_A f'(\xi_u-\xi_s)\,d\xi_u\right\}$$
$$+\frac{1}{2}E\left\{\int_s^t \chi_A f''(\xi_u-\xi_s)\,du\right\}$$

ここで fを4次の多項式とすると

$$\frac{1}{2}E\left\{\int_s^t \chi_A f''(\xi_u-\xi_s)du\right\}=\frac{1}{2}P(A)E\left\{\int_s^t f''(\xi_u-\xi_s)du\right\}$$

また 確率積分の定義から

$$E\left\{\int_s^t \chi_A f'(\xi_u-\xi_s)\,d\xi_u\right\}=0$$

よって

$$E\{\chi_A f(\xi_t-\xi_s)\}=P\{A\}\left[f(0)+\frac{1}{2}E\left\{\int_s^t f''(\xi_u-\xi_s)\,du\right\}\right]$$
$$=P\{A\}\,E\{f(\xi_t-\xi_s)\}$$

同様に f が一般の多項式の場合に

$$E\{\chi_A f(\xi_t-\xi_s)\}=P\{A\}\,E\{f(\xi_t-\xi_s)\}$$

が証明出来る。

あとは μを $\xi_t-\xi_s$ の分布とするとき $L_2(\mu)$ で多項式の全体は稠密であることに注意すればよい。

（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

２章　確率微分方程式

§1. 確率微分方程式

$\mathbb{Z}=(\xi_t, \mathcal{F}_t, t\in[0,T])$を$d$次元Brown運動とする。各要素が$(t,x)$可測な函数行列及び vector

$$A(t,x)=\begin{pmatrix} a_{11}(t,x) & \cdots & a_{1d}(t,x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{d1}(t,x) & \cdots & a_{dd}(t,x)\end{pmatrix} \quad B(t,x)=(b_1(t,x),\cdots,b_d(t,x))$$

を与えて，以下

$$(1.1)\qquad dx_t^i=\sum_j a_{ij}(t,x_t)\,d\xi_t^j+b_i(t,x_t)\,dt$$

又は簡単に

$$dx_t=A\,d\xi+B\,dt$$

なる確率微分方程式を考える。

任意の $0\leq s\leq T$ に対して W^s を $[s,T]$ から R^d への連続な射像の全体．$\mathbb{B}_t^s$ を $(x_u;\ s\leq u\leq t)$ から生成される最小の Borel field $\mathcal{B}[x_u;\ s\leq u\leq t]$ とする。特に W^0 を W，$\mathbb{B}_t^0$ を $\mathbb{B}_t$，$\mathbb{B}_T^0$ を $\widetilde{\mathbb{B}}$ と書く。

<u>定義</u>　確率過程 $\{x_t,\ t\in[s,T]\}$ が「x_s の初期分布が R^d 上の確率測度 μ であるような（1.1）の解である。」とは

a)　$\{x_t\}$が定義されている確率空間を含む確率空間$(\Omega,\mathcal{F},P)$と，その上のd次元Brown運動 $\mathbb{Z}=(\xi_t,\mathcal{F}_t,t\in[s,T])$が存在して

$$\{w;\ x_u(w)\in E\}\in\mathcal{F}_t \qquad (E\in\mathbb{B}(R^d),\ s\leq u\leq T)$$

が成り立ち

b)

$$x_t(\omega)=x_s(\omega)+\int_s^t A(u,x_u(\omega))\,d\xi_u(\omega)+\int_s^t B(u,x_u(\omega))\,du$$

を満たす。（よって x_t は確率1で連続）

c)　$P\{x_0(\omega)\in E\}=\mu(E) \qquad (E\in\mathbb{B}(R^d))$

が成立することである。

<u>定義</u>　上の定義において　特にμをR^dの一点xに対するδ-測度のときの（1.1）の解$\{x_t,\ t\in[s,T]\}$を$\{x_t^{s,x}\}$と書くことにする．ω函数としてこれを

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

函数空間の元で表わして考えるとき $(W^s,\ \mathbb{B}_T^s,\ P_{s,x})$ とおく。また

$$P(s,x,t,E)=P_{s,x}(x_t\in E) \qquad (s\le t\le T,\ E\in\mathbb{B}(R^d))$$

とおく。$P(s,x,t,E)$ が x に関して可測であり，任意の $s\le u\le t\le T$ に対して

$$P_{s,x}(x_u\in E\mid \mathbb{B}_t^s)=P(t,x_t,u,E) \quad a.e.\ P_{s,x} \quad (E\in\mathbb{B}(R^d))$$

が成り立つとき $\{x_t^{s,x}\}$ $(0\le s\le T,\ x\in R^d)$ を Markov 解であるという。

定理1.1（Itô）　係数 $A(t,x)=(a_{ij}(t,x))$, $B=(b_i(t,x))$ $(0\le t\le T,\ x\in R^d)$ が，$\|A\|^2=\sum_{i,j}|a_{ij}|^2$, $\|B\|^2=\sum_i|b_i|^2$ とおくとき 次の２条件

(B)　$\|A(t,x)\|,\ \|B(t,x)\|\le c_1(1+|x|)$ なる (t,x) に無関係な定数 c_1 が存在する

(L)　$\|A(t,x)-A(t,y)\|,\ \|B(t,x)-B(t,y)\|\le c_2|x-y|$ なる (t,x,y) に無関係な定数 c_2 が存在する

を満たすならば，ξ_t を d 次元 Brown 運動とするとき

$$dx_t=A\,d\xi+B\,dt \qquad x_{t_0}=x\in R^d$$

なる確率微分方程式は unique 解を持つ。この場合 $\mathbb{Z}_t^{t_0}=\{\xi_s-\xi_{t_0},\ t_0\le s\le t\}$ とおくと，この unique 解 $\{x_t^{t_0,x}\}$ は $f_{t_0,t}(x,\mathbb{Z}_t^{t_0})$ と書くことが出来る。

ここで $f_{t_0,t}(x,y)$ は (x,y) に関する Borel 函数である。

また，$x(\omega)$ を $\mathcal{F}_{t_0}$ 可測な任意の R^d 値確率変数とするとき

$$dx_t = A\,d\xi + B\,dt \qquad x_{t_0}=x$$

なる確率微分方程式も unique 解をもつ。この unique 解 x_t は

$$x_t=f_{t_0,t}(x(\omega),\ \mathbb{Z}_t^{t_0})$$

と表現出来て，しかも Markov 解となる。

証明　詳しい証明は（Itô：確率論 [19] p.p. 350-359）を参照することにして，ここではその大略を述べる。

i）逐次近似による解法

$x_0(t,\omega)$ を

(1)　(t,ω) 可測函数

(2)　各 t について $x(\omega)$ と $\mathbb{Z}_t^{t_0}$ との Borel 函数

(3)　t について連続

(4)　(t,ω) 函数として有界

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

を満たす任意の函数とする。$x \in R^d$ に対して

$$x_{n+1}(t)=x+\int_{t_0}^{t} A(s, x_n(s))\, d\xi_s+\int_{t_0}^{t} B(s, x_n(s))\, ds$$

と順次 x_n を定義する。x_n が (1) − (3) を満たすことは n に関する帰納法によってわかる。

$x_0(t)$ が有界であること及び (B) を使うと

$$E\{|x_1(t)|^2\} \leq const., \quad E\{|x_1(t)-x_0(t)|^2\} \leq c = const.$$

しかも (L) によって

$$E\{|x_2(t)-x_1(t)|^2\} \leq c_3 \int_{t_0}^{t} E\{|x_1(s)-x_0(s)|^2\}\, ds, \quad c_3=c^2(2+2(t-t_0))$$

同様に，n に関する帰納法によって

$$E\{|x_{n+1}(t)-x_n(t)|^2\} \leq \frac{(const. \cdot |t-t_0|)^n}{n!} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

ここで $\int_{t_0}^{t} A(s, x_{n-1}(s))\, d\xi_s$ が martingale であることと，$\int_{t_0}^{t} B(s, x_{n-1}(s))\, ds$ に Chebyshev の不等式を使って，確率1で

$$x_n(t, \omega) \to x(t, \omega) \qquad uniformly \ in \ t$$

を示すことが出来る。この収束が一様であることから $x(t)$ も (1) − (3) を満たし，x_n の収束を示した議論と同様に，$x(t)$ が方程式の解であることがわかる。

明らかに $x_n(t, \omega)=f_{t_0 t}^{n}(x, \mathbb{Z}_t^{t_0})$ 故，$x(t, \omega)=f_{t_0 t}(x, \mathbb{Z}_t^{t_0})$ と書ける。

ii) 一意性：証明を省略する。

iii) 初期条件を一般にする。$x(t, \omega)=f_{t_0 t}(x, \mathbb{Z}_t^{t_0})$ と書けることは i) で述べたが

$$F_{t_0 t}(x, \mathbb{Z}_t^{t_0})=x+\int_{t_0}^{t} A(s, f_{t_0 s}(x, \mathbb{Z}_s^{t_0}))\, d\xi_s+\int_{t_0}^{t} B(s, f_{t_0 s}(x, \mathbb{Z}_s^{t_0}))\, ds$$

とおくと，任意の $x \in R^d$ に対して

$$f_{t_0 t}(x, \mathbb{Z}_t^{t_0}) = F_{t_0 t}(x, \mathbb{Z}_t^{t_0}) \qquad a.e.$$

よって $x(\omega)$ を $\mathbb{Z}_t^{t_0}$ と独立にとると，Fubini の定理によって

$$f_{t_0 t}(x(\omega), \mathbb{Z}_t^{t_0}) = F_{t_0 t}(x(\omega), \mathbb{Z}_t^{t_0}) \qquad a.e.$$

これは，$f_{t_0 t}(x(\omega), \mathbb{Z}_t^{t_0})$ は $x_0(\omega)$ を初期値とする微分方程式の解であることを示す。

iv) Markov 解であること。

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

(32)

$$dx_t = A\,d\xi + B\,dt \qquad x_{t_0}(\omega) = x(\omega)$$

の解を x_t とおくと

$$x_t = f_{t_0 t}\,(x(\omega),\ Z_t^{t_0}) \qquad (*)$$

と書けているが，解が unique なことから

$$(*) = f_{ut}\,(x_u(\omega),\ Z_t^{t_0}) \qquad t_0 \leq u \leq t$$

よって　x_t は Markov 解である。

（証明終）

§2. Stopped process.

$a_{ij}(t,x)$, $b_i(t,x)$ は $0 \leq t < +\infty$, $x \in R^d$ に対し与えられ定理1.1における条件(B)，(L)を満たすとし，x_t を

(2.1)　$$dx_t = A\,d\xi + B\,dt, \quad x_0 = x \in R^d$$

の解とする．R^d の領域D（xを含む）に対し $\sigma = inf\{t \geqq 0 \mid x_t \notin D\}$ (*)，$y_t = x_{t\wedge\sigma}$ (stopped process) とすると　注意3（1章）により

(2.2)　$$dy_t = A\chi(\sigma > t)\,d\xi + B\chi(\sigma > t)\,dt, \quad y_0 = x$$

が成り立つ．ここで σ は y_t を用いて(*)と同様に定義されたものと考え(2.2)を y_t に関する確率微分方程式と見るとき，1°）(2.2)の解は unique である．実際に z_t も上の解とし　$\sigma' = inf\{t \geqq 0 \mid z_t \notin D\}$, $\bar\sigma = \sigma \wedge \sigma'$　と置くと

$$dy_t = A\chi(\bar\sigma > t)\,d\xi + B\chi(\bar\sigma > t)\,dt,\quad dz_t = A\chi(\bar\sigma > t)\,d\xi + B\chi(\bar\sigma > t)\,dt,\ t < \bar\sigma$$

が成り立つから(L)を用いて

$$E\{|y_{t\wedge\bar\sigma} - z_{t\wedge\bar\sigma}|^2\} \leqq const.\int_0^t E\{|y_{s\wedge\bar\sigma} - z_{s\wedge\bar\sigma}|^2\}\,ds$$

故に　$y_t = z_t$，$\sigma = \sigma'$ (a.e.)　を得る．

以上のことより次のことがわかる．

2°）係数 $a_{ij}(t,x)$, $b_j(t,x)$ および $a'_{ij}(t,x)$, $b'_i(t,x)$ は共に条件(B)，(L)を満たすとし R^d のある領域Dでこれらの係数は一致するとする。このとき(2.1)の解 x_t と，(2.1)におけるA，BをA′，B′でおきかえたときの解 x'_t とは，Dをはじめてでる時刻までは確率1で一致する。

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

3°) 定理1.1における条件(L)は局所的な Lipschitz 条件：各Nに対し定数c_Nがあって $|x|, |y| \leq N$ に対し

$$\|A(t,x)-A(t,y)\|, \ \|B(t,x)-B(t,y)\| \leq c_N |x-y|$$

でおきかえることが出来る。

§3. 係数が滑らかな場合．拡散方程式の解

§1でのべた Itô の確率微分方程式は，もともと拡散方程式

$$(3.1)\qquad -\frac{\partial u(s,t,x)}{\partial s} = \sum_{i,j} A_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 u(s,t,x)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_i B_i(s,x)\frac{\partial u(s,t,x)}{\partial x^i}$$

$$A_{ij}(s,x) = \frac{1}{2}\sum_k a_{ik}(s,x)\, a_{jk}(s,x), \quad B_i(s,x) = b_i(s,x)$$

からきまるマルコフ過程の確率論的な構成法である。したがって，確率微分方程式の解を用いて，方程式(3.1)の研究がある程度出来る．実際，係数が充分滑らかな場合には，(3.1)の初期値問題をこのような方法で取扱うことが出来る。そして，特に，係数が充分滑らかである限り，$\{A_{ij}(s,x)\}$ が退化していても初期値問題の解が存在することがいえる。このことを Blagoveščensky-Freidlin [1]にしたがってのべる。最初に基礎になる Kolmogorov の定理についてのべる。

補題3.1（Kolmogorov の定理）． Xを完備な距離空間とし，ρをその距離とする。R^mを time parameter space とし X の中の値をとる確率過程 $\{X_\alpha(\omega), \ \alpha\in R^m\}$ が与えられ，次の条件をみたすとする。

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \text{ある定数 } \gamma>0, \ \varepsilon>0, \ c>0 \text{ に対し} \\ E[\rho(X_\alpha(\omega), X_\beta(\omega))^\gamma] \leq c\,|\alpha-\beta|^{m+\varepsilon} \end{cases}$$

このとき $\{X_\alpha(\omega), \ \alpha\in R^m\}$ は確率1でαに関し連続であるような version $\{\widetilde{X}_\alpha(\omega), \ \alpha\in R^m\}$ をもち，任意の $\delta\ (0<\delta<\varepsilon/\gamma)$, $N<+\infty$ に対して

$$(3.3)\qquad P\Big[\lim_{h\downarrow 0} h^{-\delta} \sup_{\substack{|\alpha-\beta|\leq h \\ |\alpha|,|\beta|\leq N}} \rho(\widetilde{X}_\alpha(\omega), \widetilde{X}_\beta(\omega)) = 0\Big] = 1$$

が成り立つ。

証明 [39]の証明を引用する．$n, N = 1, 2, \cdots$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$R_{N,n}=\{\alpha\in R^m \mid \alpha$ の各座標は $k2^{-n}$ の形をしている；ただし

$k=0, \pm 1, \cdots, \pm 2^n N\}$,

$\Delta_{N,n}(\omega,h)=\max\limits_{\substack{|\alpha-\beta|\le h\\ \alpha,\beta\in R_{N,n}}} \rho(X_\alpha(\omega), X_\beta(\omega))$

とおく。2^{-n} の距離だけはなれている $R_{N,n}$ の２点が作る組（順序を考慮しない）の全体を $E(m)$ とすると，

$$\begin{cases} \# E(m) = \# E(m-1)(2^{n+1}N+1) + 2^{n+1}N(2^{n+1}N+1)^{m-1} \\ \# E(0) = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。これから $\# E(m) = 2^{n+1}mN(2^{n+1}N+1)^{m-1}$ を得る。故に

$$\begin{aligned}
&P\{\Delta_{N,n}(\omega, 2^{-n}) > K2^{-n\delta}\} \\
&\le \sum_{(\alpha,\beta)\in E(m)} P\{\rho(X_\alpha(\omega), X_\beta(\omega)) > K2^{-n\delta}\} \\
&\le \sum_{(\alpha,\beta)\in E(m)} K^{-\gamma}2^{n\delta\gamma} E[\rho(X_\alpha(\omega), X_\beta(\omega))^\gamma]
\end{aligned}$$

（Chebyshev の不等式）

$$\begin{aligned}
&\le \sum_{(\alpha,\beta)\in E(m)} cK^{-\gamma}2^{n\delta\gamma}2^{-n(m+\varepsilon)} \qquad ((3.2) \text{による}) \\
&= 2^{n+1}mN(2^{n+1}N+1)^{m-1}cK^{-\gamma}2^{n\delta\gamma}2^{-n(m+\varepsilon)} < const.\ 2^{-n(\varepsilon-\delta\gamma)},
\end{aligned}$$

但し $const.$ は m, N, γ だけに関係する。したがって $0<\delta<\varepsilon/\gamma$ であれば

$$\sum_n P\{\Delta_{N,n}(\omega, 2^{-n}) > K2^{-n\delta}\} < +\infty$$

故に Borel-Cantelli の補題によって

$$P\{\Delta_{N,n}(\omega, 2^{-n}) \le K2^{-n\delta},\ \forall n \ge {}^\exists n_0(\omega)\} = 1$$

ところが

$$\Delta_{N,n}(\omega, 2^{-k}) \le 2m\sum_{j=k}^{n} \Delta_{N,j}(\omega, 2^{-j}), \quad n \ge k$$

が成り立つから

$$(3.4) \qquad P\{\sup_{n\ge k} \Delta_{N,n}(\omega, 2^{-k}) = O(2^{-k\delta}),\ k\uparrow+\infty\} = 1$$

これより $X_\alpha(\omega)$ は $R_N = \bigcup\limits_n R_{N,n}$ の上で確率 1 で一様連続であることがわかる．故に

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$\tilde{X}_\alpha(\omega) = \lim_{\substack{\alpha_n \to \alpha \\ \alpha_n \in R_N}} X_{\alpha_n}(\omega)$, $X_\alpha(\omega)$ が R_N 上で一様連続になるような ω に対して,

= 任意に固定した X の点, その他のとき,

とおくと $\{\tilde{X}_\alpha, \alpha \in R^m\}$ は $\{X_\alpha, \alpha \in R^m\}$ の連続な version になっており, (3.3) は (3.4) より明らかである。

(証明終)

まず, 確率微分方程式の係数が parameter α をもつ場合を考える。

定理 3.1 (Blagoveščensky - Freidlin [1]). A を R^m の領域とし, 係数 $a_{ij}(\alpha, t, x)$, $b_i(\alpha, t, x)$ $(1 \le i, j \le d)$ は $\alpha \in A$, $0 \le t \le T$, $x \in R^d$ に対して定義されており, 次をみたすとする: α に無関係な正定数 c_1, c_2 に対して

$$(3.5)\quad \begin{cases} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(\alpha,t,x)^2 \le c_1(1+|x|^2), \quad \sum_{i=1}^{d} b_i(\alpha,t,x)^2 \le c_1(1+|x|^2), \\ \sum_{i,j=1}^{d} |a_{ij}(\alpha,t,x) - a_{ij}(\beta,t,y)|^2 \le c_2(|\alpha-\beta|^2 + |x-y|^2), \\ \sum_{i=1}^{d} |b_i(\alpha,t,x) - b_i(\beta,t,y)|^2 \le c_2(|\alpha-\beta|^2 + |x-y|^2) \end{cases}$$

このとき 初期値 $x_0(\alpha, \omega) \in R^d$ ($\mathcal{Z}_T^0$ と独立な確率ベクトル) を

$$(3.6)\quad \begin{cases} |x_0(\alpha,\omega) - x_0(\beta,\omega)| \le c(\omega)|\alpha-\beta| \\ P\{c(\omega) < +\infty\} = 1 \end{cases}$$

をみたすように与えると, $x_0(\alpha, \omega)$ を初期値とする確率微分方程式

$$(3.7)\quad dx_t^i = \sum_j a_{ij}(\alpha, t, x_t)\, d\xi_t^j + b_i(\alpha, t, x_t)\, dt$$

の解 $x_t(\alpha, \omega)$ ($\alpha \in A$, $0 \le t \le T$) に対して次のことが成り立つ。

1°) $c(\omega)$ が有界で, 各 $n = 1, 2, \cdots$ に対し $E[|x_0(\alpha)|^n]$ も $\alpha \in A$ につき有界であれば, ある定数 $L_n > 0$ に対し

$$E[|x_t(\alpha,\omega) - x_s(\beta,\omega)|^{2n}] \le L_n(|\alpha-\beta|^{2n} + |t-s|^n) .$$

2°) 解 $x_t(\alpha, \omega)$ は確率 1 で $(t, \alpha) \in [0, T] \times A$ につき連続になるように構成出来る。

補題 3.2 任意の有限区間 $[0, t]$ で可積分な函数 $f \ge 0$ が

$$f(t) \le A + B\int_0^t f(s)\, ds \quad (A,\ B \text{ は正定数})$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

をみたせば $f(t) \leq A\exp(Bt)$.

