極小モデル理論と拡張定理

権業善範 *

東京大学大学院数理科学研究科

1 準備

この報告集では, ネフ (nef) や巨大 (big) などの基本的な用語は [KoM] または [KaMM] に従って用いる. また全て複素数体上の仕事である. 特に対数的特異点解消と対の特異点に関して, 次のような用語を用いる.

定義 1.1. 対数的対 (X, Δ), すなわち, 正規多様体 X と有効 $\mathbb{Q}$-ヴェイユ因子 Δ で, $K_X + \Delta$ が $\mathbb{Q}$-*Cartier* になる対, に対して その**対数的特異点解消** $\varphi : Y \to X$ とは, 次を満たすものである.

(1) Y は非特異多様体,

(2) φ は射影的双有理射,

(3) φ の例外集合 $\mathrm{Ex}\,\varphi$ が因子の和集合であり, $\mathrm{Ex}\,\varphi \cup \mathrm{Supp}\,\varphi_*^{-1}\Delta$ は単純正規交差, ここで $\varphi_*^{-1}\Delta$ は Δ の φ による Y 上の厳密変換である.

定義 1.2. 対数的対 (X, Δ) で Δ の係数が全て 1 以下なものに対して, その対数的特異点解消を $\varphi : Y \to X$ とする. 対数的標準束公式を次のように書く.

$$K_Y + \varphi_*^{-1}\Delta = \varphi^*(K_X + \Delta) + \sum a_i E_i,$$

ここで E_i は Y 上の φ-例外素因子である. このとき,

(1) もし, すべての i に対して $a_i > -1$ が成り立ち, かつ Δ の係数が 1 未満のとき, 対 (X, Δ) は**川又対数的端末 (klt) 対**であるといい,

(2) もし, すべての i に対して $a_i > -1$ が成り立ち, 対 (X, Δ) は**因子的対数的端末対 (dlt)** であるといい,

(3) もし, すべての i に対して $a_i \geq -1$ が成り立つとき, 対 (X, Δ) は**対数的標準 (lc) 対**であるという.

*gongyo@ms.u-tokyo.ac.jp

2　アバンダンス予想について

次の予想がアバンダンス予想と呼ばれる.

予想 2.1 (アバンダンス予想)**.** 対 (X,Δ) を射影的対数的標準対とする. このとき $\nu(K_X+\Delta)=\kappa(K_X+\Delta)$ が成り立つ. さらに, もし $K_X+\Delta$ がネフの時, それは半豊富である.

ここで, $\mathbb{Q}$-カルティィエ因子 D が**半豊富**とは, 十分割り切れる自然数 $m>0$ に対して完全線形系 $|mD|$ が固定点自由である時を言う.

擬有効 (pseudo-effective) 因子 D と豊富因子 A に対して,

$$\nu(A,D)=\max\{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}|\limsup_{m\to\infty} m^{-k}\dim H^0(X,\llcorner mD\lrcorner+A)>0\},$$

$$\nu(D)=\max\{\nu(A,D)|A \text{ is ample}\}$$

と定義する. 擬有効でない因子 D に対しては $\nu(D)=-\infty$ と定義する. 注意としては, $\nu(D)$ は [N] の中では, $\kappa_\sigma(D)$ という記号が使われている.

予想 2.1 は極小モデル理論においてとても重要な予想である. 実際, 川又対数的端末対の擬有効対数的標準因子 $K_X+\Delta$ に対して, $\nu(K_X+\Delta)=\kappa(K_X+\Delta)$ が成り立つなら, (X,Δ) の極小モデルの存在が従う (cf. [GL], [DHP, Remark 2.6]).
とくに, 次元による帰納法を行っている場合では, 極小モデルの存在は, 実際は次の非消滅予想から従う (cf. [B], [G4], [DHP, Section 8]).

予想 2.2 (非消滅予想)**.** 非特異射影多様体 X に対して, 標準因子 K_X が擬有効ならば, $\kappa(K_X)\geq 0$.

