小林真一氏「楕円曲線の岩澤理論の研究」

岩澤理論は, 素数 p を固定して, 代数体の整数環のイデアル類群やさまざまな数論的コホモロジー群などの様子を p 進的な族として研究する理論です．また, ゼータ関数・L 関数のような解析関数の p 進世界での実現である p 進 L 関数の研究, さらには数論的対象物と解析的対象物との間の関係 (岩澤主予想という名前で普通は定式化されます) を研究する理論です．岩澤健吉によって 1950 年代後半に, 代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の中間体におけるイデアル類群の様子が統一的に記述されたのが, 岩澤理論の始まりです．そのときに鍵となったのは, Γ を代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の Galois 群 (したがって Γ は p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ に同型), $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ を Γ の完備群環とするときに, 代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大上の最大不分岐 Abel pro-p 拡大の Galois 群が有限生成ねじれ Λ 加群となることであり, また久保田-Leopoldt の p 進 L 関数が $\mathbb{Z}_p$ 上 1 変数形式冪級数を使って表せる “岩澤関数” となる, ということでした．このとき, 岩澤主予想は, 岩澤加群の特性イデアルが p 進 L 関数で生成されるという形で定式化されます．その後, B. Mazur によって 1970 年代に, 岩澤理論は楕円曲線の数論にも適用できることが示され, 現在にまで続くその後の大発展の基礎が築かれました. Mazur が着目したのは, 有理数体上に定義された楕円曲線 E に対して, E が p で良い通常還元を持つとき, (Mazur によって予想され, 1990 年代に加藤和也によって証明されたように) 円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大上の Selmer 群 (の Pontryagin 双対) は有限生成ねじれ Λ 加群であり, E の p 進 L 関数は岩澤関数となることでした．このことによって岩澤健吉のアイディアが適用でき, 岩澤理論が Birch Swinnerton-Dyer 予想を始めとする楕円曲線の数論に大きく貢献することができるようになりました．E の導手を割らない素数は, 通常還元であるか超特異還元であるかのどちらかです．通常還元の場合と異なり, 超特異還元のときには Selmer 群はねじれ加群とはならず, また p 進 L 関数も岩澤関数になりません．そこで岩澤理論が満足のいく形で定式化できるのは, 21 世紀に入るまでは, 通常還元の場合だけでした．この状況が変わるのは, 小林真一氏の研究が現れてからです．ここでは, 小林氏の 3 つの大きな仕事に関して述べますが, いずれも超特異還元を持つ楕円曲線の岩澤理論に関する非常に重要な結果です.

小林氏は, まず円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対して, 楕円曲線が p で超特異還元を持つとき, 新しい局所条件を導入することにより, 2 つのプラス・マイナス Selmer 群という新しい Selmer 群を導入し, それらが有限生成ねじれ Λ 加群となることを証明しました．そして, 小林氏の研究の直前に発表されていた R. Pollack のプラス・マイナス p 進 L 関数という岩澤関数を用いて, 岩澤主予想を, イデアル類群に対する古典的岩澤主予想と同じ形で定式化することに成功しました．こうして, 長い間よくわからないとされてきた, 超特異還元を持つ素数に対する岩澤理論の基礎が築かれました. 実際, この小林氏の定式化は, その後のこの理論の方向を決定づけるきわめて重要な仕事であり, 現在までに発表された超特異還元の岩澤理論に関する論文は, ほとんどすべて小林氏の論文を引用しています．最近の X. Wan の研究により, この予想はかなりの場合に証明できるようになりました．また最近, 小林氏のプラス・マイナス Selmer 群の類似が虚 2 次体上やさまざまな方面で研究され, 大きく発展していますが, このような活発な研究すべての基礎に小林氏の研究があることが, 現在から見ると, はっきりわかります.

次に小林氏が得た重要な結果は, 超特異還元を持つ素数に対する p 進 Gross Zagier 公式です. 複素 L 関数に対しては, L 関数が $s = 1$ で零点を持つときに, その $s = 1$ での微分の値を Heegner

点の高さを用いて表す公式が, Gross と Zagier によって証明され, Gross Zagier 公式と呼ばれます. p 進 L 関数に対する Gross Zagier 公式の類似は, Heegner 点の p 進高さを用いた公式で, p が通常還元素数の場合に, Perrin-Riou によって得られました. しかしながら, 超特異還元素数 p に対する p 進 Gross Zagier 公式は, 様相が通常還元のときと大きく異なり, 多くの研究者が挑戦していましたが, 成功には至りませんでした. 小林氏は, ある種の 2 変数 p 進 L 関数を導入するなど, 新しいアイディアを用いて, 楕円曲線が p で超特異還元を持つときにも p 進 Gross Zagier 公式を証明することに成功しました. このような重要な公式は, きわめて多くの応用を持ちますが, 特筆すべき最初の応用は, Birch Swinnerton-Dyer 予想への応用です. Birch Swinnerton-Dyer 予想は L 関数の $s = 1$ での零点の位数が Mordell Weil 群の階数に等しいという位数についての予想に加えて, $s = 1$ での Taylor 展開の先頭項が数論的な量で記述されることを予想します. 後者については, 位数が 0 のときは, 各素数成分のごとに岩澤主予想が役に立ちますが, 位数が 1 のときは岩澤主予想に加えて Gross Zagier 公式が必要になります. 小林氏は自身の p 進 Gross Zagier 公式を用いて, 複素 L 関数が $s = 1$ で位数 1 の零点を持つときに, 先頭項に関する Birch Swinnerton-Dyer 予想を, (いくつかの条件の下に) 導手を割る素数成分を除いて証明するという大きな成果をあげました.

最後に, 小林氏は最近, 一般 Heegner サイクルを用いた反円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大上の保型形式の岩澤理論において, 大変すぐれた仕事をされています. 特に, 一般 Heegner サイクルがなすノルム関係式は, 通常還元でない場合は扱いが難しく, 今まで分母を許さざるを得なかったのですが, 小林氏は Perrin-Riou twist の理論という新しい理論を構成して, 分母の出ない整的な理論を構成しています. この理論も応用範囲が広く, これからさまざまな発展が期待できる理論です.

以上述べて参りましたように, 小林真一氏は, 超特異還元を持つ素数に関する岩澤理論において, 突破口を切り開き, 新理論の基礎となる重要な結果を数多く得てきました. 小林氏の研究は, 世界的に有名で, 高く評価されており, 代数学賞を受賞するに, まことにふさわしい研究です.