証明は *iteration* によるか，又は函数 $(A+\varepsilon)\exp(Bt)$ $(\varepsilon>0)$ と比較することによって容易に出来るから省略する。

次の2つの補題では，(3.5)，(3.6) および 1°) の仮定をおく。

<u>補題 3.3</u>　$n=1,2,\cdots$ に対し定数 $K_n>0$ があって

$$E[|x_t(\alpha,\omega)-x_t(\beta,\omega)|^{2n}] \leq K_n|\alpha-\beta|^{2n}.$$

<u>補題 3.4</u>　$n=1,2,\cdots$ に対し定数 $K_n'>0$ があって

$$E[|x_t(\alpha,\omega)-x_s(\alpha,\omega)|^{2n}] \leq K_n'|t-s|^{n}.$$

<u>補題 3.3 の証明</u>　α,β を固定して

$$\begin{cases} \bar{x}_t = x_t(\alpha,\omega)-x_t(\beta,\omega) \\ \bar{a}_{ij}(t) = a_{ij}(\alpha,t,x_t(\alpha))-a_{ij}(\beta,t,x_t(\beta)) \\ \bar{b}_i(t) = b_i(\alpha,t,x_t(\alpha))-b_i(\beta,t,x_t(\beta)) \end{cases}$$

とおく。明らかに

$$d\bar{x}_t^i = \sum_j \bar{a}_{ij}(t)\,d\xi_t^j + \bar{b}_i(t)\,dt$$

が成り立つ。$f(x)=|x|^{2n}$ $(\in C^2(R^d))$ とおき，f の1階，2階の偏導函数をそれぞれ f_i，f_{ij} とかくと

(3.8)　$$|f_i(x)| \leq const.\,|x|^{2n-1},\ |f_{ij}(x)| \leq const.\,|x|^{2n-2}.$$

確率積分に関する変換公式により

$$\begin{aligned} |\bar{x}_t|^{2n} = f(\bar{x}_t) = f(\bar{x}_0) &+ \int_0^t \sum_{i,k} f_i(\bar{x}_s)\,\bar{a}_{ik}(s)\,d\xi_s^k \\ &+ \int_0^t \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} f_{ij}(\bar{x}_s)\,\bar{a}_{ik}(s)\,\bar{a}_{jk}(s)\,ds \\ &+ \int_0^t \sum_i f_i(\bar{x}_s)\,\bar{b}_i(s)\,ds. \end{aligned}$$

任意の $N<+\infty$ に対し

$$\tau=\tau_N(\omega)=\inf\left\{t\geq 0 \,\Big|\, |\bar{x}_t|\geq N \text{ 又は } \left|\int_0^t \sum_{i,k} f_i(\bar{x}_s)\bar{a}_{ik}(s)\,d\xi_s^k\right|\geq N\right\}$$

とおき，$\chi_s(\omega)$ を $\{\tau>s\}$ の *indicator function* とすると，

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$|\bar{x}_{t\wedge\tau}|^{2n}=|\bar{x}_0|^{2n}+\int_0^t\sum_{i,k}f_i(\bar{x}_s)\,\bar{a}_{ik}(s)\,\chi_s(\omega)\,d\xi_s^k$$

$$+\int_0^t\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}f_{ij}(\bar{x}_s)\,\bar{a}_{ik}(s)\bar{a}_{jk}(s)\,\chi_s(\omega)\,ds$$

$$+\int_0^t\sum_i f_i(\bar{x}_s)\,\bar{b}_i(s)\,\chi_s(\omega)\,ds\,.$$

両辺の平均値をとると，(3.5)および(3.8)よりNに無関係な$const.$があって

$$E[|\bar{x}_{t\wedge\tau}|^{2n}]\leq E[|\bar{x}_0|^{2n}]$$

$$+const.\int_0^t E[|\bar{x}_{s\wedge\tau}|^{2n-2}(|\alpha-\beta|^2+|\bar{x}_{s\wedge\tau}|^2)]\,ds$$

$$+const.\int_0^t E[|\bar{x}_{s\wedge\tau}|^{2n-1}(|\alpha-\beta|+|\bar{x}_{s\wedge\tau}|)]\,ds\;.$$

ここで，(3.6)および 1°) の仮定を用い，更に不等式

$$|a|^{2n-1}|b|\leqq\frac{|a|^{2n}+|a|^{2n-2}|b|^2}{2}$$

に注意すると，

$$(3.9)\qquad E[|\bar{x}_{t\wedge\tau}|^{2n}]\leqq const.|\alpha-\beta|^{2n}+const.|\alpha-\beta|^2\int_0^t E[|\bar{x}_{s\wedge\tau}|^{2n-2}]\,ds$$

$$+const.\int_0^t E[|\bar{x}_{s\wedge\tau}|^{2n}]\,ds\quad(const.\text{ は }N\text{ に無関係}).$$

これより Nに無関係な定数K_nがあって

$$(3.10)\qquad E[|\bar{x}_{t\wedge\tau}|^{2n}]\leqq K_n|\alpha-\beta|^{2n},\qquad 0\leqq t\leqq T,$$

が成り立つことが次のようにして示される。まず $n=1$のときは，(3.9)と補題3.2により明らかで，一般には，$n-1$に対して(3.10)が成り立つとすると，(3.9)より

$$E[|\bar{x}_{t\wedge\tau}|^{2n}]\leqq const.|\alpha-\beta|^{2n}+const.\int_0^t E[|\bar{x}_{s\wedge\tau}|^{2n}]\,ds$$

であるから，やはり補題3.2によって(3.10)を得る。(3.10)において $N\uparrow+\infty$ とすると $\tau\uparrow+\infty$ であるから 補題3.3の結論を得る。

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

補題3.4の証明　まず $x_0(\alpha)=const.$ の場合を考える．$x_t=x_t(\alpha,\omega)$ とおくと，前と同じ函数 f を用いて

$$|x_t-x_0|^{2n}=\int_0^t\sum_{i,k} f_i(x_s-x_0)a_{ik}(\alpha,s,x_s)\,d\xi_s^k$$

$$+\int_0^t\frac{1}{2}\sum_{i,j,k} f_{ij}(x_s-x_0)a_{ik}(\alpha,s,x_s)a_{jk}(\alpha,s,x_s)\,ds$$

$$+\int_0^t\sum_i f_i(x_s-x_0)\,b_i(\alpha,s,x_s)\,ds.$$

両辺の平均をとると（両辺の平均の存在がまだ保証されていないから，補題3.3の証明の場合と同様に一応 truncate する必要があるが，全く同様であるから省略する），

$$E[|x_t-x_0|^{2n}]\leq const.\int_0^t E[|x_s-x_0|^{2n-2}(1+|x_s|^2)]\,ds$$

$$+\,const.\int_0^t E[|x_s-x_0|^{2n-1}(1+|x_s|)]\,ds\ .$$

ここで不等式

$$\begin{aligned}|x_s-x_0|^{2n-1}(1+|x_s|)&\leq|x_s-x_0|^{2n-1}\ \ (1+|x_s-x_0|+|x_0|)\\&\leq|x_s-x_0|^{2n-2}\ (1+|x_s-x_0|+|x_0|)^2\\&\leq const.(1+|x_0|^2)\,|x_s-x_0|^{2n-2}\\&\quad+const.\,|x_s-x_0|^{2n}\end{aligned}$$

に注意すると

$$(3.11)\qquad E[|x_t-x_0|^{2n}]\leq const.(1+|x_0|^2)\int_0^t E[|x_s-x_0|^{2n-2}]\,ds$$

$$+\,const.\int_0^t E[|x_s-x_0|^{2n}]\,ds\ .$$

$n=1$ のときは，補題3.2を用いて

$$\begin{aligned}E[|x_t-x_0|^2]&\leq const.(1+|x_0|^2)\cdot t+const.\int_0^t E[|x_s-x_0|^2]\,ds\\&\leq const.(1+|x_0|^2)\cdot t,\quad 0\leq t\leq T.\end{aligned}$$

(3.11) を用いて indication により，一般の n に対しても

$$(3.12)\qquad E[|x_t-x_0|^{2n}]\leq const.(1+|x_0|^2)^n\cdot t^n,\quad 0\leq t\leq T.$$

次に $x_0(\alpha)$ が必ずしも $const.$ でないときでも，$E[|x_0(\alpha,\omega)|^{2n}]$ が α に関

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

し有界であることから，(3.12) と x_t のマルコフ性を用いて

$$E[|x_s(\alpha,\omega)|^{2n}] \leq const. \ ; \qquad 0 \leq s \leq T.$$

故に

$$E[|x_t(\alpha)-x_s(\alpha)|^{2n}] \leq const.\ E[(1+|x_s(\alpha)|^2)^n]\ |t-s|^n$$
$$\leq K_n'\,|t-s|^n, \qquad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

を得る.

<u>定理3.1の証明</u>　1°) は補題3.3，3.4より明らかであるから，2°) の証明をする。(3.6)における $c(\omega)$ は次のように定義されていると考えてよい。

$$c(\omega) = \sup_{\substack{\alpha,\beta\in A\\ \alpha\neq\beta}} \frac{|x_0(\alpha,\omega)-x_0(\beta,\omega)|}{|\alpha-\beta|}$$

このとき $c(\omega)$ は $\mathbb{Z}_T^\circ$ と独立である。今，$\alpha_0\in A$ を固定し

$$\Omega_n = \{\omega \mid c(\omega) \leq n,\ |x_0(\alpha_0,\omega)| \leq n\}$$

とおくと 各 Ω_n は $\mathbb{Z}_T^\circ$ と独立で，$P\{\cup\Omega_n\} = 1$ である。

$$x_0'(\alpha,\omega) = x_0(\alpha,\omega) \qquad \omega\in\Omega_n \text{のとき}$$
$$= 0 \qquad \omega\notin\Omega_n \text{のとき}$$

とおくと $x_0'(\alpha,\omega)$は $\mathbb{Z}_T^\circ$ と独立で，$x_0'(\alpha,\omega)$ を初期値とする (3.7)の解 $x_t'(\alpha,\omega)$ は $x_t(\alpha,\omega)$ と Ω_n 上で一致するから，$x_t'(\alpha,\omega)$ が α につき連続な *version* をもつことを示せばよい。なお，α の動く範囲は有界領域としてもよい。一方初期値 $x_0'(\alpha,\omega)$は

$$\begin{cases} |x_0'(\alpha,\omega)-x_0'(\beta,\omega)| \leq n|\alpha-\beta| \\ |x_0'(\alpha,\omega)| \leq n(1+|\alpha-\alpha_0|) \end{cases}$$

をみたすから，結局 1°) の仮定の下に 2°) を証明すれば充分ということになる。そこで 1°) の仮定がみたされているとし，A_1 を *closure* が *compact* で A に含まれる任意の領域とし，係数 a_{ij}，b_i および初期値 $x_0(\alpha)$ を次のように α の範囲が R^m 全体になるように拡張定義する。即ち，A_1 の上ではもとのものと一致し，R^m 全体で (3.5)，(3.6) および 1°) の仮定をみたすようにする．この拡張された係数および初期値に対応する (3.7) の解はもとの解 $x_t(\alpha)$ と α が A_1 にある限り一致する。故に 1°) の仮定および $A=R^m$ の下で証明すれば充分である。ところが $x_t(\alpha,\omega)$ を $\forall(t,\alpha)\in R^{m+1}$ まで自然に拡張定義しそれを R^{m+1} を *time parameter space* にもつ確率過程とみると，1°) の評価式において nを充分大きくとったときの式は *Kolmogorov* の定理における仮定 (3.2)を意味する．故に $x_t(\alpha,\omega)$は (t,α) につき連続な *version* をもつ．

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

（証明終）

定理3.2 [1]　$a_{ij}(\alpha, t, x)$, $b_i(\alpha, t, x)$ $(1 \leq i, j \leq d)$ は R^m の領域 A の点 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ を parameter にもち (3.5) をみたすとする。更に次の仮定をおく。a_{ij}, b_i は x, α に関し $r+1$ 階までの有界連続な偏導函数をもつ。初期値 $x_0(\alpha, \omega)$ に関しては，ほとんどすべての ω に対して

(3.13)　$$\partial^p x_0(\alpha, \omega) / \partial\alpha_1^{p_1} \cdots \partial\alpha_m^{p_m}, \quad p_1 + \cdots + p_m = p \leq r+1$$

が存在して有界連続とする．このとき (3.7) の解を $x_t(\alpha, \omega)$ とすれば，ほとんどすべての ω に対して

$$\partial^p x_t(\alpha, \omega) / \partial\alpha_1^{p_1} \cdots \partial\alpha_m^{p_m}, \quad p_1 + \cdots + p_m = p \leq r$$

が存在して (t, α) につき連続になる。

証明　定理3.1，2°) の証明の中で行なった reduction の方法を用いることにより，$A = R^m$, (3.13) の量は (α, ω) につき有界かつ係数 a_{ij}, b_i は x がある compact 集合 (α, t に無関係) の外にある限り恒等的に 0 になるという仮定の下で証明すれば充分である。

ℓ 番目の座標だけが 1 で他はすべて 0 であるような R^m の点を e_ℓ とかき，$\alpha' = \alpha + h e_\ell$, h は実数 $\neq 0$，とおく。

$$y_t(\alpha, \alpha') = \frac{x_t(\alpha', \omega) - x_t(\alpha, \omega)}{h}$$

とおくと，明らかに

(3.14a)　$$x_t^i(\alpha) = x_0^i(\alpha) + \int_0^t \sum_j a_{ij}(\alpha, s, x_s(\alpha)) d\xi_s^j + \int_0^t b_i(\alpha, s, x_s(\alpha)) ds$$

(3.14b)　$$x_t^i(\alpha') = x_0^i(\alpha') + \int_0^t \sum_j a_{ij}(\alpha', s, x_s(\alpha')) d\xi_s^j + \int_0^t b_i(\alpha', s, x_s(\alpha')) ds$$

(3.14c)　$$y_t^i(\alpha, \alpha') = y_0^i(\alpha, \alpha')$$

$$+ \int_0^t \sum_j \Big[\sum_k \int_0^1 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}(\alpha', s, x_s(\alpha) + v(x_s(\alpha') - x_s(\alpha)) dv \cdot y_s^k(\alpha, \alpha')$$

$$+ \frac{a_{ij}(\alpha', s, x_s(\alpha)) - a_{ij}(\alpha, s, x_s(\alpha))}{h} \Big] d\xi_s^j$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$+\int_0^t\Big[\sum_k\int_0^1\frac{\partial b_i}{\partial x^k}(\alpha',s,x_s(\alpha)+v(x_s(\alpha')-x_s(\alpha)))\,dv\cdot y_s^k(\alpha,\alpha')$$

$$+\frac{b_i(\alpha',s,x_s(\alpha))-b_i(\alpha,s,x_s(\alpha))}{h}\Big]\,ds$$

が成り立つ。(3.14-a-b-c) は

$$\tilde{\alpha}\equiv(\alpha,\alpha')\in R^{2m}-\{\Delta\}$$

$$(\{\Delta\}\equiv\{(\alpha,\alpha')\mid\alpha,\alpha'\in R^m,\ \alpha=\alpha'\})$$

を parameter として含んでいる $3d$ 次元の確率過程

$$\{\tilde{x}_t^i(\tilde{\alpha}),\ 1\leq i\leq 3d\}\equiv\{x_t(\alpha),\ x_t(\alpha'),\ y_t(\alpha,\alpha')\}$$

がみたす確率積分方程式とみなすことが出来る。その方程式を

$$(3.15)\qquad \tilde{x}_t^i(\tilde{\alpha})=\tilde{x}_0^i(\tilde{\alpha})+\int_0^t\sum_j\tilde{a}_{ij}(\tilde{\alpha},s,\tilde{x}_s(\tilde{\alpha}))\,d\xi_s^j+\int_0^t\tilde{b}_i(\tilde{\alpha},s,\tilde{x}_s(\tilde{\alpha}))\,ds$$

とかく。このとき，係数 $\tilde{a}_{ij}$，$\tilde{b}_i$ および初期値 $\tilde{x}_0(\tilde{\alpha})$ に対しては定理3.1，1°)の仮定がすべて成り立っている。故に定理3.1，1°)によって $n=1,2,\cdots$ に対し定数 L_n があって

$$(3.16)\qquad E[|\tilde{x}_t(\tilde{\alpha})-\tilde{x}_t(\tilde{\beta})|^{2n}]\leq L_n(|\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}|^{2n}+|t-s|^n)$$

$$\tilde{\alpha},\ \beta\in R^{2m}-\{\Delta\}$$

この式より $\tilde{\alpha}\in\{\Delta\}$ に対しても $\tilde{x}_t(\tilde{\alpha})$ は定義出来て，(3.16) はすべての $\tilde{\alpha}\in R^{2m}$ に対して成り立つ。故に Kolmogorov の定理により $\tilde{x}_t(\tilde{\alpha})$ は $\tilde{\alpha}$ に関して連続であるとみなしてよい。このことはほとんどすべての ω に対して $\partial x_t(\alpha)/\partial\alpha_\ell$ が存在して (t,α) につき連続であることを意味する。そして，(3.14c) において $\alpha'\to\alpha$ とすると

$$(3.14d)\qquad \frac{\partial x_t^i(\alpha)}{\partial\alpha_\ell}=\frac{\partial x_0^i(\alpha)}{\partial\alpha_\ell}+\int_0^t\sum_j\Big[\sum_k\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}(\alpha,s,x_s(\alpha))\frac{\partial x_s^k(\alpha)}{\partial\alpha_\ell}$$

$$+\frac{\partial a_{ij}}{\partial\alpha_\ell}(\alpha,s,x_s(\alpha))\Big]\,d\xi_s^j$$

$$+\int_0^t\Big[\sum_k\frac{\partial b_i}{\partial x^k}(\alpha,s,x_s(\alpha))\frac{\partial x_s^k(\alpha)}{\partial\alpha_\ell}+\frac{\partial b_i}{\partial\alpha_\ell}(\alpha,s,x_s(\alpha))\Big]\,ds$$

を得る。(3.14a)，(3.14d) は $2d$ 次元の確率過程

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$\left\{ \hat{x}_t^i(\alpha),\ 1 \leq i \leq 2d \right\} \equiv \left\{ x_t(\alpha),\ \frac{\partial x_t(\alpha)}{\partial \alpha_\ell} \right\}$$