まず, 3 次元以下の予想 2.1 は, 藤田氏, 川又氏, Kollár 氏, 森氏, 宮岡氏, Shokurov 氏らを始めとする様々な人らの貢献により肯定的に知られている. 一般次元では, $\Delta=A+B$ と書け, A が豊富かつ B が有効因子ととれる因子的対数的端末対 (X,Δ) に対しては, [BCHM] により予想 2.1 が成立することが知られている. さらに, $\nu(K_X+\Delta)=0$ の場合も知られている ([N], [G3, Theorem 1.2], [Ka2], [CKP]).

次に半対数的標準対に対する予想 2.1 を考える. ここで**半対数的標準対**は次のような定義である.

定義 2.3. 純 d 次元被約 S_2-スキーム X と, その上の $\mathbb{Q}$-係数有効ヴェイユ因子 Δ について, $\mathbb{Q}$-係数ヴェイユ因子 $K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-カルティィエ因子であるとする. さらに X が余次元 1 で正規交叉を仮定する. 既約分解を $X=\bigcup X_i$ とする. 正規化を $\nu: X':=\coprod X'_i\to X=\bigcup X_i$ とする. ここでいう正規化とは各既約成分を正規化をして非交和をとったものをさす. スキーム X' 上の $\mathbb{Q}$-因子 Θ を $K_{X'}+\Theta:=\nu^*(K_X+\Delta)$ を満たす因子として定義する, そして $\Theta_i:=\Theta|_{X'_i}$ をおく. この対 (X,Δ) が**半対数的標準対** (略して, **slc 対**) とは, (X'_i,Θ_i) は lc を満たすときをいう.

さらに, 我々は slc 対に対する予想 2.1 は, 対数的標準因子がネフである場合のみを考えるのが妥当である. なぜなら, Kollár 氏による標準環が有限生成でない極小でない半対数的標準曲面の例 [Ko, Proposition 1] が存在する. 実は, この例は slc 対に対する極小モデルの存在は通常の意味では期待できないことを示唆している. したがって slc 対に対するアバンダンスはネフを仮定する. 以下が [FG] の主定理の一つである:

定理 2.4. 対 (X,Δ) を射影的半対数的標準対とする．$\nu:(X'\Theta)\to(X,\Delta)$ を定義 *2.3* に現れる正規化とする．このとき，もし $K_{X'}+\Theta$ が半豊富なら，$K_X+\Delta$ も半豊富である．

この定理は藤野の貼合わせ理論 [F1] と [BCHM] を組み合わせて得られるが, 鍵となるのが対数的多重標準表現の有限性である．論文以外の詳しい記事で日本語で読める文献として, [藤] と [權] があるのでこれの詳細についてはそちらに譲る.

3 ひとつのアプローチ

まずアプローチ一つ目の説明を行う．これは 3 次元の場合の証明の一般化として捉えられるが一般次元ではリーマン・ロッホを用いたテクニックがうまくいかないのでその辺をクリすることが課題となる．予想 2.1 を証明するために次の 3 つが鍵と思わている.

1. lc center の構成法,
2. 拡張定理の一般化, そして,
3. 既約の場合のアバンダンス予想から可約の場合のアバンダンス予想を導くこと.

定理 2.4 はこの 3. が完全に解決したことになる.
具体的に, 今, $n-1$ 次元までの予想 2.1 と予想 2.2 を認めて n 次元非特異多様体 X に対して予想 2.1 の証明を試みよう．実はこの予想 2.2 が最も難しいところであると思われている.