がみたす確率積分方程式である。このことより，$\left\{ x_t(\alpha),\ \frac{\partial x_t(\alpha)}{\partial \alpha_\ell} \right\}$ はマルコフ過程であることがわかる。$r \geqq 2$ のときは $x_t(\alpha)$ から $\tilde{x}_t(\tilde{\alpha})$ を導いたのと全く同じ操作で，$\hat{x}_t(\alpha)$ から $\tilde{\hat{x}}_t(\alpha)$ を導いて，α に関する２階微分の存在をいうことが出来る。このとき $\tilde{\hat{x}}_t(\tilde{\alpha})$ がみたす方程式の係数が (3.5) をみたすということは，最初に仮定した a_{ij}，b_i が compact carrier をもつという条件によって保証され，このような操作は r 回可能である。

（証明終）

<u>定理3.3</u>　$a_{ij}(t,x)$，$b_i(t,x)$ は x に関し $r+1$ 回偏微分可能で，しかもそれら偏導函数は x に関し連続，(t,x) に関して有界とする。$x_t(x,\omega)$ を $x_0(\omega)=x$ をみたす

$$(3.17)\qquad dx_t^i = \sum_j a_{ij}(t,x_t)\,d\xi_t^j + b_i(t,x_t)\,dt$$

の解とする。このとき

i) ほとんどすべての ω に対して

$$\partial^p x_t(x,\omega)/\partial(x^1)^{p_1}\cdots\partial(x^d)^{p_d},\quad p_1+\cdots+p_d = p \leqq r$$

が存在して (t,x) に関して連続になる。

ii) $x_s(\omega)=x$ をみたす (3.17) の解を $x_t(s,x,\omega)$ $(s \leqq t)$ とすると

$$(3.18)\qquad \partial^p x_t(s,x,\omega)/\partial(x^1)^{p_1}\cdots\partial(x^d)^{p_d},\quad p_1+\cdots+p_d = p \leqq r$$

はほとんどすべての ω に対して $s\ (s<t)$ に関し連続である。

<u>証明</u>　i) は定理3.2の特別な場合であるから，ii) を証明する。次のことを仮定して証明しても一般性を失わない。

(3.19)　$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij}(t,x),\ b_i(t,x) \text{ は } x \text{ がある compact 集合（}t\text{ に無関} \\ \text{係）の外にあるとき恒等的に } 0 \text{ になる。} \end{array} \right.$

以下このことを仮定し (3.18) を components とする確率過程 $\tilde{x}_t$ がみたす確率微分方程式を

$$(3.20)\qquad d\tilde{x}_t^i = \sum_j \tilde{a}_{ij}(t,\tilde{x}_t)\,d\xi_t^j + \tilde{b}_i(t,\tilde{x}_t)\,dt,\quad \tilde{x}_s = \tilde{x}$$

$$(1 \leqq i \leqq N)$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

とすると，係数 $\tilde{a}_{ij}$，$\tilde{b}_i$ は (3.19) によって有界で Lipschitz の条件をみたす。 ii) の証明のためには，任意に固定した $\tilde{x}\in R^N$ に対し (3.20) の解 $\tilde{x}_t(s,\tilde{x},\omega)$ （これを以下単に $\tilde{x}_t(s,\omega)$ とかく）としたとき，$\tilde{x}_t(s,\omega)$ がほとんどすべての ω に対して $s\,(s<t)$ につき連続であることを示せば充分である。 $s'\le s<t$ に対して

$$(3.21)\qquad E[|\tilde{x}_t(s')-\tilde{x}_t(s)|^4]\le const.\times$$
$$\times\Big[E\Big\{\sum_i\Big|\sum_j\int_s^t(\tilde{a}_{ij}(u,\tilde{x}_u(s'))-\tilde{a}_{ij}(u,\tilde{x}_u(s)))\,d\xi_s^j\Big|^4\Big\}$$
$$+E\Big\{\sum_i\Big|\int_s^t(\tilde{b}_i(u,\tilde{x}_u(s'))-\tilde{b}_i(u,\tilde{x}_u(s)))\,du\Big|^4\Big\}$$
$$+E\Big\{\sum_i\Big|\sum_j\int_{s'}^s\tilde{a}_{ij}(u,\tilde{x}_u(s'))\,d\xi_u^j\Big|^4\Big\}$$
$$+E\Big\{\sum_i\Big|\int_{s'}^s\tilde{b}_i(u,\tilde{x}_u(s'))\,du\Big|^4\Big\}\Big]$$

ここで次にのべる補題3.5を用いて第1項を計算する：

$$(3.22)\qquad E\Big\{\sum_i\Big|\sum_j\int_s^t(\tilde{a}_{ij}(u,\tilde{x}_u(s'))-\tilde{a}_{ij}(u,\tilde{x}_u(s)))\,d\xi_u^j\Big|^4\Big\}$$
$$\le const.\sum_{i,j}E\Big[\Big|\int_s^t(\tilde{a}_{ij}(u,\tilde{x}_u(s'))-\tilde{a}_{ij}(u,\tilde{x}_u(s))\,d\xi_u^j\Big|^4\Big]$$
$$\le const.\sum_{i,j}E\Big[\int_s^t|\tilde{a}_{ij}(u,\tilde{x}_u(s'))-\tilde{a}_{ij}(u,\tilde{x}_u(s))|^4\,du\Big]$$
$$\le const.\int_s^t E[|\tilde{x}_u(s')-\tilde{x}_u(s)|^4]\,du\ .$$

第3項については確率積分の変換公式を用いて

$$(3.23)\qquad E\Big\{\sum_i\Big|\sum_j\int_{s'}^s\tilde{a}_{ij}(u,\tilde{x}_u(s'))\,d\xi_u^j\Big|^4\Big\}$$
$$\le const.\sum_{i,j}E\Big\{\Big|\int_{s'}^s\tilde{a}_{ij}(u,\tilde{x}_u(s'))\,d\xi_u^j\Big|^4\Big\}$$
$$=const.\sum_{i,j}6E\Big\{\int_{s'}^s\Big|\int_{s'}^u\tilde{a}_{ij}(v,\tilde{x}_v(s'))\,d\xi_v^j\Big|^2\tilde{a}_{ij}(u,\tilde{x}_u(s'))^2\,du\Big\}$$
$$\le const.\sum_{i,j}E\Big\{\int_{s'}^s\Big|\int_{s'}^u\tilde{a}_{ij}(v,x_v(s'))\,d\xi_v^j\Big|^2\,du\Big\}$$
$$\le const.\int_{s'}^s\int_{s'}^u dv\,du=const.\,|s'-s|^2\ .$$

第2項，第4項については

$$(3.24)\qquad E\Big\{\sum_i\Big|\int_s^t(\tilde{b}_i(u,\tilde{x}_u(s'))-\tilde{b}_i(u,\tilde{x}_u(s)))\,du\Big|^4\Big\}$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$\leq const. \int_s^t E\left[\,|\,\tilde{x}_u(s') - \tilde{x}_u(s)|^4\right] du,$$

$$(3.25) \quad E\left\{\sum_i \left|\int_{s'}^{s} \tilde{b}_i(u, \tilde{x}_u(s'))\,du\right|^4\right\}$$

$$\leq const.\ |s'-s|^2 .$$

故に (3.21) — (3.25) より

$$E\left[\,|\,\tilde{x}_t(s') - \tilde{x}_t(s)|^4\right]$$

$$\leq const.\ |s'-s|^2 + const. \int_s^t E\left[\,|\,\tilde{x}_u(s') - \tilde{x}_u(s)|^4\right] du .$$

補題3.2より

$$E\left[\,|\,\tilde{x}_t(s') - \tilde{x}_t(s)|^4\right] \leq const.\ |s'-s|^2 .$$

故に Kolmogorov の定理により $\tilde{x}_t(s)$ は確率 1 で $s\,(s<t)$ につき連続である。

<u>補題 3.5</u> $\int_s^t a(u)\,d\xi_u$ を確率積分とするとき

$$(3.26) \quad E\left[\,\left|\int_s^t a(u)\,d\xi_u\right|^4\right] \leq 3e^{3(t-s)} E\left[\int_s^t a(u)^4\,du\right], \quad s \leq t .$$

<u>証明</u> 確率積分の変換公式を用いて

$$E\left[\,\left|\int_s^t a(u)\,d\xi_u\right|^4\right]$$

$$= 6E\left[\int_s^t \left|\int_s^u a(v)\,d\xi_v\right|^2 a(u)^2\,du\right]$$

$$\leq 3E\left[\int_s^t \left|\int_s^u a(v)\,d\xi_v\right|^4 du\right] + 3E\left[\int_s^t a(u)^4\,du\right]$$

$$= 3E\left[\int_s^t a(u)^4\,du\right] + 3\int_s^t E\left[\,\left|\int_s^u a(v)\,d\xi_v\right|^4\right] du .$$

故に補題3.2により (3.26) を得る.

<u>補題 3.6</u> 係数 $a_{ij}(t,x)$, $b_i(t,x)$ は x につき3回連続偏微分可能でそれら偏導函数は (t,x) につき有界とする. このとき $x_0(\omega) = x$ をみたす (3.17) の解を $x_t(x)$ とし

$$y_t(x,x') = h^{-1}[x_t(x') - x_t(x)]$$
$$z_t(x,x') = h^{-1}[y_t(x') - y_t(x)]$$

とおく. ただし $y_t(x)$ は $x_t(x)$ の x に関する1階偏導函数をあらわし,

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$x' = (x^1, \cdots, x^{k-1}, x^k + h, x^{k+1}, \cdots, x^d)$, $h \neq 0$, とする。このとき各 $n \geq 1$ に対し定数 K_n, L_n があって $x, x' \in R^d$ に対し

$$E[|y_t(x,x')|^n] \leq K_n \tag{3.27a}$$

$$E[|z_t(x,x')|^n] \leq L_n \qquad (0 \leq t \leq T) \tag{3.27b}$$

が成り立つ。

<u>証明</u>　簡単のために $d=1$ とする．容易にわかるように $y_t(x,x')$ は次の確率微分方程式をみたす：

$$(3.28)\ \begin{cases} dy_t(x,x') = \left[\int_0^1 a'(t, x_t(x) + \lambda(x_t(x') - x_t(x)))d\lambda \cdot y_t(x,x')\right] d\xi_t \\ \qquad\qquad + \left[\int_0^1 b'(t, x_t(x) + \lambda(x_t(x') - x_t(x)))d\lambda\, y_t(x,x')\right] dt \\ y_0(x,x') = 1, \end{cases}$$

ただし a', b' は x に関する偏微分である．簡単のため (3.28) を

$$dy_t = \sigma_t y_t\, d\xi_t + m_t y_t\, dt, \qquad y_0 = 1$$

とかき確率微分の変換公式を用いると

$$df(y_t) = f'(y_t)\sigma_t y_t d\xi_t + f'(y_t) m_t y_t dt + \frac{1}{2} f''(y_t)\sigma_t^2 y_t^2 dt$$

$$(\text{ただし } f(x) = |x|^{2n}).$$

故に

$$(3.29)\quad E[|y_t|^{2n}] = 1 + E\left[\int_0^t f'(y_s) m_s y_s ds\right] + \frac{1}{2} E\left[\int_0^t f''(y_s)\sigma_s^2 y_s^2 ds\right]$$

$$\leq const. + const. \int_0^t E[|y_s|^{2n}]\, ds.$$

$$(\sigma_t,\ m_t \text{ の有界性による}).$$

ここで上の $const.$ は n には関係するが x には無関係である。以下 $const.$ はこの意味で用いる。(3.29) に補題3.2を適用して $E[|y_t|^{2n}] \leq const.$, $0 \leq t \leq T$, 即ち (3.27a) を得る。

(3.27b) についても大体同様である．$z_t(x,x')$ は

$$dz_t(x,x') = \left[\int_0^1 a''(t, x_t(x) + \lambda(x_t(x') - x_t(x)))d\lambda \cdot y_t(x,x') y_t(x)\right.$$

$$\left. + a'(t, x_t(x')) z_t(x,x')\right] d\xi_t$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$+[\int_0^1 b''(t, x_t(x)+\lambda(x_t(x')-x_t(x)))d\lambda\cdot y_t(x,x')\,y_t(x)$$

$$+b'(t,x_t(x'))z_t(x,x')]dt, \qquad z_0(x,x')=0$$

をみたすが，これを簡単に

$$dz_t=[u_t+a'z_t]d\xi_t+[v_t+b'z_t]dt, \quad z_0=0$$

とかくと (3.29) と同様に

$$(3.30) \quad E[|z_t|^{2n}] \leq const.\int_0^t E[|z_s|^{2n-1}|v_s|]ds + const.\int_0^t E[|z_s|^{2n}]ds + const.\int_0^t E[|z_s|^{2n-2}|u_s|^2]ds$$

を得る。Hölder の不等式により

$$(3.31) \quad E[|z_s|^{2n-1}|v_s|] \leq E[|z_s|^{2n}]^{\frac{2n-1}{2n}}E[|v_s|^{2n}]^{\frac{1}{2n}} \leq E[|v_s|^{2n}]^{\frac{1}{2n}}[1+E(|z_s|^{2n})]$$

が成り立つが，(3.27a) および a'', b'' の有界性により

$$(3.32) \qquad E[|v_s|^{2n}] \leq const.$$

であるから (3.31) は

$$E[|z_s|^{2n-1}|v_s|] \leq const.[1+E(|z_s|^{2n})].$$

上の式と同様な評価式が $E[|z_s|^{2n-2}|u_s|^2]$ に対しても成り立つから (3、30) は

$$E[|z_t|^{2n}] \leq const.+const.\int_0^t E[|z_s|^{2n}]ds$$

となる。

（証明終）

<u>定理3.3</u>　$a_{ij}(t,x)$, $b_i(t,x)$ は t については連続で，x については3回連続偏微分可能で，それら偏導函数は (t,x) について有界とする。このとき $x_t(s,x,\omega)$ を

$$dx_t^i=\sum_j a_{ij}(t,x_t)d\xi_t^j+b_i(t,x_t)dt, \quad s<t, \quad x_s=x$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

の解とし，２階までの有界連続な偏導函数をもつ f に対して

$$u(s,t,x)=E[f(x_t(s,x,\omega))],\quad s\leq t$$

とおくと，$u(s,t,x)$ は $s\,(s<t)$ につき１回，x につき２回有界連続偏微分可能で

$$(3.33)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial u(s,t,x)}{\partial s}=\sum_{i,j}A_{ij}(s,x)\dfrac{\partial^2 u(s,t,x)}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_i B_i(s,x)\dfrac{\partial u(s,t,x)}{\partial x^i} \\ \qquad\qquad (s<t) \\ u(s,s,x)=f(x) \end{cases}$$

をみたす。ただし A_{ij}，B_i は (3.1) で与えられる。

<u>証明</u>　$x'=(x^1,\cdots,x^{k-1},x^k+h,x^{k+1},\cdots,x^d)$，$h\neq 0$，とおく。まず $s=0$，$x_t(s,x,\omega)=x_t(x,\omega)$ とかくと

$$h^{-1}[f(x_t(x'))-f(x_t(x))]$$
$$=\sum_i \frac{x_t^i(x')-x_t^i(x)}{h}\int_0^1 f_i(x_t(x)+\lambda(x_t(x')-x_t(x)))\,d\lambda$$

が成り立つ。f_i が有界であることおよび定理3.3，i)，補題3.6により

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(0,t,x')-u(0,t,x)}{h}=E\Big[\sum_i\frac{\partial x^i(x)}{\partial(x^k)}f_i(x_t(x))\Big]$$
$$=\frac{\partial u(0,t,x)}{\partial(x^k)}$$

を得る。次に　$\tilde{x}=(x^1,\cdots,x^{l-1},x^l+h,x^{l+1},\cdots,x^d)$，$h\neq 0$，とすると

$$h^{-1}\Big[\sum_i\frac{\partial x^i}{\partial(x^k)}(\tilde{x})f_i(x_t(\tilde{x}))-\sum_i\frac{\partial x^i}{\partial(x^k)}(x)f_i(x_t(x))\Big]$$

$$=\sum_i h^{-1}\Big[\frac{\partial x^i}{\partial(x^k)}(\tilde{x})-\frac{\partial x^i}{\partial(x^k)}(x)\Big]f_i(x_t(\tilde{x}))$$

$$+\sum_{i,j}\frac{\partial x^i}{\partial(x^k)}(x)\cdot\frac{x^j(\tilde{x})-x^j(x)}{h}\cdot\int_0^1 f_{ij}(x_t(x)+\lambda(x_t(\tilde{x})-x_t(x)))\,d\lambda$$

であるから，やはり定理3.3，i)，補題3.6により $\partial^2 u(0,t,x)/\partial(x^k)\partial(x^l)$ が存在することがわかり

$$E\Big[\sum_i f_i(x_t(x))\,\partial^2 x^i(x)/\partial(x^k)\partial(x^l)\Big]$$

$$+E\Big[\sum_{i,j}f_{ij}(x_t(x))\,\partial x^i(x)/\partial(x^k)\cdot\partial x^j(x)/\partial(x^l)\Big]$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

に等しい．一般の $s<t$ に対しても

$$(3.34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u(s,t,x)}{\partial(x^k)} = E\Big[\sum_i f_i(x_t(s,x))\dfrac{\partial x^i(s,x)}{\partial(x^k)}\Big] \\ \dfrac{\partial^2 u(s,t,x)}{\partial(x^k)\partial(x^\ell)} = E\Big[\sum_i f_i(x_t(s,x))\dfrac{\partial^2 x^i(s,x)}{\partial(x^k)\partial(x^\ell)} \\ \qquad\qquad + \sum_{i,j} f_{ij}(x_t(s,x))\dfrac{\partial x^i(s,x)}{\partial(x^k)}\cdot\dfrac{\partial x^j(s,x)}{\partial(x^\ell)}\Big] \end{cases}$$

が成り立つ。(3.34) の右辺の形から定理3.3，ii)，補題3.6を用いて u は x に関して２階までの有界連続な偏導函数をもつことがわかる。

次に解の一意性によって

$$x_t(s-h,x,\omega) = x_t(s,x_s(s-h,x,\omega),\omega),\quad h>0$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} u(s-h,t,x) &= E[f(x_t(s,x_s(s-h,x,\omega),\omega))] \\ &= E[u(s,t,x_s(s-h,x,\omega))]. \end{aligned}$$

今 $g(x)=u(s,t,x)$ とおくと $g\in C^2$ であるから

$$\begin{aligned} g(x_s(s-h,x,\omega)) = g(x) &+ \sum_{i,j}\int_{s-h}^{s} g_i(x_u(s-h,x))a_{ij}(u,x_u(s-h,x))d\xi_u^j \\ &+ \sum_i\int_{s-h}^{s} g_i(x_u(s-h,x))\,b_i(u,x_u(s-h,x))\,du \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\int_{s-h}^{s} g_{ij}a_{ik}a_{jk}\,du \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned} &\frac{u(s-h,t,x)-u(s,t,x)}{h} \\ &= \sum_{i,j} h^{-1}E\Big[\int_{s-h}^{s} A_{ij}(u,x_u(s-h,x))\,g_{ij}\,du\Big] \\ &\quad + \sum_i h^{-1}E\Big[\int_{s-h}^{s} B_i(u,x_u(s-h,x))g_i\,du\Big] \\ &\longrightarrow \sum_{i,j}A_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 u(s,t,x)}{\partial(x^i)\partial(x^j)} + \sum_i B_i(s,x)\frac{\partial u(s,t,x)}{\partial(x^i)},\quad h\downarrow 0. \end{aligned}$$

故に

$$-\underset{(\text{左微分})}{\frac{\partial^- u(s,t,x)}{\partial s}} = \sum_{i,j}A_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 u(s,t,x)}{\partial(x^i)\partial(x^j)}$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$+\sum_i B_i(s,x)\frac{\partial u(s,t,x)}{\partial(x^i)}$$

を得る。上の右辺は $s(s<t)$ につき連続であるから，左微分は普通の微分と一致し，(3.33) が成り立つ。

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

3章 連続係数の確率微分方程式の解の存在

係数が Lipschitz 条件(L)及び有界連続性に関する条件(B)を満たす確率微分方程式については，その解の存在及び unique 性を既に考えた(Itô)。

この章では，条件(L)を落した確率微分方程式の解の存在を Skorokhod の研究[32]によって述べる。しかし，解の unique 性及び それが Markov 解であるかどうかという問題については，まだ分らないことが多いのでふれない。

§1 確率過程の収束

定理1.1 (Skorokhod[32]) R^d 値確率過程の列 $\{x_n(t), t\in[0,T]\}$ $n=1,2,\cdots$ が殆んどすべての path が連続で，任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup_{n\geq 1} P\{\max_{|t_1-t_2|\leq h}|x_n(t_2)-x_n(t_1)|>\varepsilon\}=0$$

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{n\geq 1} P\{\max_{0\leq t\leq T}|x_n(t)|>N\}=0$$

を満足するならば，適当な部分列 $(n_1, n_2, \cdots)$, $n_1<n_2<\cdots$, を選んで，適当な確率空間 $(\tilde{\Omega}, \tilde{B}, \tilde{P})$ とその上の次の条件を満たす確率過程の列 $\{\tilde{x}_{n_k}(t), t\in[0,T]\}$ $k=0,1,2,\cdots$, $n_0=0$, を構成することが出来る.

i) $\tilde{x}_{n_k}$ は殆んどすべての path が連続で，x_{n_k} と同分布である $(k=1,2,\cdots)$.

ii) $\lim_{k\uparrow\infty}\tilde{P}\{\max_{0\leq t\leq T}|\tilde{x}_{n_k}(t,\omega)-\tilde{x}_0(t,\omega)|>\varepsilon\}=0$ $(\varepsilon>0)$.

この定理を証明するために，次の一般的な補題を用意する.

補題1.1 R を可分な完備距離空間(距離を ρ)，B_R をその上の topological Borel field とする.(R, B_R) 上の確率分布の列 $\{P_n\}$ $n=1,2,\cdots$ が P_0 なる確率分布に弱収束するならば，Wiener の確率空間 $(\tilde{\Omega}, \tilde{B}, \tilde{P})$ の上に R 値確率変数の列 $\{x_n(\tilde{\omega})\}$ $n=0,1,2,\cdots$ を次の条件を満たすように構成することが出来る.

i) $\tilde{P}\{x_n(\tilde{\omega})\in A\}=P_n\{A\}$ $n=0,1,2,\cdots$ $(A\in B_R)$

ii) $x_n(\tilde{\omega})\to x_0(\tilde{\omega})$ in probability

ここで Wiener の確率空間 $(\tilde{\Omega}, \tilde{B}, \tilde{P})$ とは $\tilde{\Omega}=[0,1]$, $\tilde{B}$ は $\tilde{\Omega}$ の Borel

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

部分集合の全体，$\tilde{P}$は$\tilde{B}$に属する集合のみに対して考えた普通のLebesgue 測度，を満たす3組要素である．

<u>証明</u>　自然数を要素とするk次元vector $(i_1, i_2, \cdots, i_k) = \underline{\underline{i}}_k$ に対して $S_{\underline{\underline{i}}_k} \in \mathbb{B}_R$ を次の条件を満たすように取ることが出来る．

1) $S_{\underline{\underline{i}}_k} \cap S_{\underline{\underline{i}}'_k} = \phi \qquad \underline{\underline{i}}_k \neq \underline{\underline{i}}'_k$

2) $\bigcup_{i_k=1}^{\infty} S_{\underline{\underline{i}}_k} = S_{\underline{\underline{i}}_{k-1}} \qquad \bigcup_{\underline{\underline{i}}=1}^{\infty} S_{\underline{\underline{i}}} = R$

3) $\text{diameter } (S_{\underline{\underline{i}}_k}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$

4) $P_0\{\bar{S}_{\underline{\underline{i}}_k} \cap (\overline{R - S_{\underline{\underline{i}}_k}})\} = 0$

何となれば，まずRの可分性によって，任意の$k \geqq 1$に対して，$\{x_i^{(k)}\}_{i=1,2,\cdots} \subset R$を

$$\inf_i \rho(x, x_i^{(k)}) < \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \qquad (x \in R)$$

を満たすように取ることが出来る．

$$S'_r(x_i^{(k)}) = \{x ;\ \rho(x, x_i^{(k)}) < r\}$$

とおくと，$\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < r_k < \left(\frac{1}{2}\right)^k$ を満たすr_kが少くとも一つは存在して

$$P_0\{\overline{S'_{r_k}(x_i^{(k)})} \cap \overline{R - S'_{r_k}(x_i^{(k)})}\} = 0 \quad .$$

（実際上の等式が成り立たない$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$上の点の数は高々可算個である．）

$$D_i^k = S'_{r_k}(x_i^{(k)}) - \bigcup_{j=1}^{i-1} S'_{r_k}(x_j^{(k)})$$

とおく。明らかに，任意のkに対して

$$\bigcup_i D_i^k = R \quad , \qquad D_i^k \cap D_j^k = \phi \quad (i \neq j)$$

が成り立つ。このD_i^kに対して

$$S_{\underline{\underline{i}}_k} = D_{i_1}^1 \cap D_{i_2}^2 \cap \cdots \cap D_{i_k}^k$$

と定義する．この$S_{\underline{\underline{i}}_k}$が上の4条件を満たすことは明らか．

いま，自然数を要素とするk次元vector $\underline{\underline{i}}_k$ に対して，順序$\underline{\underline{i}}_k < \underline{\underline{i}}'_k$を「ある番号$r \leq k$が存在して任意の$j \leq r$に対して $\underline{\underline{i}}_j = \underline{\underline{i}}'_j$ かつ $\underline{\underline{i}}_{r+1} < \underline{\underline{i}}'_{r+1}$ が成り立つ」ことで定義する．

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

上に定義した $S_{\underline{i}_k}$ に対して，$\Delta_{\underline{i}_k}^{(n)} \in \widetilde{\mathcal{B}}$ なる $[0,1]$ 上の集合 $\Delta_{\underline{i}_k}^{(n)}$ を対応させて，次の3条件を満たすようにする。($n=0,1,2,\cdots$)

1') $\Delta_{\underline{i}_k}^{(n)} \cap \Delta_{\underline{i}'_k}^{(n)} = \phi \qquad i_k \neq i'_k$

2') $\underline{i}_k < \underline{i}'_k$ であれば $\Delta_{\underline{i}_k}^{(n)}$ は $\Delta_{\underline{i}'_k}^{(n)}$ の左側にある

3') $\widetilde{P}\{\Delta_{\underline{i}_k}^{(n)}\} = P_n\{S_{\underline{i}_k}\}$

次に $\bar{x}_{\underline{i}_k} \in S_{\underline{i}_k}$ を選んで，$\widetilde{\Omega}$ 上の函数 $x_n^k(\widetilde{\omega})$ を

$$x_n^k(\widetilde{\omega}) = \bar{x}_{\underline{i}_k} \qquad \widetilde{\omega} \in \Delta_{\underline{i}_k}^{(n)}$$

とおくと

$$\rho(x_n^k(\widetilde{\omega}),\ x_n^{k+p}(\widetilde{\omega})) \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

を満たす。これは $S_{(i_1,\cdots,i_k)} \supset S_{(i_1,\cdots,i_k,\cdots,i_{k+p})}$ より明らか。ここで R が完備であることに注意すると $x_n(\widetilde{\omega}) \in \dot{R}$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_n^k(\widetilde{\omega}),\ x_n(\widetilde{\omega})) = 0$$

一方，任意の k に対して，$S_{\underline{i}_k}$ が 4) を満たすようにとったことから

$$P_n\{S_{\underline{i}_k}\} \to P_0\{S_{\underline{i}_k}\}$$

が成り立ち，従って 3') によって

$$\widetilde{P}\{\Delta_{\underline{i}_k}^{(n)}\} \to \widetilde{P}\{\Delta_{\underline{i}_k}^{(0)}\}$$

が成り立つ．これは $\Delta_{\underline{i}_k}^{(n)}$ の定義の仕方より，実際 $\Delta_{\underline{i}_k}^{(n)} \to \Delta_{\underline{i}_k}^{(0)}$ を意味する。

以上より $\Delta_{\underline{i}_k}^{(0)}$ の内点 $\widetilde{\omega}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_0(\widetilde{\omega}),\ x_n(\widetilde{\omega})) \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^k$$

が成り立つ．故に

$$x_n(\widetilde{\omega}) \to x_0(\widetilde{\omega}) \qquad \textit{in probability}$$

が成り立ち，x_n の分布が P_n と同分布であることは 3') より言える．

（証明終）

<u>定理1.1の証明</u>　W を $[0,T]$ から R^d への連続写像の全体とする。この W は *maximum norm* で可分な完備距離空間である．$\mathbb{B} = \mathbb{B}_W$ をこの上の *topological Borel field* とする。$\{x_n(t)\}\ n=1,2,\cdots$ に対応した $(W, \mathbb{B})$ 上の確率測度を P_n とおく．仮定より $p=1,2,\cdots$ に対して，$h_p > 0$ が存在して

1) $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \sup_{n\geq 1} P_n\{\max_{|t_1-t_2|\leq h_p} |x(t_2)-x(t_1)| > \frac{1}{p}\} < +\infty$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

2) $\lim_{N\to\infty} \sup_{n\geq 1} P_n\{\max_{0\leq t\leq T} |x(t)| > N\} = 0$

が成り立つ。1) から Borel-Cantelli の補題が使えて, $N=1, 2, \cdots$ に対し nに無関係の $p_N > 0$ が存在して

$$P_n\{\max_{|t_1-t_2|\leq h_p} |x(t_2)-x(t_1)| \leq \frac{1}{P} \qquad p=P_N, P_{N+1}, \cdots\} > 1-\frac{1}{N}$$

が成り立つ。1), 2) より

$$K_N=\{\omega; \max_t |x(t,\omega)|<N, \max_{|t_2-t_1|\leq h_p} |x(t_2)-x(t_1)| \leq \frac{1}{P}, \quad p=P_N, P_{N+1}, \cdots\}$$

とおくと

$$\sup_{n\geq 1} P_n(K_N^c) \to 0$$

$$P_n(R)=1 \quad , \qquad R=\bigcup_{N=1}^{\infty} K_N$$

が成り立つ. $\omega\in K_N$ のtに関する一様連続性により, K_N は compact 距離空間であることがわかる. 従ってRは σ-compact 空間である. P_n の K_N 上への制限を $P_n|K_N$ と書くことにすると, 2) より $\{P_n|K_N\}$ は正規族をなすことがわかり, 更に $\{P_n|K_N\}$ に対して対角線論法を用いて $n_1<n_2<\cdots$ なる部分列 $\{n_k\}$ が存在して, 任意のNに対して

$$P_{n_k}|K_N \longrightarrow \mu_N \qquad weakly$$

となるような測度 μ_K が存在することがわかる. しかも $N<N'$ に対して

$$\mu_N \leq \mu_{N'}|K_N$$

が成り立つ. よって任意の $E\in\mathbb{B}$ に対して

$$P_0\{E\} = \lim_{N\to\infty} \lim_{N'\to\infty} \mu_{N'}(E\cap K_N)$$

とおくと $f\in C(R)=\{f; f$はR上の連続函数$\}$ に対して

$$\left|\int_R f\,dP_{n_k} - \int_R f\,dP_0\right| \leq \left|\int_{R-K_N} f\,dP_{n_k}\right| + \left|\int_{K_N} f\,dP_{n_k} - \int_{K_N} f\,d\mu_N\right|$$

$$+\left|\int_{K_N} f\,d\mu_N - \int_{K_N} f\,dP_0\right| + \left|\int_{R-K_N} f\,dP_0\right|$$

故に, $\sup_{n\geq 1} P_n\{R-K_N\}<\varepsilon$ ととると

$$\lim_{k\to\infty} \left|\int_R f\,dP_{n_k} - \int_R f\,dP_0\right| \leq 3\|f\|\cdot\varepsilon$$

以上より

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$P_{n_k} \to P_0 \quad weakly$$

が成り立つ．従って補題1が使えて，Wiener 空間 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbb{B}}, \tilde{P})$ 上に

$$\tilde{x}_{n_k}(\tilde{\omega}) = \{\tilde{x}_{n_k}(t, \tilde{\omega}),\ t \in [0, T]\}$$

なる W 値確率変数の列がとれて

$$\tilde{P}\{\tilde{x}_{n_k}(\tilde{\omega}) \in A\} = P\{x_{n_k}(\omega) \in A\} \qquad (A \in \mathbb{B}_W)$$

$$\tilde{x}_{n_k}(\tilde{\omega}) \to \tilde{x}_0(\tilde{\omega}) \quad in\ probability$$

とすることが出来る。

（証明終）

§2. 主要定理

定理2.1（Skorokhod [32]）　$A(x) = \{a_{ij}(x)\}$，$B(x) = \{b_i(x)\}$ を x について連続　かつ

$$\|A(x)\|,\ \|B(x)\| \leq K(1+|x|^2)$$

を満たす x 函数とする。このとき，任意の確率測度 μ に対して

$$dx_t = A(x_t)\,d\xi_t + B(x_t)\,dt \quad , \quad x_0 \text{ の分布が } \mu$$

を満たす解 $\{x_t\}$ が存在する。

注意　上の $A(x)$，$B(x)$ が t についても関係して，$A(t,x)$，$B(t,x)$ となっている場合にでも，上の定理は成り立つ。ただし，$A(t,x)$，$B(t,x)$ は (t, x) 連続函数とする。

この定理を証明するために，次の２つの補題を用意する。

補題2.1　$\mathfrak{z}_n = \{\xi_n(t),\ \mathcal{F}_t^n,\ t \in [0, T]\}$　$(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を Brown 運動とする。いま，任意の $t \in [0, T]$ に対して

$$\xi_n(t) \to \xi_0(t) \quad in\ probability$$

が成り立つとし，更に

$$x_n(t) = \int_0^t a_n(s)\,d\xi_n(s) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

に対して

1）任意の $t \in [0, T]$ に対して　$a_n(t) \to a_0(t)$　in probability

2）任意の $\varepsilon > 0$ に対して　$c > 0$ が存在して

$$P\{\sup_{0 \leq t \leq T} |a_n(t)| > c\} \leq \varepsilon \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

3）任意の $\varepsilon > 0$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup_{n\geq 1}\sup_{|t-s|\leq h} P\{|a_n(t)-a_n(s)|>\varepsilon\}=0$$

が成り立つとするならば

$$x_n(T)\rightarrow x_0(T) \quad in\ probability$$

が成り立つ。

<u>証明</u>

$$\varphi_c(x)=\begin{cases} 0 & x<-c-1 \\ x+c+1 & -c-1\leq x<-c \\ 1 & -c\leq x<c \\ -x+c+1 & c\leq x<c+1 \\ 0 & c+1\leq x \end{cases}$$

と定義して $a_n(t)$ を次のように有界にする。

$$a_{n,c}(t)=\varphi_c(a_n(t))\ a_n(t).$$

$$x_{n,c}(t)=\int_0^t a_{n,c}(s)\ d\xi_n(s)$$

と定義すると，2）より

$$P\{x_{n,c}\neq x_n\}\leq P\{\sup_{0\leq t\leq T}|a_n(t)|>c\}\leq\varepsilon$$

ここで $x_n=x_n(T)$, $x_{n,c}=x_{n,c}(T)$ とおいた。この式から $x_n\rightarrow x_0$ を言うには，$x_{n,c}\rightarrow x_{0,c}$ を言えば十分であるから，以下

$$|a_n(t)|<c \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

を一般性を失うことなく仮定する。確率積分の定義から $[0,T]$ 上の分点

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_k=T \quad に対して$$

$$\begin{aligned} P\{|x_n-x_0|>\varepsilon\} &\leq P\{|x_n-\sum_{i=0}^{k-1}a_n(t_i)(\xi_n(t_{i+1})-\xi_n(t_i))|>\frac{\varepsilon}{3}\} \\ &+P\{|x_0-\sum_{i=0}^{k-1}a_0(t_i)(\xi_0(t_{i+1})-\xi_0(t_i))|>\frac{\varepsilon}{3}\} \\ &+P\{|\sum_{i=0}^{k-1}a_n(t_i)(\xi_n(t_{i+1})-\xi_n(t_i))-\sum_{i=0}^{k-1}a_0(t_i)(\xi_0(t_{i+1})-\xi_0(t_i))|>\frac{\varepsilon}{3}\} \\ &=I_1+I_2+I_3 \end{aligned}$$

とおく。I_3 に対して

$$\sum_{i=0}^{k-1}a_n(t_i)(\xi_n(t_{i+1})-\xi_n(t_i))-\sum_{i=0}^{k-1}a_0(t_i)(\xi_0(t_{i+1})-\xi_0(t_i))$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}a_n(t_i)\{(\xi_n(t_{i+1})-\xi_0(t_{i+1}))-(\xi_n(t_i)-\xi_0(t_i))\}$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$+\sum_{i=0}^{k-1}(a_n(t_i)-a_0(t_i))(\xi_0(t_{i+1})-\xi_0(t_i))$$

ここで $|a_n(t)|<c$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 及び $\xi_n(t)\to\xi_0(t)$ $(t\in[0,T])$ $a_n(t)\to a_0(t)$ $(t\in[0,T])$ を用いて $I_3\to 0$ を得る。

$\delta=\max_i|t_{i+1}-t_i|$ とおくと martingale に対する Kolmogorov の不等式によって

$$I_1,\ I_2\leqq\frac{9}{\varepsilon^2}\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}E\{|a_n(t)-a_n(t_i)|^2\}\,dt$$

$$\leqq\frac{9T}{\varepsilon^2}\sup_{|t-s|<\delta}E\{|a_n(t)-a_n(s)|^2\}\to 0\ ,\qquad \delta\downarrow 0$$

が成り立ち，証明が終る。

（証明終）

補題 2.2　$\mathbb{Z}=\{\xi(t),\ \mathcal{F}_t,\ t\in[0,T]\}$ を 1 次元 Brown 運動とする。

$x(t)=\int_0^t a(s)\,d\xi(s)$

$\theta=\theta_s^t=\int_s^t a(u)^2\,du$

と定義すると

$$P\Big\{\varlimsup_{\substack{|t-s|\downarrow 0\\ 0\leqq s,\ t\leqq T}}\frac{|x(t)-x(s)|}{\sqrt{2\theta\log\frac{1}{\theta}}}=1\Big\}=1$$

が $0<c_1\leqq a\leqq c_2<\infty$ を満たすとき成り立つ。この式より $x(t)$ の連続性の程度がわかる．また，a に関する有界性の条件がなくても連続性の程度はわかる。

証明　$\theta(t)=\int_0^t a(s)^2ds$ の左連続な逆函数を $\theta^{-1}(t)$ とおいて $x(\theta^{-1}(t))$ が Brown 運動であることを示せば P. Levy の一様連続性の定理（[20] 又は [19] 参照）が使えて証明が終る．いま，$a(s)$ を T 以後

$$a(s)=1\qquad (t>T)$$

と拡張する。

$$\sigma_t=\inf\Big\{t'\ ;\ \int_0^{t'}a(s,\omega)^2ds=t\Big\}$$

$$\mathcal{F}_{\sigma_t}=\{A;\ A\cap\{\sigma_t<s\}\in\mathcal{F}_s\ ,\ (s\geqq 0)\}$$