例 3.1. まず，n 次元非特異射影多様体 X に対して，予想 *2.2* からある有効因子 D が存在して，$D\sim_{\mathbb{Q}}K_X$ がわかる．また *[Ka1, Theorem 7.3]* より，$\kappa(K_X)=0$ としてよい．さらに対数的特異点解消をとることで, $\operatorname{Supp}D$ は単純正規交差であるとしてよい．今 $D=\sum_i a_iD_i\,(a_i>0)$ と書く．さらに $\Delta=\sum_i D_i$ とする．このとき, (X,Δ) は因子的対数的端末対であり，$\kappa(K_X+\Delta)=0$ はすぐにわかる．実は,

$$0\le\nu(K_X)\le\nu(K_X+\Delta)$$

より，この $\nu(K_X+\Delta)=0$ がチェック出来れば十分である．ここがいわゆる，*1.* のステップである．*[B]* より今の仮定の下では極小モデルの存在が自由に使える *(cf. [G4], [DHP, Section 8])*. 従って, 対 (X,Δ) の極小モデル $f:X\dashrightarrow Y$ が存在する．今，$f_*(K_X+\Delta)\sim_{\mathbb{Q}}0$ が成り立つとする．このとき $\nu(K_X+\Delta)=0$ は直ちに従う．従って，$f_*D\neq0$ としてよい．今 Δ の構成から, $\operatorname{Supp}\Delta=\operatorname{Supp}D$ である．記号を $S=f_*\Delta$ と置くと，$S\neq0$ かつ，K_Y+S がネフとなる．随伴公式より，$(K_Y+S)|_S=K_S+\Delta_S$ が成り立つ Δ_S が構成できる．ここで現れる (S,Δ_S) が，*slc* 対である．ここを直接既約にする程の自由度は，今，この X は持っていない．ステップ *2* のセクションの拡張，すなわち十分割り切れる大きな整数 m に対して,

$$H^0(Y,m(K_Y+S))\to H^0(S,m(K_S+\Delta_S))$$

が全射であることが期待できる *(*実際，(S,Δ_S) が既約 *klt* 対の場合は大沢・竹腰の拡張定理の応用により証明できる *cf. [DHP])*. 今，$n-1$ 次元までの予想 *2.1* の仮定から，(S,Δ_S) の各成分上では，$K_S+\Delta_S$ は半豊富はわかる．ここでステップ *3.* の $K_S+\Delta_S$ は S 上半

豊富か？という問題になる．しかし，ここは定理 *2.4* により，$K_S + \Delta_S$ は半豊富．従って，$\kappa(K_Y + S) = 0$ かつ

$$\mathrm{Supp}\, S = \mathrm{Supp}\, f_* D = \mathrm{Supp}\, f_*(D + S)$$

なので，

$$H^0(Y, m(K_Y + S)) \to H^0(S, m(K_S + \Delta_S))$$

はゼロ射のはずである．これは矛盾であり，$f_* D = 0$ であることがわかる．注意としては，川又の固定点自由化定理や *[BCHM]* のような設定の元で S の作り方に自由度があったので，(S, Δ_S) が *klt* にとれた．従って，定理 *2.4* のような定理が必要なかった．

4　拡張定理

この章は松村慎一氏との共同研究についての説明にあてる．メインの問題は *2* 章のなかでのアプローチの *2.* の拡張定理の確立である．より具体的に次の予想を扱う*:*

予想 4.1. 対 (X, Δ) を射影的 *Dlt* 対とする．ある有効 $\mathbb{Q}$ 因子 D が存在して $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} D$ と仮定する．さらに，$S := \lfloor \Delta \rfloor \subseteq \mathrm{Supp}\, D$ を仮定する．このとき $K_X + \Delta$ が *nef* ならば十分大きい自然数 m について S への制限写像

$$H^0(X, m!(K_X + \Delta)) \to H^0(S, m!(K_X + \Delta))$$

が全射である．

結論から言うと論文 *[GM]* で上の予想の部分的な結果を得た*:*

定理 4.2. 予想 *4.1* は次の下でなりたつ．自然数 l を $l(K_X + \Delta)$ が *Cartier* になるものとする．ある対数的特異点解消 $\varphi : Y \to X$ と $\varphi^*(l(K_X + \Delta))$ 上に非負な特異計量 h が存在し，h の *Lelong* 数が Y 上の各点で 0 である．