とおくと，$\mathcal{F}_{\sigma_t}$ が Borel field になる．このとき

i) $E\{x(\sigma_{t+s})-x(\sigma_t)\,|\,\mathcal{F}_{\sigma_t}\}=0$

ii) $E\{|x(\sigma_{t+s})-x(\sigma_t)|^2\,|\,\mathcal{F}_{\sigma_t}\}=s$

を示せば十分である． i) について示す．任意の $A\in\mathcal{F}_{\sigma_t}$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$\chi(A)(x(\sigma_{t+s})-x(\sigma_t))=\int_0^\infty a(u)\,\chi(\sigma_{t+s}\geq u)\,\chi(\sigma_t<u,A)\,d\xi_u$$

が成り立ち，ここで

$a(u)\,\chi(\sigma_{t+s}\geq u)\,\chi(\sigma_t<u,\ A)$ は $\mathcal{F}_u$ 可測

であるから，積分の定義によって

$$E\{\chi(A)\,(x(\sigma_{t+s})-x(\sigma_t))\}=0$$

よって i) を得る． ii) についても同様である．

（証明終）

定理2.1の証明　$A_n=(a_{ij}^{(n)}(x))$，$B_n=(b_i^{(n)}(x))$ を次の３条件を満たすようにとる．任意の n に対し

1) A_n，B_n は Lipschitz 条件を満たす。
2) $\|A_n(x)\|$，$\|B_n(x)\|\leq K(1+|x|)$
3) $n\to\infty$ とするとき，$A_n(x)\to A(x)$，$B_n(x)\to B(x)$ が広義一様に成り立つ。

任意の $a\in R^d$ に対して

$$dx_t=A_n\,d\xi_t+B_n\,dt\quad,\qquad x_0=a$$

なる微分方程式の unique 解を $x_n^{(a)}(t)$ とおく．まず，積分の形から

$$E\{|x_n^{(a)}(t)|^2\}\leq 3|a|^2+3\int_0^t E\{\|A_n\|^2\}\,ds+3t\int_0^t E\{\|B_n\|^2\}\,ds$$

が成り立ち，上の 1)，2) から

$$E\{|x_n^{(a)}(t)|^2\}\leq(1+3|a|^2)\,e^{3K(1+T)}-1$$

を得る（上式に 2) を代入して２章，補題3.2を用いる）。一方

$$\max_{0\leq t\leq T}|x_n^{(a)}(t)|\leq|a|+\max_{0\leq t\leq T}\sum_i\Big|\sum_j\int_0^t a_{ij}^{(n)}(x_n^{(a)}(s))\,d\xi_s^j\Big|+\sqrt{T\int_0^T\|B_n(x_n^{(a)}(s))\|^2ds}$$

が成り立ち，ここで，積分の定義と 1)，2) を使うと

$$\sum_{i=1}^d P\Big\{\max_{0\leq t\leq T}\Big|\sum_j\int_0^t a_{ij}^{(n)}(x_n^{(a)}(s))\,d\xi_s^j\Big|>N\Big\}\leq\frac{const(a,K,T)}{N^2}$$

$$P\Big\{\sqrt{T\int_0^T\|B_n(x_n^{(a)}(s))\|^2ds}>N\Big\}\leq\frac{const(a,K,T)}{N^2}$$

がわかるから，以上より，$N\uparrow+\infty$ とするとき

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$P\{\max_{0\le t\le T}|x_n^{(a)}(t)|>N\}\to 0 \qquad uniformly\ in\ n$$

を得る．いま，初期分布をμとしたときの積分方程式

$$x(t)=x(0)+\int_0^t A_n(x(s))\,d\xi_s+\int_0^t B_n(x(s))\,ds$$

の unique 解を $x_n(t)$ とおくと，上式より，$N\uparrow+\infty$ とするとき

4) $$P\{\max_{0\le t\le T}|x_n(t)|>N\}=\int P\{\max_{0\le t\le T}|x_n^{(a)}(t)|>N\}\mu(da)\to 0$$

uniformly in n

を得る．また，確率1にいくらでも近い nに無関係な集合Ω_1の上で，$x_n(t)$は有界だから，$A_n(x_n)$，$B_n(x_n)$ は有界で，従つて補題3が使えて，任意の$\varepsilon>0$に対して

5) $$\lim_{h\downarrow 0}\sup_{n\ge 1}P\{\max_{|t-s|\le h}|x_n(t)-x_n(s)|>\varepsilon\}=0$$

が成り立つ．次にR^{2d}上の確率過程 $y_n(t)$ を

$$y_n(t)=(x_n(t),\ \xi(t))$$

とおくと，4)，5) 式は $x_n(t)$ を $y_n(t)$ で置き換えても成り立つ．よって，定理1が $\{y_n(t)\}$ に対して成り立つて，適当な部分列 $\{n_k\}$，$n_0<n_1<n_2<\cdots$ を取ると，Wiener 空間 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{B},\widetilde{P})$ 上に $\{\widetilde{y}_{n_k}(t)\}$を構成することが出来て

i) $\widetilde{y}_{n_k}(t,\widetilde{\omega})=\{\widetilde{x}_{n_k}(t,\widetilde{\omega}),\widetilde{\xi}_{n_k}(t,\widetilde{\omega})\}$ は $y_{n_k}(t,\omega)$ と同分布 $(k=1,2,\cdots)$

ii) $$\lim_{k\uparrow\infty}\widetilde{P}\{\max_{0\le t\le T}|\widetilde{y}_{n_k}(t)-\widetilde{y}_0(t)|>\varepsilon\}=0 \qquad (\varepsilon>0)$$

を満たすように出来る．しかも，$x_n(0)$ と $\{\xi_n(t)\}$ とは独立だから，$\widetilde{x}_n(0)$ と $\{\widetilde{\xi}_n(t)\}$ とは独立である．1章§2の議論によって

$$x_n(t)=f(x_n(0),\{\xi_n(t)\}),\quad f\text{ は }(\cdot,\cdot)\text{ の Borel 函数}$$

と，解$x_n(t)$ が表現されているから，任意の実数θに対して

$$E\{e^{i\theta[x_n(t)-f(x_n(0),\{\xi_n(t)\})]}\}=1$$

が成り立ち，しかも左辺は分布にだけ依存し，空間の構造には無関係な量であるから

$$E\{e^{i\theta[\widetilde{x}_n(t)-f(\widetilde{x}_n(0),\{\widetilde{\xi}_n(t)\})]}\}=1,\quad \forall\theta\ \text{実数}.$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

よって，$\tilde{x}_n$ は

$$\tilde{x}_n(t)=f(\tilde{x}_n(0),\ \{\tilde{\xi}_n(t)\}) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

と表現されている．これは

$$\tilde{x}_n(t)=\tilde{x}_n(0)+\int_0^t A_n(\tilde{x}_n(s))\,d\tilde{\xi}(s)+\int_0^t B_n(\tilde{x}_n(s))\,ds$$

の成り立つことを意味する．

$$\mathcal{F}_t^{(n)}=\mathcal{B}\{\tilde{x}_n(0),\ \tilde{\xi}_n(s);\ \ s\leq t\} \qquad (n\geq 1)$$
$$\mathcal{F}_t^{(0)}=\mathcal{B}\{\tilde{x}_0(u),\ \tilde{\xi}_0(s);\ \ u,s\leq t\}$$

とおくと

$\mathcal{F}_t^{(0)}$ と $\{\tilde{\xi}_0(u)-\tilde{\xi}_0(s);\ t\leq s<u\}$ とは独立になる．

よって

$\{\tilde{\xi}_n(t),\ \mathcal{F}_t^{(n)},\ \tilde{P}\}$ は Brown 運動である $(n=0,1,2,\cdots)$．

$$\tilde{x}_n(t)=\tilde{x}_n(0)+\int_0^t A_n(\tilde{x}_n(s))\,d\tilde{\xi}_n(s)+\int_0^t B_n(\tilde{x}_n(s))\,ds$$

において補題3を使うと，$n\to\infty$ としたとき．

$$\tilde{x}_0(t)=\tilde{x}_0(0)+\int_0^t A(\tilde{x}_0(s))\,d\tilde{\xi}_0(s)+\int_0^t B(\tilde{x}_0(s))\,ds$$

が成り立ち　$\tilde{x}_0(t)$ が求める解となる．

注意　この定理に関して，unique 性については未解決である．例えば，$\det(a_{ij}(x))\neq 0$ のとき uniqueness が成り立つかどうか，また係数が連続であるという条件だけのもとでマルコフ過程になるような解が存在するかどうかはわからない．

§3　例

1°) unique 性の壊れる例（Girsanov[12]）

$$a(x)=\frac{|x|^\alpha}{1+|x|^\alpha} \quad \left(0\leq\alpha<\frac{1}{2}\right) \quad ,\quad b(x)=0$$

とおいて，1次元で　微分方程式

$$dx_t=a(x_t)\,d\xi_t$$

を考える．この場合，解 $\{x_t\}$ で強 Markov 過程であるものが，いろいろあることを示す．0以外では　局所的に　$a(x)$ は Lipschitz 条件を満たすから，

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

0に達するまでは強Markovでunique性を保つ．しかも，x_tはどの場合でもmartingaleとなるから

$$E\{x_t - x_0\} = 0 \quad .$$

よって

i) $x=0$ が trap となる．

ii) $x=0$ が regular となる．

の2つの場合が可能である（$x=0$が左又は右のtranslation pointであることはあり得ない。）．粗く言えば，i) はそこから離れず ii) はどちらの方向へも行くということである。i) の場合の解が存在することは明らかであるから，今後 ii) の場合を考える．このときの生成作用素 $\mathfrak{G}$ は

$$\mathfrak{G} = \frac{d}{m(dx)} \frac{d}{ds(x)}$$

となる。ここで

$x \neq 0$ では $\quad s(x) = x + const.$

$$m(dx) \doteq \frac{2}{a(x)^2} dx$$

$x=0$ では $\quad m(0) = c \geq 0$

である．実際，この方程式に対する解が存在することは，次のようにして示される．いま，$a_n(x)$ を

1) Lipschitz条件を満たし，$a_n(x) > 0$ かつ

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |a_n(x)^2 - a(x)^2| = 0$$

2) $$2 \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f(x) a_n(x)^{-2} dx = \int_{-1}^{1} f(x) m(dx) \qquad (f \in C[-1,1])$$

を満たすように選ぶ．$a(x)$において $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ より これは可能である。

この $a_n(x)$ に対して，方程式の unique 解を $x_n(t)$ とする．$\{x_n(t)\}$ は diffusion である。$\{x_n(t)\}$ に対する半群及びGreen作用素を H_t^n, G_α^n とおく。この $\{x_n(t)\}$ において，$x=\infty$ は natural となっているから，C_0 を $t=\pm\infty$ で0となる連続函数の全体とすると，

H_t^n は C_0 を C_0 に移し，$t=0$ で強連続な半群である。

任意の $f \in C_0$ に対して $g_n = G_\alpha^n f$ とおくと

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$\alpha g_n \quad \frac{2}{a_n(x)^2} g_n'' = f$$

$$\|g_n\| \leqq \frac{\|f\|}{\alpha}$$

を満たす．両辺を積分すると，$\{g_n\}$ が一様有界，同程度連続なことがわかる。よって

$$g = \lim_{k\to\infty} g_{n_k} \quad (\text{ある部分列にそって})$$

が存在して

$$\alpha g - \frac{d}{dm}\frac{d}{dx} g = f \qquad (f \in C_0)$$

を満たす。ここで，方程式の C_0 に入る解は *unique* であるから

$$g = \lim_{n\to\infty} g_n \quad (\text{部分列をとらなくても})$$

以上より

$$G_\alpha^n f \longrightarrow G_\alpha f \qquad \textit{uniformly}$$

ここで　G_α は $\frac{d}{dm}\frac{d}{dx}$ − 過程の *Green* 作用素．H_t はその半群とすると，*Trotter* [34] の定理によって

$$H_t^n f \longrightarrow H_t f \qquad \textit{uniformly}$$

これから　任意の $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ と $(f_1, f_2, \cdots, f_k)$ $(f_i \in C_0)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} E\{f_1(x_n(t_1)) f_2(x_n(t_2)) \cdots f_k(x_n(x_k))\} = \lim_{n\to\infty} H_{t_1}^n f_1 H_{t_2-t_1}^n f_2 \cdots H_{t_k-t_{k-1}}^n f_k$$
$$= H_{t_1} f_1 H_{t_2-t_1} f_2 \cdots H_{t_k-t_{k-1}} f_k$$

このことより，定理2.1の証明におけるように $n \to +\infty$　として得られる確率微分方程式の解が $\frac{d}{dm}\frac{d}{dx}$ − 過程であることがわかる。

2°) *unique* 性が成り立つ例（*Skorokhod* [32]）

1次元で　$a(x)$ が *Hölder* 連続 $(\alpha > \frac{1}{2})$

$$|a(x) - a(y)| \leqq L|x-y|^\alpha$$

を満たすとき，解は *unique* になる．*Skorokhod* [32] はこのことを1次元確率微分方程式に対する比較定理ともいうべきものを用いて証明している．ここでは直接的に示す。確率微分方程式における *Brown* 運動は共通にとれているとする．いま，$f \in C^2$ に対しては　確率微分の定理（1章，§2）より

$$f(x_t - y_t) = \int_0^t f'(x_s - y_s)(a(x_s) - a(y_s))\, d\xi_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(x_s - y_s)(a(x_s) - a(y_s))^2\, ds$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

が成り立ち，従って

$$(3.1)\qquad E\{f(x_t-y_t)\}=\frac{1}{2}\int_0^t E\{f''(x_s-y_s)(a(x_s)-a(y_s))^2\}\,ds$$

が成り立つ．ここで

$$f_n''(x)=\begin{cases} 1 & \frac{2}{n^2}\leqq x\leqq 1-\frac{1}{n^2} \\ 0 & 0\leqq x\leqq \frac{1}{n^2} \\ 0\text{と}1\text{との間} & \text{その他} \end{cases}$$

かつ　$f_n''\in C$　なるようにとり

$$f_n'(x)=\int_0^x f_n''(y)\,dy \quad , \quad f_n(x)=\int_0^x f_n'(y)\,dy$$

$$(f(x)\leqq |x| \quad , \qquad f(x)\to|x| \qquad \text{as}\quad n\to\infty)$$

によって定義される f_n を (3.1)に代入すると

$$E\{f_n(x_t,y_t)\}\leqq\frac{1}{2}\int_0^t n\,L^2\left(\frac{1}{n}\right)^{2\alpha}ds\leqq const.\ n^{-2\alpha-1}$$

故に　$n\to+\infty$　として

$$E\{|x_t-y_t|\}=0$$

を得る。

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

4章 Driftの変換

Brown運動 ξ_t に drift の項 B dt だけがつけ加わった形の確率微分方程式

$$dx_t = d\xi_t + B\,dt \tag{0.1}$$

によってきまるマルコフ過程は，Brown 運動にいわゆる drift の変換をほどこすことによっても構成出来る。このことは Maruyama [21] により1次元拡散過程の遷移確率の研究において用いられ，Motoo [27] により多次元の場合独立に得られた．又，Girsanov [9] の研究もある。drift の変換は Dynkin [5] による Markov 過程の multiplicative functional による変換の特別な場合である。すなわちBrown運動の平均値1の multiplicative functionalによる変換に相当しており，このような変換で得られる process のクラスは確率測度が各 $\mathcal{B}_t$ の上で Wiener 測度と互いに絶対連続であるということにより特徴づけられる。実際このような絶対連続性をもつ時間的に一様なマルコフ過程は(0.1)の形に限ることを証明できる。それには Brown 運動の平均値1の（homogeneousな）multiplicative functional α_t が

$$exp\left[\sum\int_0^t f^i(\xi_s)\,\xi_s^i - \frac{1}{2}\sum\int_0^t |f^i(\xi_s)|^2 ds\right] \tag{0.2}$$

の形をしていることを示す必要がある．このことは Ventsel [36] において述べられているが，証明が与えられていないので，この章の前半（§1－§5）でくわしくとりあつかう。この議論は一般のマルコフ過程に対してもある程度拡張できる．次にこの章の後半では(0.2)を用いて変換された processes が満たす確率微分方程式について述べる（[9]）．

§1 マルコフ過程のadditive および multiplicative functionals.

この§では，§2以後の準備のために Hunt process の additive および multiplicative functionalsの定義と記号について述べる。（詳しく

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

は Motoo [28] 参照).

Sを可算基を持つ局所コンパクト Hausdorff 空間とし $\bar{S}=S\cup\{\infty\}$ をSの1点コンパクト化, $\mathcal{B}$を$\bar{S}$の位相的 Borel field とする。$\mathcal{B}$上の有界測度μに対し$\mathcal{B}_\mu$を$\mathcal{B}$のμ-完備化とし $\bar{\mathcal{B}}=\bigcap_\mu \mathcal{B}_\mu$ と書く。Wを$[0,+\infty)\to\bar{S}$ の中への函数 w で次の性質を持つものの全体とする: w の t における値を $w_t=x_t(w)=x(t,w)$ 等と書き, $\zeta(w)=\inf\{t\geqq 0\mid x_t(w)=\infty\}$ としたとき $x_t(w)=\infty\ (t\geqq\zeta(w))$ かつ x_t は右連続左極限を持つ。このとき stopped path, shifted path を w_t^-, w_t^+ であらわし, $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}_t$ をそれぞれ $\{w\mid x_t(w)\in A\}\ (t\geqq 0,\ A\in\mathcal{B})$, $\{w\mid w_t^-\in B\}\ (B\in\mathbb{B})$ から生成される Borel fields とする。$\mathbb{B}$の上に確率測度の族$\{P_x(\cdot),\ x\in\bar{S}\}$ が与えられ $\{W, x_t \mathbb{B}_t, P_x\}$ が擬左連続性, 強マルコフ性を持つと仮定する。次に$\bar{S}$上の有界測度μに対し $\bar{\mathbb{B}}=\bigcap_\mu\{\mathbb{B}$ の P_μ-完備化$\}$, $\bar{\mathbb{B}}_t=\bigcap_\mu\{\mathbb{B}_t$ の P_μ-完備化$\}$ とする。マルコフ time σ およびそれに対応する Borel field $\bar{\mathbb{B}}_\sigma$ 等も $\bar{\mathbb{B}}_t$ をもとにして普通のように定義する。このとき P_x は$\bar{\mathbb{B}}$の上まで拡張できて $\mathcal{M}=\{W, x_t, \bar{\mathbb{B}}_t, P_x\}$ は右連続, 擬左連続の強マルコフ過程になる。これをS上の Hunt process という。

<u>定義 1.1.</u>　$\varphi=\varphi(t,w)=\varphi_t(w):[0,+\infty)\times W\to(-\infty,+\infty]$ が almost additive functional であるとは, 次の性質を持つことをいう。

1) φ_t は $\bar{\mathbb{B}}_t$-可測
2) $^\forall\mu$ に対し　$P_\mu\{\varphi(\cdot,w)$ は右連続, かつ $\varphi(\zeta-,w)=\varphi(t,w)$, $^\forall t\geqq\zeta\}=1$
3) $^\forall\mu$ に対し　$P_\mu\{\varphi(s+t,w)\neq\varphi(s,w)+\varphi(t,w_s^+)\}=0$, $^\forall s,t\in[0,+\infty)$.

<u>定義 1.2</u>　almost additive functional のφが強マルコフ性:

$$(1.1)\quad \begin{cases}\text{任意のマルコフ time } \sigma \text{ および } \bar{\mathbb{B}}\text{-可測な } T\ (T\geqq\sigma) \text{ に対し}\\ P_\mu\{\varphi(T,w)=\varphi(\sigma,w)+\varphi(T-\sigma,\ w_\sigma^+)\}=1\end{cases}$$

をもつときに additive functional という。

<u>注意</u>　(1.1) におけるTとしては $\sigma+t\ (t\geqq 0\ const.)$ だけをとっても充分である。

<u>定義 1.3</u>　$\alpha=\alpha(t,w)=\alpha_t(w):[0,+\infty)\times W\to[0,+\infty)$ が次の性質を持

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

つとき almost multiplicative functional という。

i) $-\log \alpha_t$ が almost additive functional.

ii) 任意の $t \in [0, +\infty)$ および $x \in \bar{S}$ に対し $E_x(\alpha_t) < +\infty$.

さらに $-\log \alpha_t$ が強マルコフ性を持つとき multiplicative functional という。

Additive (multiplicative) functional を実際に構成する際には (1.1) の性質の check が問題になることが多いので，このための簡単な criterion を述べる。multiplicative functional α に対して $P_x(\alpha_0 = 0) = 1$ のとき x を non-permanent 点，$P_x(\alpha_0 = 1) = 1$ のとき x を permanent 点といい，permanent 点の全体を $\mathcal{P}$ と書く.

定理1.1 (Meyer[26]). almost multiplicative functional α_t が強マルコフ性を持つための必要充分条件は,

$$\hat{\alpha}_t = \begin{cases} 1, & \alpha_t > 0 \quad のとき \\ 0, & \alpha_t = 0 \quad のとき \end{cases}$$

としたとき $\hat{\alpha}_t$ が multiplicative functional になることである.

定理1.2 (Meyer[26]). α を $\alpha_t \leq 1$ を満たす almost multiplicative functional とする。このとき α が強マルコフ性をもつ (multiplicative functional になる) ための必要かつ充分条件は任意のマルコフ time σ および任意の x に対して

$$(1.1) \qquad P_x(x_\sigma \notin \mathcal{P},\ \alpha_\sigma \neq 0) = 0$$

が成り立つことである.

この定理より有限な non-negative almost a.f. φ_t および 0 にならない almost m.f. α_t はいずれも強マルコフ性を持つことがわかる。

定理 1.1 の証明は省略し，定理 1.2 の証明をする。 1° 必要性. $P_x\{\alpha_\sigma(w) = \alpha_\sigma(w)\alpha_0(w_\sigma^+)\} = 1$ より $P_x\{\alpha_0(w_\sigma^+) = 0,\ \alpha_\sigma(w) \neq 0\} = 0$. 故に $E_x\{P_{x_\sigma}(\alpha_0 = 0);\ \alpha_\sigma \neq 0\} = 0$，すなわち (1.1) が成り立つ. 2° 充分性. マルコフ過程 $\mathcal{M}$ の Green 作用素を G_λ とし

$$Q_t(x, f) = E_x[\alpha_t f(x_t)], \quad K_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t\, dt$$

とおく。まず，はじめに

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$(1.2)\qquad \begin{cases} f \geqq 0,\ \lambda > 0 \text{ に対し } \lambda\text{-excessive } h_\lambda \text{ があって} \\ K_\lambda f(x) = G_\lambda f(x) - h_\lambda(x),\ x \in \mathcal{D}. \end{cases}$$

を示す．$g_\lambda = (G_\lambda - K_\lambda) f \geq 0$，$g_{\lambda,\alpha} = \alpha G_{\alpha+\lambda} g_\lambda$ とおくと resolvent 方程式を用いて $g_{\lambda,\alpha} = \alpha G_\lambda [g_\lambda - \alpha G_{\alpha+\lambda} g_\lambda]$

さらに

$$g_\lambda - \alpha G_{\alpha+\lambda} g_\lambda = G_{\alpha+\lambda} f + \alpha G_{\alpha+\lambda} K_\lambda f - K_\lambda f$$

$$G_{\alpha+\lambda} K_\lambda f \geq E.\left[\int_0^\infty e^{-(\alpha+\lambda)t} \alpha_t K_\lambda f(x_t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha} K_\lambda f - \frac{1}{\alpha} E.\left[\int_0^\infty e^{-(\lambda+\alpha)s} \alpha_s f(x_s)\,ds\right]$$

$$\geq \frac{1}{\alpha} K_\lambda f - \frac{1}{\alpha} G_{\alpha+\lambda} f,$$

したがって $g_\lambda - \alpha G_{\alpha+\lambda} g_\lambda \geq 0$．故に $g_{\lambda\alpha}$ は λ-excessive になる．又，$\alpha G_{\alpha+\lambda} g_\lambda \leq g_\lambda$ と resolvent 方程式を用いると $g_{\lambda,\alpha} = \alpha G_{\alpha+\lambda} g_\lambda$ は $\alpha\uparrow$ のとき増大することがわかり，$\lim_{\alpha\uparrow\infty} g_{\lambda,\alpha} \equiv h_\lambda$ は λ-excessive になる．そして

$$G_\lambda f - h_\lambda = G_\lambda f - \lim_{\alpha\uparrow\infty} \alpha G_{\alpha+\lambda} (G_\lambda - K_\lambda) f$$

$$= \lim_{\alpha\uparrow\infty} \alpha G_{\alpha+\lambda} K_\lambda f$$

$$= \lim_{\alpha\uparrow\infty} \alpha G_\alpha K_\lambda f,$$

$$K_\lambda f = \lim_{\alpha\uparrow\infty} (\alpha - \lambda) K_\alpha K_\lambda f \qquad (f:\text{有界})$$

$$= \lim_{\alpha\uparrow\infty} \alpha K_\alpha K_\lambda f.$$

故に $x \in \mathcal{D}$ であれば $\alpha K_\alpha 1(x) \to 1\ (\alpha \to \infty)$ であるから

$$G_\lambda f(x) - h_\lambda(x) - K_\lambda f(x)$$

$$= \lim_{\alpha\uparrow\infty} (\alpha G_\alpha - \alpha K_\alpha) K_\lambda f(x) = 0.$$

定理1.2の証明のためには任意のマルコフ time σ および初期分布 μ に対し

$$(1.3)\qquad E_\mu[f(x_{\sigma+t})\alpha_{\sigma+t};\Lambda] = E_\mu[\alpha_\sigma Q_t(x_\sigma, f);\Lambda],\ {}^\forall\Lambda \in \overline{\mathcal{B}}_\sigma.$$

を示せばよいが，両辺ともに t につき右連続であるから Lapalce変換した形を

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

示せば充分である。

$$\sigma_n(w) = \inf\{k2^{-n} \mid k2^{-n} > \sigma(w)\}$$

とおくと，マルコフ性および(1.2)を用いて

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} E_\mu[\alpha_{\sigma_n+t} f(x_{\sigma_n+t});\ \Lambda]\,dt$$

$$= E_\mu[\alpha_{\sigma_n} K_\lambda f(x_{\sigma_n});\ \Lambda]$$

$$= E_\mu[\alpha_{\sigma_n}(G_\lambda f - h_\lambda)(x_{\sigma_n});\ \Lambda].$$

ここで $n \uparrow +\infty$ とすると，α の右連続性と，$G_\lambda f$, h_λ 共に *excessive* であるから *path* の上で右連続であるという性質を用いて

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} E_\mu[\alpha_{\sigma+t} f(x_{\sigma+t});\ \Lambda]\,dt$$

$$= E_\mu[\alpha_\sigma(G_\lambda f - h_\lambda)(x_\sigma);\ \Lambda]$$

$$= E_\mu[\alpha_\sigma K_\lambda f(x_\sigma);\ \Lambda]$$ （証明終）

§2. 確率積分からきまる *additive functional*

Brown 運動 ξ_t を R^d 上の *Hunt process* と考えたとき，それを $M_0 = \{W, \xi_t, \overline{\mathcal{B}}_t, P_x\}$ と書く．目標は M_0 の平均値 *1* の *multiplicative functional* の標準形(0.2)を求めることであるが，このための準備としてこの§では確率積分の *version* が *additive functional* になるようにとれることを示す。

$R^d \supset A$ (*Borel*) に対し

$$P_x\{x_t \in A,\ 0 \leq {}^\forall t < {}^\exists\sigma(w)\} = 1\ ,\quad {}^\forall x \in A$$

が成り立つとき A を *fine open* ということにする。次の定理は *additive functional* の議論において平均値の存在の仮定をのけるのに役立つ。

<u>定理 2.1</u>　(*McKean*).　φ_t を M_0 の連続有限な *additive functional* とし

$$\overline{\varphi}_t = \max_{0 \leq s \leq t} |\varphi_s|$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

とおくと，次の a), b) をみたすような fine open の増大列 $\{B_n\}$ がある．

a) $B_n \uparrow R^d$ かつ $P_x\{\sigma_n \uparrow +\infty,\ n\uparrow +\infty\}=1$, $\forall x\in R^d$,

ただし $\sigma_n = \inf\{t>0 \mid x_t \notin B_n\}$.

b) 各 n に対して定数 $c_1, c_2>0$ があって

$$P_x\{\bar{\varphi}(\sigma_n)>t\} < c_1 e^{-c_2 t}, \quad x\in B_n,$$

したがって特に $\bar{\varphi}(\sigma_n)$ はすべての order ≥ 0 の moment をもつ。

<u>証明</u>　2段階に分ける．1°. 有界領域Dをとり

$$(2.1)\quad \begin{cases} \tau(w)=\max\limits_{0\leq t\leq \sigma}|\varphi_\sigma-\varphi_t|, & \sigma=\inf\{t>0\mid x_t\notin D\} \\ e_\lambda(x)=E_x[e^{-\lambda\tau}], \ \bar{e}_\lambda(x)=[e^{-\lambda\bar{\varphi}_\sigma}] & (\lambda>0,\ x\in D) \end{cases}$$

とおく。容易に $\tau/2 \leq \bar{\varphi}_0 \leq 2\tau$ がわかるから

$$(2.2)\qquad 0<e_{2\lambda}\leq \bar{e}_\lambda \leq e_{\lambda/2}$$

が成り立つ。更に

$$\begin{aligned} &E_x[(1-e_\lambda)(x_t),\ t<\sigma] \\ &= E_x[1-e^{-\lambda \max\limits_{t\leq t+s\leq \sigma}|\varphi_\sigma-\varphi_{t+s}|},\ t<\sigma] \\ &\uparrow 1-e_\lambda(x), \quad t\downarrow 0 \end{aligned}$$

であるから $1-e_\lambda$ は σ で殺した process に関し excessive （以下これを単にDで excessive という）になる。故に $\lambda, \varepsilon>0$ に対し

$$B=B(\lambda,\varepsilon,D)=\{x\mid e_\lambda(x)>\varepsilon,\ x\in D\}$$

は fine open になり，$x\in B$ に対しては (2.2) により

$$\begin{aligned} \varepsilon &< e_\lambda(x) \leq \bar{e}_{\lambda/2}(x) \\ &\leq P_x[\bar{\varphi}_\sigma\leq T]+e^{-\frac{\lambda T}{2}} \\ &= 1-P_x[\bar{\varphi}_\sigma>T]+e^{-\frac{\lambda T}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_x[\bar{\varphi}(\sigma_{B^c})>T] &\leq P_x[\bar{\varphi}_\sigma>T] \\ &\leq 1-\varepsilon+e^{-\frac{\lambda T}{2}} \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

故に充分大きなTに対し

$$P_x[\bar{\varphi}(\sigma_{B^c})>T] \leqq c<1, \qquad x\in B$$

が成り立つ。次に

$$\tau_n = \inf\{t>0 \mid \bar{\varphi}_t = nT\}$$

とおくとφの additivity により

$$\tau_n \geqq \tau_{n-1}+\tau_1(w^+_{\tau_{n-1}}) .$$

故に

$$\begin{aligned} P_x[\bar{\varphi}(\sigma_{B^c})>nT] &= P_x[\tau_n<\sigma_{B^c}] \\ &\leqq E_x[P_{\xi(\tau_{n-1})}(\tau_1<\sigma_{B^c});\ \tau_{n-1}<\sigma_{B^c}] \\ &\leqq cP_x[\tau_{n-1}<\sigma_{B^c}] \\ &\leqq c^n \qquad (\text{induction}), \end{aligned}$$

これより，ある定数 $c_1, c_2>0$ に対して

$$P_x[\bar{\varphi}(\sigma_{B^c})>t] \leqq c_1 e^{-c_2 t} \quad , \quad x\in B$$

が成り立つ．また，明らかに $A_n \equiv B(\lambda, \frac{1}{n}, D)\uparrow D\ (n\uparrow+\infty)$ で，$\inf_{0\leqq t\leqq\sigma} e_\lambda(x_t)>0$ (a.e) であるから

$$P_x[\sigma_{A_n^c}=\sigma \text{ for all suff. large } n]=1 , \quad x\in D$$

が成り立つ．

2°. 各nに対し λ_n, $\varepsilon_n>0$, D_nを適当にとって $n\uparrow+\infty$ のとき $B(\lambda_n, \varepsilon_n, D_n)$が R^d に増大するように出来れば定理の証明は終るわけであるが，これよりも弱い次のことを示すだけで充分である：「$\dot{D}$を$\bar{D}$を含む有界領域とし，KをDに含まれる任意のコンパクト集合としたとき，与えられたλ, $\varepsilon>0$ に対し

$$B(\lambda, \varepsilon, D)\cap K \subset B(\mu, \delta, \dot{D})$$

をみたすような $\mu, \delta>0$ が存在する。」いま，(2.1) におけるDの代りに$\dot{D}$を用いて定義される函数 e_λ, $\bar{e}_\lambda$ をそれぞれ $\dot{e}_\lambda$, $\hat{e}_\lambda$ とかくと

$$\dot{e}_\mu \geqq \hat{e}_{2\mu} \geqq E.[\exp\{-2\mu\bar{\varphi}_\sigma\}\hat{e}_{2\mu}(\xi_\sigma)]$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$\geq E.\left[exp\{-2\mu\bar{\varphi}_\sigma\}\,\dot{e}_{4\mu}(\xi_\sigma)\right].$$

一方，$B(4\mu,\varepsilon,\dot{D})\uparrow\dot{D}\ (\mu\downarrow 0)$ であるから，ある$\mu>0$があって

$$P_x[\Lambda]\geq 1-\frac{\varepsilon}{2},\quad x\in K;\quad \Lambda=\{\xi_\sigma\in\partial D\cap B(4\mu,\varepsilon,\dot{D})\}$$

が成り立つ。故に　$x\in B(\lambda,\varepsilon,D)\cap K$ に対しては

$$\begin{aligned}\dot{e}_\mu(x)&\geq\varepsilon E_x\left[exp\{-2\mu\bar{\varphi}_\sigma\};\ \Lambda\right]\\&=\varepsilon E_x\left[exp\{-2\mu\bar{\varphi}_\sigma\}\right]-\varepsilon E_x\left[exp\{-2\mu\bar{\varphi}_\sigma\};\ \Lambda^c\right]\\&\geq\varepsilon e_{4\mu}(x)-\frac{\varepsilon^2}{2}\\&\geq\frac{\varepsilon^2}{2}\qquad(4\mu\leq\lambda\ とする).\end{aligned}$$

これは　$B(\lambda,\varepsilon,D)\cap K\subset B(4\mu,\varepsilon^2/2,\dot{D})$　を意味する．

（証明終）

<u>補題2.1</u>　　$\{\xi_t,\mathcal{F}_t,P\}$ をd次元の$Brown$運動とし　$\Phi=(\varphi^1(t,\omega),\cdots,\varphi^d(t,\omega))$ を (t,ω) 可測　かつ　tを固定したとき　ω につき　$\mathcal{F}_t$-可測とし　$|\Phi|\leq c$　とする．

(2.3)　　$$\zeta_s^t=\zeta_s^t(\Phi)=\sum\int_s^t\varphi^i(u)\,d\xi_u^i-\frac{1}{2}\sum\int_s^t|\varphi^i(u)|^2du$$

とすると　$\alpha\geq 1$　に対し

$$E\left[exp(\alpha\zeta_s^t)\right]\leq exp\left[\frac{(\alpha^2-\alpha)}{2}(t-s)c^2\right].$$

が成り立つ．$\alpha=1$ のときは等号が成り立つ。また，Φが有界でなくても(2.3)が定義されていれば　$E[exp\,\zeta_s^t]\leq 1$ が成り立つ．

<u>証明</u>

$$\tau_N=inf\{t>s:\ exp\,\alpha\zeta_s^t=N\}$$

$$\eta_N(t)=exp\,\alpha\zeta_s^{t\wedge\tau_n}$$

とおくと確率積分の変換公式により

$$\eta_N(t)=1+\alpha\int_s^t\Phi(x_u)\,\eta_N(u)\,\chi(\tau_N>u)\,d\xi_u$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$+\frac{(\alpha^2-\alpha)}{2}\int_s^t |\Phi|^2 \eta_N(u)\chi(\tau_N>u)\,d\xi_u$$

両辺の平均値をとると

$$E[\eta_N(t)] \le 1+\frac{(\alpha^2-\alpha)c^2}{2}\int_s^t E[\eta_N(u)]\,du \tag{2.4}$$

$$\le exp\left[\frac{(\alpha^2-\alpha)}{2}(t-s)c^2\right].$$

$N\to\infty$ とすると $Fatou$ の公式により

$$E[exp\,\alpha\zeta_s^t] \le exp\left[\frac{(\alpha^2-\alpha)}{2}(t-s)c^2\right] \tag{2.5}$$

$\alpha=1$ のときは (2.4) により $\eta_N(t)$ が N に関し一様可積分になるから (2.5) において等号が成り立つ。Φ が有界でないときも $Fatou$ の不等式を用いればよい。

定理2.2　f を R^d 上の可測函数で

$$P_x\left\{\int_0^t |f(\xi_s)|^2 ds<+\infty,\ \forall t<+\infty\right\}=1,\ \forall x, \tag{2.6}$$

を満たすとすると，確率積分

$$\int_0^t f(\xi_s)\,d\xi_s^i \qquad (1\le i\le d) \tag{2.7}$$

の $version$ を $additive\ functional$ になるように構成できる。

証明　1°. 確率積分 (2.7) が出発点 x に無関係に定義できることの証明．f が R^d 上で有界で一様連続のときはこのことは明らかである．一般の f に対しては $\int_0^t |f(\xi_s)|^2 ds$ は $additive\ functional$ であるから定理2.1により $E_x[\int_0^{\sigma_n} |f(\xi_s)|^2 ds]$ は B_n 上で有界である．ただし B_n, σ_n は定理2.1におけるものとする．いま，g を R^d 有界一様連続とすると

$$E_x\left[\left\{\int_\delta^{\sigma_n} f(\xi_t)\,d\xi_t^i-\int_\delta^{\sigma_n} g(\xi_t)\,d\xi_t^i\right\}^2;\ \delta<\sigma_n\right]$$

$$\le \frac{1}{(2\pi\delta)^{\frac{d}{2}}}\int_{B_n} E_x\left[\int_0^{\sigma_n}|f-g|^2 dt\right]dx,\quad x\in B_n.$$

故に有界一様連続な函数列 $\{g_n\}$ があって

$$E_x\left[\left\{\int_{\frac{1}{n}}^{\sigma_n}(f-g_n)\,d\xi_t^i\right\};\ \frac{1}{n}<\sigma_n\right]<2^{-n},\quad x\in B_n$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

そこで $\int_0^t f\,d\xi_s^i = \lim \int_{\frac{1}{n}}^{\sigma_n \wedge t} g_n\,d\xi_s^i$ と定義すればよい.

2°. 1°によって出発点に無関係に定義された確率積分は容易にわかるように *almost additive functional* である. 定理1.1を用いてこれが強マルコフ性を持つことを示す. 補題2.1により $\exp\{\int_0^t f d\xi_s^i - \frac{1}{2}\int_0^t f^2 ds\}$ は平均値≤ 1の *almost multiplicative functional* である。そして明らかに0にはならない。故にそれは強マルコフ性を持つ。従って $\int_0^t f d\xi_s^i$ も強マルコフ性を持つ。 (証明終)

§3. Brown運動の連続な *additive functional*.

multiplicative functional の表現を求めるためには, まず *additive functional* を調べる必要がある. この§では *Ventsel*[36, 37] の結果をのべる([35]).