ここで定理に用いた用語の説明をする．

定義 4.3. 複素多様体 X に対して，X 上直線束 L 上の特異計量 h とは，ある L 上のエルミート計量 g と X 上の局所 L^1 関数 ϕ が存在して $h = g \cdot e^{-\phi}$ となるもののことである．特異計量 h が非負とは，その曲率

$$\sqrt{-1}\Theta_h(F) := \sqrt{-1}\Theta_g(F) + dd^c\phi,$$

は *(1,1)-current* の意味で非負を意味する．ここで ϕ はただの局所 L^1 関数なので $dd^c\phi$ は超関数の意味での微分であり，$\sqrt{-1}\Theta_g(F)$ は g のチャーン曲率である．

定義 4.4. 複素多様体 X 上の直線束と非負な特異計量 $(L, h = g \cdot e^{-\phi})$ と X 上の閉点 x に対して，*Lelong* 数

$$l(\phi, x) := \liminf_{z \to x} \frac{\phi(z)}{\log |z - x|}$$

と定義する．

実際この *Lelong* 数が X 上の各点で 0 という条件以下の乗数イデアル層を用いた同値条件で表される:

命題 4.5 (スコダの補題)**.** 複素多様体 X 上の直線束と非負な特異計量 $(L, h = g \cdot e^{-\phi})$ と X 上の閉点 x に対して, 条件 $l(\phi, x) = 0$ と任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathcal{I}(h^m)_x \simeq \mathcal{O}_{X,x}$$

が成り立つことは同値である.

実際, 定理 *4.2* は次の乗数イデアル層が絡まった松村の単射性定理 *[M, Theorem 1.3]* を対数化することにより得られる. ちなみに松村の単射性定理の h が非特異の時はオリジナルの榎の単射性定理 *[En]* で h が高々解析的特異点を持つの場合は藤野の単射性定理 *[F2]* である.

定理 4.6 (松村の単射性定理)**.** コンパクトケーラー複素多様体 X とその上の直線束と非負な特異計量 $(L, h = g \cdot e^{-\phi})$ に任意の $a \in \mathbb{N}$ と任意の非零切断 $s \in H^0(X, L^a)$ で $\sup_X |s|_{h^a} < \infty$ をみたすものに対して次の射

$$\cdot \otimes s : H^q(X, K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) \to H^q(X, K_X \otimes L^{a+1} \otimes \mathcal{I}(h^{a+1}))$$

が *well-defined* かつ単射である.

したがって問題はどうやって定理 *4.2* の仮定を満たす計量を作るか？という問題になる.

5 特異葉層構造を用いたアプローチ

この章で, *[S]* の論文におけるシウのアプローチのギャップおよび問題点について筆者の理解の下で議論する. この章でのアプローチは前章までとは毛色が異なる. まずシウのアプローチは次である. これはおそらく *[T]* で辻元氏が暗に提案しているという雰囲気もある. ちなみにこの方向で, 葉層構造を用いないで代数的な有理写像のみを考えてアプローチし問題点をあぶりだしたのが論文 *[GL]* である. シウのアプローチは次の様なものである. 用いる特異葉層構造 F はエッケルの数値的自明葉層構造というものである *[Ec]*. これは一般の擬有効直線束に定義される.

1. $\nu(K_X) = 0$ のときの解決
2. F が代数的であることを示す.