φをM_0の連続な *additive functional* とし, $\bar{\varphi}$を§2同様に定義する.

<u>定理3.1</u> (*Ventsel*[36, 37]). 連続な *additive functional* φに対して *fine open* の増大列$\{B_n\}$があって

a) $R^d = \bigcup B_n$; $\sigma_n = \inf\{t > 0 \mid x_t \notin B_n\} \uparrow +\infty$ (a.e.), $n \uparrow +\infty$

b) f_n および $g_n = (g_n^1, \cdots, g_n^d)$ があって

$$\varphi(t) = f_n(\xi_t) - f_n(\xi_0) + \sum_i \int_0^t g_n^i(\xi_s)\,d\xi_s^i, \quad t < \sigma_n .$$

<u>証明</u> <u>(A) φが次の条件(3.1)をみたす場合</u>

$$(3.1)\quad \begin{cases} \text{任意の有界領域}D\text{に対して} \\ \sup_{x \in D} E_x[\bar{\varphi}(\sigma)^2] < +\infty, \quad \sigma = \inf\{t > 0 \mid x_t \notin D\} . \end{cases}$$

Dを固定し

$$\begin{cases} I(t, w) = \varphi(t, w) - [f(\xi_t) - f(\xi_0)], \quad t < \sigma \\ f(x) = -E_x[\varphi(\sigma)] \end{cases}$$

とおくと, $I(t, w)$は $t \leq \sigma$において *additive* で $E_x[I(t \wedge \sigma)] = 0$をみたす. Dの *Green* 函数を$G(x, y)$とし, $L_2(x)$を各成分(D上の実函数)が$L_2(G(x, y)dy)$にぞくするような組$v = (v^1, \cdots, v^d)$の全体とし, $L_2(x)$に内積を

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$(v_1, v_2)_x = \sum_i \int_D G(x,y) v_1^i(y) v_2^i(y)\, dy$$

によって定義する。$L_2(x)$ は Hilbert 空間になる。$v \in \bigcap_{x\in D} L_2(x)$ に対しては連続な additive functional

$$I_v(t,w) = \sum \int_0^t v^i(\xi_s)\, d\xi_s^i = \int_0^t v\, d\xi\ , \quad t < \sigma$$

が定義される。明らかに

$$E_x[I_{v_1}(\sigma) I_{v_2}(\sigma)] = (v_1, v_2)_x\ , \quad x \in D$$

が成り立つ。次に

$$\begin{cases} p_\pm(x,v) = E_x[|I(\sigma) \pm I_v(\sigma)|^2] \\ p(x,v) = E_x[I(\sigma) I_v(\sigma)] = \frac{1}{4}(p_+ - p_-) \end{cases}$$

とおくと容易にわかるように $p_\pm$ はポテンシャル（核は G）になる。故に Riesz 測度 $\mu_v^\pm$ をもつ。従って

1° signed measure μ_v が唯一つあって

$$p(x,v) = \int G(x,y)\, \mu_v(dy)\ .$$

2° $g \in \bigcap L_2(x)$ が唯一つあって

$$p(x,v) = (v,g)_x\ , \quad {}^\forall x \in D,\ v \in \bigcap L_2(x).$$

2°の証明： 3段階にわける.

i) D の部分領域 $\dot{D}$ において $v=0$ であれば そこで μ_v も 0 になる。

ii) χ_E を D の Borel 集合 E の定義函数とし，$v_i = (0, \cdots, 0, \overset{i\text{番目}}{\chi_E}, \cdots, 0)$ とすると

$$p_+(x, v_i) + p_-(x, v_i) = 2p_+(x, 0) + 2\int G(x,y)\, v_i(y)^2 dy$$

$$d\mu_{v_i}^+ + d\mu_{v_i}^- = 2d\mu_0^+ + 2|v_i|^2 dy\ .$$

故に E が $\mu_0^+(\partial E) = 0$ をみたす領域であれば i) を考慮して

$$(3.2) \quad \begin{cases} \mu_{v_i} = 0 & D-E \text{ 上で} \\ \mu_{\bar{v}_i} = 0 & \bar{E} \text{ 上で} \quad (\text{ただし } \bar{v}_i = (0, \cdots, 0, \overset{i\text{番目}}{\chi_{D-E}}, 0, \cdots, 0)) \\ \mu_{v_i} + \mu_{\bar{v}_i} = \mu_1^i\ , \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

ただし μ_1^i は $\varphi=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ としたときの $p(x,\varphi)$ の Riesz 測度である．(3.2) により

(3.3) $$d\mu_{v_i}=\chi_E\, d\mu_1^i$$

を得るが，$p(x,v_i)$ が E について signed measure であることが容易にわかるから (3.3) は任意の Borel 集合 E に対しても成り立つ．

iii) (3.3) により v の各成分が Borel 集合の定義函数の一次結合であれば

(3.4) $$p(x,v)=\sum\int G(x,y)\,v^i(y)\,d\mu_1^i$$

が成り立つ．一方，x を固定したとき $p(x,v)$ は $L_2(x)$ 上の線型汎函数であるから，Riesz の定理によって

$$p(x,v)=\sum\int G(x,y)\,v^i(y)\,g_x^i(y)\,dy\,,\quad {}^{\exists 1}g_x\in L_2(x)\,.$$

これと (3.4) とを比較すると $d\mu_1^i=g_x(y)dy$, 即ち g_x は x に無関係でそれを g とかいたとき 2° の式が成り立つ。

3° $I(t,w)=I_g(t,w)$, $t<\sigma$ (a.e.)

(∵) $\bar{I}\equiv I-I_g$ は $t<\sigma$ において additive で

(3.5) $$E_x[\bar{I}(\sigma)I_v(\sigma)]=0$$

をみたす。3° を示すには $\bar{D}$ 上の連続函数 $F_1,\cdots,F_n$ および $0\leq t_1<\cdots<t_n<+\infty$, $0\leq t<+\infty$ に対し

$$E_x[F_1(\xi_{t_1\wedge\sigma})\cdots F_n(\xi_{t_n\wedge\sigma})\,\bar{I}(t\wedge\sigma)]=0$$

を示せばよいが，更に $\bar{I}$ の additivity と (3.5) を用いることにより $E_x[F(\xi_{t\wedge\sigma})\bar{I}(t\wedge\sigma)]=0$ を示せば充分である。$F=F_0+h$ (ただし h は D で harmonic で境界値 F をもつ) とかき，確率積分に関する公式を用いて

$$E_x[h(\xi_{t\wedge\sigma})\bar{I}(t\wedge\sigma)]=h(x)E_x[\bar{I}(t\wedge\sigma)]$$
$$+E_x[I_{grad\,h}(t\wedge\sigma)\bar{I}(t\wedge\sigma)]=0\,.$$

次に F_0 が特に $\frac{\Delta}{2}q=\lambda q$, $q=0$ on ∂D の固有函数 q に等しいときはやは

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

り確率積分に関する公式を用いて

$$E_x[q(\xi_{t\wedge\sigma})\bar{I}(t\wedge\sigma)]=\lambda\int_0^t E_x[q(\xi_{s\wedge\sigma})\bar{I}(s\wedge\sigma)]\,ds\,.$$

この式より $E_x[q(\xi_{t\wedge\sigma})\bar{I}(t\wedge\sigma)]=0$ を得る。一般の F_0 に対しても F_0 を上のような固有函数 q の一次結合で一様近似することにより $E_x[F_0(\xi_{t\wedge\sigma})\bar{I}(t\wedge\sigma)]=0$ を得る。故に 3° が成り立つ。

以上により条件 (3.1) の下で定理3.1が証明された。なお，この場合には任意の t に対して一組の f, g を用いて定理3.1，b) の表現式が成り立つことが示されるが，あとに必要でないので省略する。

(B) 一般の場合。 有界領域 D を固定し，σ, τ, e_λ, $\bar{e}_\lambda$ を定理2.1の証明における (2.7) と同様に定義する。

$$F_i(x)=[3-3e_\lambda(x)]\wedge i\,,\quad i=1,2$$

とおくと F_i は D でポテンシャルになるから $E_x[\ell_i(\sigma)]=F_i(x)$ をみたす非負 additive functional $\ell_i(t)$, $t<\sigma$, が存在する。(A)によって

$$\ell_i(t)=f_i(\xi_t)-f_i(\xi_0)+I_{g_i}(t),\quad t<\sigma.$$

ところが $F_i(x)=E_x[f_i(\xi_\sigma)]-f_i(x)$ であるから

$$\ell_i(t)=F_i(\xi_0)-F_i(\xi_t)-I_{\mathrm{grad}\,F_i}(t)\,,\quad t<\sigma$$

が成り立つ。次に

$$\begin{cases}\ell=\ell_2-\ell_1\,, & t<\sigma\\ F=1+F_1-F_2, & G=\mathrm{grad}\,F_1-\mathrm{grad}\,F_2\end{cases}$$

とおくと

$$F(\xi_t)-F(\xi_0)=I_G(t)+\ell(t)\,,\ t<\sigma$$

を得る。いま

$$(3.6)\qquad \tilde{\varphi}_t=\varphi(t)F(\xi_t)-\int_0^t\varphi(s)G(\xi_s)\,d\xi_s-\int_0^t\varphi(s)\,\ell(ds)$$

とおくと $\tilde{\varphi}$ は連続な additive functional（ただし $t<\sigma$）になる。このとき次の 4° が容易に示される。

4° $B=\{x\mid e_\lambda(x)\geq\frac{2}{3},\ x\in D\}$，$B'=\{x\mid e_\lambda(x)\geq\frac{1}{3},\ x\in D\}$ とおくと $t<\sigma_{B^c}$ に対して $\tilde{\varphi}(t)=\varphi(t)$ (a.e.)，かつ ξ_t が B' の外部にあるときは $\tilde{\varphi}(t)$ は変化しない。

次に，$\tilde{\varphi}$ に対しては (3.1) が満たされていることを示す。

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

5° $\dot{e}_1(x) = E_x[\exp\{-\max_{0\le t\le\sigma}|\tilde{\varphi}(\sigma)-\tilde{\varphi}(t)|\}] \ge {}^{\exists}c > 0$, $x \in D$

従って特に $\sup_{x\in D} E_x[\{\max_{0\le t\le\sigma}|\tilde{\varphi}(t)|\}^2] < \infty$.

(∵) Tを $e^{-\frac{\lambda T}{2}} < \frac{1}{3}$ となるようにとり

$$\begin{cases} \varphi_T(s) = \varphi(s), & \tilde{\varphi}(s) < T \quad \text{のとき} \\ \qquad = 0 , & \text{そうでないとき} \\ \tilde{\varphi}_T(t) = \varphi_T(t)F(\xi_t) - \int_0^t \varphi_T(s)G(\xi_s)\,d\xi_s & \\ \qquad -\int_0^t \varphi_T(s)\,\ell(ds) = I_1 - I_2 - I_3 . & \end{cases}$$

とおく。ℓ, G の定義と Kolmogorov の不等式などを用いて次の評価を得る。

$$E_x[I_2(\sigma)^2] \le E_x[\int_0^t T^2 G(\xi_s)^2 ds] \le 80T^2$$

(3.7) $$T_x[\max_{0\le t\le\sigma}|I_2(t)| > \frac{9T}{\delta}] \le \delta^2$$

$$E_x[\int_0^\sigma |\varphi_T||d\ell|] \le TE_x[\ell_1(\sigma)+\ell_2(\sigma)] \le 40T .$$

(3.8) $$P_x[\max_{0\le t\le\sigma}|I_3(t)| \ge \frac{40T}{\delta}] \le \delta .$$

明らかに $|I_1| \le T$ であるから (3.7) (3.8) より

$$P_x[\max_{0\le t\le\sigma}|\tilde{\varphi}_T(t)| \ge A] \le \delta + \delta^2, \quad A = T + \frac{49T}{\delta}$$

いままず $e_x(x) \ge \frac{1}{3}$ の場合を考えると定理2.1の証明におけると同様にして

$$P_x[\tilde{\varphi}(\sigma) \ge T] \le \frac{2}{3} + e^{-\frac{\lambda T}{2}}$$

故に $\frac{2}{3} + e^{-\frac{\lambda T}{2}} + \delta + \delta^2 < 1$ を満たすように $\delta > 0$ をとると

$$P_x[\max_{0\le t\le\sigma}|\tilde{\varphi}(t)| \ge A] \le \frac{2}{3} + e^{-\frac{\lambda T}{2}} + \delta + \delta^2 < 1 .$$

これより $\dot{e}_1(x) \ge {}^{\exists}c > 0$, $x \in B'$ を得る。$e_\lambda(x) < \frac{1}{3}$ のときは B' の外部では $\tilde{\varphi}$ は変化しないことに注意すると

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$\dot{e}_1(x) \geq E_x[\dot{e}_1(\xi_{\sigma_{B'}})] \geq c$$

よって 5°が証明された。

5°により(A)が適用出来るから，ある f，g があって $\tilde{\varphi}(t)$ は $t<\sigma$ において

$$f(\xi_t) - f(\xi_0) + I_g(t)$$

に等しい。4°により φ も $t<\sigma_{B^c}$ においては上の式に等しくなる。後は定理2.1の証明の2°と同様な考慮をすることにより定理3.1における B_n の存在がいえる。

（証明終）

§4. Multiplicative functional の表現

M_0 の連続な multiplicative functional α_t で $0<\alpha_t<+\infty$，$E_x(\alpha_t)=1$ を満たすものが与えられたとし α_t の標準的な形を求める。

連続な additive functional φ に対して前同様 $\tilde{\varphi}(t)=\max_{0\leq s\leq t}|\varphi(s)|$ とおく。以下においては，集合 B は次の性質を持つとする。

$$(4.1)\quad \begin{cases} \text{i)} & B \text{ は fine open} \\ \text{ii)} & \tau=\sigma_{B^c} \text{ としたとき } \sup_{x\in B} E_x[\tilde{\varphi}(\tau)^2] < +\infty . \end{cases}$$

補題4.1　φ に対して次のことを仮定する。(4.1) を満たす任意の B に対し $E_x[\varphi(\tau)]=0$，$x\in B$。このとき φ は確率積分で表わせる。

証明　定理3.1の証明(B)と同様にして次のことがいえる。(4.1)を満たす適当な B および B を含む有界領域 D があって，B 内では φ と一致し，$\sup_{x\in D} E_x[\tilde{\varphi}(\sigma)^2]<\infty$ を満たすような additive functional $\tilde{\varphi}(t)$ $(t<\sigma=\sigma_{D^c})$ が存在する。実際，$\tilde{\varphi}$ は (3.6) で与えられる。(3.6) の形を用いると $E_x[\tilde{\varphi}(\sigma)]=0$，$x\in D$ がわかる。故に定理3.1，(A)の証明と同様にして，ある $g_{D,B}$ があって $\tilde{\varphi}(t)=I_{g_{D,B}}$，$t<\sigma$ が成り立つ。この $g_{D,B}$ は D，B には一般に関係するが，B の上では B に無関係なある g と一致する。($\tilde{\varphi}$ と φ とが B の上で一致するから)。この g を用いて $\tilde{\varphi}=I_g$ と表わされる。

（証明終）

定理4.1 (Ventsel[36])．α_t を $0<\alpha_t<+\infty$，$E_x(\alpha_t)=1$ を満たす連続な multiplicative functional とすると

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

(4.2) $$\alpha_t = exp\left\{\sum\int_0^t f^i(\xi_s)\,d\xi_s^i - \frac{1}{2}\sum\int_0^t |f^i(\xi_s)|^2 ds\right\}.$$

証明　$log\,\alpha_t = \varphi_t$ とおき，この φ に対して（4.1）を満たすような集合Bをとる．Jensen の不等式より $exp\,E_x[\varphi(t\wedge\tau)] \leq E_x(\alpha_{t\wedge\tau}) = 1$．故に $u(x) = -E_x[\varphi_\tau]$ $(x\in B)$ とおくと，u は ξ_t を τ で殺したマルコフ過程 $\{\xi_t,\ t<\tau\}$ に関し excessive となる。更に

1° $\{\tau_n\}$ をマルコフ time の列で $\tau_n \uparrow \tau_\infty \leq \tau$ とすると

$$\lim_n E_x[u(\xi_{\tau_n});\ \tau_n<\tau] = E_x[u(\xi_{\tau_\infty});\ \tau_\infty<\tau]$$

が成り立つ。何となれば

$$\begin{aligned} \text{左辺} &\leq \lim_k \lim_n E_x[u(\xi_{\tau_n});\ \tau_k<\tau] \\ &= -\lim_k \lim_n E_x[\varphi_\tau - \varphi_{\tau_n};\ \tau_k<\tau] \\ &= -\lim_k E_x[\varphi_\tau - \varphi_{\tau_\infty};\ \tau_k<\tau] \\ &= -E_x[\varphi_\tau - \varphi_{\tau_\infty};\ \tau_\infty<\tau] = \text{右辺}. \end{aligned}$$

一方，左辺≧右辺は明らかであるから等号が成り立つ。

Shur の定理（[33]，[2] 参照）によって $\{\xi_t,\ t<\tau\}$ の連続な additive functional $\ell_B(t)$ があって $E_x[\ell_B(\tau)] = u(x)$，$x\in B$ が成り立つ．次に，Bを含み（4.1）を満たすような集合をCとすると容易に $E_x[\ell_B(\tau)] = E_x[\ell_C(\tau)]$，$x\in B$ がわかるから ℓ_C はBの上では ℓ_B と一致する。集合Bはどんなにでも大きくとれるから M_0 の連続非負 additive functional ℓ を

$$\ell(t) = \ell_B(t),\quad t<\tau$$

によって定義できる．そして additive functional $\hat{\varphi} = \varphi + \ell$ は補題4.1の仮定を満たすことがわかるから $\varphi = I_g - \ell$ と書ける．したがって次のことを証明すれば定理の証明は完結する．

2° $\ell = \frac{1}{2}\int |g|^2 ds$.

確率微分に関する変換公式により

$$d\alpha_t = \alpha_t g\,d\xi - \alpha_t d\ell + \frac{1}{2}\alpha_t |g|^2 dt.$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

α_t の平均値は 1 であるから $E_x[\int_0^\tau \alpha_t d\ell] = E_x[\int_0^\tau \alpha_t \frac{1}{2}|g|^2 dt]$.