これでできるというわけだが, まず一つずつ見ていく. この葉層構造が存在するのは問題ないだろう. この葉層構造の葉の閉包が全空間 X と一致する場合, 特に代数的だが, この場合は数値的小平次元 $\nu(K_X) = 0$ は問題ない. そしてその場合はアバンダンス予想は *1* 章で述べたように証明できている. さて次のエクストリーマルな場合の一般葉が閉点の場合, この場合 K_X は巨大か?という問題にぶちあたる. これはかなり微妙であるといわざる得ない. すくなくともこの時点でエッケルの数値的自明葉層構造をみるだけで証明できるとは思えない. また F の代数性の証明であるが, シウの証明には次の問題点があるように思える. 数体上の多様体に対してはあるが, F の代数性を証明するために *Bost* による次の定理がある:

定理 5.1 ([Bo, Theorem 2.1])**.** *数体上定義された非特異射影代数多様体上の特異葉層構造 F に対して, 次の条件をみたすとする:*

a. (p-閉性) F の一般正標数還元 F_p について, $(Fr^*)F_p \subseteq F_p$ をみたす. $Fr : X_p \to X_p$ は X の正標数還元 X_p の (絶対的) フロベニウス写像である,

b. (リュービル条件) F の一般葉上の有界多重劣調和関数は定数である.

このとき F は代数的である.

シウが証明しようとしているのは上の $b.$ の条件をネヴァリンナ理論を用いて示そうというものである. それがうまく回っているかは著者には不明である. それだけでも確かめるのは十分に価値があると思われる. また上の定理が数体上だけでなくて, 任意の正標数還元をとる基礎体に拡張できるか?といのも興味深い問題である.

とりあえず数体上に限り, この方針において何をすればよいかをもう一度羅列する.

(1) F の一般葉が閉点の時に, K_X が巨大であることを示す.

(2) F が代数的であることを示すために, p-閉性およびリュービル条件を示す.

確かにこの二つができるなら, 証明可能でありそうである.

さてここから *(1)* に関連して次の葉層構造を考えることを提案してこの報告集を終わりにしようと思う. 任意のコンパクトケーラー多様体上にはケーラー計量から誘導されて断面曲率 $\mathcal{S}$ というものが定義される. $(1,1)$-形式 S を考えそれに付随する葉層構造を考える. その葉が閉点ならば K_X が巨大であることを示せばよい. これは次の *Wu–Yau* の定理 *(Yau* 予想と呼ばれていたもの*)* の巨大版である.

定理 5.2 ([WY1])**.** *非特異射影多様体 X に対して断面曲率 $\mathcal{S}$ が各点で負ならば K_X は豊富である.*

そこで巨大版の予想は以下である.

予想 5.3. *非特異射影多様体 X に対して断面曲率 $\mathcal{S}$ がほとんどいたるところな点で negative ならば K_X は巨大である, ここでほとんどいたるところとはあるルベーグ測度 0 集合を除いた全てという意味である.*

ただし, もし断面曲率 $\mathcal{S}$ が *semi-negative* の場合は, ある一点で *negative* なら K_X は *ample* になるという. 上に関連して非常に興味深い *([DP], [WY2]).*

6 謝辞

今回, この盛大なる第 61 回代数学シンポジウムでの講演の機会をくださった代数幾何班のオーガナイザーの寺杣友秀先生、加藤文元先生, 吉岡康太先生および会場責任者の宮崎誓と寺井直樹先生に感謝しています. 筆者は JSPS から 科学研究補助金若手 (A) ♯26707002 からの補助を受けています.

参考文献

[B] C. Birkar, On existence of minimal models II, preprint, J. Reine Angew Math. **658** (2011), 99-113.

[BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon and J. M^{c}Kernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 405-468.

[CKP] F.Campana, V. Koziarz and M. Păun, Numerical character of the effectivity of adjoint line bundles, preprint, Ann. Inst. Fourier **62** (2012), no. 1, 107–119.

[Bo] J. B. Bost, Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields., Publ. Math. Inst. Hautes E'tudes Sci. **93** (2001), 161–221

[DHP] J-P. Demailly, C. Hacon, and M. Păun, Extension theorems, Non-vanishing and the existence of good minimal models, Acta Math. **210** (2013) 203–259.

[D] S. Druel, Quelques remarques sur la décomposition de Zariski divisorielle sur les variétés dont la premiére classe de Chern est nulle, Math. Z., 267, 1-2 (2011), p. 413-423.