$d\bar{\ell} = d\ell - \frac{1}{2}|g|^2 dt$ とおくと

$$E_x[\{\int_0^\tau \alpha_t d\bar{\ell}\}^2] = 2E_x[\int_0^\tau \alpha_t d\bar{\ell} \int_t^\tau \alpha_s d\bar{\ell}]$$

$$= 2E_x[\int_0^\tau \alpha_t d\bar{\ell}\, \alpha_t E_{\xi_t}\{\int_0^\tau \alpha_s d\bar{\ell}\}] = 0 \qquad \text{（証明終）}$$

§5. Wiener測度と互いに絶対連続な測度をもつマルコフ過程

$M = \{W, \xi_t, \mathcal{B}_t, \widetilde{P}_x\}$ を R^d 上のマルコフ過程とし各 $\mathcal{B}_t$ の上で Wiener 測度 P_x と $\widetilde{P}_x$ とは互いに絶対連続とすると Meyer[23] が subprocess から 1 を越えない *multiplicative functional* を構成した方法と全く同様にして M_0 の平均値 1 の *almost multiplicative functional* α_t を構成して

$$\widetilde{P}_x\{A\} = P_x\{\alpha_t ; A\}, \quad A \in \mathcal{B}_t$$

とできる。$\{\alpha_t, P_x\}$ は *martingale* になるから α_t は右連続の他に左極限をもつ; 同様に *martingale* $\{1/\alpha_t, \widetilde{P}_x\}$ を考えることにより *sample path* $1/\alpha_t$ は有界, 従って α_t は 0 にならない。故に定理 1.1 によって α_t は *multiplicative functional* になる。なお, 次の補題により α_t は (4.2) の形をしていることがわかる。

<u>補題 5.1</u> Brown運動の有限な *additive functional* φ_t が右連続, 左極限（有限）をもてば, 連続である。

<u>証明</u> $\varepsilon > 0$ に対し

$$\tau(w) = \inf\{t > 0 : |\varphi_t(w) - \varphi_{t-}(w)| > \varepsilon\}$$

$$\tau_{n+1}(w) = \tau_n(w) + \tau(w^+_{\tau_n}), \quad n \geq 1$$

とおくと, τ は *quasi-hitting time* になり, 仮定によって $n \uparrow +\infty$ のとき $\tau_n \uparrow +\infty$ (a.e.) が成り立つ。もし, ある x に対して $P_x(\tau < +\infty) > 0$ であれば, 有界領域 D を

$$^{\exists}x \in D, \quad P_x(\tau < \sigma) > 0 \quad (\sigma = \sigma_{\partial D})$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

をみたすようにとることが出来る。$N(w)=max\{n:\tau_n<\sigma\}$ とおくと容易にわかるように

$$\sum_{n=1}^{N(w)} e^{-N(w_{\tau_n}^+)}\left(1-\frac{1}{e}\right)=1-e^{-N(w)} .$$

これより

$$E_x\left[\sum_{\tau_n<\sigma} E_{x_{\tau_n}}(e^{-N})\right]=E_x\left[\sum_{n=1}^{N(w)} e^{-N(w_{\tau_n}^+)}\right]\leq \frac{e}{e-1} .$$

故に

$$\ell_t(w)=\sum_{\tau_n<t} E_{x_{\tau_n}}(e^{-N}),\quad t<\sigma$$

は有限な平均値をもち *jump* だけで増加するクラス(U)の *additive functional* である。*Brown* 運動の場合にはこのような φ は存在し得ない([23])から，$\tau=+\infty$ (a.e.) でなければいけない。これは φ_t が連続であることを意味する。　　　　(証明終)

§6. *Drift* の変換

この§では *drift* の変換で出来るマルコフ過程の *path* がみたす確率微分方程式について，*Girsanov* [9] にしたがってのべる。

定理 6.1 ([9]).　$\{\Omega,\xi_t,\mathcal{F}_t,P\}$ $(0\leq t\leq T)$ を d 次元の *Brown* 運動とし，x_t を確率微分方程式 $dx_t=Ad\xi_t+Bdt$ の解とする。$F=(f^1(x),\cdots,f^d(x))$ を次をみたすような可測なベクトルとする。

1) $\int_0^T |F(x_t)|^2 dt<\infty$ (a.e.)

2) $E[\alpha_0^T]=1$,

ただし

$$\varphi_s^t=\varphi_s^t(F)=\int_0^t F(x_u)d\xi_u-\frac{1}{2}\int_s^t |F(x_u)|^2 du$$

$$\alpha_s^t=\alpha_s^t(F)=exp\ \varphi_s^t(F) .$$

このとき

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$$(6.1)\quad \begin{cases} \tilde{P}(d\omega) = \alpha_0^T(F)\,P(d\omega) \\ \tilde{\xi}(t,\omega) = \xi(t,\omega) - \int_0^t F(x_s)\,ds \end{cases}$$

としたとき $\{\Omega, \tilde{\xi}_t, \mathcal{F}_t, \tilde{P}\}$ は Brown 運動になり

$$dx_t = A\,d\tilde{\xi}_t + (B + AF)\,dt \quad .$$

<u>証明</u>

$$(6.2)\qquad \tilde{E}\left[\tilde{\xi}^i(t) - \tilde{\xi}^i(s) \mid \mathcal{F}_s\right] = 0, \quad s < t$$

$$(6.3)\qquad \tilde{E}\left[(\tilde{\xi}^i(t) - \tilde{\xi}^i(s))(\tilde{\xi}^j(t) - \tilde{\xi}^j(s)) \mid \mathcal{F}_s\right] = (t-s)\,\delta_{ij}\ , \quad s < t$$

を示せば充分である。

<u>補題 6.1</u> $\quad E[\alpha_s^t \mid \mathcal{F}_s] = 1\ , \quad$ a.e.

($\because$) $\quad A_n = \{\omega \mid E(\alpha_s^t \mid \mathcal{F}_s) > 1 + \frac{1}{n}\}$ とすると，$A_n \in \mathcal{F}_s$ で

$$\alpha_s^t(\chi(A_n)F) = 1 + \chi(A_n)\int_s^t \alpha_s^u(F)\cdot F(x_u)\,d\xi_u$$

$$= \chi(A_n)\,\alpha_s^t(F) + 1 - \chi(A_n) \quad .$$

故に

$$1 \geq E\left[\alpha_s^t(\chi(A_n)F)\right] = P(\Omega - A_n) + E\{\alpha_s^t;\ A_n\} > 1 + \frac{1}{n}P(A_n),$$

これより $P(A_n) = 0$, i.e., $E(\alpha_s^t \mid \mathcal{F}_s) \leq 1$ (a.e.). 一方

$B_n = \{\omega \mid E(\alpha_s^t \mid \mathcal{F}_s) \leq 1 - \frac{1}{n}\}$ とおき

$$1 = E(\alpha_0^T) \leq E\left[\alpha_0^s\,E(\alpha_s^t \mid \mathcal{F}_s)\right]$$

に注意すると

$$1 \leq E\left[\alpha_0^s;\ \Omega - B_n\right] + \left(1 - \frac{1}{n}\right)E\left[\alpha_0^s;\ B_n\right]$$

$$= E(\alpha_0^s) - \frac{1}{n}E(\alpha_0^s;\ B_n) \quad .$$

故に $P(B_n) = 0$, i.e., $E(\alpha_s^t \mid \mathcal{F}_s) \geq 1$ (a.e.)

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

補題6.2　　ηを$\mathcal{F}_t$-可測，$\widetilde{E}[|\eta|]<\infty$　とすると

$$\widetilde{E}(\eta|\mathcal{F}_s)=E(\eta\alpha_s^t|\mathcal{F}_s) \qquad a.e.$$

証明略．

(6.2)，(6.3)の証明　　1°．Fが有界のとき。ここでのべる証明は丸山氏による。$G=(g^1(x),\cdots,g^d(x))$を有界可測なベクトルとすると

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\alpha_s^t(F+\varepsilon G)=\left(\int_s^t G\,d\xi_u-\int_s^t F\cdot G\,du-\varepsilon\int_s^t|G|^2du\right)\alpha_s^t(F+\varepsilon G).$$

この式と補題2.1を使って計算すると

$$E\left[\max_{|\varepsilon|\leq\varepsilon_0}\left|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\alpha_s^t(F+\varepsilon G)\right|\right]<\infty \quad .$$

が示される．故に

$$E\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\alpha_s^t(F+\varepsilon G)\middle|\mathcal{F}_s\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}E\left[\frac{\alpha_s^t(F+\varepsilon G+hG)-\alpha_s^t(F+\varepsilon G)}{h}\middle|\mathcal{F}_s\right]$$

$$=0 \qquad \text{（補題6.1による）},$$

$$E\left[\alpha_s^t(F+\varepsilon G)\left(\int_s^t G\,d\xi_u-\varepsilon\int_s^t|G|^2du-\int_s^t F\cdot G\,du\right)\middle|\mathcal{F}_s\right]=0 \quad .$$

上式で　$G=(0,\cdots,0,1\,(i\text{ 番目}),0,\cdots,0)$，$\varepsilon=0$とおくと

$$E\left[\alpha_s^t(F)(\tilde{\xi}^i(t)-\tilde{\xi}^i(s))\middle|\mathcal{F}_s\right]=0, \quad s<t$$

を得るが，これは補題6.2により（6.2）式と同等である。(6.3)の証明も同様な方法で出来るので省略する。

2°．Fが有界でないとき．有界なF_nを

$$\lim_n\int_0^T|F_n(x_t)-F(x_t)|^2dt=0 \qquad (a.e.)$$

をみたすように選ぶと　$\alpha_s^t(F_n)\to\alpha_s^t(F)$ $(n\to\infty,\ in\ prob.)$．
$\alpha_s^t(F_n)$，$\alpha_s^t(F)$は共に非負で平均値が等しい（$=1$）から$\{\alpha_s^t(F_n),n\geq 1\}$は一様可積分になる。故に

$$\lim_n E[|\alpha_s^t(F_n)-\alpha_s^t(F)|]=0 \quad .$$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

F_n に対しても（6.1）式を用いて $\widetilde{P}_n$, $\widetilde{\xi}_n(t)$ を定義すると明らかに $\lim_n \widetilde{\xi}_n(t) = \widetilde{\xi}(t)$ (a.e.). 次に

$$(6.4) \qquad \lim_n E\left[\left|\,|\widetilde{\xi}(t)|^2 \alpha_0^t(F) - |\widetilde{\xi}_n(t)|^2 \alpha_0^t(F_n)\right|\right] = 0$$

を示す。f を R^d 上有界連続とすると

$$\left| E[f(\widetilde{\xi}(t))\alpha_0^t(F)] - \widetilde{E}_n[f(\widetilde{\xi}_n(t))]\right|$$

$$\leq E[|f(\widetilde{\xi}(t)) - f(\widetilde{\xi}_n(t))|\,\alpha_0^t(F)]$$

$$+ E[|f(\widetilde{\xi}_n(t))|\,|\alpha_0^t(F) - \alpha_0^t(F_n)|] \to 0, \quad n \to \infty.$$

ところが，1°で証明したように，$\{\widetilde{\xi}_n(t), \mathcal{F}_t, \widetilde{P}_n\}$ は Brown 運動であるから $f_k(x) = |x|^2 \wedge k$ $(k \geq 1)$ とすると

$$E[|\widetilde{\xi}(t)|^2 \alpha_0^t(F)] = \lim_{k\to\infty} E[f_k(\widetilde{\xi}(t))\alpha_0^t(F)]$$

$$= \lim_k \lim_n \widetilde{E}_n[f_k(\widetilde{\xi}_n(t))] = \widetilde{E}_n[|\widetilde{\xi}_n(t)|^2] = td.$$

即ち非負確率変数 $|\widetilde{\xi}_n(t)|^2\alpha_0^t(F_n)$ およびその平均値がそれぞれ $|\widetilde{\xi}(t)|^2\alpha_0^t(F)$ およびその平均値に収束することになる．故に $\{|\widetilde{\xi}_n(t)|^2\alpha_0^t(F_n),\ n \geq 1\}$ は一様可積分になり（6.4）が成り立つ。（6.4）により

$$\lim_n E\left[\left|(\widetilde{\xi}^i(t)-\widetilde{\xi}^i(s))(\widetilde{\xi}^j(t)-\widetilde{\xi}^j(s))\alpha_0^t(F) - (\widetilde{\xi}_n^i(t)-\widetilde{\xi}_n^i(s))(\widetilde{\xi}_n^j(t)-\widetilde{\xi}_n^j(s))\alpha_0^t(F_n)\right|\right] = 0$$

故に

$$\widetilde{E}[(\widetilde{\xi}^i(t)-\widetilde{\xi}^i(s))(\widetilde{\xi}^j(t)-\widetilde{\xi}^j(s)) \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= E[(\widetilde{\xi}^i(t)-\widetilde{\xi}^i(s))(\widetilde{\xi}^j(t)-\widetilde{\xi}^j(s))\alpha_0^t(F) \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \lim_n E[(\widetilde{\xi}_n^i(t)-\widetilde{\xi}_n^i(s))(\widetilde{\xi}_n^j(t)-\widetilde{\xi}_n^j(s))\alpha_0^t(F_n) \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= (t-s)\delta_{ij}, \quad t > s.$$

（6.2）も同様に出来る．　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

<u>系6.1</u>　§5のマルコフ過程 $\mathbb{M}$ は次の形の確率微分方程式をみたす。

$$dx_t = d\xi_t + g(x_t)\,dt.$$

<u>系6.2</u>　定理6.1の仮定 1)，2) のほかに $QA = F$ をみたすような $Q = (q^1(x),$

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

$\cdots, q^d(x))$ が存在すれば

$$\log \frac{dP^{(\tilde{x})}}{dP^{(x)}}(x(\cdot)) = \int_0^T \sum_i q^i(x_t)\,dx_t^i - \int_0^T \sum_i q^i(x_t)\, b_i(x_t)\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T \sum_i \Big(\sum_j q^j(x_t)\, a_{ij}(x_t)\Big)^2 dt \ .$$

ただし $P^{(x)}$, $P^{(\tilde{x})}$ はそれぞれ $\{x_t, P\}$, $\{x_t, \tilde{P}\}$ を函数空间 W の上で表現したときの確率測度である。

<u>系6.3</u>　$(\det A)^2 \geq {}^\exists c > 0$ で，A, B を有界可測とする。更に $C = (c^1(x), \cdots, c^d(x))$ を有界可測とする。このときもし

$$dx_t = A\,d\xi_t + B\,dt$$

の解が（unique に ── 分布が unique とする ──）存在すれば

$$dx_t = A\,d\xi_t + C\,dt$$

の解も（unique に）存在する。

<u>証明</u>　有界な F があり $C = AF + B$ とかける。この F を用いて（6.1）により $\tilde{P}$, $\tilde{\xi}_t$ を定義すると $\{\tilde{\xi}_t, \mathcal{F}_t, \tilde{P}\}$ は Brown 運動になり

$$\begin{aligned} dx_t &= A\,d\xi_t + B\,dt \\ &= A\,d\tilde{\xi}_t + AF\,dt + B\,dt = A\,d\tilde{\xi}_t + C\,dt\ . \end{aligned}$$

次に $\{x_t, P\}$, $\{x_t, \tilde{P}\}$ を函数空间 W の上で表わしたときの確率測度をそれぞれ $P^{(x)}$, $P^{(\tilde{x})}$ とすると $\log(dP^{(\tilde{x})}/dP^{(x)})$ は系6.2の形にかける。もし $dx_t = A\,d\xi_t + B\,dt$ の解が unique であれば，その unique な解は，逆に $dx_t = A\,d\xi_t + C\,dt$ の解を drift の変換して得られる。それらの分布は系6.1の形の density で結ばれている。故に $dx_t = A\,d\xi_t + C\,dt$ の解の分布も unique にきまる。　　　　（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

引　用　文　献

[1] Iu. N. Blagoveščenskii *and* M. I. Freidlin; *Some properties of diffusion processes depending on a parameter*, D. A. H. No. 3, 138 (1961).

[2] R. M. Blumenthal, R. K. Getoor, H. P. McKean, Jr; *Markov processes with identical hitting distributions*, Ill. J. of Math., 6 (1962), 402-420.

[3] P. Courrége; *Intégrales stochastiques et martingales de carré Intégrable*, Sém. Brelot-Choquet-Deny, (Théorie du Potentiel), 1962/63.

[4] J. L. Doob; *Stochastic processes*, New York, J. Wiley and Sons, 1953.

[5] E. B. Dynkin; *Transformations of Markov processes connected with additive functionals*, Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob., 2 (1961), 117-142.

[6] ―――――; *Markov processes*, 1963.

[7] M. I. Freidlin; *Diffusion processes with reflection and problems with a directional derivative on a manifold with a boundary*, Theory of Prob. and its Appl.

[8] ―――――; *On stochastic equation of Ito and degenerated elliptic equation*, Izv. AH CCCP, cep matem., 5 (1962), 653-676.

[9] I. V. Girsanov; *On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures*, Theory of Prob. and its Appl., 5 (1960), 285-301.

[10] ―――――; *On stochastic integral equations of Ito*, D. A. H. CCCP. 138 (1961), 18-21.

[11] ―――――; *Stochastic equation of Ito and its generalization*.

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

[12] I.V. Girsanov ; *An example of non-uniqueness for solutions of K. Ito's stochastic integral equation*, Teor. Verojat. Primen., (1962).

[13] N. Ikeda ; *On the construction of two-dimensional diffusion processes satistying Wentzell's boundary conditions and its application to boundary value problems*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 33 (1961), 367-427.

[14] 池田信行, 上野 正, 田中 洋, 佐藤健一 ; 多次元拡散過程の境界問題, Sem. on Prob. 5 (1960), 6 (1961).

[15] K. Ito ; *On stochastic differential equations*, Memoirs Amer. Math. Soc., 4 (1951).

[16] ——— ; *Stochastic differential equations in a differentiable manifold*, Nagoya Math. J., 1 (1950), 35-47.

[17] ——— ; *On a formula concerning stochastic differentials*, Nagoya Math. Journ., 3 (1951), 55-65.

[18] ——— ; *Lectures on stochastic processes*, Tata Institute, 1961.

[19] ——— ; 確率論, 岩波, 1953.

[20] P. Lévy ; *Processus stochastique et mouvement Brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1948.

[21] G. Maruyama ; *On the transition probability functions of the Markov processes*, Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ., 5 (1954), 10-20.

[22] ——— ; *Continuous Markov processes and stochastic equations*, Rend. Circ. Math. Palerma., 4 (1955), 1-43.

[23] P. A. Meyer ; *Fonctionelles multiplicatives et additive de Markov*, Ann. Inst. Fourier, 12 (1962), 125-230.

[24] ——— ; *A decomposition theorem for supermartingales*, Illinois J. Math., 6 (1962), 193-205.

[25] ——— ; *Decomposition of supermartingales: The uniqueness theorem*, Illinois J. Math., (   ), 1-17.

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

[26] P. A. Meyer ; *La propriété de Markov forte des fonctionnelles multiplicatives*, Theory of Prob. and its Appl., (1963), 349-356.

[27] M. Motoo ; *Diffusion process corresponding to* $\Delta - \Sigma b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, Ann. Inst. of Stat. Math., 12 (1960), 37-61.

[28] 本尾 実 ; マルコフ過程の *additive functional*, Sem. on Prob. 15 (1963).

[29] Yu. V. Prokhorov ; *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory*, Theory of Prob. and its Appl., 1 (1956), 157-214. (English translation.)

[30] A. V. Skorokhod ; *Additive functionals of Brownian motion*, Theory of Prob. and its Appl., 6 (1961), 430-439.

[31] ―――――― ; *Stochastic equations for diffusion process in a bounded region*, Theory of Prob. Appl., 6 (1961), 287-298 ; 7 (1962), 5-25.

[32] ―――――― ; *Исследования по теории случайных процессов*, Киев, 1961.

[33] M. G. Sur ; *Continuous additive functionals of Markov processes and excessive functions*, D. A. H., CCCP, 137 (1961), 800-803.

[34] H. F. Trotter ; *Approximation of semi-groups of operators*, Pacific Journal of Mathematics, 8 (1958), 887-919.

[35] H. Tanaka ; *Note on continuous additive functionals of 1-dimensional Brownian path*, Z. Wahrschein., 1 (1963), 251-257.

[36] A. D. Ventsel ; *Additive functionals of multidimensional Wiener process*, D. A. H. CCCP, 139 (1961), 13-16.

[37] ―――――― ; *Continuous additive functionals of multidimensional Brownian motion*, D. A. H. CCCP, 142 (1962), 1223-1226.

[38] 渡辺寿夫 ; *Wiener* 空間における積分とその応用, Sem. on Prob., 8 (1961).

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

[39] H. Totoki ; *A method of construction of measures on function spaces and its applications to stochastic processes.* Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 15(1962), 178-190.

Sem. on Probab.
Vol.19 1964年
P1-88

1964. 5. 発行 確率論セミナー