[Ec] T. Eckl, Numerically trival foliations, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no. 4, 887–938.

[En] I. Enoki, *Kawamata-Viehweg vanishing theorem for compact Kähler manifolds*, Einstein metrics and Yang-Mills connections (Sandai, 1990), 59–68.

[DP] S. Diverio and S. Trapani, Quasi-negative holomorphic sectional curvature and positivity of the canonical bundle, arXiv:1606.01381.

[F1] O. Fujino, Abundance Theorem for semi log canonical threefolds, Duke Math. J. **102** (2000), no. 3, 513–532.

[F2] O. Fujino, *A transcendental approach to Kollár's injectivity theorem*, Osaka J. Math. **49** (2012), no. 3, 833–852.

[藤] 3次元半ログ標準多様体のアバンダンス定理, 代数幾何学城崎シンポジューム報告集 p1–p7 (1999), http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/253/

[FG] O. Fujino and Y. Gongyo, Log pluricanonical representation and abundance conjecture, Compositio Math. **150**, No.4, (2014) 593–620.

[G1] Y. Gongyo, On weak Fano varieties with log canonical singularities, J. Reine Angew. Math. **665** (2012), 237–252.

[G2] Y. Gongyo, Abundance theorem for numerically trivial log canonical divisors of semi-log canonical pairs, J. Algebraic Geom. **22** (2013), 549–564.

[G3] Y. Gongyo, On the minimal model theory for dlt pairs of numerical log Kodaira dimension zero, Math. Res. Lett. **18** (2011), no. 5, 991–1000.

[G4] Y. Gongyo, Remarks on the non-vanishing conjecture, Adv. Stud. Pure Math., **65**, 2015, Algebraic geometry in East Asia—Taipei 2011, 107–116.

[權] The abundance conjecture and its applications, 代数幾何学城崎シンポジューム報告集 (2011).

[GL] Y. Gongyo and B. Lehmann, Reduction maps and minimal model theory, Compositio Math. **149**, No.2, (2013) 295–308.

[GM] Y. Gongyo and S. Matsumura, Versions of injectivity and extension theorems, to appear in the Annales scientifiques de l'ENS.

[HX] C. Hacon, C. Xu, On Finiteness of B-represention and Semi-log Canonical Abundance, Minimal models and extremal Rays (Kyoto, 2011), 361–378, Adv. Stud. in Pure Math 70, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2016.

[Ka1] Y. Kawamata, Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties. Invent. Math. **79** (1985), no. 3, 567588.

[Ka2] Y. Kawamata, On the abundance theorem in the case of $\nu = 0$, Amer. J. Math. Volume **135**, Number 1, (2013), 115–124.

[KaMM] Y. Kawamata, K, Matsuda and K, Matsuki, *Introduction to the minimal model problem*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, 283–360, Adv. Stud. Pure Math., **10**, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[Ko] J. Kollár, Two examples of surfaces with normal crossing singularities, arXiv:0705.0926.

[KoM] J. Kollár and S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math. **134** (1998).

[M] S. Matsumura, An injectivity theorem with multiplier ideal sheaves of singular metrics with transcendental singularities, to appear in Journal of Algebraic Geometry.

[N] N. Nakayama, *Zarisiki decomposition and abundance*, MSJ Memoirs, 14. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.

[S] S-T. Siu, Abundance conjecture, Geometry and analysis. No. 2, 271–317, Adv. Lect. Math. (ALM), 18, Int. Press, Somerville, MA, 2011.

[T] H. Tsuji, Numerical trivial fibrations, arXiv:math/0001023v6

[WY1] D. Wu, S-T. Yau, Negative Holomorphic curvature and positive canonical bundle, Invent. Math., **204** (2):595–604, 2016.

[WY2] D. Wu, S-T. Yau, A remark on our paper "Negative Holomorphic curvature and positive canonical bundle", arXiv:1609.01377